

П. В. Грес

Математика для гуманитариев

Учебное пособие

МОСКВА
«ЮРАЙТ»
2000

УДК 51(075.8)
ББК 22.11я73
Г80

Ответственный редактор

член-корреспондент АТР, доктор технических наук, профессор *В.И. Котоков*

Рецензенты:

кафедра «Высшая математика» Сибирского государственного университета путей сообщения (зав. кафедрой доктор физико-математических наук, профессор *Ю.И. Соловьев*)

доктор физико-математических наук, профессор *А.В. Пожидаев*

доктор исторических наук, профессор, главный научный сотрудник Института истории СО РАН *М.М. Ефимкин*

Грес П.В.

Г80 Математика для гуманитариев: Учебн. пособие. — М.: Юрайт, 2000. — 112 с.
ISBN 5 85294 091 7

Пособие составлено с учетом требований Государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования по математике для студентов гуманитарных вузов и факультетов.

Изложение отличается компактностью с сохранением необходимой строгости, детальной проработкой узловых понятий, алгоритмичностью. Даны основные определения и методы, примеры решения типовых задач. Упражнения и индивидуальные задания могут использоваться при самостоятельной работе студентов.

Пособие написано на основе практических занятий и лекций, читавшихся автором в течение нескольких лет студентам юридического и психолого-педагогического факультетов Новосибирского гуманитарного института.

Для преподавателей и студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям и специальностям: «Юриспруденция», «Психология», «Философия», «Социология», «Социальная работа», «История», «Политология», «Культурология», «Филология», «Журналистика», «Лингвистика», «Связи с общественностью», «Искусство», «Кингвуденштейн», «Физическая культура», «Коммерция», «Менеджмент» и т.д.

УДК 51(075.8)
ББК 22.11я73

ISBN 5-85294-091-7

© П.В. Грес, 1999
© ООО «Юрайт», 2000

*Многие вещи нам непонятны не потому, что наши понятия слабы;
но потому, что эти вещи не входят в круг наших понятий.*

Козьма Прутков

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математика. Это слово, конечно, греческого происхождения: μαθημα — «учение», «наука» — в свою очередь, происходит от глагола, первоначальное значение которого — «учусь через размышление». Термин, таким образом, категорически отбрасывал учение путем опыта.

В принципе математику можно рассматривать как разновидность уточненной, усовершенствованной логики. Замечательно, что, построив правила этой логики и выучив их, человек получил орудие гораздо более мощное, чем обыкновенный «здравый смысл», основанный на традиционной, «домашней» логике. Тенденция ко все большей общности сопровождается ростом требований, предъявляемых к логической строгости. Однако в заботе о логической безупречности легко хватить через край, заменив словесные рассуждения потоком логических символов и слепым применением стандартных приемов. В этом направлении можно далеко зайти и вместо того, чтобы углубить понимание, наистрога его утратить.

В настоящее время наблюдается разделение культуры на гуманитарную и естественно-научную. Такое разделение можно считать искусственным.

"Гуманитарное" преподавание математики невозможно без изучения ее истории. Сюда входят и краткие сведения о возникновении тех или иных математических понятий, биографические сведения о выдающихся математиках, знакомство с историей возникновения математических идей, с историей математических открытий.

Другая сторона математического образования — изучение приложений математики. В настоящее время создается система примеров и задач, ориентированных на гуманитарные приложения.

Гуманитарный потенциал математики раскрывается по ряду направлений:

1. Математика изучает математические модели реальных процессов, математические модели описываются на математическом языке. Человек, владеющий математическим языком, способен глубже проникнуть в суть

реальных процессов, правильно ориентироваться в окружающей действительности.

2. Математика "ум в порядок приводит". Общеизвестно влияние математики на формирование мышления и личностных черт человека.

3. Человек, формулирующий математическое утверждение, проводящий математическое доказательство, оперирует не обыденной, а предметной речью, строящейся по определенным законам (краткость, четкость, лаконичность, минимизация и т.д.). Предметная речь оказывает существенное влияние и на развитие обыденной (литературной) речи.

4. Изучая математику, человек постоянно осознает свое развитие, свое "поумнение". Осознанность процесса обучения — один из краеугольных принципов теории развивающего обучения. Если взять за основу пять дидактических принципов теории развивающего обучения — обучение на достаточно высоком уровне трудности, быстрый темп обучения, приоритет теории, дифференцированный подход к учащимся плюс упомянутый выше принцип осознанности процесса обучения, то нетрудно убедиться, что обучение математике наиболее адекватно соответствует системе этих принципов.

Математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую фундаментальной подготовки бакалавра. Обусловлено это тем, что математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но также и элементом общей культуры.

Современная математика в сочетании с информатикой и ЭВМ становится как бы междисциплинарным инструментарием, который выполняет две основные функции: первую — обучающую специалиста-профессионала умению правильно задавать цель тому или иному процессу, определить условия и ограничения в достижении цели, вторую — аналитическую, т.е. «проигрывание» на моделях возможных ситуаций и получение оптимальных решений.

Одной из основных целей курса "Математика" является развитие мышления, прежде всего формирование абстрактного мышления, способности к абстрагированию, и умения "работать" с абстрактными, "неосязаемыми" объектами. В процессе изучения математики в наиболее чистом виде может быть сформировано (теоретическое, дедуктивное) мышление, алгоритмическое мышление, мышление в терминах мышления, такие, как сила и гибкость, конструктивность и критичность и др. Эти качества мышления сами по себе не связаны с каким-либо математическим содержанием и вообще с математикой, но обучение математике вносит в их формирование важную и специфическую роль, которую не может

быть эффективно реализована даже всей совокупностью остальных дисциплин.

В то же время конкретные математические знания, лежащие за пределами, условно говоря, арифметики натуральных чисел и первичных основ геометрии, не являются "предметом первой необходимости" для большинства людей и не могут поэтому составлять целевую основу обучения математике как предмету общего образования.

Именно поэтому в качестве основополагающего принципа математического образования в аспекте "Математика для гуманитариев" на первый план выдвигается принцип приоритета развивающей функции в обучении математике. Иными словами, обучение математике ориентировано не столько на собственно математическое образование, в узком смысле слова, сколько на образование с помощью математики.

В соответствии с этим принципом главной задачей обучения математике становится не изучение основ математической науки как таковой, а общинтеллектуальное развитие – формирование у студентов в процессе изучения математики качеств мышления, необходимых для полноценного функционирования человека в современном обществе, для динамичной адаптации человека к этому обществу.

С точки зрения приоритета развивающей функции, конкретные математические знания в аспекте "Математика для гуманитариев" рассматриваются не столько как цель обучения, сколько как база, "полигон" для организации полноценной в интеллектуальном отношении деятельности. Для формирования личности, для достижения высокого уровня его развития именно эта деятельность, как правило, оказывается более значимой, чем те конкретные математические знания, которые послужили ее базой.

И еще одно важное обстоятельство, присущее именно математике: она воспитывает такой склад ума, который требует критической проверки и логического обоснования тех или иных положений и точек зрения. Элемент сомнения — это здоровое рациональное зерно, присущее процессу математического мышления — нигде и никогда не мешает любому профессионалу.

Из Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования

(направления: юриспруденция; психология; социология, социальная работа, философия, коммерция, экономика, менеджмент и т.п.):

*бакалавр должен иметь представление
(в области математики и информатики):*

- о месте и роли математики в современном мире, мировой культуре и истории;
- о математическом мышлении, индукции и дедукции в математике, принципах математических рассуждений и математических доказательствах;
- о логических, топологических и алгебраических структурах на множестве;
- о неевклидовых геометрических системах;
- о математическом моделировании;
- об информации, методах ее хранения, обработки и передач;
- о проблеме искусственного интеллекта, способах представления знаний и манипулировании ими (об инженерии знания);
- о роли математики и информатики в гуманитарных исследованиях.

Основные вопросы по математике, определяемые стандартом:

- ✓ геометрия Евклида как первая естественно-научная теория;
- ✓ аксиоматический метод;
- ✓ основные этапы становления современной математики;
- ✓ структура современной математики;
- ✓ основные черты математического мышления;
- ✓ математические доказательства;
- ✓ элементы, множества, отношения, отображения;
- ✓ числа;
- ✓ комбинаторика;
- ✓ конечные и бесконечные множества;
- ✓ основные структуры на множестве;
- ✓ неевклидовы геометрии;
- ✓ геометрия микро- и макромира;
- ✓ основные идеи математического анализа;
- ✓ дифференциальные уравнения;
- ✓ общая постановка задачи о принятии решения;
- ✓ математические методы в целенаправленной деятельности;
- ✓ математика случайного;
- ✓ элементы теории вероятностей;
- ✓ основные понятия математической статистики;
- ✓ математические методы проверки гипотез;
- ✓ роль математики в гуманитарных науках.

Очевидно, что новые стандарты введены с целью содействовать лучшему пониманию этого предмета взамен бездумного манипулирова-

ния символами. Нетрудно убедиться, что спектр вопросов достаточно широк и нетрадиционен.

Настоящее учебное пособие – не учебник, а именно пособие, т. е. учебное издание, дополняющее или частично заменяющее учебник. По определению, учебник должен содержать систематическое изложение учебной дисциплины, соответствующее учебной программе. Однако следует учесть, что до настоящего времени учебников, предназначенных именно для студентов-гуманитариев, нет, поэтому студенты вынуждены пользоваться учебниками для «технарей» или общего, широкого профиля, в которых необходимые вопросы рассматриваются либо слишком углубленно, либо не затрагиваются вообще.

Анализ опыта учебной работы ряда вузов по гуманитарным направлениям показывает, что наибольшие трудности в практике реализации трех составляющих естественно-научного блока – математики, информатики, естествознания – связаны прежде всего с введением в учебный процесс курса математики. Надеемся, что данная работа окажет помощь студентам при изучении дисциплины «Математика» в рамках их гуманитарного профиля как по направлениям 521400 «Юриспруденция», 520100 «Культурология», 520200 «Теология», 520300 «Филология», 520400 «Философия», 520500 «Лингвистика», 520600 «Журналистика», 520700 «Книговедение», 520800 «История», 520900 «Политология», 521000 «Психология», 521100 «Социальная работа», 521200 «Социология», 521300 «Регионоведение», 521500 «Менеджмент», 521600 «Экономика», 521800 «Искусство», 521900 «Физическая культура», 522000 «Коммерция» и т.д., так и по специальностям 021100 «Юриспруденция», 020400 «Психология», 020100 «Философия», 0203000 «Социология», 0202000 «Политология», 020600 «Культурология», 022000 «Связи с общественностью», 022100 «Социальная работа» и т.п.

Пособие написано на основе практических занятий и лекций, читавшихся автором в течение нескольких лет студентам юридического и психолого-педагогического факультетов Новосибирского гуманитарного института. Объем курса определялся в соответствии с действующим Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования.

Математическая истина сама по себе не является ни простой, ни сложной, она существует.

Э. Лемуан

ВВЕДЕНИЕ

Гуманитарная ориентация обучения математике как предмету общего образования и вытекающая из нее идея приоритета в курсе "Математика для гуманитариев" развивающей функции обучения по отношению к его чисто образовательной функции требует переориентации методической системы обучения математике с увеличения объема информации, предназначенной для "стопроцентного" усвоения студентами, на формирование умений анализировать, продуцировать и использовать информацию.

Естественное для средней школы восприятие математики как вычислений, аксиом и доказательств теорем, то есть не содержательной стороны, а оторванного от нее важнейшего, но все же инструментария, не способствует пониманию реальной ее роли и значения в нашей жизни. Так сложилось не только у нас. Например, английский ученый профессор Дж.Гордон отмечает: «Что мы действительно находим трудным, так это формальное преподавание математики с пристрастием к символам и догме, доходящим до садизма».

Известно, что для ученого и инженера математика — это орудие, для математика-профессионала — религия, а для обычного человека — камень преткновения. Будем надеяться, что данный курс поможет по-другому взглянуть на математику, вскрыть ее внутреннюю логику и связи.

Материал курса разбит на разделы, отдельные темы. Как любое пособие по математике, это также предполагает активную работу читателя — решение приложенных упражнений, выполнение индивидуальных заданий, которые рецензируются преподавателем.

Курс математики состоит из следующих разделов:

- I. Основания математики.
- II. Основы математического анализа.
- III. Математические методы.

Программа курса высшей математики весьма широка, что связано с чрезвычайной математизацией современной науки и требованиями Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования. Но, конечно, нет никакой необходимости, чтобы конкретные математические вопросы обсуждались в настоящем курсе на глубоком уровне, соответствующем, например, математической специальности университета.

Работая с этим пособием, а также с другой литературой, обратите внимание на определения. Не спешите их запоминать. Попробуйте понять это определение, почувствовать его структуру, его внутреннюю логику. Вы убедитесь, что каждое слово несет определенное необходимое содержание и что более лаконично дать определение просто невозможно.

Не секрет, что можно заучить результаты и доказательства, не вникая в смысл. Особой пользы в таком изучении нет. Можно и разобраться в доказательстве, понять, что и зачем делается, но не суметь провести аналогичные действия в похожей ситуации. Это уже лучше, чем предыдущий способ изучения, но и этого недостаточно.

Будем считать материал понятым и изученным, если студент может получить самостоятельно аналогичный результат и может его применить к решению задач. Ведь когда студент изучает учебник, он усваивает чужие мысли; когда решает задачу, он думает сам.

Обычно форма отчета – экзамен. Надеемся, что математика и после экзамена останется для Вас точным и прекрасным языком, способом выражения мыслей и способом мышления; пусть математика не будет предметом, который нужно на экзамене «весь сдать и ничего себе не оставить».

Как заметил выдающийся русский математик и кораблестроитель академик А.Н. Крылов, человек обращается к математике «не затем, чтобы любоваться неисчислимыми сокровищами». Ему прежде всего нужно ознакомиться со «столетиями испытанными инструментами и научиться ими правильно и искусно владеть».

Математика — это орудие, специально приспособленное для того, чтобы иметь дело с отвлеченными понятиями любого вида, и в этой области нет предела ее могуществу.

П. Дирак

I. ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

1. Предмет математики. Методологические проблемы и принципы

1.1. Предмет математики

В литературе известны два подхода к определению предмета математики. Одно определение было дано Ф. Энгельсом, другое — коллективом французских математиков под общим псевдонимом Н. Бурбаки.

Согласно Ф. Энгельсу, "чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, стало быть, — весьма реальный материал. Тот факт, что этот материал принимает чрезвычайно абстрактную форму, может лишь слабо заглушевывать его происхождение из внешнего мира". Хотя это предложение и нельзя считать полным определением математики, поскольку в нем нет указаний ни на метод, ни на цели изучения математики, но оно отражает то, что объект изучения создан умом человека не произвольно, а в связи с реальным миром.

Второй подход отражает методологические установки Н.Бурбаки. Бурбаки также определяют не математику, а только объекты, которые она исследует. Прежде чем привести их определение, отметим, что новый подход к объектам исследования в математике связан с "революцией в аксиоматике". Суть ее состоит в переходе от конкретной содержательной аксиоматики к аксиоматике сначала абстрактной, а затем полностью формализованной.

В конкретной содержательной аксиоматике, подобной аксиоматике Евклида, исходные понятия и аксиомы в качестве интерпретации имеют единственную систему хотя и идеализированных, но конкретных объектов. В противоположность этому абстрактная аксиоматика допускает бесчисленное множество интерпретаций. Формализованная аксиоматика возникает на основе абстрактной и отличается от нее, во-первых, точным заданием правил вывода, во-вторых, вместо содержательных рассужде-

ний она использует язык символов и формул, в результате чего содержательные рассуждения сводятся к преобразованию одних формул в другие, т. е. к особому рода исчислениям. В соответствии с этим одни и те же аксиомы могут описывать свойства и отношения самых различных по своему конкретному содержанию объектов.

Эта фундаментальная идея лежит в основе понятия абстрактной структуры. Н. Бурбаки выделяют три основных типа структур, которые играют наиболее важную роль при построении ими современной математики.

Алгебраические структуры. Примерами таких структур являются группы, кольца и поля. Основные характеристики алгебраической структуры: задание на некотором множестве A конечного числа операций с соответствующими свойствами, описываемых системой аксиом. В качестве элементов множества A могут выступать как математические объекты (числа, матрицы, перемещения, векторы), так и не математические.

Структуры порядка. Характеризуются тем, что на рассматриваемом множестве задается отношение порядка (сравнение на числовых множествах), для которого выполняются следующие свойства: рефлексивность; симметричность; транзитивность.

Топологические структуры. Множество M обладает топологической структурой, если каждому его элементу тем или иным способом отнесено семейство подмножеств из M , называемых окрестностями этого элемента, причем эти окрестности должны удовлетворять определенным аксиомам (аксиомам топологических структур). С помощью топологических структур точно определяются такие понятия, как "окрестность", "предел", "непрерывность".

Кроме основных трех типов структур (порождающих), в математике приходится рассматривать сложные структуры, где порождающие структуры органически связываются с помощью объединяющей системы аксиом. Например, множество действительных чисел является сложной структурой, в которую одновременно входят три основные порождающие структуры.

Общей чертой различных понятий, объединенных родовым названием "математическая структура", является то, что они применимы к множеству элементов, природа которых не определена. Построить аксиоматическую теорию структуры — это значит вывести логические следствия из аксиом структуры, отказавшись от каких-либо других предположений относительно рассматриваемых элементов, от всяких гипотез относительно их "природы".

На основе сказанного Н. Бурбаки делают вывод: "В своей аксиоматической форме математика представляется скоплением абстрактных

форм — математических структур, и оказывается (хотя по существу и неизвестно почему), что некоторые аспекты экспериментальной действительности как будто в результате предопределения укладываются в некоторые из этих форм".

Итак, по Н. Бурбаки, математика — это "скопление математических структур", не имеющих к действительности никакого отношения. Следует сказать, что этот взгляд на математику разделялся многими учеными, которые считали, что определение Ф. Энгельса уже устарело.

Сопоставление двух подходов к определению объектов изучения математики можно провести только с позиции анализа истории развития математического знания. Академик А.Н. Колмогоров выделил четыре основных периода развития математики.

Период зарождения математики, который продолжался до VI–V вв. до н. э., т. е. до того времени, когда математика становится самостоятельной наукой, имеющей собственный предмет и метод.

Еще за три тысячелетия до новой эры вавилоняне умели решать квадратные уравнения и знали теорему, которая ныне носит название теоремы Пифагора. Древние владели достаточно большим набором не связанных между собой правил и формул для решения многих практических задач: измерение земельных участков, составление календарей, строительство и т. д. К сожалению, до нас не дошли источники, по которым можно было бы судить, каким образом люди получили используемые ими в то время математические сведения.

Второй период развития математики — период элементарной математики: от VI–V вв. до н. э. до XVI в. н. э. включительно. Математика как логический вывод и средство познания природы — творение древних греков (VI–V вв. до н. э.). Не сохранилось документов, которые бы могли рассказать, что заставило древних греков прийти к новому пониманию математики и ее роли. А.Н. Колмогоров считает, что изменение характера математической науки можно объяснить более развитой общественно-политической и культурной жизнью греческих государств, характеризовавшейся высоким развитием диалектики, искусством ведения спора. У греков к этому времени сложилось определенное миропонимание того, что Природа устроена рационально, а все ее явления протекают по точному и неизменному плану, который в конечном счете является математическим. Пифагорейцы (VI в. до н. э.) усматривали сущность вещей и явлений в числе и числовых соотношениях. Число для них было первым принципом в описании природы, оно же считалось материей и формой мира. Начала дедуктивного, аксиоматического метода были заложены также древнегреческими математиками.

Первые математические теории, абстрагированные из конкретных задач, создали необходимые и достаточные предпосылки для осознания самостоятельности и своеобразия математики. Это побудило античных математиков к систематизации и логической последовательности изложения ее основ. К IV в. до н. э. уже были выдвинуты принципы построения дедуктивной науки как логической системы, в основе которой лежат определенные начала — аксиомы. Развитие дедуктивной теории в первую очередь связано с именем Аристотеля (384—322 гг. до н. э.). Первое систематизированное дедуктивное изложение математики (геометрии) принадлежит Евклиду (около 300 г. до н. э.). Геометрическая система, известная под названием "Начала" Евклида, была блестящим, непревзойденным в течение свыше 20 веков (вплоть до XIX в.) образцом логической строгости, аксиоматического метода. Хотя на протяжении двух тысячелетий и вскрывались логические пробелы в системе исходных положений Евклида, однако первые реальные успехи в создании аксиом геометрии были достигнуты только к концу XIX в. в работах Паша (1882), Пеано (1889), Пьерри (1889).

Таким образом, в Древней Греции произошел постепенный переход от практической геометрии к теоретической.

Третий период — период создания математики переменных величин (XVII, XVIII вв., начало XIX в.) знаменуется введением переменных величин в аналитической геометрии Р. Декарта (1596—1650) и созданием дифференциального и интегрального исчисления в трудах И. Ньютона (1642—1727) и Г. Лейбница (1646—1716). Основными направлениями научной деятельности Ньютона были физика, механика, астрономия и математика. Математика в системе научных взглядов Ньютона была частью общей науки о природе, орудием физических исследований. Разработанный им метод флюксий служил математическим аппаратом для изучения движения и связанных с ним понятий скорости и ускорения.

Математические работы Лейбница также тесно были связаны с его философскими воззрениями, в частности с созданием универсального метода научного познания, "всеобщей характеристикой". Математика мыслилась Лейбницем как наука об отражении всевозможных связей, зависимостей элементов, отношений в виде формул, в виде особого исчисления — дифференциального. Основой построения нового исчисления было понятие бесконечно малой величины, которое понималось, прежде всего, на уровне интуитивных представлений.

Несмотря на недостаточно разработанное в школах Ньютона и Лейбница исчисление бесконечно малых, оно позволяло решать многие из важнейших задач геометрии, механики, физики и прикладных наук. Лишь во второй половине XIX в., когда была создана теория действи-

тельного числа, стало возможным построить все здание математического анализа на строго логической основе.

Приведенное выше высказывание Ф. Энгельса отражает развитие математической науки от ее зарождения до середины XIX в. Основным источником развития математики до этого времени были запросы практики и физики (в основном механики и оптики). Математические теории отражали количественные (метрические) характеристики процессов.

Подход к объектам математического исследования, по Н. Бурбаки, обусловлен *четвертым, современным периодом в развитии математики*, который начинается со второй половины XIX в. Состояние математики, сложившееся к этому времени, характеризуется следующими особенностями.

Накопленный в XVII и XVIII вв. огромный фактический материал привел к необходимости углубленного логического анализа и объединения его с новых точек зрения. Связь математики с естествознанием приобретает все более сложные формы. Большие новые теории стали возникать не только в результате непосредственных запросов практики, естествознания и техники, но также из внутренних потребностей самой математики. Наиболее важные из них: развитие теории функций, теории групп, связанной с исследованием проблемы разрешимости алгебраических уравнений в радикалах, создание неевклидовых геометрий.

Вторая особенность этого периода в развитии математики связана со значительным расширением области ее приложений. Если до этого математика применялась в таких разделах физики, как механика и оптика, то теперь ее результаты находят приложение в электродинамике, теории магнетизма, термодинамике. Резко возросли потребности техники в математике: баллистики, машиностроения и др.

Третья особенность математики XIX в. обусловлена усиленным вниманием к вопросам ее обоснования, критического пересмотра ее исходных положений (аксиом), к построению строгой системы определений и доказательств, а также к критическому рассмотрению логических приемов, употребляемых при этих доказательствах. Г.И. Рузавин пишет о математике этого периода: "Если раньше основным предметом ее изучения были метрические количественные отношения между величинами и пространственными формами, то начиная с середины XIX в. она все больше и больше обращается к анализу взаимосвязей неметрической природы". Такое расширение области исследования математики сопровождалось возрастанием абстрактности ее понятий и теорий.

Революционный переворот во взглядах на математику был связан как раз с проблемами ее обоснования, с новым пониманием аксиоматического метода. Открытие в 1826 г. Н.И. Лобачевским (1792-1856) того, что замена

пятого постулата Евклида о параллельных его отрицанием ("Через точку вне прямой проходит более одной прямой, не пересекающей данную"), и выводы из системы аксиом абсолютной геометрии (где выполняются все аксиомы Евклида, кроме аксиомы параллельности) и аксиомы параллельности Лобачевского не привели к логическим погрешностям.

Это развило столь же стройную и богатую содержанием геометрию, как и геометрия Евклида, послужило толчком в изменении взглядов на математику. Сразу же встал вопрос о необходимости обоснования новой геометрии, об исследовании ее непротиворечивости (из данной системы аксиом нельзя получить двух взаимоисключающих выводов). В этой связи получает дальнейшее развитие аксиоматический метод: 1) решается проблема непротиворечивости, полноты и независимости системы аксиом; 2) появляется новый взгляд на аксиоматическую теорию как бессодержательную, формально-логическую систему. Решение этих проблем было предложено Д. Гильбертом (1862–1943).

Сущность аксиоматического метода на современном этапе развития математики, которую определил Д. Гильберт, можно описать следующим образом:

1. Строится абстрактная теория. В ее основании лежат термины двойного рода: одни обозначают элементы одного или нескольких множеств (например, "точки", "прямые" и т. д.), другие — отношения между этими элементами (например, "лежать", "между" и т. д.). Этим терминам пока не приписывается никакого содержательного смысла, они — только слова.

Устанавливаются аксиомы, которым должны удовлетворять термины. Из аксиом выводятся логические следствия (теоремы). Для сокращения речи вводятся новые термины при помощи определений.

2. Терминам абстрактной теории приписывается содержательный смысл. Теперь их роль меняется, они выражают понятия, имеющие более или менее наглядное, осязательное содержание. Следует проверить, соблюдаются ли для этих понятий аксиомы абстрактной теории.

Система, полученная путем приписывания содержательного смысла абстрактной теории, называется моделью или интерпретацией этой теории.

Если каждая аксиома системы аксиом бессодержательной теории выполняется в построенной интерпретации, то этим доказывается относительная непротиворечивость исходной теории. Абсолютно доказать непротиворечивость математической теории внутренними средствами математики невозможно. Так, для доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского была построена одна из моделей французским математиком А. Пуанкаре (1854–1912), исходящая из предположения,

что непротиворечива геометрия Евклида. Вопрос о непротиворечивости геометрии Евклида был сведен Д. Гильбертом к непротиворечивости арифметики. Доказанные в 30-е гг. нашего столетия теоремы приводят к выводу о том, что доказать непротиворечивость арифметики математическими средствами нельзя.

Новый взгляд на аксиоматический метод в корне изменил прежние представления о геометрии как полуэмпирической науке. Из открытий неевклидовых геометрий и построения их интерпретаций следовало, что евклидова и неевклидовы геометрии не представляют непосредственное описание эмпирических свойств реального физического пространства, а являются абстрактными системами утверждений, истинность которых может быть проверена после соответствующей конкретной интерпретации.

Таким образом, подход Н. Бурбаки к определению математики как "скопления абстрактных, бессодержательных, математических структур" был предопределен новым пониманием аксиоматического метода.

Однако подход Бурбаки встретил и негативное отношение, поскольку Бурбаки не считали нужным выяснять отношение рассматриваемых ими структур к действительному миру. Не имея возможности описать различные оценки философов и математиков на позицию Н. Бурбаки, сошлемся лишь на точку зрения ведущих отечественных математиков А.Н. Колмогорова, А.Д. Александрова, В.В. Гнеденко. Они считают, что во времена Энгельса математика изучала количественные отношения между величинами и пространственными формами. Теперь она поднялась до изучения абстрактных структур и категорий. Но на этом основании нельзя считать, что объект изучения математики стал иным, что вместо количественного аспекта действительного мира математика стала исследовать нечто принципиально иное, что современный этап ее развития совершенно не связан с предшествующими этапами ее истории.

В действительности же дело заключается в том, что качественные изменения, происшедшие в математике, дают ей возможность исследовать количественные отношения несравненно глубже и шире. А.Н. Колмогоров приходит к выводу о том, что круг количественных отношений и пространственных форм, изучаемых математикой, чрезвычайно расширяется: в него входят отношения, существующие между элементами произвольной группы, векторами, операторами в функциональных пространствах, все разнообразие форм пространств любого числа измерений и т. п. При таком широком понимании терминов "количественные отношения" и "пространственные формы" определение математики как науки о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира применимо и на современном этапе ее развития.

Эту позицию разделяет и А.Д. Александров: в математике рассматриваются не только формы и отношения, непосредственно абстрагированные из действительности, но и логически возможные, определяемые на основе уже известных форм и отношений.

Б.В. Гнеденко обращает внимание на то, что, хотя любая ветвь современной математики действительно изучает математические структуры, данное Н. Бурбаки определение отнюдь не находится в антагонистических отношениях с определением Ф. Энгельса, а лишь с определенных позиций его дополняет.

Подводя итог всему сказанному, можно заключить, что подход к определению математики через математические структуры представляет собой выражение определенного этапа математического познания. Математика была и остается определенным "инструментом" познания мира, его пространственных форм и количественных отношений. В настоящее время, как уже было сказано, этот "инструмент" проникает в изучение все более сложных процессов и явлений, в том числе и неметрической природы. Без осознания этого фундаментального философского, методологического положения не может быть сформировано целостное представление об общей картине мира.

Математика претендует на статус «особой» науки, изначально превышающей все прочие по уровню точности, истинности и непротиворечивости своих фундаментальных положений.

В сфере *конечных величин* математика действительно относительно точна и непротиворечива; этого достаточно для более или менее адекватного количественного моделирования самых различных конечных по размерности предметных областей.

Что же касается сферы бесконечного, то здесь у современной математики есть свои противоречия, которые могут быть преодолены лишь совместными усилиями математиков и философов, логиков.

1.2. Математический язык: особенность, становление и развитие

Математика настолько разрослась и стала разнообразной, что едва ли поддается содержательному описанию, но ее можно охарактеризовать с функциональной точки зрения как язык естествознания и техники, как язык и инструмент познания окружающего нас мира и нас самих.

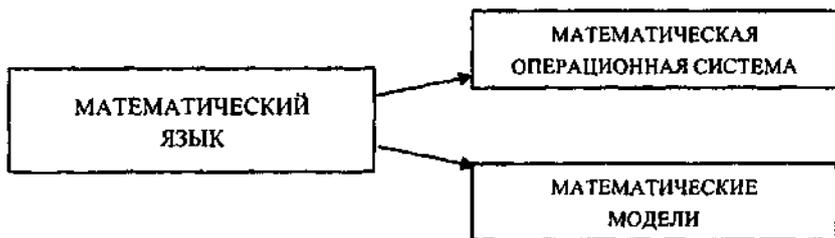
В различных областях деятельности вырабатываются "свои" (искусственные) языки, например: чертежи — в технике, химические формулы и уравнения — в химии. С русским надо говорить по-русски, с англичанином — по-английски, с французом — по-французски, а с природой —

на математическом языке. Только на нем природа открывает нам свои тайны.

Возможно, впервые эту мысль в прошлом веке высказал великий физик Виллард Гиббс. Шло ученое заседание, на котором обсуждался вопрос о том, чему следует в программах отдавать предпочтение — языкам, особенно латыни и греческому, или математике. Дискуссия длилась долго. Вдруг обычно молчаливый В. Гиббс, основатель статистической физики, утверждавший, что скопище миллиардов молекул проще замысловатого движения одной молекулы, попросил слова и сказал: "Математика — это тоже язык".

Как же устроен математический язык? Прежде всего он язык абстрактный в противоположность нашим конкретным языкам, где каждое слово имеет свое конкретное значение. Язык математических формул и знаков обладает большей универсальностью, он используется во всех сферах человеческой деятельности. Система математических знаков является достоянием всего человечества, она вырабатывалась на протяжении тысячелетий. Математический язык является результатом усовершенствования естественного языка по различным направлениям: 1) устранение громоздкости естественного языка; 2) устранение его двусмысленности, 3) расширение его выразительных возможностей. Он употребляется как средство выражения математической мысли.

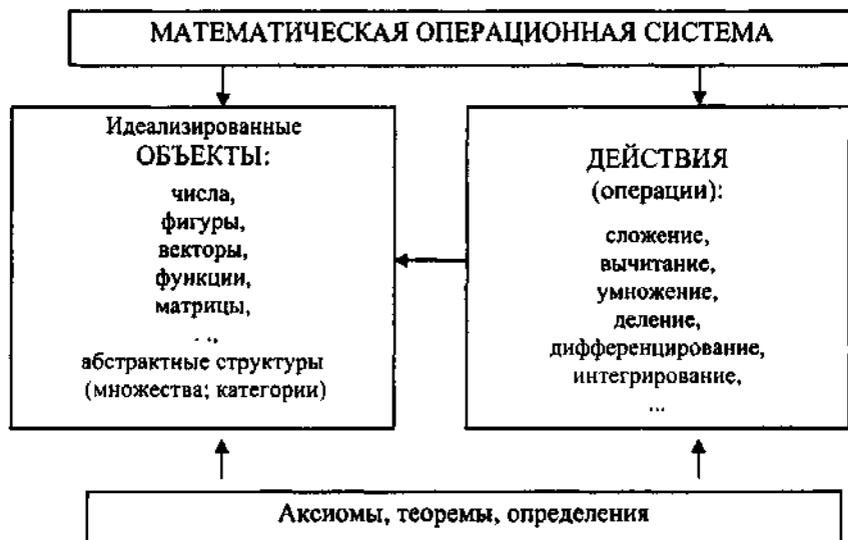
Язык в широком смысле — это словарь, грамматика, рассказы, повести, пьесы и романы, написанные на этом языке. Что же в математическом языке является аналогом слов и грамматики, а что — рассказов и повестей? Аналогом слов и грамматики является математическая операционная система, а рассказов, повестей и прочего — математические модели.



Овладение математическим языком предполагает сознательное усвоение содержания математических понятий, отношений между ними (аксиом, теорем) и умение рационально и грамотно выразить математическую мысль в устной и письменной форме с помощью средств математического языка, а также свободное оперирование математическими знаниями, умениями и навыками в практической деятельности.

Овладение математическим языком формирует навыки рационального выражения мысли: последовательность, точность, ясность, лаконичность,

выразительность, экономность, информированность. Сознательное и свободное владение математическим языком является условием и средством овладения математической культурой.



Недостатки языка:

- специфичность;
- ограниченная возможность отображения.

Достоинства языка:

- позволяет с помощью символов выразить мыслительные операции в сокращенном и свернутом виде;
- отличается большой прогностической силой.

Множество абстрактных элементов и действий с ними образуют то, что можно назвать операционной системой: *элементы* — это числа, векторы, функции, матрицы...; *действия* (операции) — сложение, вычитание, умножение, деление, дифференцирование, интегрирование,...

У операционной системы есть четкие внутренние побудительные мотивы развития и цели: это расширение и выполнимость операций, охват всего того, что мы хотим описать. Проиллюстрируем их беглым описанием истории становления и развития математической операционной

системы. При этом будем придерживаться не хронологии событий, а логики их следования.

Все начиналось с целых чисел. Затем возникли действия с ними: сложение и обратное действие — вычитание; умножение и деление. Невыполнимость деления была преодолена введением дробных чисел, вычитания — отрицательных чисел.

Действительные числа — камень преткновения древних греков — получили обоснование, успокоившее математиков, только в сечениях рациональных чисел Дедекинда и сходящихся их последовательностей Вейерштрасса. Так пришли к действительным числам, с которыми всегда выполнимы операции сложения, вычитания, умножения, деления, нахождения предела, которые обозначаются соответственно знаками "+", "-", "×", ":", "lim" (исключения с делением на нуль и пределом неограниченно возрастающей последовательности не в счет: на то и исключения, хотя и их избегают в так называемом нетрадиционном математическом анализе).

После действительных чисел появились комплексные — как замыкание операции решения квадратных уравнений. С их введением любое алгебраическое уравнение стало разрешимым. Потом Гамильтон (1805–1865) придумал кватернионы как расширение комплексных чисел. Они не привились, но их частный случай — векторы и действия с ними (сложение, вычитание, скалярное и векторное произведения) вошли в широкий обиход математики.

Потребность в описании эволюционных процессов изменения привела к появлению переменных величин, а затем и функций от них, дифференциального и интегрального исчисления, дифференциальных уравнений.

Возникли множества и действия с ними (объединение, пересечение, дополнение, произведение) и многое-многое другое.

Как общий прием расширения операционной системы, помимо отмеченного уже расширения для выполнимости операций, можно указать перевод функций как операций в элементы, операций над функциями-элементами опять в элементы, с которыми, в свою очередь, также можно производить операции. Так операционная система пополнилась современным функциональным анализом и теорией операторов, причем операционная система обрела, исходя из своих внутренних законов развития, теорию линейных операторов раньше, чем она потребовалась физике для описания явлений микромира.

Помимо принципиальной выполнимости операций, огромное значение имеет ее фактическая выполнимость, простота и доступность этой выполнимости. Так, древние греки с трудом вычисляли произведение,

например, наших чисел 473 и 328 потому, что записывали их в виде CDLXXIII и CCCXXVIII.

Оливер Хевисайд (1850–1925), не признанный своими современниками, сделал операцию интегрирования очень легко выполнимой и сводимой к делению на комплексное число. Это позволило ему решить очень много задач, не решенных ранее. Он был великим ученым: предсказал наличие в верхних слоях атмосферы ионизированного слоя, отражающего радиоволны; подсчитал излучение движущегося электрона; указал формулу, известную в науке как знаменитая формула Эйнштейна.

Современные ЭВМ и методы вычислений и программирования в обсуждаемом плане следует рассматривать как новые эффективные средства реализации трудных операций математической операционной системы.

1.3. Геометрия Евклида как первая естественно-научная теория

Исторический обзор обоснования геометрии. Основным методом современной математики, в частности геометрии, является аксиоматический метод, который берет свое начало от "Оснований геометрии" Д.Гильберта. Геометрия, прежде чем стать аксиоматической теорией, прошла долгий путь эмпирического развития.

Первые сведения о геометрии были добыты цивилизациями Древнего Востока — в Египте, Китае, Индии — в связи с развитием земледелия и ограниченностью плодородных земель и других удобств для земледелия. В этих странах геометрия носила эмпирический характер и представляла собой набор отдельных "рецептов-правил" для решения конкретных задач. Уже во II тысячелетии до н.э. египтяне умели точно вычислить площадь треугольника, объем усеченной пирамиды, площадь круга, а вавилоняне знали теорему Пифагора. Заметим, что доказательств не было, а указывались правила для вычислений.

Греческий период развития геометрии начался в VII–VI вв. до н.э. под влиянием египтян. Отцом греческой математики считается знаменитый философ Фолес (640–548 гг. до н.э.). Фолесу, точнее его математической школе, принадлежат доказательства свойств равнобедренного треугольника, вертикальных углов. В дальнейшем геометром Древней Греции были получены результаты, охватывающие почти все содержание современного школьного курса геометрии.

Философская школа Пифагора (570–471 гг. до н.э.) открыла теорему о сумме углов треугольника, доказала теорему Пифагора, установила существование пяти типов правильных многогранников и несоизмеримых отрезков. Демокрит (470–370 гг. до н.э.) открыл теоремы об объемах

пирамиды и конуса. Евдокс (410–356 гг. до н.э.) создал геометрическую теорию пропорций (т.е. теорию пропорциональных чисел).

Менехм и Аполлоний изучили конические сечения. Архимед (289–212 гг. до н.э.) открыл правила для вычисления площади поверхности и объема шара и других фигур. Он же нашел приближенное значение числа π .

Особая заслуга древнегреческих ученых в том, что они первыми поставили проблему строгого построения геометрических знаний и решили её в первом приближении. Эта проблема была поставлена Платоном (429–348 гг. до н.э.). Аристотель (384–322 гг. до н.э.) — крупнейший философ, основатель формальной логики. Ему принадлежит четкое оформление идеи построения геометрии в виде цепи предложений, которые вытекают одно из другого на основе лишь правил логики.

Эту задачу пытались решать многие греческие ученые (Гиппократ, Федий).

Е в к л и д (330–275 гг. до н.э.) — крупнейший геометр древности, воспитанник школы Платона, жил в Египте (в Александрии). Составленные им "Начала" дают систематическое изложение начал геометрии, выполненное на таком научном уровне, что многие века преподавание геометрии велось по этому сочинению. "Начала" состоят из 13 книг (глав):

- I–VI — планиметрия;
- VII–IX — арифметика в геометрическом изложении;
- X — несоизмеримые отрезки;
- XI–XIII — стереометрия.

З а м е ч а н и е 1. В "Начала" были включены не все сведения, известные по геометрии. Например, в эти книги не вошли: теория конических сечений, кривые высших порядков.

З а м е ч а н и е 2. Каждая книга начинается с определения всех тех понятий, которые в ней встречаются. Например, в книге 1 даны 23 определения. Приведем определения первых четырех понятий:

1. Точка есть то, что не имеет частей.
2. Линия есть длина без ширины.
3. Границы линии суть точки.
4. Прямая есть такая линия, которая одинаково расположена по отношению ко всем своим точкам.

Евклид приводит предложения, принимаемые без доказательства, разделяя их на постулаты и аксиомы. Постулатов у него пять, а аксиом — семь. Вот некоторые из них.

Постулаты

(...)IV. И чтобы все прямые углы были равны.

V. И чтобы всякий раз, когда прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, эти прямые пересекались с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых.

Аксиомы

I. Равные порознь третьему равны между собой.

II. И если к равным прибавить равные, то получим равные.

(...)VII. И совмещающиеся равны.

З а м е ч а н и е 1. Евклид не указал, в чем заключается различие между постулатами и аксиомами. До сих пор нет окончательного решения этого вопроса.

З а м е ч а н и е 2. Евклид излагает теорию геометрии так, как требовали греческие ученые, особенно Аристотель, т. е. теоремы расположены так, что каждая следующая доказывается только на основе предыдущих. Иначе говоря, Евклид развивает геометрическую теорию *строго логическим путем*. В этом заключается историческая заслуга Евклида перед наукой.

"Начала" Евклида сыграли огромную роль в истории математики и всей человеческой культуры. Эти книги переведены на все основные языки мира, после 1482 г. они выдержали около 500 изданий.

Недостатки системы Евклида. С точки зрения современной математики изложение "Начал" следует признать несовершенным. Назовем основные недостатки этой системы:

1) многие определения понятий включают такие понятия, которые, в свою очередь, должны быть определены (например, в определениях 1—4 главы I используются понятия ширины, длины, границы, которые, в свою очередь, должны быть определены);

2) список аксиом и постулатов является недостаточным для построения геометрии строго логическим путем. Например, в этом списке нет аксиом порядка, без которых нельзя доказать многие теоремы геометрии; заметим, что на это обстоятельство обратил внимание Гаусс. В указанном списке нет также и определения понятия движения (совмещения) и свойств движения, т. е. аксиом движения. В этом списке не хватает также аксиомы Архимеда (одной из двух аксиом непрерывности), которая играет важную роль в теории измерений длин отрезков, площадей фигур и объектов тел. Заметим, что на это обратил внимание современник Евклида Архимед;

3) постулат IV явно лишний, его можно доказать как теорему.

Особо отметим пятый постулат. В книге I "Начал" первые 28 предложений доказаны без ссылок на пятый постулат. Попытка минимизиро-

вать список аксиом и постулатов, в частности доказать постулат V как теорему, проводилась со времен самого Евклида. Прокл (V в. н.э.), Омар Хайям (1048–1123), Валлис (XVII в.), Саккери и Ламберт (XVIII в.), Лежандр (1752–1833) также пытались доказать постулат V как теорему. Их доказательства были ошибочными, но они привели к положительным результатам — к рождению ещё двух геометрий (Римана и Лобачевского).

Неевклидовы геометрические системы. Н.И. Лобачевский (1792–1856), которому принадлежит честь открытия новой геометрии — геометрии Лобачевского, также начал с попытки доказательства постулата V.

Николай Иванович развил свою систему до объема "Начал" в надежде получить противоречие. Не получил, но сделал (1826) правильный вывод: существует геометрия, отличная от геометрии Евклида.

На первый взгляд этот вывод кажется недостаточно обоснованным: может быть, развивая дальше, можно прийти к противоречию. Но этот же вопрос относится и к геометрии Евклида. Иначе говоря, обе геометрии равноправны перед вопросом о логической непротиворечивости. Дальнейшие исследования показали, что из непротиворечивости одной следует непротиворечивость другой геометрии, т.е. имеет место равноправие логических систем.

Лобачевский был первым, но не единственным, сделавшим вывод о существовании другой геометрии. Гаусс (1777–1855) высказал эту идею еще в 1816 г. в частных письмах, но в официальных публикациях заявления не сделал.

Три года спустя после публикации результатов Лобачевского (1829), т.е. в 1832 г., вышла в свет работа венгра Я. Бойяи (1802–1860). Он еще в 1823 г. пришел к выводу о существовании другой геометрии, но опубликовал позже и в менее развитом, чем у Лобачевского, виде. Поэтому вполне справедливо, что эта геометрия носит имя Лобачевского.

Общему признанию геометрии Лобачевского в значительной степени способствовали работы геометров после Лобачевского. В 1868 г. итальянский математик Э. Бельтрами (1825–1900) доказал, что на поверхности постоянной отрицательной кривизны (так называемая псевдосфера) имеет место геометрия Лобачевского. Уязвимым местом доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского, основанного на интерпретации Бельтрами, было то, что, как показал Гильберт (1862–1943), в Евклидовом пространстве не существует полной поверхности постоянной отрицательной кривизны без особенностей. Поэтому

на поверхности постоянной отрицательной кривизны можно интерпретировать только часть плоской геометрии Лобачевского.

Этот недостаток был устранен в интерпретациях Пуанкаре (1854–1912) и Клейна (1849–1925).

Доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского было вместе с тем и доказательством независимости пятого постулата от остальных. Действительно, в случае зависимости геометрия Лобачевского была бы противоречивой, так как она содержала бы два взаимно исключающих утверждения.

Дальнейшие исследования евклидовой геометрии показали неполноту системы аксиом и постулатов Евклида. Исследование аксиоматики Евклида было завершено Гильбертом в 1899 г.

Аксиоматика Гильберта состоит из пяти групп:

- аксиомы связи (принадлежности);
- аксиомы порядка;
- аксиомы конгруэнтности (равенства, совпадения);
- аксиомы непрерывности;
- аксиома параллельности.

Эти аксиомы (всего их 20) относятся к объектам трех родов: точек, прямых, плоскостей, а также к трем отношениям между ними: принадлежит, лежит между, конгруэнтен. Конкретный смысл точек, прямых, плоскостей и отношений не указан. Они косвенно определены через аксиомы. Благодаря этому построенная на основе аксиом Гильберта геометрия допускает различные конкретные реализации.

Геометрическая система, построенная на перечисленных аксиомах, называется *евклидовой геометрией*, так как она совпадает с геометрией, изложенной Евклидом в его «Началах».

Геометрические системы, отличные от евклидовой, называются *неевклидовыми геометриями*. Согласно общей теории относительности, в пространстве ни та, ни другая не являются абсолютно точными, однако в малых масштабах (земные масштабы являются также достаточно «малыми») обе они вполне пригодны для описания пространства. Причиной того, что на практике применяются все же евклидовы формулы, является их простота.

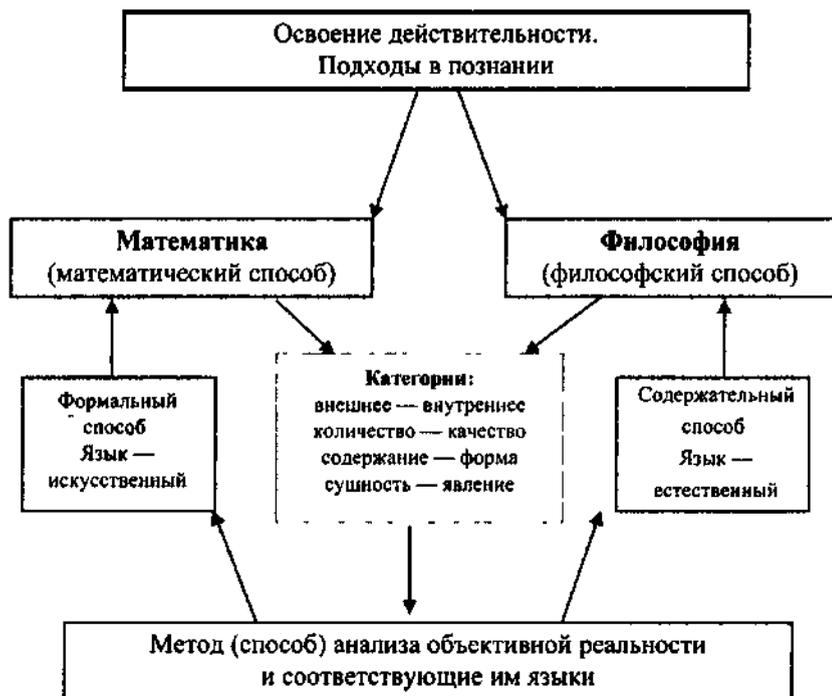
Гильберт всесторонне исследовал свою систему аксиом, показал, что она непротиворечива, если не противоречива арифметика (т. е. на самом деле доказана содержательная или, так называемая, внешняя непротиворечивость). Он завершил многовековые исследования геометров по обоснованию геометрии. Эта работа была высоко оценена и в 1903 г. отмечена премией имени Лобачевского.

В современном аксиоматическом изложении геометрии Евклида не всегда пользуются аксиомами Гильберта: учебники по геометрии построены на различных модификациях этой системы аксиом.

В XX в. было обнаружено, что геометрия Лобачевского не только имеет важное значение для абстрактной математики, как одна из возможных геометрий, но и непосредственно связана с приложениями математики. Оказалось, что взаимосвязь пространства и времени, открытая в работах А. Эйнштейна и других в рамках специальной теории относительности, имеет непосредственное отношение к геометрии Лобачевского.

1.4. Место и роль математики в современном мире, мировой культуре и истории, в том числе в гуманитарных науках

Роль математики в общечеловеческой культуре огромна. Обращаясь к истории философии, следует отметить, что ученые, создававшие математику нового времени, рассматривали математическую науку как составную часть философии, которая служила средством познания мира.



Место математики в жизни и в науке определяется тем, что она позволяет перевести «общежитейские», интуитивные подходы к действительности, базирующиеся на чисто качественных (а значит, приближенных) описаниях, на язык точных определений и формул, из которых возможны количественные выводы. Не случайно говорят, что степень научности той или иной дисциплины измеряется тем, насколько в ней применяется математика.

Математика является частью общечеловеческой культуры. На протяжении нескольких тысячелетий развития человечества шло накопление математических фактов, что привело около двух с половиной тысяч лет тому назад к возникновению математики как науки. Квадривий, изучавшийся в Древней Греции, включал в себя арифметику, геометрию, астрономию и музыку. О значении математики для человечества говорит тот факт, что "Начала" Евклида — книга, которая издавалась наибольшее число раз (не считая Библии).

Математика имеет богатейшие возможности воздействия на выработку научного мировоззрения и достижение необходимого общекультурного уровня. Пытаясь объяснить окружающий мир, задавая вопрос "почему?", древние философы-софисты пришли к необходимости выделения математических знаний. История зарождения великих математических идей, судьбы выдающихся математиков (Архимед, Галуа, Паскаль, Галилей, Гаусс, Эйлер, Ковалевская, Чебышев и др.) дают пищу для ума и сердца, примеры беззаветного служения науке, приводят к философским размышлениям и нравственным поискам.

Логические рассуждения представляют собой метод математики, поэтому ее изучение воспитывает логическое мышление, позволяет правильно устанавливать причинно-следственные связи, что безусловно должен уметь каждый человек. Стиль изложения математики, ее язык оказывают влияние на развитие речи. Каждый культурный человек должен иметь представление об основных понятиях математики, таких, как число, функция, математическая модель, алгоритм, вероятность, оптимизация, величины дискретные и непрерывные, бесконечно малые и бесконечно большие. Речь идет именно об основных понятиях и идеях, а не о наборе конкретных формул и теорем.

Человек, знающий математику лишь по школьному курсу, вряд ли сознает, сколь мизерное (но предельно необходимое) количество знаний, накопленных к тому же задолго до начала XX в., сообщается в школе. А ведь в наши дни в мире ежемесячно выходят сотни математических журналов, публикующих тысячи новых теорем с трудными, порой многостраничными доказательствами. И это не считая публикаций по прило-

жениям математики, а в каких только отраслях знаний она сейчас не прилагается! Следует отметить тесную взаимосвязь между расширением ее фронта, усилением активности и изменением представлений математиков о предмете своей науки (хотя полного единодушия во взглядах нет).

Современный мир неожиданно обнаружил, что математика уверенно расположилась в самых разных его частях и уголках. Сейчас никого не удивит словосочетаниями "математическая лингвистика", "математическая биология", "математическая экономика" и т.п. — какую дисциплину ни взять, вряд ли кому-нибудь покажется невозможным присоединение к ее наименованию эпитета "математический". Распространение математики вширь сопровождается ее проникновением вглубь. Математика занимает сегодня видное место в жизни общества.

Тем не менее повсеместное проникновение математики некоторым людям кажется загадочным, даже подозрительным. В самом деле, не вызывает сомнений право па всеобщее признание, например, физики или химии. Физика открывает нам новые источники энергии, новые средства быстрой связи. Химия создает искусственные ткани, а сейчас покусается на создание искусственной пищи. Неудивительно, что эти науки, помогающие человеку в его извечных поисках энергии, связи, одежды и еды, прочно и почетно вошли в нашу жизнь.

Что же дает людям математика, которая не открывает новых способов передвижения, как физика, и не создает новых вещей, как химия? Почему появление в какой-либо отрасли науки и техники математических методов означает и достижение в этой отрасли определенного уровня зрелости, и начало нового этапа ее дальнейшего развития?

Наиболее распространенный ответ на эти вопросы еще не так давно состоял в том, что математика умеет хорошо вычислять и тем самым позволяет осуществлять математическую обработку цифровых данных, связанных с тем или иным изучаемым процессом. Однако при всей важности вычислительного аспекта математики, особенно в последние годы в связи с бурным ростом вычислительной техники, он оказывается неглавным при попытке объяснить причины математизации современного мира.

Главная же причина этого процесса такова: математика предлагает весьма общие и достаточно четкие логические модели для изучения окружающей действительности в отличие от менее общих и более расплывчатых моделей, предлагаемых другими науками. Такие модели математика дает с помощью своего особого языка — языка чисел, различных символов. Объектами исследования математики служат логические модели, построенные для описания явлений в природе, технике, обществе. Математической моделью изучаемого объекта (явления, процесса и т.п.) называется логическая конструкция, отражающая геометрические

формы этого объекта и количественные соотношения между его числовыми параметрами. При этом математическая модель, отображая и воспроизводя те или иные стороны рассматриваемого объекта, способна замещать его так, что исследование модели даст новую информацию об этом объекте, опирающуюся на принципы математической теории, на сформулированные математическим языком законы природы. Если математическая модель верно отражает суть данного явления, то она позволяет находить и не обнаруженные ранее закономерности, давать математический анализ условий, при которых возможно решение теоретических или практических задач, возникающих при исследовании этого явления.

Естественно, возникает один общий вопрос: нужна ли математика гуманитариям вообще и юристу в частности?

Известно, что математика является частью общечеловеческой культуры, такой же неотъемлемой и важной как право, медицина, естествознание и многое другое. Все наилучшие достижения человеческой мысли, человеческих рук и составляют основу гуманитарного образования, необходимого каждому современному человеку. Исходя из этого, для студента-гуманитария математика прежде всего *общеобразовательная дисциплина*, как, например, право для студента-юриста.

Но для юриста значение математики этим не исчерпывается. Напомним слова М.В. Ломоносова: "Математику уже затем учить следует, что она ум в порядок приводит". Прежде всего своим внутренним порядком, своей логикой. Внутренний порядок в математике устанавливается особым образом, с помощью отношения логического следования.

Математика влияет на упорядочение ума и такими особенностями, как общность и абстрактность своих конструкций. Математика полна всякого рода правил, общих, строго определенных методов решения различных классов однотипных задач. Решая любую такую задачу, человек должен строго следовать точному предписанию (алгоритму) о том, какие действия и в каком порядке надо выполнить для решения задачи данного типа. Нередко изучающему математику приходится составлять подобные предписания, т.е. находить алгоритм.

Можно утверждать, что математика учит точно формулировать разного рода правила, предписания, инструкции и строго их исполнять (не последнее качество, необходимое, например, любому юристу). В юриспруденции, как и в математике, применяются одни и те же методы рассуждений, цель которых — *выявить истину*. Любой правовед, как и математик, должен уметь рассуждать логически, применять на практике индуктивный и дедуктивный методы. Поэтому, занимаясь математикой, будущий правовед формирует свое *профессиональное мышление*.

Кроме того, применение математических методов расширяет возможности каждого специалиста. Существенную роль играют статистика, умение правильно обработать информацию, сделать достоверный вывод или прогноз на основании имеющегося статистического материала. Очевидно, что ценность специалиста, если он умеет делать все это, значительно возрастает.

В конце концов, известны статистические данные по "новым русским", сделавшим удачную карьеру (предприниматели, банкиры). Оказалось, что подавляющая их часть — выпускники престижных технических вузов. По-видимому, прекрасное математическое образование, полученное ими в этих вузах, пригодилось в жизни, что еще раз подтверждает хорошо известную истину: нет ничего практичнее хорошей теории. Даже биолог Чарльз Дарвин когда-то выразился так: «У людей, усвоивших великие принципы математики, одним органом чувств больше, чем у простых смертных».

Мы живем в век математики. С начала XX в. она активно проникает во все области человеческого знания, подтверждая слова К. Маркса «Наука только тогда достигает совершенства, когда ей удастся пользоваться математикой». В настоящий момент одни науки уже безоговорочно приняли математику на вооружение, другие только начали ее применять. Гуманитарии, например, относятся к последним. Среди них немало еще сомневающихся в перспективности использования математических методов. Однако в настоящее время большая их часть спорит уже не о том, «нужно ли применять», а о том — «где и как лучше применять».

Сейчас уже появилась литература, обобщающая некоторый опыт гуманитариев в применении математических знаний. Одной из первых по использованию математических методов в историческом исследовании была работа: *Миронов Б.Н., Степанов З.В.* Историк и математика. Л.: Наука, 1975. В только что вышедшей книге (*Тихомиров Н.Б., Шелехов А.М.* Математика: Учебный курс для юристов. М.: Юрайт, 1999) показано применение математических знаний в юридической практике, криминалистике.

Формирование условий для индивидуальной деятельности человека, основывающейся на приобретенных конкретных математических знаниях для познания и осознания им окружающего мира средствами математики остается, естественно, столь же существенной компонентой вузовского математического образования.

2. Теория множеств

Сегодня мы знаем, что, логически говоря, возможно вывести почти всю современную математику из единого источника – теории множеств.

Н. Бурбаки

Одним из методов математики является метод применения абстракции, при которой не принимаются во внимание некоторые конкретные обстоятельства. Это неизбежно приводит к возникновению понятия множества, которое стало основным понятием математики. Язык теории множеств, включающий большое число различных понятий и связей между ними, все глубже проникает в различную литературу. Поэтому надо понимать этот язык и уметь им пользоваться.

Было бы неправильно переоценивать теорию множеств саму по себе: это всего-навсего удобный язык, и если вы в совершенстве владеете им и больше ничего из математики не знаете, едва ли от этого будет много проку. Наоборот, если вы знаете «много математики» и совсем незнакомы с теорией множеств, вы, возможно, достигнете успехов. Но если вы знаете *что-то* и из теории множеств, вы будете значительно лучше понимать язык математики.

2.1. Множества. Операции над множествами

Понятие множества является ключевым в математике, без которого невозможно изложение ни одного из ее разделов. Не менее широко оно используется и на бытовом уровне. Однако содержательную сторону этого понятия, которая сложилась при изучении математики и на интуитивном и на формально логическом уровне приемлемой назвать никак нельзя. Сложность заключается в том, что понятие множества — понятие не только математическое, но не в меньшей степени и философское.

Подсознательно первые представления о множестве у человека начинают формироваться с момента рождения, когда он погружается в удивительно многообразный мир окружающих его объектов и явлений. В нем уже генетически заложены возможности ускоренно воспроизвести весь опыт общения с этим миром, накопленный человечеством за многовековую историю. Уникальность этого генетического потенциала и отличает прежде всего человека разумного от других существ. С первых же шагов мы не просто пополняем список знакомых нам объектов и явлений, а начинаем дифференцировать и классифицировать их по определенным свойствам (горячие и холодные, сладкие и горькие, тяжелые и легкие, красные и зеленые и т.п.), объединяя тем самым объекты в некоторые совокупности. Первый же опыт общения с ними убеждает нас и в том, что каждый объект имеет сложную структуру (кто из нас не ломал ни одной игрушки, пытаясь уяснить из чего она состоит), представляет

собой как бы определенную совокупность других объектов, из которых как из составляющих состоит сам.

Множество — первичное понятие математики, т.е. это понятие не определяется через другие, а только поясняется. Создатель теории множеств Г. Кантор (1845–1918) определил множество как «объединение в одно целое объектов, хорошо различимых нашей интуицией или нашей мыслью», а также «множество есть многое, мыслимое нами как единое». Разумеется, эти слова не могут рассматриваться как математически строгое определение множества, такого определения не существует, поскольку понятие множества является исходным, на основании которого строятся остальные понятия математики, т. е. множество является основным строительным материалом математики.

Множество — это совокупность каких-либо объектов. Так, можно говорить о множестве целых чисел, о множестве точек на прямой, о множестве жителей города и т.д. Объекты, входящие в данное множество, называются *элементами множества*. Элементами множеств могут быть самые разнообразные предметы: буквы, числа, функции, точки, углы, люди и т. д. Отсюда с самого начала ясна чрезвычайная широта теории множеств и ее приложимость к очень многим областям знания.

Множества, состоящие из конечного числа элементов (причем неважно, известно это число или нет, главное, оно существует), называются *конечными*, а множества, состоящие из бесконечного числа элементов, — *бесконечными*.

Множества обычно обозначаются большими буквами A, B, X , а их элементы малыми a, b, x .

Запись $x \in X$ означает, что объект x есть элемент множества X . Если же x не принадлежит множеству X , то пишут $x \notin X$.

Запись $A \subset B$ (множество A содержится в B) означает, что каждый элемент множества A принадлежит B . В этом случае множество A называют *подмножеством* множества B .

Множества A и B называют *равными* ($A = B$), если $B \subset A$ и $A \subset B$. Например, множества $A = \{3, 5, 7, 9\}$ и $B = \{7, 3, 9, 5\}$ равны, так как состоят из одинаковых элементов.

Если множество не содержит ни одного элемента, то его называют *пустым* и обозначают символом \emptyset .

Совокупность допустимых объектов называют *основным (универсальным) множеством* I (или U). Множество задают либо перечислением его элементов, либо описанием свойств множества, которые четко определяют совокупность его элементов. При втором способе множество обычно определяется как совокупность тех и только тех элементов из

некоторого основного множества T , которые обладают свойством α . В этом случае используют обозначение $A = \{x \in T: \alpha(x)\}$.

Например, множество $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ равно $A = \{x \in \mathbb{N}: x < 6\}$ и $A = \{x \in \mathbb{N}: 0,5 < x < 5,9\}$, где \mathbb{N} — множество натуральных чисел.

У п р а ж н е н и я

1. Какие из следующих множеств геометрических фигур на плоскости равны между собой, если:

A — множество всех квадратов;

B — множество всех прямоугольников;

C — множество всех четырехугольников с прямыми углами;

D — множество всех прямоугольников с равными сторонами;

F — множество всех ромбов с прямыми углами.

Ответ. $A = D = F; B = C$.

2. Для каждого из слов: «сосна», «осколок», «насос», «колос» составьте множество его различных букв. Имются ли среди них равные?

Ответ. $A = \{с, о, н, а\}$, $B = \{о, с, к, л\}$, $C = \{н, а, с, о\}$, $D = \{к, о, л, с\}$; $A = C$, $B = D$.

Алгебраические операции над множествами и их свойства излагаются, обычно, с применением *кругов Эйлера* или *диаграмм Венна*, а бинарные отношения иллюстрируются на *матрицах* и *графах*. Благодаря этому основные понятия теории множеств получают наглядное представление в табличной или графической форме.

Множества можно определять также при помощи операций над некоторыми другими множествами. Пусть имеются два множества A и B .

Объединение (сумма) $A \cup B$ есть множество всех элементов, принадлежащих A или B , т.е.

$$A \cup B = \{x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Например, $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Пересечение (произведение) $A \cap B$ есть множество всех элементов, принадлежащих как A , так и B , т.е.

$$A \cap B = \{x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Например, $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$. Множества, не имеющие общих элементов ($A \cap B = \emptyset$), называют *непересекающимися* (расчлененными).

Разность $A \setminus B$ есть множество, состоящее из всех элементов A , не входящих в B , т.е.

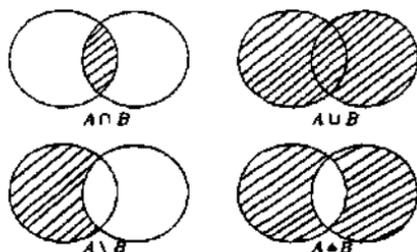
$$A \setminus B = \{x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Например, $\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 3, 4\} = \{1\}$. Ее можно рассматривать как *относительное дополнение* B до A .

Симметрическая разность (дизъюнктивная сумма) $A \Delta B$ есть множество всех элементов, принадлежащих или A , или B (но не обоим вместе), т.е.

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Например, $\{1, 2, 3\} \Delta \{2, 3, 4\} = \{1, 4\}$. Дизъюнктивная сумма получается объединением элементов множеств за исключением тех, которые встречаются дважды.



Круги Эйлера для основных операций над множествами

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Являются ли эти множества равными? Определите пересечение, объединение, разности этих двух множеств. Одинаковы ли множества $A \setminus B$ и $B \setminus A$?

Решение. Множества A и B не равны друг другу, так как содержат разные элементы. Между элементами этих множеств может быть установлено однозначное соответствие, поэтому множества являются эквивалентными. Пересечение множеств $A \cap B$ включает в себя только те элементы, которые содержатся в обоих множествах, поэтому $A \cap B = \{2, 4\}$. Объединение $A \cup B$ включает в себя все элементы, содержащиеся хотя бы в одном из множеств A или B , таким образом, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$. Разность $A \setminus B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, а разность $B \setminus A = \{6, 8, 10\}$. Очевидно, что $A \setminus B$ и $B \setminus A$ не равны. Симметрическая разность $A \Delta B = \{1, 3, 5, 6, 8, 10\}$.

Упражнения. 1. Даны два множества: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и $B = \{3, 6, 9, 12\}$. Найти объединение, пересечение, разности этих множеств.

Ответ. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12\}$; $A \cap B = \{3, 6\}$; $A \setminus B = \{1, 2, 4, 5\}$; $B \setminus A = \{9, 12\}$. $A \Delta B = \{1, 2, 4, 5, 9, 12\}$.

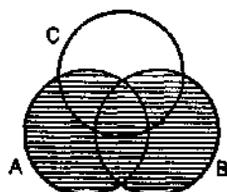
2. По данным промежуткам $A = (-7; 1]$ и $B = [-3; 4]$ на числовой прямой определить $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$.

Ответ. $A \cup B = (-7; 4]$; $A \cap B = [-3; 1]$; $A \setminus B = (-7; -3)$; $B \setminus A = (1, 4]$; $A \Delta B = (-7; -3) \cup (1, 4]$.

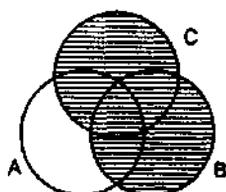
3. Даны множества $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $D = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Задайте списком множество $(A \cap B) \cup (C \cap D)$.

Ответ. $(A \cap B) \cup (C \cap D) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

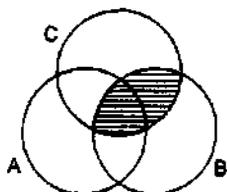
Примеры (с использованием кругов Эйлера):



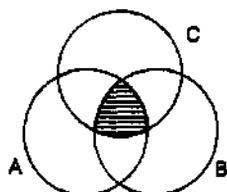
\equiv $A \cup B$
 — $(A \cup B) \cap C$



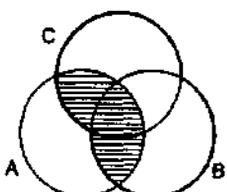
\equiv $B \cup C$
 — $A \cap (B \cup C)$



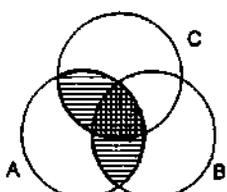
\equiv $B \cap C$
 — $A \cap (B \cap C)$



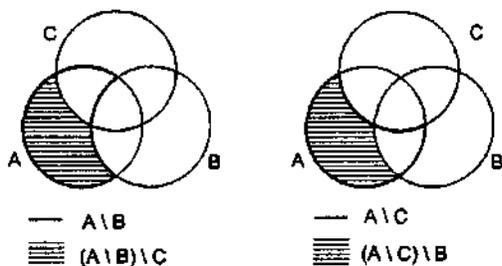
\equiv $A \cap B$
 — $(A \cap B) \cap C$



\equiv $B \cup C$
 — $A \cap (B \cup C)$



\equiv $A \cap B$ \equiv $A \cap C$
 — $(A \cap B) \cup (A \cap C)$



2.2. Множества и отношения

Центральное место занимает *теория отношений*, которая оказалась простым и удобным аппаратом для самых разнообразных задач. На ее основе обобщается понятие функции, применимое не только к числовым множествам, но и к множествам объектов любой природы. В самом общем смысле отношение означает какую-либо связь между предметами или понятиями.

| Отношения | | |
|--------------------------|--------------------------|----------------------------|
| Унарные (одноместные) | БИНАРНЫЕ (ДВУМЕСТНЫЕ) | n-мерные (многочестные) |
| ↓ | | |
| Эквивалентность | Упорядоченность | Толерантность |

Отношения между парами объектов называют *бинарными* (двуместными). Например, отношения принадлежности $a \in A$ и включения $A \subset B$. Первое из них определяет связь между множеством и элементами, а второе – между двумя множествами. Примерами бинарных отношений являются равенство ($=$), неравенства ($<$ или \leq), а также такие выражения как «быть братом», «делиться (на какое-то число)», «входить в состав (чего-либо)» и т.п.

Примеры. а) Отношение \leq выполняется для пар $(5, 7)$ и $(5, 5)$, но не выполняется для пары $(7, 5)$.

б) Отношение «иметь общий делитель, отличный от единицы», выполняется для пар $(4, 2)$, $(6, 9)$, но не выполняется для пары $(7, 8)$.

в) Отношения на множестве людей: «быть знакомым», «быть сыном», «учиться в одном вузе».

| |
|---------------------------------|
| СПОСОБЫ представления отношений |
| Сечения (фактор-множество) |
| Матрица отношений (таблица) |
| Граф отношений (стрелки) |

| |
|-----------------------------|
| ОПЕРАЦИИ над ними |
| Все теоретико-множественные |
| Обращение (симметризация) |
| Композиция |

Общие свойства отношений. Отношение может быть:

1) *рефлексивно* (от латинского *reflexivus* – «повернутый назад», т.е. если каждый элемент множества связан этим отношением сам с собой, например: равенство, равновеликость, \leq , \geq , самообслуживание, «иметь общий делитель») или *антирефлексивно* ($<$, $>$, «быть старше»);

2) *симметрично* (равенство, равновеликость, расстояние между двумя точками, «быть братом»), *антисимметрично* (нестрогое неравенство, включение) или *асимметрично* (строгое включение, «быть отцом») [если отношение асимметрично, то оно и антирефлексивно];

3) *транзитивно* (от латинского *transseo* – «перехожу»: равенство, \leq , «быть делителем», «быть родственником».

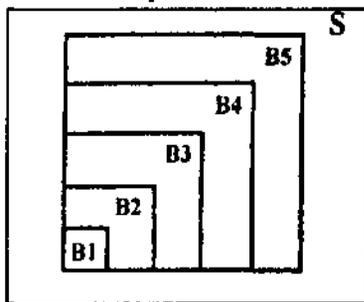
| ОБЩИЕ СВОЙСТВА ОТНОШЕНИЙ | | |
|--|---------------------------------------|---|
| рефлексивность (от лат. <i>reflexivus</i> – повернутый назад) | симметричность | транзитивность (от лат. <i>transitivus</i> – переходный) |
| антирефлексивность | асимметричность антисимметричность | |

Особо выделяются три типа бинарных отношений: *эквивалентность*, *упорядоченность* и *толерантность*, которые наиболее часто встречаются в практике.

Отношение эквивалентности представляет собой экспликацию (перевод интуитивных представлений в ранг строгих математических понятий) таких обыденных слов, как «одинаковость», «неразличимость», «взаимозаменяемость». Другими словами, отношение эквивалентности является обобщением понятия равенства. Ясно, что в реальности тождественных элементов не бывает. Наоборот, каждый элемент наделен массой индивидуальных признаков, среди которых имеются как существенные для наших рассуждений, так и несущественные. Эквивалентность можно рассматривать как совпадение элементов только по части (существенных) признаков. Эквивалентность удовлетворяет условиям рефлексивности, симметричности, транзитивности и обычно обозначается знаком " \sim ". Свойства эквивалентности записываются следующим образом:

1) $x \sim x$ (рефлексивность); 2) если $x \sim y$, то $y \sim x$ (симметричность); 3) из $x \sim y$ и $y \sim z$ следует $x \sim z$ (транзитивность).

Важнейшее значение эквивалентности состоит в том, что это отношение определяет признак, который допускает *разбиение* множества на непересекающиеся подмножества, называемые *классами эквивалентности*. Наоборот, всякое разбиение множества на непересекающиеся подмножества определяет между элементами этого множества некоторое отношение эквивалентности. Другими словами, задание на исследуемом множестве объектов отношения эквивалентности позволяет эти объекты определенным образом классифицировать, т.е. относить каждый конкретный объект к той или иной группе (классу). У этой процедуры есть вполне определенное серьезное название – операция факторизации, а сам результат называется не менее впечатляюще – фактор-множество.



Классы эквивалентности

Например, отношение «проживать в одном доме» в множестве жителей города является эквивалентностью и разбивает это множество на непересекающиеся подмножества людей, являющихся соседями по дому. Примерами отношений эквивалентности могут служить подобие или равенство треугольников на плоскости, параллельность прямых, утверждение «быть таким же» и т.п. Множество слов в русском языке можно разбить на классы эквивалентности разными способами: по первой букве (именно так составляются словари), по количеству букв и т.д. Множество студенческих групп является фактор-множеством, получаемым в результате введения на множестве студентов данного курса отношения эквивалентности (студент $a \sim$ студент b , если они из одной группы). Если же отношение эквивалентности на множестве студентов строится по результатам сдачи экзаменов, то соответствующее фактор-множество строится из четырех элементов $\{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$.

Отношение *порядка* обладает свойствами транзитивности и антисимметричности. Если между элементами множества может быть установлено отношение «старшинства», «важности», «первичности» или «предшествования», говорят об *упорядоченном* множестве. Например, студенты какой-либо группы могут быть упорядочены по возрасту, успеваемости, алфавиту. Примером абсолютно *неупорядоченного* множества является набор монет одинакового достоинства в кошельке.

Если между любыми тремя элементами множества a, b, c установлено отношение $a < b, b < c$, из которого следует, что $a < c$, множество называют *линейно упорядоченным*. Например, линейно упорядоченными являются точки прямой, отрезка, произвольной кривой линии.

| Свойства отношений <u>порядка</u> (иерархии) | |
|--|---|
| <i>Строгий порядок</i> ($x < y$) | <i>Нестрогий порядок</i> ($x \leq y$) |
| Антирефлексивность | Рефлексивность |
| Асимметричность | Антисимметричность |
| Транзитивность | |

Различают отношение *нестроого порядка* (оно рефлексивно), например, множество натуральных чисел, и отношение *строого порядка* (оно антирефлексивно), например, служебная иерархия, результаты жеребьевки.

Отношение толерантности удовлетворяет свойствам рефлексивности и симметричности. Для этого отношения, в отличие от эквивалентности, транзитивность не обязательна, и значит эквивалентность есть частный случай толерантности. Отношение толерантности представляет собой экспликацию интуитивных представлений о сходстве и неразличимости. Каждый объект неразличим сам с собой (рефлексивность), а сходство двух объектов не зависит от того, в каком порядке они сравниваются (симметричность). В то же время, если один объект сходен с другим, а другой сходен с третьим, то это вовсе не означает, что все они обязательно сходны между собой, т.е. свойство транзитивности может не выполняться.

| Свойства отношений <u>толерантности</u> (похожести) |
|---|
| Рефлексивность |
| Симметричность |

Сходство между различными объектами имеет точный смысл только тогда, когда указана совокупность признаков, относительно которой это сходство устанавливается. Два объекта считаются сходными (толерантными), если они обладают хотя бы одним общим признаком. Например, если определить отношение между словами как наличие хотя бы одной общей буквы, то толерантными будут пересекающиеся слова кроссворда.

Пример. Определив отношение толерантности как сходство между четырехбуквенными словами, если они отличаются только одной буквой, можно «превратить муху в слона»:

муха – мура – тура – тара – кара – каре – кафе – кафр – каюр – каюк – крюк – крок – срок – сток – стон – слон.

Отношение может быть определено не только для пар объектов, но и для троек, четверок и т.д. (n -местное отношение). Примером трехместных (тернарных) отношений являются: арифметические операции над числами, отношение между родителями и детьми (отец, мать, ребенок) и т.п. Пропорция $x : y = z : u$ иллюстрирует четырехместное отношение.

Мощность множеств. Большое значение в математике имеют отношения, называемые законами композиции, которые ставят в соответствие паре каких-либо элементов третий элемент из одного и того же или из различных множеств. Определяя на некотором множестве один или два таких закона и наделяя их некоторыми свойствами, получаем различные алгебраические системы: группы, кольца, поля, тела и т. д. Эти и подобные им абстрактные понятия являются обобщениями самых разнообразных объектов исследования как в самой математике, так и в специальных областях науки и техники.

Пусть X и Y — два произвольных множества. Естественно поставить вопрос о сравнении множеств по числу элементов.

Если множества X и Y конечны, то поставленная задача может быть решена двумя способами:

1. Пересчитаем число элементов в каждом из множеств и сравним результаты. Это позволит нам или установить равенство числа элементов в множествах или указать, в каком из множеств элементов больше. Однако можно поступить и иначе.

2. Каждому элементу $x \in X$ поставим в соответствие один и только один элемент $y \in Y$.

Если при этом оказывается, что каждый элемент $y \in Y$ ставится в соответствие одному и только одному элементу $x \in X$, то говорят, что между элементами множеств X и Y установлено взаимно однозначное соответствие.

Очевидно, что для конечных множеств взаимно однозначное соответствие можно установить только тогда, когда число элементов в этих множествах одинаково.

Легко видеть, что в то время, как первый способ (подсчет числа элементов) годится лишь для сравнения конечных множеств, второй способ (установление взаимно однозначного соответствия) годится в одинаковой мере как для конечных, так и для бесконечных множеств.

Ясно, что взаимно однозначное соответствие двух множеств — это частный случай отображения (функции) одного множества на другое, при котором разным элементам первого множества отвечают разные элементы второго.

Если между множествами X и Y установлено взаимно однозначное соответствие, то говорят, что эти множества *эквивалентны* (или равно-мощны) и записывают $X \sim Y$. Отсюда следует, что если два конечных множества эквивалентны, то они равночисленны. Таким образом, понятие эквивалентности множеств есть обобщение понятия равночисленности на случай бесконечных множеств.

Приведем другие примеры попарно эквивалентных множеств:

1. Пусть множество $X = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$, то есть множество натуральных чисел, а $Y = \{-1, -2, \dots, -n, \dots\}$, то есть множество целых отрицательных чисел $X \sim Y$, так как между ними устанавливается взаимно однозначное соответствие.

2. Пусть $X = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$, а $Y = \{2, 4, \dots, 2n, \dots\}$, то есть множество чётных положительных чисел. $X \sim Y$, так как взаимно однозначное соответствие между ними устанавливается по закону $X \ni n \leftrightarrow 2n \in Y$.

Как отмечалось выше, отношение эквивалентности множеств рефлексивно, симметрично и транзитивно. Поэтому совокупность всех множеств распадается на *классы* эквивалентных множеств.

Понятие эквивалентности — далеко идущее обобщение понятия равночисленности.

Пусть в множестве X имеется собственное подмножество, равно-мощное Y , но в Y нет собственного подмножества, равно-мощного X . Тогда говорят, что *мощность множества X* больше мощности Y .

Например: 1) множество \mathbb{N} всех натуральных чисел имеет большую мощность, чем множество $Y = \{1, 2, 3\}$;

2) пусть $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{9, 13, 5\}$. Рассмотрим собственное подмножество $X_1 = \{1, 2, 3\}$ множества X . Оно очевидно равно-мощно множеству Y . Ни одно из собственных подмножеств множества Y не может быть равно-мощно всему множеству X . Таким образом, мощность множества X больше, чем мощность множества Y .

Для *конечного множества* его мощность есть число элементов этого множества. Мощность *любого бесконечного множества* больше мощности любого конечного.

Среди бесконечных множеств наименьшей мощностью обладает множество \mathbb{N} всех натуральных чисел и все множества, ему равно-мощные (так называемые счётные множества). Мощность множества \mathbb{R} всех действительных чисел (так называемая мощность континуума) больше, чем мощность счётного множества.

3. Элементы дискретной математики

Число, место и комбинация – три взаимно перекрывающиеся но отличные сферы мышления к которым можно отнести все математические идеи

Дж. Сильвестр

Комбинаторика – раздел математики в котором изучаются вопросы о том сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов Другими словами, это раздел математики, в котором изучаются задачи выбора элементов из заданного конечного множества и размещения этих элементов в каком-либо порядке Например сколько различных четырёхзначных чисел можно написать с помощью цифр 1 2 3, 4 без повторения цифр?

3.1 Элементы комбинаторики

3.1.1 Основные правила комбинаторики

Правило сложения

Пример Пусть из пункта A в пункт B можно добраться самолетом, поездом и автобусом, причем между этими пунктами существуют 2 авиамаршрута, 1 – железнодорожный и 3 – автобусных Следовательно, общее число маршрутов между пунктами A и B равно $2 + 1 + 3 = 6$ Обобщая этот пример, можно сформулировать правило сложения

Если выбор каждого из объектов a_i ($i = 1, 2, \dots, k$) можно выполнить n_i способами, то выбор "или a_1 , или a_2 , ..., или a_k " можно произвести

$$n = \sum_{i=1}^k n_i \text{ способами}$$

Правило умножения

Пример Сколькими различными способами можно распределить четыре шара по двум лункам, в которые помещается ровно один шар Очевидно, первую лунку можно заполнить четырьмя способами, так как при выборе первой лунки имеется четыре шара Вторую лунку можно заполнить тремя шарами, так как после заполнения первой лунки осталось три шара

Заметим, что с каждым из четырех способов заполнения первой лунки может совпасть любой из трех способов заполнения второй Поэтому общее число способов распределения двух лунок равно $4 \times 3 = 12$

Запишем теперь правило умножения в общем виде

Если выбор каждого из k объектов $a_i (i=1, 2, \dots, k)$ можно осуществить n_i способами, то выбор " a_1, a_2, \dots, a_k " можно произвести

$$N = \prod_{i=1}^k n_i \text{ способами}$$

3.1.2 Размещения

Пусть дано множество, состоящее из n элементов. Размещением из n элементов по k ($0 \leq k \leq n$) элементов называется упорядоченное подмножество, содержащее k различных элементов данного множества. Все эти подмножества отличаются друг от друга или составом элементов, или порядком их распределения. Но число элементов во всех этих подмножествах равно k .

Для определения числа A_n^k размещений из n элементов по k учтем, что первый элемент подмножества может быть взят n различными способами, второй — $(n-1)$ способом, ..., k -й элемент — $(n-(k-1))$ способами. Отсюда, используя правило умножения, получаем

$$A_n^k = n(n-1)(n-(k-1)) = \frac{[n(n-1)(n-(k-1)) \dots (n-k+1)]}{1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Здесь $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ и $(n-k)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-k)$

Условимся считать $0! = 1$, поэтому $A_0^0 = \frac{0!}{0!} = 1$

Пример В соревнованиях принимают участие 16 команд. Сколькими способами могут распределиться три первых места, т.е. необходимо найти число всех подмножеств, состоящих из трех элементов, отличающихся составом (номераами команд) или порядком их размещения (подмножества № 1, № 2, № 3 и № 2, № 1, № 3 являются разными). Таким образом, имеем дело с размещением. Тогда искомое число равно

$$A_{16}^3 = \frac{16!}{(16-3)!} = \frac{16!}{13!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13} = 14 \cdot 15 \cdot 16 = 3360$$

3.1.3 Перестановки

Перестановкой из n элементов называется размещение из n элементов по n элементов. Так как каждая перестановка содержит все n элемен-

тов множества, то различные перестановки отличается друг от друга только порядком следования элементов.

Число всех возможных перестановок из n элементов обозначают P_n :

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!, \text{ то есть } P_n = n!.$$

Пример. Сколькими способами можно расставить 6 различных книг на одной полке?

Искомое число способов равно

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Действительно, первую книгу можно выбрать шестью способами, вторую – пятью способами и т.д., последнюю – одним способом. По правилу умножения общее число способов равно $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

3.1.4. Сочетания

Пусть дано множество, состоящее из n элементов. Сочетанием из n элементов по k ($0 \leq k \leq n$) элементов называется любое подмножество, которое содержит k различных элементов данного множества. Таким образом, различными подмножествами считаются только те, которые отличаются составом элементов. Подмножества, отличающиеся друг от друга лишь порядком следования элементов, не считаются различными.

Число всех возможных сочетаний из n элементов по k обозначается C_n^k . Так как число перестановок из k равно $k!$, то число размещений из n элементов по k — A_n^k будет в $k!$ раз больше, чем число сочетаний из n элементов по k — C_n^k , т.е. $A_n^k = k! C_n^k$, отсюда $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

Пример. В бригаде из 25 человек нужно выделить четырех для работы на определенном участке. Сколькими способами это можно сделать?

Так как порядок выбранных четырех человек не имеет значения, то это можно сделать C_{25}^4 способами:

$$C_{25}^4 = \frac{25!}{(25-4)!4!} = \frac{25!}{21!4!} = \frac{25! \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25}{21!4!} = \frac{22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 12\,650.$$

Упражнения

1. Имеется 5 видов конвертов без марок и 4 вида марок. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку для посылки письма?

Ответ. 20.

2. Из 9 человек надо выбрать 4 человека и разместить их на четырех занумерованных стульях (по 1 человеку на стуле). Сколькими способами это можно сделать?

Ответ. 3024.

3. Сколькими способами можно составить команду из 4 человек для соревнования по бегу, если имеется 7 бегунов?

Ответ. 35.

4. Сколькими способами можно обить 6 стульев тканью, если имеются ткани шести различных цветов и все стулья должны быть разного цвета?

Ответ. 720.

3.2. Элементы теории графов

Происхождение графов. Многие задачи сводятся к рассмотрению совокупности объектов, существенные свойства которых описываются связями между ними. Например, глядя на карту автомобильных дорог, можно интересоваться только тем, имеется ли связь между некоторыми населенными пунктами, отвлекаясь от конфигурации и качества дорог, расстояний и других подробностей. Интерес могут представлять различные связи и отношения между людьми, событиями, состояниями и вообще между любыми объектами.

В подобных случаях удобно рассматриваемые объекты изображать точками, называемыми *вершинами*, а связи между ними — линиями (произвольной конфигурации), называемыми *ребрами*. Множество вершин, связи между которыми определены множеством ребер, называют *графом*.

Первая работа по графам была опубликована двадцатилетним Леонардом Эйлером в 1736 г., когда он работал в Российской академии наук. Она содержала решение задачи о кенигсбергских мостах: можно ли совершить прогулку таким образом, чтобы, выйдя из любого места города, вернуться в него, пройдя в точности один раз по каждому мосту? С тех пор поток задач с применением графов нарастал подобно снежной лавине. Наряду с многочисленными головоломками и играми на графах, рассматривались важные практические проблемы, многие из которых требовали математических методов. Уже в середине прошлого века Кирхгоф применил графы для анализа электрических цепей.

Однако теория графов как математическая дисциплина сформировалась только к середине 30-х гг. нашего столетия. Теория графов располагает мощным аппаратом решения прикладных задач из самых различных областей науки и техники. Сюда относятся, например, анализ и синтез цепей и систем, сетевое планирование и управление, исследование операций,

выбор оптимальных маршрутов и потоков в сетях, моделирование жизнедеятельности организмов, исследование случайных процессов и многие другие задачи. Теория графов тесно связана с такими разделами математики, как теория множеств, теория матриц, математическая логика и теория вероятностей. Во всех этих разделах графы применяют для представления различных математических объектов, и в то же время сама теория графов широко использует аппарат родственных разделов математики.

Ориентированные графы. Часто связи между объектами характеризуются вполне определенной ориентацией. Например, на некоторых улицах допускается только одностороннее автомобильное движение, отношения между людьми могут определяться подчиненностью или старшинством. Ориентированные связи характеризуют переход системы из одного состояния в другое, результаты встреч между командами в спортивных состязаниях, различные отношения между числами (неравенство, делимость). Для указания направления связи между вершинами графа соответствующее ребро отмечается стрелкой. Ориентированное таким образом ребро называют *дугой*, а граф с ориентированными ребрами — *ориентированным графом*.

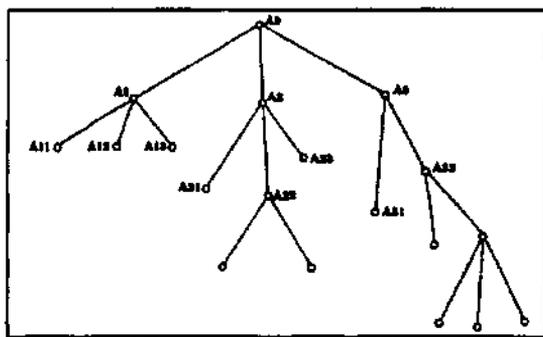
Взвешенные графы. Дальнейшее обобщение отображения связей между объектами с помощью графов состоит в приписывании ребрам и дугам некоторых количественных значений, качественных признаков или характерных свойств, называемых *весами*. В простейшем случае это может быть порядковая нумерация ребер и дуг, указывающая на очередность при их рассмотрении (приоритет или иерархия). Вес ребра или дуги может означать длину (пути сообщения), количество набранных очков (турниры), характер отношений между людьми (сын, брат, отец, подчиненный, учитель) и т.п. Вес можно приписывать не только ребрам и дугам, но и вершинам. Например, вершины, соответствующие населенным пунктам на карте автомобильных дорог, могут характеризоваться количеством мест в кемпингах, пропускной способностью станций техобслуживания. Вообще, вес вершины означает любую характеристику соответствующего ей объекта (цвет изображаемого вершиной предмета, возраст человека и т. п.).

Типы конечных графов. Если множество вершин графа конечно, то он называется *конечным графом*. Для ориентированного ребра (дуги) различают *начальную вершину*, из которой дуга исходит, и *конечную вершину*, в которую дуга заходит. Ребро, граничными вершинами которого является одна и та же вершина, называется *петлей*. Ребра с одинаковыми граничными вершинами являются параллельными и называются *кратными*. В общем случае граф может содержать и *изолированные вершины*, которые не являются концами ребер и не связаны ни между собой, ни с другими вершинами.

Маршруты. Нередко задачи на графах требуют выделения различных маршрутов, обладающих определенными свойствами и характеристиками. *Маршрут* длины m определяется как последовательность m ребер графа (не обязательно различных) таких, что граничные вершины двух соседних ребер совпадают. *Замкнутый маршрут* приводит в ту же вершину, из которой он начался. Маршрут, все ребра которого различны, называется *цепью*, а маршрут, для которого различны все вершины, называется *простой цепью*. Замкнутая цепь называется *циклом*, а простая цепь — *простым циклом*. Маршрут, не содержащий повторяющихся дуг, называется *путем*, а не содержащий повторяющихся вершин, — *простым путем*. Замкнутый путь называется *контуром*, а простой замкнутый путь — *простым контуром*. Граф называется *циклическим (контурным)*, если он содержит хотя бы один цикл (контур).

Деревья и лес.

Особый интерес представляют связанные ациклические графы, называемые *деревьями*. Дерево на множестве p вершин всегда содержит $q=p-1$ ребер, т.е. минимальное количество ребер, необходимое для того, чтобы граф был связным. Действительно, две вершины связываются одним ребром, и для связи каждой последующей вершины с предыдущими требуется ребро, следовательно, для связи p вершин необходимо и достаточно $p-1$ ребер. При добавлении в дерево ребра образуется цикл, а при удалении хотя бы одного ребра дерево распадается на компоненты, каждая из которой представляет собой также дерево или изолированную вершину. Несвязный граф, компоненты которого являются деревьями, называется *лесом*.



Дерево

Примерами древовидной структуры являются генеалогический граф (родословное дерево), а также совокупность всех файлов, размещенных на жестком диске компьютера или дискете. Каждый логический диск имеет каталог, называемый главным или корневым. Он имеет оглавление, подобное оглавлению книги. В оглавлении корневого каталога перечислено содержимое диска: имена файлов этого каталога и других каталогов, вложенных в него.

4. Элементы математической логики

Высшее назначение математики — находить порядок в хаосе, который нас окружает.

Н. Винер

Начало науки о законах и формах мышления связывают с именем Аристотеля. Прошло два тысячелетия, прежде чем Г. Лейбниц предложил ввести в логику математическую символику и использовать ее для общих логических построений. Эту идею последовательно реализовал в прошлом столетии Дж. Буль и тем самым заложил основы математической (символической) логики.

4.1. Сущность математической логики

Логика (от древнегреческого *logos* – слово, выражающее мысль) является началом любой научной теории. Даже в Библии было сказано, что "сначала было слово". Логика как наука о способах мышления, приводящих к истине, возникла в глубокой древности. Ее основы были заложены древнегреческими философами Перменидом, Зеноном, Протагором, Сократом, сведения о которых дошли до нас благодаря Платону (427–347 гг. до н.э.). Им были также выявлены некоторые принципы и схемы рассуждений (отчасти). Но только Аристотель (384–322 гг. до н.э.) решительно отделил их от содержания рассуждений и создал чистую систему силлогизмов — правил вывода, что привело к возникновению теории логики.

Правила вывода позволяют преобразовывать исходные утверждения подобно тому, как тождественные преобразования в математике дают возможность решать различные системы уравнений. Последующим шагом формализации логики является появление специальной символики для точной и компактной записи утверждений и определения операций над ними.

Идея перенесения тех методов, которые обычно применяются в математике, на логику постепенно реализуется Б. Паскалем (1646–1716), Г. Лейбницем (1646–1716), Дж. Булем (1815–1864), О. де Морганом (1806–1871), Г. Фреге (1848–1925), Б. Расселом (1872–1970), Д. Гильбертом (1862–1943), А. Марковым (1903–1979) и др. Так появился язык математической логики как логическое продолжение языка математики.

Языковыми формами этого языка являются математические понятия — абстрактные объекты. В отличие от объектов реального мира, они на-

чисто лишены материальной сущности. Например, бильярдный шар, лишенный материальной сущности, — это бесконечное множество точек трехмерного Евклидова пространства, расстояние которых до некоторой особой точки не превышает величины R — радиуса этого шара. Из таких математических объектов можно строить объекты, процессы и явления реального мира.

Получаемые при этом подобия называют математическими моделями. Компьютер "оживляет" эти подобия, и они начинают вести себя в некотором замкнутом пространстве (в единичном гиперкубе, который создается устройством памяти компьютера) подобно тому, как ведут себя в реальном мире исследуемые объекты, процессы и явления. При этом без всякого риска исследователь может осуществлять любые эксперименты над этими подобиями. Результаты этих экспериментов не вырвутся за пределы замкнутой компьютерной памяти, не потревожат экологическую систему реального мира и его обитателей. Исследователь лишь получит ответ на вопрос: «Что же в действительности может произойти, если?..»

С появлением языка математической логики стало возможным составлять алгоритмы логического вывода. Заговорили о создании "искусственного интеллекта", и встал вопрос: "Нельзя ли создать универсальный алгоритм логического вывода (суперинтеллект), позволяющий доказать или опровергнуть любое утверждение?" В свое время такой суперинтеллект пытались создать Б. Паскаль, Г. Лейбниц. Программа Д.Гильберта была последней попыткой реализации этого универсального алгоритма, но и она закончилась неудачей. Оказалось, что создание такого суперинтеллекта невозможно даже теоретически. В 1931 г. австрийский математик Курт Гедель доказал, что всякая достаточно богатая формальная система не полна, то есть в ней найдутся содержательно истинные утверждения, не доказуемые в этой системе.

В последние десятилетия логика находит все более широкое применение в технике при исследовании и разработке вычислительных машин, дискретных автоматов. Ее методы используются в теории преобразования и передачи информации, теории вероятностей и комбинаторном анализе. Математическая логика начинает внедряться в такие нематематические области, как экономика, биология, медицина, психология, языкознание, право. Интенсивно развиваются специальные разделы математической логики, призванные обслуживать конкретные области науки и техники.

Столь энергичный выход математической логики за пределы математики объясняется тем, что ее аппарат легко распространяется на объекты самой общей природы, необходимо лишь, чтобы они характеризовались конечным числом состояний.

Двузначная логика имеет дело с такими объектами, которые принимают одно из двух возможных значений (истинное или ложное высказывание, наличие или отсутствие заданного признака у объекта и т.п.). Объекты, которые могут принимать значения из конечного множества, содержащего больше двух элементов, называют *многозначными*. Они либо сводятся каким-нибудь способом к двузначным объектам, либо обслуживаются аппаратом *многозначной логики*.

Устоявшееся представление о математической логике как науке, изучающей законы мышления с применением аппарата математики, главным образом, для нужд самой математики, в современных условиях становится слишком узким. С расширением областей применения и дальнейшим развитием математической логики изменяется и взгляд на нее. Объектами математической логики являются любые дискретные конечные системы, а ее главная задача — структурное моделирование таких систем.

4.2. Особенности математической логики

Математическая логика сделала возможным усовершенствование аксиоматического метода и сама усовершенствовалась с помощью этого метода.

Как видно из предыдущего, название «математическая логика» может истолковываться двояко.

С одной стороны, эта отрасль науки строится как математическая теория, в ней используются математические методы, так что в этом смысле она представляет собой «математику логики». С другой стороны, разрабатывая точный логический язык математики, она служит «логикой математики». Тщательный анализ соотношения предметов математики и логики связан с глубокими философскими проблемами и не может быть предметом нашего рассмотрения в этой книге.

Одной из характерных особенностей математической логики является использование математического языка символов и формул.

В математическом языке, так же как в обычном, мы пользуемся именами предметов, т.е. условными языковыми выражениями, которыми обозначаются эти предметы, различая при этом имя предмета и сам предмет, обозначаемый этим именем.

Так, мы отличаем число пять как общее свойство («инвариант») класса множеств, эквивалентных, например, множеству пальцев человеческой руки, от слова «пять», которым это число обозначается на русском языке, от английского «five», от знаков «5», «101», «V» и т.п., которыми оно обозначается в различных системах нумерации.

Язык хорошо приспособлен к точному описанию некоторой области предметов, если в нем (1) для каждого предмета, свойства предмета и отношения между предметами этой области имеется имя; (2) различные предметы, свойства, отношения имеют различные имена. Если не выполняется первое из этих условий, то язык беден, недостаточен для описания данной области предметов; если же не выполняется второе условие, то язык оказывается двусмысленным. Такой двусмысленностью, в силу различных, исторически обусловленных причин, обладают естественные языки. Наличие в них омонимов, т. е. одинаковых слов, служащих именами различных предметов («коса», «лук» и т.п.), является нарушением условия (2). Математический язык, происходя от обычного, является результатом его усовершенствования, в частности устранения двусмысленности.

К языку обычно не предъявляется требование, чтобы различные имена обозначали различные предметы, т.е. разрешаются синонимы. Это, вообще говоря, относится и к математическому языку. Можно, например, считать, что « $1+2$ » и « 3 » — различные имена одного и того же числа.

В элементарной алгебре буквами обозначаются в основном числа. В логике же буквами обозначаются логические объекты, например предложения. Под предложением понимают то, что обычно понимают под этим термином в грамматике любого естественного языка, а именно языковое выражение или соединение слов, имеющее самостоятельный смысл.

В процессе рассуждения (не только в математике) мы из одних предложений формируем другие, преобразуя их с помощью частицы *не* или соединяя их с помощью союзов *и*, *или*, *если... то*, *если и только если* и др., обозначающих определенные логические связи между предложениями.

Для выяснения структуры сконструированных таким образом сложных предложений бывает удобно исходные предложения обозначать буквами, отвлекаясь от их конкретного содержания.

Одна из существенных особенностей математического языка состоит в применении переменных различных типов, благодаря чему такой язык способен выражать абстрактные формы, которые могут заполняться различным конкретным содержанием. Понятие это по существу всем нам хорошо знакомо — с ним мы часто встречаемся, заполняя различные стандартные бланки.

Под переменной мы понимаем символ, вместо которого можно подставить имена элементов некоторого множества.

Предметы, имена которых разрешается подставить вместо переменной, называются ее значениями, а множество этих предметов — областью значений этой переменной.

В элементарной алгебре используется лишь один тип переменных, а именно переменные, значениями которых служат числа; такие переменные называют числовыми переменными.

С помощью этих переменных, имен конкретных чисел и знаков операций образуются формы, которые при подстановке вместо переменных их значений обращаются в числа.

Предложение, относительно которого имеет смысл говорить, что его содержание истинно или ложно, будем называть высказыванием.

Предложение, содержащее переменную, не является высказыванием.

Например, « $x < 3$ », очевидно, не является высказыванием, так как не имеет смысла говорить, что оно истинно или ложно. Если же на место переменной x подставить какое-нибудь число (ее значение), мы получим высказывание, истинное или ложное в зависимости от того, какое число подставлено.

В математической логике используются и другие типы переменных, значениями которых являются не числа, а логические объекты, например высказывания.

Потребность в использовании таких переменных возникает в логике, например, при выяснении вопроса о следовании одного сложного высказывания из другого.

Под сложным высказыванием мы понимаем высказывание, допускающее расчленение на другие высказывания.

Если же никакая часть высказывания сама уже не является высказыванием (или по крайней мере не рассматривается как таковое), то его называют элементарным.

Совокупность и порядок логических связей (или операций), с помощью которых сложное высказывание образовано из элементарных, составляют логическую структуру сложного высказывания.

Операции над высказываниями являются предметом наиболее элементарной части математической логики, называемой логикой (или алгеброй) высказываний.

Можно пользоваться обоими терминами («логика высказываний» и «алгебра высказываний») как синонимами, обозначающими одну и ту же часть логики с разных точек зрения: это и логика (по своему предмету) и алгебра (по своему методу).

Чтобы различить в терминологии эти два построения, сохранено для первого название «логика (или «алгебра») высказываний», а для второго используют термин «исчисление высказываний».

Ниже приведены символы, обозначающие некоторые логические операции.

| Символ | Название символа, его смысл | Как следует читать |
|-------------------|--|---|
| \neg | Отрицание | $\neg p$ не p |
| \Rightarrow | Импликация (логическое следствие) | $p \Rightarrow q$ если p , то q |
| \Leftrightarrow | Эквивалентность | $p \Leftrightarrow q$ p тогда и только тогда, когда q ; |
| \wedge | Конъюнкция (логическое произведение) | $p \wedge q$ p и q |
| \vee | Дизъюнкция (логическая сумма) | $p \vee q$ p или q |
| \forall | Квантор всеобщности от английского «all» — любой | $\forall x P(x)$ для всякого (для каждого) x , обладающего свойством $P(x)$ |
| \exists | Квантор существования от английского «existence» — существование | $\exists x X$ существует элемент x множества X |

Для проведения доказательств применяют так называемые **истинностные таблицы**:

| | |
|--------|----------|
| p | $\neg p$ |
| истина | ложь |
| ложь | истина |

| p | q | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \Rightarrow q$ | $p \Leftrightarrow q$ |
|--------|--------|--------------|------------|-------------------|-----------------------|
| истина | истина | истина | истина | истина | истина |
| истина | ложь | ложь | истина | ложь | ложь |
| ложь | истина | ложь | истина | истина | ложь |
| ложь | ложь | ложь | ложь | истина | истина |

Примеры. а) Доказать (с помощью истинностных таблиц) закон ложного положения $p \Rightarrow q \Leftrightarrow (\neg q) \Rightarrow (\neg p)$.

| p | q | $\neg p$ | $\neg q$ | $p \Rightarrow q$ | $\neg q \Rightarrow \neg p$ |
|--------|--------|----------|----------|-------------------|-----------------------------|
| истина | истина | ложь | ложь | истина | истина |
| истина | ложь | ложь | истина | ложь | ложь |
| ложь | истина | истина | ложь | истина | истина |
| ложь | ложь | истина | истина | истина | истина |

б) Проверить с помощью истинностных таблиц тождество:

$$p \wedge (p \vee q) = p.$$

| p | q | $p \vee q$ | $p \wedge (p \vee q)$ | p |
|--------|--------|------------|-----------------------|--------|
| истина | истина | истина | истина | истина |
| истина | ложь | истина | истина | истина |
| ложь | истина | истина | ложь | ложь |
| ложь | ложь | ложь | ложь | ложь |

Упражнение. Проверьте с помощью истинностных таблиц следующее тождество: $p \vee (\neg p) \wedge q = p \vee q$.

Математический анализ не менее всеобъемлющ, чем сама природа; он определяет все ощутимые взаимосвязи, измеряет времена, пространства, силы, температуры... Его главный атрибут — ясность; в нем совершенно не имеется знаков для выражения туманных понятий.

Ж. Фурье

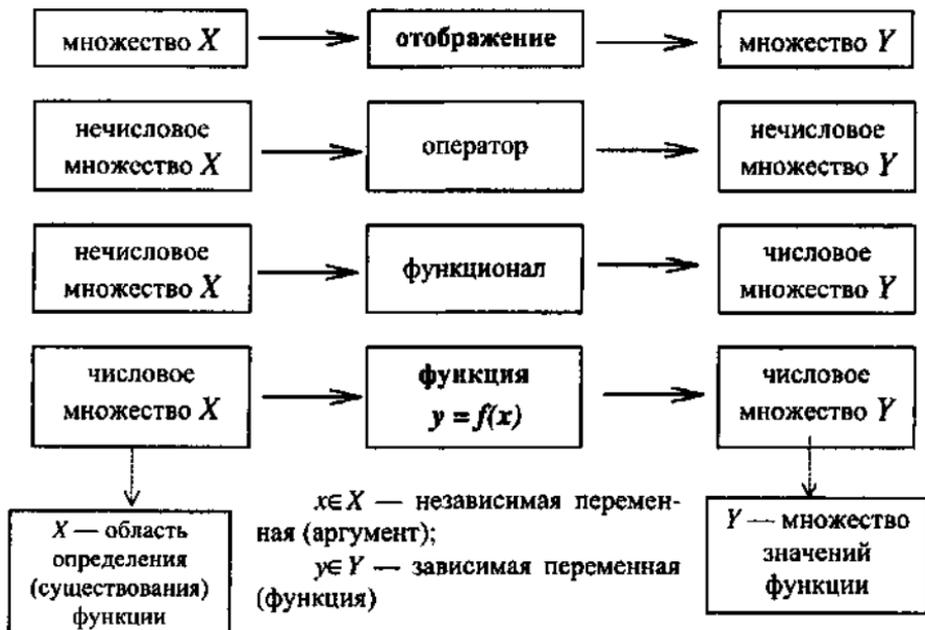
II. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Возникновение «высшей математики», т.е. дифференциального и интегрального исчисления, явилось переломным моментом во всей истории человеческой культуры. Сегодня, когда современная наука далеко раздвинула рамки видимого мира, понятия производной и интеграла стали необходимым элементом. Без этих понятий невозможно описывать и исследовать переменные величины и функции, характеризующие зависимости одних величин от других.

5. Введение в анализ

5.1. Понятие функции

Пусть X и Y — произвольные непустые множества.



Определение. Если каждому элементу $x \in X$ по какому-то правилу f поставлен в соответствие элемент $y \in Y$, то говорят, что задано отображение множества X в множество Y .

В том случае, когда множества X и Y нечисловые, отображение называется *оператором*; отображение нечислового множества X в числовое множество Y называется *функционалом*; отображение числового множества X в числовое множество Y называется *функцией*.

Определение. Отображение числового множества X в числовое множество Y называется функцией и обозначается $y = f(x)$.

Множество X называется *областью определения* (существования) функции, а множество Y — *множеством ее значений*; $x \in X$ называется *независимой переменной* или *аргументом*, $y \in Y$ — *зависимой переменной* или *функцией*.

Способы задания функции:

- аналитический;
- графический;
- табличный;
- алгоритмический.

Типы функций:

- чётные и нечётные;
- периодические;
- монотонные;
- ограниченные.

Множество точек плоскости $(x, f(x))$, где $x \in X$, называется *графиком функции* $y = f(x)$.

Функция считается заданной, если известно правило f , по которому каждому значению аргумента $x \in X$ можно найти соответствующее значение функции y . Наиболее распространенным заданием функции является *аналитическое задание*, т.е. выражение правила f некоей формулой или группой формул.

Иногда функция задается *графиком* или *таблицей*. Ясно, что формула «сильнее» любой таблицы. Формула содержит не только те сведения, которые приведены в данной таблице, но позволяет найти значения функции также и при значениях независимой переменной, не содержащихся в таблице. Однако таблица удобнее формулы, так как с ее помощью можно быстрее найти значение y при данном x , если это значение x есть в таблице. Таблица также нагляднее сложной формулы, по которой зачастую трудно оценить значения, принимаемые функцией; однако простая формула позволяет быстрее представить себе ход функции, чем невыразительный ряд чисел (таблица).

Часто встречается такое положение, когда теории интересующего нас явления еще нет, но есть результаты опытов (экспериментов, проб); при этом результатом опытов является таблица. В этом случае практически всегда (даже «вручную», а с использованием компьютера тем более)

можно подобрать приближенную формулу, которая правильно описывает функциональную зависимость и не дает больших ошибок при *интерполяции*¹, т.е. при переходе от известных значений аргумента к новым, промежуточным между уже имеющимися. При этом найденную зависимость называют эмпирически найденным законом, или *эмпирической формулой*². Однако эмпирическая формула нуждается, разумеется в проверке: погрешность, получаемая при ее использовании, может оказаться и довольно значительной (ясно, что надежность эмпирической формулы будет тем выше, чем более густой является сетка тех наблюдаемых значений переменной, исходя из которых мы подбирали данную формулу). И совсем уж нежелательно использование эмпирической формулы за пределами исследованного интервала значений независимой переменной (такое продолжение формулы называется экстраполяцией – от латинской частицы *ex*, т.е. «вне»): это может привести к большим ошибкам.

5.2. Предел функции

Определение. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если она определена в некоторой окрестности точки x_0 , исключая, может быть, саму эту точку, и каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, всегда можно указать такое число $\delta > 0$, что из выполнения неравенства $|x - x_0| < \delta$ ($x \neq x_0$) следует выполнение неравенства $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Если число A является пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, пишут

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

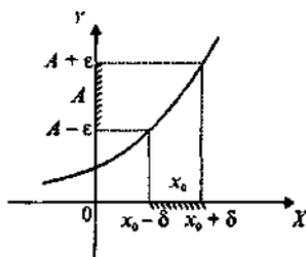
В практике вычисления пределов большое место занимают так называемые 1-й и 2-й замечательные пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(здесь x – радианная мера угла) и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

где $e = 2,71828\dots$ – иррациональное число, служащее основанием натуральных логарифмов, обозначаемых $\ln x$.



¹ Латинское слово *interpolare* означает «подновлять».

² Прилагательное «эмпирический» (от греческого слова *empeiria* – опыт) означает «опытный», «полученный опытным путем».

Предел – важнейшее понятие математики. Понятие предела опирается на интуитивное представление о процессе изменения и неограниченного приближения. Точное математическое определение предела оформилось в математике лишь в начале XIX в. В связи с этим потребовалось уяснить понятие функции, а также развить теорию действительного числа. До этого почти два столетия в математике существовало интуитивное представление о пределе, однако и оно оказалось чрезвычайно плодотворным, так как внесло в математику совершенно новый метод рассуждений — метод пределов. Его применение и развитие привели к созданию дифференциального исчисления и интегрального исчисления, к созданию математического анализа.

Суть этого метода состоит в том, что для определения неизвестной величины находят ее приближения, при этом не одно-два, а неограниченное число таких приближений. Если эти приближения становятся все более точными, отличаются от определяемой величины все меньше и меньше, то сама величина находится как предел этих приближений.

Подобных рассуждений древнегреческая математика не знала. Если в ней и рассматривались приближения, как, например, у Евдокса и Архимеда в их «методе исчерпывания» при определении площадей и объемов, то число этих приближений было невелико, и, кроме того, установление равенства между искомой площадью (или объемом) и уже известной проводилось элементарными геометрическими методами. Теперь же, в методе пределов, строятся бесконечные приближения и неизвестная величина определяется как предел.

Метод пределов не возник в математике сам собой, он оформился постепенно, в результате труда многих математиков, которые начали рассматривать новые для своего времени задачи, не решаемые элементарными методами. Это были задачи определения размеров тел и центра их тяжести, нахождения длин кривых, построения касательных к кривым, нахождения мгновенной скорости при неравномерном движении. Постепенно накапливался опыт и вырабатывались приемы решения подобных задач в общей постановке, например задач, когда требовалось определить мгновенную скорость не в данном конкретном движении, а в любом, если только была известна зависимость пути от времени. Это привело к формированию на основе понятия предела новых понятий интеграла и производной, к созданию математического анализа. Очевидно, что с применением метода пределов потребовалось развить способы вычисления пределов, установить правила действий с пределами, т.е. создать теорию пределов. Основным понятием в этой теории стало понятие бесконечно малой – переменной, предел которой равен нулю. В этот период математический анализ назывался анализом бесконечно малых.

\lim — это первые три буквы латинского слова *limes*, которое и означает «предел». Слово *limes* для обозначения предела впервые употребил И. Ньютон, символ \lim ввел французский ученый С. Люилье в 1786 г., а выражение $\lim_{n \rightarrow \infty}$ первым записал англичанин У. Гамильтон в 1855 г.

Примеры. а) Найти предел $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+4}{x^2+3}$.

Используя теоремы о пределах, находим

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+4}{x^2+3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (2x+4)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2+3)} = \frac{2 \lim_{x \rightarrow 3} x + \lim_{x \rightarrow 3} 4}{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + \lim_{x \rightarrow 3} 3} = \frac{2 \cdot 3 + 4}{3^2 + 3} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

б) Если предел знаменателя равен нулю, а предел числителя не равен нулю, то предел дроби равен бесконечности:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2+5}{x-3} = \frac{4 \cdot 3^2 + 5}{3-3} = \infty.$$

Если имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, необходимы преобразования.

в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 3x + 2}$.

Числитель и знаменатель дроби при $x=1$ равны 0. Выполним тождественные преобразования:

$$x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4); \quad x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2);$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-2)}.$$

Функции $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 3x + 2}$ и $\frac{x-4}{x-2}$ совпадают в окрестности точки $x=1$,

($x \neq 1$), поэтому их пределы равны при $x \rightarrow 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-4}{x-2} = \frac{-3}{-1} = 3.$$

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x + 5}{7x^2 + 8x - 1} = \frac{\infty}{\infty}$.

Преобразуем дробь, разделив числитель и знаменатель на x^2 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x + 5}{7x^2 + 8x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}{7 + \frac{8}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{3 + 0 + 0}{7 + 0 - 0} = \frac{3}{7}.$$

Упражнения. а) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x+4}{x-3}$.

Ответ. 7.

б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1+x}{3-x^3}$.

Ответ. 0.

в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 10x + 3}{5x - 16x + 3}$.

Ответ. $\frac{4}{7}$.

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 2}{-x^2 - 4x + 1}$.

Ответ. -2.

6. Дифференциальное исчисление

Открытие исчисления бесконечно малых дало математикам возможность свести законы движения тел к аналитическим уравнениям.

Ж.Л. Лагранж

Дифференциальное исчисление – это раздел математического анализа, связанный главным образом с понятиями производной и дифференциала функции. В дифференциальном исчислении изучаются правила вычисления производных (законы дифференцирования) и применение производных к исследованию свойств функций.

Центральные понятия дифференциального исчисления – производная и дифференциал – возникли при рассмотрении большого числа задач естествознания и математики, приводивших к вычислению пределов одного и того же типа. Важнейшие среди них – физическая задача определения скорости неравномерного движения и геометрическая задача построения касательной к кривой.

6.1. Производная. Правила и формулы дифференцирования

Производная функции f в точке x_0 есть *скорость изменения* функции f в этой точке.

Геометрическое толкование производной. Производная функции f в точке x_0 определяется тангенсом угла наклона касательной, проведенной к графику функции f в точке $x = x_0$.

Исходя из этого, выражение «производная от моего настроения по времени положительна» на обычный язык переводится как «мое настроение улучшается».

Задача-шутка. Какой знак имеет производная от настроения по расстоянию до кресла зубного врача?

Легко показать, что, приравняв нулю производную, можно найти те значения независимой переменной, при которых функция может иметь максимум или минимум, т.е. экстремум.

В «критических» (подозрительных на максимум и минимум) точках, где функция достигает максимума, производная переходит от положительных значений к отрицательным (или вторая производная — производная от производной — отрицательна); для минимума — все наоборот.

Операцию получения функции $f'(x)$ из функции $f(x)$ называют *дифференцированием* функции $f(x)$.

Техника нахождения производных (или, как часто говорят, техника дифференцирования) оказывается сравнительно простым и более легким делом, чем, например, решение алгебраических уравнений. Формулы для производных нередко оказываются даже проще (или, во всяком случае, не сложнее), чем формулы для самих исходных функций.

Основные правила дифференцирования

$$(C)' = 0 \quad (\text{здесь } C - \text{const}); \quad (CU)' = CU'; \quad (U+V)' = U'+V';$$
$$(UV)' = U'V + UV'; \quad \left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{UV' - V'U}{V^2}; \quad \text{«цепное правило»}.$$

Для нахождения производных не надо ждать вдохновения; здесь не нужны изобретательность, выдумка, озарение, ибо задача всегда решается просто педантичным применением ряда простых правил.

Основные формулы для производных

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1};$$

$$(a^x)' = a^x \ln a;$$

$$(e^x)' = e^x;$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$(\sin x)' = \cos x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Примеры. а) Пусть

$$y = 3x^2 - 6x + 5.$$

Тогда .

$$y' = (3x^2)' - (6x)' + (5)' = 3 \cdot 2x - 6 \cdot 1 + 0 = 6x - 6.$$

б) Пусть

$$y = -4x^3 + 2x^{-2} - 3.$$

Тогда

$$y' = -4 \cdot 3x^2 + 2 \cdot (-2)x^{-3} - 0 = -12x^2 - 4x^{-3}.$$

в) Найти y' , если $y = \frac{7x^3 + 5}{x - 2}$.

Положив $U = 7x^3 + 5$, $V = x - 2$ и воспользовавшись приведенной выше формулой, имеем

$$y' = \left(\frac{7x^3 + 5}{x - 2} \right)' = \frac{(x - 2)(7x^3 + 5)' - (7x^3 + 5)(x - 2)'}{(x - 2)^2} =$$

$$= \frac{(x - 2)(7 \cdot 3x^2) - (7x^3 + 5) \cdot 1}{(x - 2)^2} = \frac{21x^3 - 42x^2 - 7x^3 - 5}{(x - 2)^2} = \frac{14x^3 - 42x^2 - 5}{(x - 2)^2}.$$

г) Пусть

$$f = (3x^2 + 5)(2x - 4);$$

требуется найти $f'(x)$, и в частности $f'(0)$.

Здесь

$$U = 3x^2 + 5, V = 2x - 4.$$

Тогда

$$U' = 3 \cdot 2x + 0 = 6x, V' = 2 - 0 = 2.$$

Поэтому

$$f'(x) = UV' + VU' = (3x^2 + 5) \cdot 2 + (2x - 4) \cdot 6x = 18x^2 - 24x + 10,$$

и в частности

$$f'(0) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=0} = 10.$$

У п р а ж н е н и я . Найти производные функций:

а) $y = 4x^3 - 2x^2 + x - 5.$

Ответ. $y' = 12x^2 - 4x + 1.$

б) $y = (x - 1)(2x + 3).$

Ответ. $y' = 4x + 1.$

в) $y = 3x - 5(x + 2)(3 - x).$

Ответ. $y' = 10x - 2.$

г) $y = \frac{x - 1}{x^2 + 2}.$

Ответ. $y' = -\frac{x^2 - 2x - 2}{(x^2 + 2)^2}.$

д) $y = \frac{2x - 3}{4 - 5x}$ при $x = 1.$

Ответ. $y'(1) = -7.$

6.2 Приложения производной

6.2.1 Исследования на экстремум

| |
|----------------------|
| Исследование функций |
|----------------------|

Первая производная

Аналитические признаки возрастания
и убывания

Исследования на экстремум

Вторая производная

Аналитические признаки выпуклости
и вогнутости

Исследование на точки перегиба

Пример Число 64 разбить на такие две части, чтобы они в произведении давали максимум

Обозначим две искомые части a и b . Тогда $a + b = 64$. Требуется найти максимум произведения, т.е. исследовать на экстремум функцию

$$y = ab, \text{ или } y = a(64 - a)$$

Берем производную $y' = 64 - 2a$. Приравниваем ее нулю $64 - 2a = 0$, откуда $a = 32$. Тогда $b = 64 - a = 64 - 32 = 32$, а $y_{\max} = ab = 32 \cdot 32 = 1024$.

Упражнения 1. Нужно огородить с трех сторон участок прямоугольной формы, прилегающей к длинной стене. Из имеющегося материала можно сделать забор длиной 120 м. Каковы должны быть размеры забора, чтобы площадь, обнесенная им, была наибольшей?

Ответ 30 и 60 м

2. Прямоугольный участок площадью 600 м^2 требуется огородить забором. Вследствие дополнительной отделки каждый погонный метр забора, выходящего на улицу, в два раза дороже метра забора, отделяющего участок от соседей. При какой длине забора, выходящего на улицу, стоимость его будет минимальной?

Ответ 20 м

3. Исследовать на экстремум функцию $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 12$

Ответ $y_{\min} = y(4) = 4$, $y_{\max} = y(2) = 8$

6.2.2 Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

Пример Найти наибольшее и наименьшие значения функции

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35 \text{ на отрезке } [-4, 4]$$

Найдем критические точки, лежащие внутри отрезка $[-4, 4]$ Производная $y' = 3x^2 - 6x - 9$ Решив уравнение $3x^2 - 6x - 9 = 0$, найдем критические точки $x_1 = -1, x_2 = 3$

Значения функции в критических точках

$$y(-1) = 40, \quad y(3) = 8$$

Вычислим значения функции на концах отрезка $[-4, 4]$

$$y(-4) = -41, \quad y(4) = 15$$

Сравнивая вычисленные значения функции, отмечаем, что наибольшее значение функции на отрезке $[-4, 4]$ равно 40 и достигается в критической точке $x = -1$, а наименьшее значение равно -41 при $x = -4$

Замечание Если критическая точка оказывается вне исследуемого отрезка, то, естественно, из дальнейшего анализа она исключается

Упражнения Найти наибольшее и наименьшее значения функций а) $y = x^2 - 4x + 3$, б) $y = -x^3 + 9x^2 - 24x + 10$ на отрезке $[0, 3]$

Ответ а) $y_{\text{наим}} = y(2) = -1, \quad y_{\text{наиб}} = y(0) = 3,$

б) $y_{\text{наим}} = y(2) = -10, \quad y_{\text{наиб}} = y(0) = 10$

6.2.3 Вычисление пределов раскрытие неопределенностей (правило Лопиталя)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$$

Пример Раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

При $x = 2$ числитель и знаменатель рассматриваемой дроби обращаются в нуль. Для того чтобы раскрыть эту неопределенность, воспользуемся правилом Лопиталя и получим

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^3 - 8)'}{(x^2 - 4)'} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 2} x = 3$$

Упражнение Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\sin x}$

Ответ $\ln 2$

7. Интегральное исчисление

*Смысл — там, где змеи интеграла
Меж цифр и букв, меж d и f!*

В. Брюсов

Интегральное исчисление — это раздел математического анализа, в котором изучаются интегралы, их свойства, способы вычисления и приложения. Вместе с дифференциальным исчислением оно составляет основу аппарата математического анализа.

Интегральное исчисление возникло из рассмотрения большого числа задач естествознания и математики. Важнейшие из них — физическая задача определения пройденного за данное время пути по известной, но, быть может, переменной скорости движения и значительно более древняя задача вычисления площадей и объемов геометрических фигур.

Центральным в интегральном исчислении является понятие интеграла, которое, однако, имеет две различные трактовки, приводящие соответственно к понятиям неопределенного и определенного интегралов. Рассматриваемая в интегральном исчислении математическая операция (обратная к дифференцированию) называется интегрированием или, точнее, неопределенным интегрированием.

7.1. Неопределенный интеграл. Методы интегрирования

Интегрирование функции $f(x)$ — это операция отыскания (для данной функции $f(x)$) так называемой *первообразной* функции.

Первообразной называют такую функцию $F(x)$, по отношению к которой исходная функция $f(x)$ является производной, т.е. $f(x) = F'(x)$.

Например, для функции $f(x) = 2x^2 - 3x$ первообразной будет $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$, точнее, *семейство* первообразных $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная. Действительно, легко убедиться, что

$$\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C \right)' = 2x^2 - 3x.$$

Переход $f(x) \rightarrow [F(x) + C]$ есть *операция интегрирования* функции $f(x)$.

Неопределенным интегралом функции $f(x)$ называется совокупность всех ее первообразных

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Геометрически неопределенный интеграл представляет семейство плоских кривых, смещенных друг относительно друга вдоль вертикальной оси.

Таблица основных интегралов получается из основных формул дифференциального исчисления путем прямого их обращения.

Таблица основных интегралов

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1);$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

Методы интегрирования

Метод разложения

$$\int f(x) dx \Rightarrow \text{сумма табличных интегралов}$$

Метод подстановки
(замены переменной)

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt$$

Метод интегрирования по частям

$$\int UdV = UV - \int VdU$$

Замечания

☞ Интегрирование, как правило, значительно сложнее дифференцирования. Оно не является настолько механическим, требует большей практики и изобретательности.

☞ Интегрирование — действие, обратное дифференцированию, и его можно проверить дифференцированием.

☞ Некоторые обратные действия в математике не однозначны и не всегда выполнимы; здесь это приводит к существованию так называемых *неберущихся* интегралов.

Примеры

Метод разложения

$$\int (x^2 + 7x - 5) dx = \int x^2 dx + \int 7x dx - \int 5 dx = \frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 5x + C.$$

$$\text{Проверка. } \left(\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 5x + C \right)' = \frac{3x^2}{3} + \frac{14x}{2} - 5 = x^2 + 7x - 5.$$

Метод подстановки (замены переменной)

$$\text{Найти } \int (4x - 3)^2 dx.$$

Введем новую переменную, положив $u = 4x - 3$,

$$du = (4x - 3)' dx = 4 dx, \quad dx = \frac{du}{4}.$$

Внесем эти выражения в интеграл

$$\int u^2 \frac{du}{4} = \frac{1}{4} \int u^2 du = \frac{1}{4} \frac{u^3}{3} + C.$$

Сделаем обратную замену

$$\frac{1}{4} \frac{u^3}{3} + C = \frac{(4x - 3)^3}{12} + C.$$

$$\text{Проверка. } \left(\frac{(4x - 3)^3}{12} + C \right)' = \frac{3(4x - 3)^2 \cdot 4}{12} = (4x - 3)^2.$$

Интегрирование по частям

Требуется найти интеграл $\int x e^x dx$.

Положим

$$U = x, \quad dV = e^x dx. \quad \text{Тогда } dU = dx, \quad V = e^x$$

и

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

$$\text{Проверка. } (x e^x - e^x + C)' = x e^x + e^x - e^x = x e^x.$$

Упражнения. Найти.

$$\text{а) } x^6 dx; \quad \text{б) } \int (x - x^3) dx; \quad \text{в) } \int x^2 (x^2 + 3) dx; \quad \text{г) } \int \sin 7x dx;$$

$$\text{д) } \int \cos(3x + 7) dx; \quad \text{е) } \int x \ln x dx \quad (\text{принять } U = \ln x).$$

Ответ. а) $\frac{x^7}{7} + C$; б) $\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + C$; в) $\frac{x^5}{5} + x^7 + C$; г) $-\frac{1}{7} \cos 7x + C$;
 д) $\frac{1}{3} \sin(3x+7) + C$; е) $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$.

7.2. Определенный интеграл

Интеграл можно определить как предел интегральных сумм

| | |
|--|---|
| Определенный интеграл функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ | $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0, i=1}^n \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = S$ |
|--|---|

С помощью интегральных сумм можно приближенно вычислять самые различные величины.

Интегралом от a до b функции f называется приращение первообразной F этой функции: $F(b) - F(a)$, т.е. (формула Ньютона — Лейбница)

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

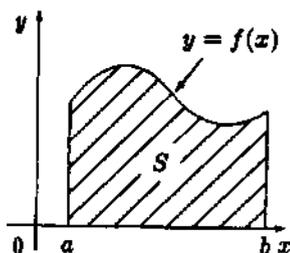
Примеры. Вычислить:

а) $\int_1^2 x^2 dx$; б) $\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx$.

а) $\int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_1^2 = \frac{1}{3} (8 - 1) = \frac{7}{3}$

б) $\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx = \int_0^8 \sqrt{2x} dx + \int_0^8 \sqrt[3]{x} dx =$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^8 + \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \Big|_0^8 = \frac{16^{\frac{1}{2}}}{2} - \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{3}{4} \cdot 8^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{4} \cdot 0 = \frac{100}{3}$$



Геометрический смысл определенного интеграла

Упражнение. Найти числа, получающиеся при использовании в интеграле $\int_1^2 f(x) dx$ следующих функций

$$\text{а) } f(x) = \frac{1}{x^2}; \quad \text{б) } f(x) = \frac{1}{x^3}$$

$$\text{Ответ. а) } \frac{1}{2}; \quad \text{б) } \frac{3}{8}.$$

Пример. Вычислить площадь, ограниченную кривой $y = \sin x$ и осью абсцисс, если $x \in [0, \pi]$.

Для ответа на поставленный вопрос следует вычислить определенный интеграл

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) = -((-1) - 1) = 2 \text{ ед.}^2.$$

Упражнение. Найти площадь плоской фигуры, отграниченной параболой $y = x^2 + 1$, осью Ox и прямыми $x = 1$ и $x = 4$.

Ответ 24

Пример. Интегрирование по частям в определенном интеграле:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x \sin x dx &= -x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x dx = -x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \sin x \Big|_0^{\pi/2} = \\ &= -\left(\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - 0 \cos 0\right) + \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 \end{aligned}$$

Здесь

$$U = x, \quad dU = dx, \quad dV = \sin x dx, \quad V = -\cos x.$$

Упражнения а) $\int_1^e x^2 \ln x dx$, б) $\int_0^{\pi/4} x \cos 2x dx$

$$\text{Ответ а) } \frac{2e^3 + 1}{9}, \quad \text{б) } \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

8. Дифференциальные уравнения

Математик, оперируя множеством символов, явно имея дело с чисто формальными истинами, тем не менее может достичь бесконечно важных результатов для описания физического мира

Карл Пирсон

Многочисленные задачи естествознания, техники и других областей знания сводятся к тому, что по заданным свойствам некоторого процесса или явления необходимо найти математическую модель самого процесса в виде формулы, связывающей переменные величины, т.е. в виде функциональной зависимости.

Уравнения, в которых содержатся производные или дифференциалы искомых функций, называются дифференциальными. Они являются мощным средством познания окружающего нас мира. Дифференциальное уравнение – это как бы мгновенный снимок процесса в данный момент времени, интегрируя дифференциальное уравнение, мы по мгновенным снимкам восстанавливаем течение процесса в целом.

Обыкновенным дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение, в котором неизвестной является функция одного независимо переменного, причем в уравнение входят производные различных порядков. В самом общем виде ДУ быть записано так:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Порядок старшей производной, входящей в состав уравнения, называется *порядком* уравнения. Решением ДУ называется функция $y = \varphi(x)$, обращающая это уравнение в тождество.

Пример Функция $y = Cx + x^2$ является решением уравнения $y' - \frac{y}{x} = x$, так как она обращает это уравнение в тождество (убедитесь!).

Дифференциальные уравнения *первого* порядка $F(x, y, y') = 0$

Формы записи

$$y' = f(x, y) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Основные типы

Уравнения с разделяющимися переменными

Однородные уравнения

Линейные уравнения

График решения называется интегральной кривой, а процесс нахождения решений – интегрированием ДУ. Следует отметить, что методы решения ДУ достаточно многообразны – они существенно зависят от его вида: порядка (первого, второго, ...), типа (с разделяющимися переменными, однородные, линейные, ...) и т.д.

При отыскании решения ДУ используют операцию интегрирования, что связано с появлением произвольной постоянной. Если действие повторяется n раз, то, очевидно, в решении будет содержаться n произвольных постоянных.

Общим решением ДУ называется функция вида $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$.

Пример Уравнение $y'' - 3y' + 2y = 0$ имеет общее решение $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ (проверьте!).

Если постоянным C_i придать конкретные числовые значения, то полученная функция называется *частным решением*.

Задача нахождения частного решения ДУ, удовлетворяющего начальному условию $y = y_0$ при $x = x_0$, называется *задачей Коши* (по имени французского математика).

Пример *Задача о законе «естественного роста»*

Закон «естественного роста» — это закон, при котором скорость роста вещества прямо пропорциональна его количеству. Найдем формулу для определения изменения количества вещества y в зависимости от времени x , считая, что в начальный момент при $x = 0$ количество вещества было y_0 . Используя физический смысл производной, этот закон можно записать так

$$\frac{dy}{dx} = ky,$$

где k — коэффициент пропорциональности. Уравнение описывает многие процессы «размножения». Решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y = y_0$ при $x = 0$ имеет вид $y = y_0 e^{kx}$. Представляет интерес то, что по этой формуле, выражающей закон «естественного роста», происходит и «размножение» числа нейтронов в ядерных реакциях и размножение числа бактерий, и рост населения и т.п.

Упражнения Найдите частные решения уравнений

а) $x dx = dy$, $y(1) = 0$, где при $\lambda = 1$, $y = 0$

б) $yy' - x = 0$, $y(2) = 1$

Ответ а) $y = \frac{x^2 - 1}{2}$, б) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = \frac{3}{2}$

Существует еще одна причина высокой репутации математики именно математика дает наукам определенную меру уверенности в выводах достичь которой без математики они не могут

А Эйнштейн

III. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

9. Основы теории вероятностей и математической статистики

Теорию вероятностей можно определить как раздел математики, в котором изучаются закономерности присущие массовым случайным явлениям. Методы теории вероятностей широко применяются при математической обработке результатов измерений, а также во многих задачах экономики, статистики страхового дела массового обслуживания.

Математическая статистика – это наука, занимающаяся разработкой методов сбора, регистрации и обработки результатов наблюдений (измерений) с целью познания закономерностей случайных массовых явлений.

Первые работы, в которых зарождались основные понятия теории вероятностей, представляли собой попытки создания теории азартных игр (Б Паскаль, П Ферма, Х Гюйгенс). Следующий этап развития связан с именем Я Бернулли. Дальнейшими успехами теория вероятностей обязана А Муавру, П Лапласу, К Гауссу, С Пуассону и др. Наиболее плодотворный период связан с именами П Л Чебышева и его учеников А А Маркова и А М Ляпунова, последующее развитие — с именами С Н Бернштейна, А Я Хинчина, А Н Колмогорова, В И Романовского, Н И Смирнова, Б В Гнеденко и др.

Концепция детерминированного подхода к явлениям окружающего мира долгое время преобладала как в организации научных исследований, так и в представлении их результатов. В основе этой концепции распространенное механистическое представление о том, что при сохранении неизменными внешних условий, повторении некоторых определенных действий неизбежно можно прийти к прежнему результату. Эксперимент называется детерминированным, если его повторение не приводит к новым результатам. В противном случае, когда повторение эксперимента может привести к другому результату, эксперимент называется случайным. Такое название связано с тем, что типичными экспериментами, в которых имеет место указанное явление (повторные действия

могут давать разные результаты), являются эксперименты, заключающиеся в подбрасывании монеты или игрального кубика, раздачи колоды карт и т.п. В каждом из них мы сталкиваемся с неоднозначностью результата эксперимента. Так, монета может упасть вверх «гербом» или «решкой», а кубик — любой из шести граней, причем невозможно заранее предугадать, что конкретно произойдет при данном подбрасывании. Поэтому говорят, что результат зависит от случая, отсюда и название эксперимента.

Задача теории вероятностей заключается в построении вероятностных моделей случайных экспериментов. Вероятностная модель позволяет придать строгий математический смысл таким словам, как «случайность», «событие», «вероятность», «правдоподобный» и т.п., позволяет оценить шансы на появление различных результатов, возможных в данном случайном эксперименте.

Конечно, надо отдавать себе отчет в том, что, как всякая модель, и вероятностная модель тоже, является некоторой идеализацией описываемого эксперимента — она не предназначена для воспроизведения всех деталей, а воплощает лишь основные черты явления. В частности, при подбрасывании монеты мы предполагаем, что результатом эксперимента не может быть пропажа монеты или приземление ее на ребро. Кроме того, чрезвычайно важным в теории вероятностей является предположение о принципиальной возможности многократного повторения случайного эксперимента. Если такой возможности нет, то построение вероятностной модели не имеет смысла. Можно сказать, что конкретная информация о самых разных ситуациях, которые могут возникнуть в данном случайном эксперименте, содержащаяся в вероятностной модели, "разворачивается" лишь при многократном повторении этого эксперимента. Так, мы можем утверждать, что если подбросим "правильную" монету 1000 раз, то число выпадений герба будет мало отличаться от 500.

9.1. Событие и вероятность: основные понятия, определение вероятности

9.1.1. Понятие о случайном событии

Опыт, эксперимент, наблюдение явления называются *испытанием*. Испытаниями, например, являются: бросание монеты, выстрел из винтовки, бросание игральной кости (кубика с нанесенным на каждую грань числом очков — от одного до шести).

Результат (исход) испытания называется *событием*. Событиями являются: выпадение герба или выпадение цифры, попадание в цель или

промах, появление того или иного числа очков на брошенной игральной кости.

Для обозначения событий используются большие буквы латинского алфавита: A, B, C и т. д.

Ответ на вопрос, считать ли данное событие случайным, зависит от имеющейся информации. Например, появление поезда на станции в промежутке времени от 18.00 до 18.10 — событие случайное с точки зрения пассажира, не знающего расписания, и неслучайное для пассажира, знающего расписание. В опыте с бросанием монеты, если знать с достаточной точностью массу, начальные координаты и скорость монеты, можно (в принципе) рассчитать ее траекторию и, следовательно, предсказать, которой из двух сторон она упадет на стол.

| Виды событий | | |
|--------------|-----------|-------------|
| Достоверные | Случайные | Невозможные |

О п р е д е л е н и е. Два события называются *совместимыми*, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.

П р и м е р. Испытание: однократное бросание игральной кости. Событие A — появление трех очков, событие B — появление нечетного числа очков. События A и B совместимы.

О п р е д е л е н и е. Два события называются *несовместимыми*, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании.

П р и м е р. Испытание: однократное бросание монеты. Событие A — выпадение герба, событие B — выпадение цифры. Эти события несовместимы, так как появление одного из них исключает появление другого.

Или, например, при одном бросании кости появление не менее трех очков и при этом появление четной грани — события совместные, а появление цифры 3 и при этом появление четной грани — события несовместные.

О п р е д е л е н и е. Два события A и B называются *противоположными*, если в данном испытании они несовместимы и одно из них обязательно происходит.

Событие, противоположное событию A , обозначают через \bar{A} .

Пример. Испытание: бросание монеты. Событие A — выпадение герба, событие B — выпадение цифры. Эти события противоположны, так как исходами бросания могут быть лишь они и появление одного из них исключает появление другого, т. е. $A = \neg B$ или $\neg A = B$.

Определение. Событие называется *достоверным*, если в данном испытании оно является единственно возможным его исходом, и *невозможным*, если в данном испытании оно заведомо не может произойти.

Пример. Испытание: извлечение шара из урны, в которой все шары белые. Событие A — вынут белый шар — достоверное событие; событие B — вынут черный шар — невозможное событие.

Следует отметить, что достоверное и невозможное события в данном испытании являются противоположными.

Достоверное событие не может не произойти (например, выпадение не менее одного очка при бросании кости); невозможное событие не может произойти (например, выпадение семи очков).

Определение. Событие A называется *случайным*, если оно объективно может наступить или не наступить в данном испытании.

Пример. Событие A_4 — выпадение четырех очков при бросании игральной кости — случайное. Оно может наступить, но оно может и не наступить в данном испытании.

9.1.2. Определение вероятности

С понятием вероятности случайных событий мы встречаемся в своей повседневной деятельности, когда оцениваем шансы появления такого рода событий.

Вероятность события A — число $P(A)$, характеризующее возможность появления этого события. По определению, $0 \leq P(A) \leq 1$. Вероятность невозможного события равна нулю, вероятность достоверного события равна единице. Иногда вероятность выражают в процентах.

В некоторых простейших ситуациях вероятность случайного события можно указать сразу: при бросании (симметричной!) монеты естественно считать оба возможных исхода (герб или цифра) имеющими равную вероятность, т. е. 0,5, или 50 %. При бросании игральной кости появление любой цифры от 1 до 6 — равновероятные события, с вероятностью $1/6$ каждое.

Вообще, если данный опыт может иметь n исходов и нет оснований считать появление какого-либо исхода более вероятным, чем другие, по-

лагают вероятность каждого исхода равной $1/n$. Если событие A происходит в результате одного из m равновероятных исходов, то $D(A) = m/n$.

Например, появление нечетной грани при бросании кости (событие A) происходит при выпадении 1, или 3, или 5, т.е. здесь $m = 3$, поэтому $D(A) = 3/6 = 1/2$. Рассчитанную таким образом вероятность называют *априорной*. В более сложных ситуациях расчет вероятностей каких-либо случайных событий может производиться на основании предположений о законах, управляющих деталями соответствующих процессов.

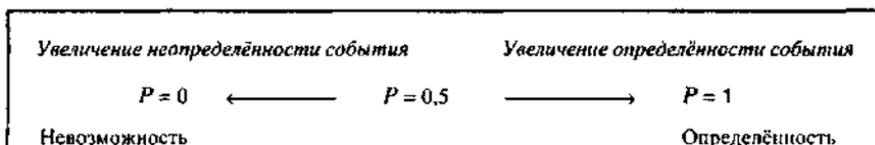
| | | |
|-------------------------|--|---|
| Определения вероятности | | |
| $P(A) = \frac{M}{N}$ | $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}$ | $P(A) = \frac{\text{мера } A}{\text{мера } \Omega}$ |

Пример. Из колоды карт наудачу выбирают одну карту. Найти вероятность того, что это карта пиковой масти.

Считая, что в колоде 36 карт, мы имеем общее число исходов $n=36$. Всего карт пиковой масти 9, поэтому $m = 9$.

Итак, $P(A) = m/n = 9/36 = 1/4$.

Наряду с классическим определением, используется так называемое статистическое определение вероятности. Отношение $p = m/n$ числа m появлений события A при n испытаниях называется *частотой* этого события. С ростом n частота события в определенном смысле приближается к вероятности P этого события. Пусть производятся независимые испытания, при каждом из которых вероятность события A неизменна. Справедливо утверждение, называемое *законом больших чисел* или *теоремой Бернулли*. Оно означает, что если число испытаний достаточно велико, то с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, отличие частоты события A от его вероятности меньше любого наперед заданного положительного числа. Так, много раз бросая монету, мы «почти наверняка» будем получать примерно равные частоты выпадений герба и цифры.



9.1.3. Алгебра событий

О п р е д е л е н и е . Суммой событий A и B называется событие $C = A + B$, состоящее в наступлении по крайней мере одного из событий A или B . Аналогично определяется сумма большего числа событий. Например, появление четной грани кости есть сумма трех событий: выпадения 2, или 4, или 6.

Теорема сложения вероятностей

Для несовместных событий

$$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B)$$

Для совместных событий

$$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

П р и м е р . Испытание: стрельба двух стрелков (каждый делает по выстрелу). Событие A — попадание в мишень первым стрелком, событие B — попадание в мишень вторым стрелком. Суммой событий A и B будет событие $C = A + B$, состоящее в попадании в мишень по крайней мере одним стрелком.

О п р е д е л е н и е . Произведением событий A и B называется событие $C = AB$, состоящее в том, что в результате испытания произошли и событие A , и событие B .

Аналогично произведением конечного числа событий A_1, A_2, \dots, A_k называется событие $A = A_1 A_2 \dots A_k$, состоящее в том, что в результате испытания произошли все указанные события.

Теорема умножения вероятностей

Для независимых событий

$$P(A \text{ и } B) = P(AB) = P(A) \times P(B)$$

Для зависимых событий

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$$

В условиях предыдущего примера произведением событий A и B будет событие $C = AB$, состоящее в попадании в мишень двух стрелков.

Произведение несовместных событий — событие невозможное. Сумма и произведение событий аналогичны соответственно объединению и пересечению множеств (см. гл. 2). Вероятность суммы $A + B$ несовместных событий A и B равна сумме вероятностей событий A и B :

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

В общем случае

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Пример. Два стрелка стреляют в одну и ту же цель, причем вероятность поражения цели первым стрелком 0,8, а вторым стрелком 0,5. Оба стрелка стреляют по команде (т.е. одновременно) один раз. Какова вероятность, что цель будет поражена хотя бы одним из стрелков?

Пусть A — попадание в цель первым стрелком, B — вторым стрелком, $A + B$ — поражение цели хотя бы одним стрелком, AB — поражение цели обоими стрелками. По формуле имеем

$$P(A + B) = 0,8 + 0,5 - P(AB).$$

В данном примере можно считать события A и B независимыми, поэтому

$$D(\dot{A}B) = P(A) \times P(B) = 0,8 \times 0,5 = 0,4. \quad \text{Тогда } D(\dot{A} + B) = 0,9.$$

Условная вероятность — вероятность появления события A при условии, что произошло событие B , обозначается $D_B(\dot{A})$. Вероятность произведения событий вычисляется с помощью условных вероятностей по формуле

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A).$$

Пример. В ящике имеются 7 белых и 5 черных шаров, отличающихся лишь цветом. Опыт состоит в том, что сначала вынимают (не глядя) один шар и, не опуская его обратно, вынимают еще один шар. Какова вероятность, что оба вынутых шара черные?

Появление первого черного шара (событие A) имеет, очевидно, вероятность $D(\dot{A}) = 5/12$. Если первый шар оказался черным, то условная вероятность события B — появления второго черного шара (при условии, что первый шар был черным) — равна $P_A(B) = 4/11$, так как перед выниманием второго шара осталось 11 шаров, из них 4 черных. Вероятность вынуть два черных шара подряд можно подсчитать по формуле

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \times P_A(B) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{5}{33} = 0,152.$$

События A и B называются *независимыми*, если условная вероятность $P_B(A)$ равна вероятности $D(\dot{A})$. Другими словами, для независимых событий появление одного из них не влияет на вероятность появления другого. Так, в предыдущем примере вероятность появления второго черного шара не зависела бы от цвета вынутого первого шара, если, вынув первый шар, мы положили бы его обратно в ящик. Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \times P(B).$$

На практике независимые события встречаются очень часто, так как причинная связь явлений во многих случаях отсутствует или несущественна.

Пример. Производят n бросаний монеты. Результат каждого бросания — случайное событие, вероятность которого естественно считать не зависящей от результатов других бросаний, поэтому результаты этих n испытаний можно считать независимыми событиями.

| | | |
|-------------------------------------|--|---------------------------|
| Формула полной вероятности | $P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P_{H_i}(A)$ | $\sum_{i=1}^n P(H_i) = 1$ |
| Формула Байеса (теорема гипотез) | $P_A(H_i) = \frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{P(A)}$ | |

У п р а ж н е н и я

А. ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ПОДСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.

1. Игральная кость подбрасывается три раза. Какова вероятность того, что: а) шестерка не появится ни разу; б) шестерка появится хотя бы 1 раз?

Ответ. а) 0,579; б) 0,421.

2. Из 40 экзаменационных вопросов студент выучил 30. Какова вероятность того, что он ответит: а) на три заданных вопроса; б) на 2 из 3 заданных вопросов?

Ответ. а) 0,411; б) 0,440.

3. Из урны с 5 белыми и 7 черными шарами наугад берут 4 шара. Найти вероятности событий: а) взято 2 белых шара; б) взято белых шаров больше, чем черных.

Ответ. а) 0,424; б) 0,162.

4. Из колоды в 36 карт наугад берут 4 карты. Найти вероятности следующих событий: а) все карты имеют одну масть; б) все карты красные; в) все карты — тузы.

Ответ. а) 0,00856; б) 0,0519; в) 0,0000170.

5. В коробке находятся 6 новых и 2 израсходованные батарейки. Какова вероятность того, что две вынутые из коробки наудачу батарейки окажутся новыми?

Ответ. 15/28.

Б. ПРАВИЛА СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.

1. Из урны с 8 белыми и 4 черными шарами последовательно вынимают 3 шара. Какова вероятность вынуть три белых шара?

Ответ. 0,255.

2. В первой урне 4 белых и 6 синих шаров, во второй 5 белых и 3 синих. Наугад из каждой урны берут по 2 шара. Найти вероятности событий: а) все шары белые; б) все шары одного цвета; в) два шара белые.

Ответ. а) 0,0476; б) 0,0833; в) 0,419.

3. Двое поочередно подбрасывают монету. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет герб. Какова вероятность выигрыша для каждого из игроков?

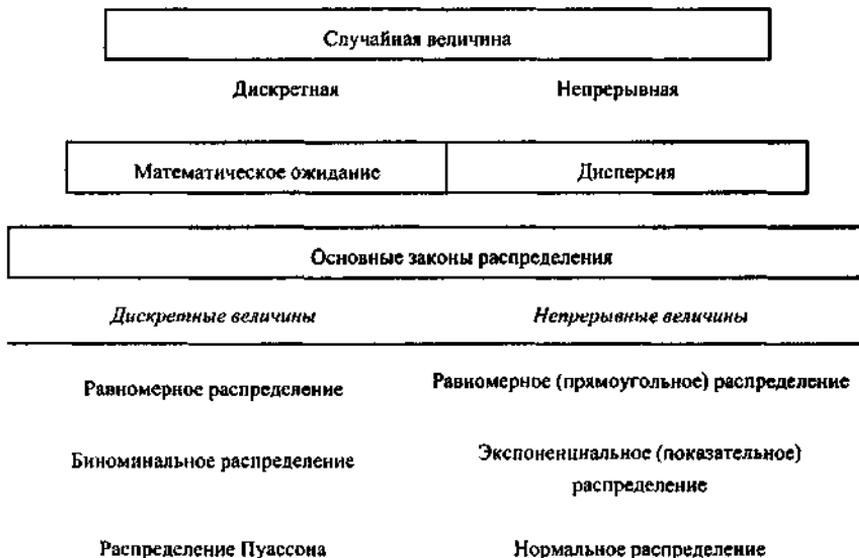
Ответ. $2/3$ — для начинающего; $1/3$ — для второго.

4. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,75. Сколько независимых выстрелов необходимо назначить, чтобы вероятность поражения мишени была больше: а) 0,95; б) 0,99; в) 0,999?

Ответ. а) 3; б) 4; в) 5.

9.2. Случайные величины

Схематично основные понятия можно представить следующим образом.



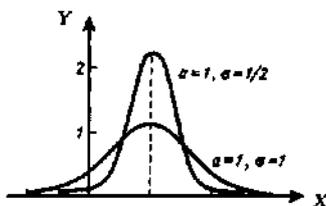
Случайная величина — переменная величина, конкретное значение которой зависит от случая. Например, температура воздуха в 12 часов дня 1 июля в Новосибирске; номер грани, выпадающий при бросании кости; скорость автомобиля в данный момент времени, и т. д.

Для характеристики случайной величины необходимо знать множество возможных значений этой величины и вероятности, с которыми она может принимать эти значения. Эти данные образуют *закон распределения* случайной величины. Например, распределение числа очков при бросании игральной кости описывается равными вероятностями $1/6$ для каждого значения от 1 до 6.

Множество возможных значений *дискретной* случайной величины конечно (или счетно). Встречаются также *непрерывные* случайные величины, возможные значения которых заполняют всю числовую ось (или некоторые интервалы).

Непрерывную случайную величину A следует задавать не указанием вероятностей ее отдельных значений, а непрерывной (или кусочно-непрерывной) функцией, называемой *плотностью распределения* вероятностей случайной величины A .

Часто встречается *нормальное распределение* или *распределение Гаусса*. На рисунке показана плотность нормального распределения (два варианта).



Дискретной случайной называют величину X , которая принимает отдельные значения x_i с вероятностями p_i . Ее законом распределения называют соответствие между возможными значениями x_i и их вероятностями p_i . Следует заметить, что $\sum p_i = 1$. Самыми важными характеристиками случайной величины являются математическое ожидание и дисперсия.

Математическое ожидание $M(X)$ определяется как «среднее взвешенное», т.е. по формуле

$$M(X) = \sum x_i p_i.$$

Термин «математическое ожидание» связан с представлением о среднем или наиболее ожидаемом выигрыше в теории азартных игр.

Пример. Пусть в некоторой лотерее на каждый билет вероятность выиграть 100 р.—3 %, 1000 р.—0,5 %, 10000 р.—0,01 %, других выигрышей нет. Каков средний выигрыш в лотерее (на один билет)?

Средний выигрыш подсчитывается как математическое ожидание; он равен

$$0,03 \times 100 + 0,005 \times 1000 + 0,0001 \times 10000 = 9 \text{ р.}$$

*Дисперсия*¹ $D(X)$ случайной величины X характеризует разброс возможных ее значений относительно математического ожидания и определяется по формуле

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

Для детерминированной величины, принимающей только одно значение x_0 , математическое ожидание равно x_0 , а дисперсия равна нулю.

Понятие случайного (стохастического) процесса является расширением понятия случайной величины. Можно сказать, что случайный процесс — это семейство случайных величин, эволюционирующих во времени.

9.3. Основные понятия математической статистики

Термин "статистика" в настоящее время употребляется в разных значениях, однако зачастую под ним понимают науку, изучающую массовые явления в целях выявления в них закономерностей и получения некоторых обобщенных показателей, кратко характеризующих полученные данные. Как правило, статистика имеет дело с числовыми значениями, которые определяются влиянием множества различных причин, одни из которых являются существенными, а другие — случайными. Основная задача статистики состоит в том, чтобы абстрагироваться от случайного и выявить типичное, характерное и закономерное.

Сам термин "статистика" произошел от латинского слова *status*, что означает политическое состояние и первоначально статистикой называлось изучение государственных дел, а видных политических деятелей, особенно хорошо осведомленных и потому способных делать обоснованные политические выводы, называли *statists*. Лишь позднее под словом "статистика" стали подразумевать числовые данные, на основе которых государственные деятели делали свои выводы, а еще позже его стали применять и для числовых данных вообще и постепенно пришли к современному значению.

Без статистики невозможно изучение явлений и процессов, происходящих в области производства, экономики и других сторон общественной жизни. Статистическое изучение тех или иных явлений предполагает в качестве первого шага *сбор сведений*. Этот сбор сведений называют статистическим наблюдением. В результате такого наблюдения получается беспорядочная груда сырого материала, нуждающегося в систематизации и обработке.

¹ Термин «дисперсия» происходит от латинского *dispengo* — «рассыпать», «рассеивать», «разбрасывать».

Основа научной статистики — метод группировок. *Группировкой* называется расчленение совокупности сведений по какому-либо признаку. Благодаря группировкам материал наблюдений понимает упорядоченный (систематизированный) вид. Группировочные признаки могут иметь количественное выражение (заработная плата, успеваемость и т.д.) или быть лишь качественными (пол, должность, семейное положение и т.п.).

Следующим этапом обработки собранных данных является вычисление *обобщающих показателей*. В качестве таких показателей широко известны средние величины. Необходимость вычисления средних величин всегда возникает при изучении массовых явлений. Роль средних величин очень велика, так как в каждом явлении имеет место сочетание случайности и закономерности. При вычислении средних в силу действия закона больших чисел случайности взаимопоглощаются и уравниваются, поэтому появляется возможность переходить от единичного к общему, от случайного — к закономерному.

ХАРАКТЕРИСТИКИ И ПАРАМЕТРЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ СОВОКУПНОСТИ

В результате непосредственных наблюдений, измерений или регистрации фактов получается множество данных, которые образуют статистическую совокупность и нуждаются в обработке, включающей систематизацию и классификацию, расчет параметров, характеризующих эту совокупность, а также составление таблиц, графиков и других материалов, иллюстрирующих процесс.

Основным этапом обработки экспериментальных данных является *группировка*, т. е. разделение статистической совокупности на группы (классы), однородные по какому-то признаку. Благодаря группировке собранный материал приобретает систематизированный вид, поэтому выделение тех или иных групп должно быть не формальным, а обоснованным исходя из целей исследования.

Сведения, собранные за какой-то период, могут быть систематизированы по времени. Получаемые при этом данные называются *временными рядами* или *рядами динамики*. Путем их экстраполяции, т. е. продолжения за измеренные значения, они могут быть использованы для прогнозирования развития исследуемой системы в будущем. Если же элементы совокупности систематизируются по какому-то присущему им характерному признаку, например по виду технологических процессов, типу оборудования, маркам исходных материалов, квалификации операторов и д.т., то они образуют *ряды распределения*.

Когда признаки количественные, то, расположив их в порядке возрастания или убывания и подсчитав число элементов, соответствующих каждому значению признака, получают *вариационный ряд*. Варьирующие

признаки могут выражаться в виде дискретных целых чисел или принимать любые значения. Для непрерывных признаков вариационные ряды строятся как интервальные, т.е. значения признаков в них выражаются в виде "от... до...".

Вариационный ряд представляет собой таблицу распределения, т.е. несколько столбцов, в одном из которых приводятся значения признака, а в другом — числа, показывающие, сколько раз встречается данное значение в исследуемой совокупности. В других столбцах той же таблицы могут быть относительные числа, плотности и другие расчетные величины. Вариационные ряды приобретают большую наглядность, когда они изображаются графически. Для этого в прямоугольной системе координат по оси абсцисс откладываются интервалы вариационного ряда, а по оси ординат — соответствующие абсолютные числа или относительные частоты. Полученная столбиковая диаграмма, состоящая из сомкнутых прямоугольников, называется *гистограммой*.

Наиболее полную характеристику статистической совокупности дает функция распределения вероятностей случайной величины. Однако на практике часто используют ограниченное количество числовых характеристик, называемых *параметрами распределения*. Эти параметры можно разделить на три класса, которые характеризуют: 1) центр группирования; 2) величину рассеяния (степень вариации); 3) форму распределения вероятностей.

Центр группирования. Одной из основных характеристик статистической совокупности, дающей представление о том, вокруг какого центра группируются все значения, является среднее арифметическое.

Величина рассеяния. Статистические совокупности могут иметь близкие или даже одинаковые значения центра группирования, однако отдельные значения величин в них могут существенно отличаться. Происходит это из-за того, что разброс значений относительно центра бывает неодинаковый: в одних случаях большой, в других — малый. Поэтому необходимо количественно измерять эти разбросы или вариации.

Самой элементарной характеристикой рассеяния является вариационный размах, представляющий собой разность между максимальным и минимальным значениями изучаемой совокупности.

Вариационный размах не всегда характерен, так как учитывает только крайние значения, которые могут в большой степени отличаться от всех других значений. Более точно рассеяние определяется с помощью показателей, учитывающих отклонение всех значений от среднего арифметического, т.е. среднее линейное и среднее квадратическое отклонения.

Среднее линейное отклонение основано на учете индивидуальных отклонений отдельных значений от среднего арифметического данного ряда и определяется как среднее арифметическое этих отклонений.

Вторым показателем степени вариации вокруг среднего является *среднее квадратическое отклонение* или, как его часто называют, *основное отклонение*.

Основное отклонение является наиболее распространенным и общепринятым показателем вариации. Среднее арифметическое из квадратов отклонений от среднего значения называется *дисперсией*. Дисперсия имеет самостоятельное значение во многих задачах математической статистики и относится к числу важнейших показателей вариации.

Для характеристики формы распределения обычно используют ту математическую модель, которая наилучшим образом приближает к виду кривой распределения вероятностей, полученной при анализе экспериментально полученных данных.

Статистические модели. В качестве математических моделей статистических распределений используются теоретические кривые распределения. Теоретическая кривая — это зависимость, которая описывается математически, т.е. может быть выражена уравнением с определенными параметрами. Известно значительное количество различных распределений: число потенциально возможных статистических моделей еще больше. Однако на практике используются лишь некоторые из них, обычно те, которые более удобны для описания какой-либо ситуации или обладают желательными математическими свойствами.

Статистические методы анализа широко используются в компьютерных программах. В настоящее время для статистического анализа данных с целью применения в своей деятельности используются, в основном, пакеты STADIA и STATGRAPHICS (см., например: *Тюрин Ю.Н., Макаров А.А.* Статистический анализ данных на компьютере. М.: ИНФРА-М, 1998).

Например, методы статистики в литературоведении позволяют давать характеристику стилей различных авторов не только качественную, но и количественную. Спорные вопросы об авторстве (а это уже юриспруденция!) тогда можно решать с помощью чисел. Так решился давний вопрос об авторстве (или соавторстве?) «Илиады»: подсчеты на ЭВМ всех ритмических особенностей каждой главы произведения показали, что автором поэмы мог быть только один человек — все главы сохраняют общее ритмическое единство.

10. Математическое моделирование и принятие решений

Хотя аналогия часто вводит в заблуждение, это наименьшее из того, что вводит нас в заблуждение.

С. Батлер

Если проблему удастся перенести на язык формул, то она сильно упрощается. Математический подход прост еще и потому, что он подчиняется вполне определенным жестким правилам, которые нельзя отменить указом или иным способом. Сложность нашей жизни как раз и состоит в том, что все, что в ней случается, свободно от пут условностей.

Математика имеет дело с упрощенными моделями явлений. Природные корни некоторых математических наук скрыты от нас паутиной времени, в других, более молодых, они видны явно. По существу, формула (или совокупность формул) представляет собой определенный этап в построении математической модели.

10.1. Математические методы и моделирование в целенаправленной деятельности

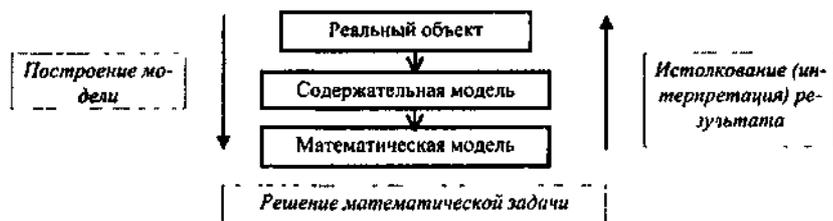
Математической моделью, с формальной точки зрения, можно назвать любую совокупность элементов и связывающих их операций. С содержательной точки зрения интересны модели, являющиеся изоморфным отображением реальных или реализуемых объектов, процессов и явлений. С математическими моделями непосредственно связан математический метод познания отображаемых моделью объектов.

Соотношение между элементами a , b и c , выражаемое формулой $a + b = c$, — это математическая модель. Она изоморфно отображает операцию объединения двух куч камней с их числами a и b в общую кучу камней, которых окажется $c = a + b$. В этом смысле операция сложения отвечает объединению двух куч в одну, а модель $a + b = c$ изоморфна этому слиянию. При этом, не объединяя кучи и не считая в ней камней, можно предсказать, что их будет ровно c .

Этот элементарный пример поясняет общий математический метод познания. Он состоит в построении для изучаемого объекта, процесса или явления изоморфной математической модели (на основе элементов и операций операционной системы), в изучении этой математической модели (для чего требуется выполнимость используемых в ней операций) и переносе в силу изоморфизма результатов, полученных для модели, на исходный изучаемый объект.

В этом направлении математика не только создала свои разнообразные внутренние модели алгебры, геометрии, функции комплексного переменного, дифференциальных уравнений и т. д., но и помогла естество-

знанию в построении великих математических моделей механики, электродинамики, термодинамики, химической кинетики, микромира, пространства–времени и тяготения, вероятностей, передачи сообщений, управления, логического вывода и др. В создании своих моделей математика часто опережала потребности естествознания и техники.



Реализация универсального математического метода познания и есть, по-видимому, *основная цель и задача современной математики*. Она включает, в первую очередь, построение новых неведомых математических моделей, в частности в биологии, для познания жизни и деятельности мозга, мироздания и микромира, новых фантастических технологий и техники, а также познание экономических и социальных явлений опять же с помощью математических моделей.

Не следует забывать и о дальнейшем расширении и обогащении операционной системы и ее реальных возможностей, гигантски усиливаемых вычислительными методами, вычислительными машинами и средствами программирования. Одним из мощных программных средств обеспечения математического моделирования систем любого назначения является интегрированный пакет *MathCad*; есть и другие автоматизированные системы численных и аналитических расчетов, обладающие дружественным к пользователю интерфейсом и большими вычислительными возможностями. Примерами таких математических пакетов являются *Derive*, *MATLAB*, *Maple*, *Mathematica*, *SPSS*, *Statistica*. Кроме них имеется много узко специализированных или менее известных пакетов.



В современном мире управление — дело отнюдь нелегкое, поскольку политическая, экономическая и социальная структура общества является сложной и постоянно усложняется еще больше. И то же время для эффективного управления необходимо учитывать характер взаимоотношений между различными элементами организации, а также все ее взаимодействия с окружающей ее средой.

Один из мощных инструментов анализа, которым располагают люди, ответственные за управление сложными системами, — моделирование. Модель является представлением реального объекта, системы или понятия (идеи) в некоторой форме, отличной от формы их фактического реального существования. Обычно модель служит средством, помогающим в объяснении, понимании или совершенствовании системы. Модель какого-либо объекта может быть или точной копией этого объекта (хотя, возможно, и выполненной в другом масштабе или из другого материала), или отображать некоторые характерные свойства объекта в абстрактной форме, в частности в виде *математической модели*.

Анализ математических моделей дает в руки менеджеров, управляющих и других руководителей эффективный инструмент, который может использоваться для предсказания поведения систем и сравнения получаемых результатов. Таким образом, моделирование позволяет логическим путем прогнозировать последствия альтернативных действий и достаточно уверенно показывает, какому из них следует отдать предпочтение. Применение моделей дает руководителям и менеджерам метод, повышающий эффективность их суждений и интуиции.

Математическая модель может использоваться традиционным способом, т.е. для получения какого-то частного решения, но в сфере управления она наиболее успешно применяется для *имитационного моделирования*. Имитация (от лат. imitatio — подражание) — это воспроизведение на модели той или иной реальной ситуации, ее исследование и в конечном счете нахождение наиболее удачного решения.

Имитационное моделирование основывается, главным образом, на теории сложных систем, теории вероятностей и математической статистике. Но в то же время имитационное моделирование и экспериментирование, как и само управление, во многом остаются *творческими процессами*. Собственно имитационное моделирование состоит из конструирования математической модели реальной системы и постановки на ней экспериментов, чтобы оценить (с точки зрения потребности в ресурсах, например) различные стратегии, обеспечивающие достижение цели данной системы.

Когда нужно принимать ответственное решение, т. е. при проектировании сложных технических систем, при управлении промышленным или сельскохозяйственным производством, руководстве военными действиями, большое значение имеет практический опыт, дающий возможность выделить наиболее существенные факторы, охватить ситуацию в целом и выбрать оптимальный путь для достижения поставленной цели. Опыт помогает также найти аналогичные случаи в прошлом и по возможности избежать ошибочных действий.

Под опытом подразумевается не только собственная практика лица, принимающего решение, но и чужой опыт, который описан в книгах, монографиях, обобщен в инструкциях, рекомендациях и других руководящих материалах. Поэтому, прежде чем принимать решение, всегда полезно изучить предшествующий опыт, расспросить знающих людей, посмотреть, как поступали в подобных случаях раньше. Естественно, что когда решение уже апробировано, т. е. из своего или чужого опыта известно, какое именно решение наилучшим образом удовлетворяет поставленным целям, проблемы принятия решения и оптимального управления попросту не существует — решение наперед известно.

Однако на самом деле практически никогда не бывает совершенно одинаковых ситуаций, поэтому принимать решения и осуществлять управление всегда приходится в условиях неполной и недостаточной информации. В таких случаях недостающую информацию пытаются получить, используя догадки, предположения, результаты научных исследований и особенно изучение на моделях. Научно обоснованная теория управления фактически представляет собой набор методов пополнения недостающей информации об управляемом процессе, а точнее говоря, о том, как поведет себя объект управления при выбранном воздействии.

Получается, что для успешного управления надо предсказывать поведение системы в будущем. Человечеству всегда хотелось знать будущее, поэтому с древнейших времен создавались различные методы предсказаний. Одни из них с позиций сегодняшнего дня кажутся наивными, например гадание на кофейной гуще или по потрохам черного петуха. Другие не поняты до сих пор, несмотря на огромные усилия ученых, например возможность предсказания стихийных бедствий (извержение вулканов, волн цунами), наблюдая за поведением некоторых животных (рыб, муравьев и др.). Наконец, третьи получили четкое обоснование и широко используются в научной и инженерной практике. Это методы математического прогнозирования.

Если раньше основная задача науки была в том, чтобы понять поведение изучаемой системы, то теперь актуальной является возможность *оценить различные стратегии, обеспечивающие достижение цели.*

Стремление получить как можно больше информации об управляемых объектах и процессах, включая и особенности их будущего поведения, может быть удовлетворено только одним способом: путем *исследования* интересующих нас свойств на *моделях*. Модель дает способ представления реального объекта, который позволяет легко и с малыми затратами ресурсов исследовать некоторые его свойства. Только модель позволяет исследовать не все свойства сразу, а лишь те из них, которые наиболее существенны при данном рассмотрении. Поэтому модели позволяют сформулировать упрощенное представление о системе и получить нужные результаты намного проще и быстрее, чем при изучении самой системы.

Модель производственной системы, в первую очередь, создается в сознании работника, осуществляющего управление. На этой модели он мысленно пытается представить все особенности самой системы и детали ее поведения, предвидеть все трудности и предусмотреть все критические ситуации, которые могут возникнуть в различных режимах эксплуатации. Чтобы как-то восполнить ее, он делает логические заключения, выполняет чертежи, планы и расчеты.

Сложность современных технических систем и производственных процессов приводит к тому, что для их изучения приходится использовать различные виды моделей. Простейшими являются *масштабные модели*, в которых соблюдается *геометрическое подобие* оригинала и модели, но натурные значения всех размеров умножаются на постоянную величину — масштаб моделирования. Громоздкие объекты (корабли, самолеты, здания) представляются в уменьшенном виде, а мелкие (атомы, молекулы), наоборот, в сильно увеличенном.

В *аналоговых моделях* исследуемые процессы изучаются не непосредственно, а по аналогичным явлениям, т. е. по процессам, имеющим иную физическую природу, но которые описываются такими же математическими соотношениями. Для такого моделирования используются аналогии между механическими, тепловыми, гидравлическими, электрическими и другими явлениями. Например, колебания груза на пружине аналогичны колебаниям тока в электрическом контуре; такими же уравнениями описываются движение маятника и напряжение на выходе генератора переменного тока.

Самым общим методом научных исследований является использование *математического моделирования*. Математической моделью называют формальную зависимость между значениями параметров на входе моделируемого объекта или процесса и выходными параметрами. При математическом моделировании отвлекаются (абстрагируются) от конкретной физической природы объекта и происходящих в нем процессов и

рассматривают только преобразование входных величин в выходные. Анализировать математические модели проще и быстрее, чем экспериментально определять поведение реального объекта в различных режимах работы. Кроме того, анализ математической модели позволяет выделить наиболее существенные свойства данной системы, на которые следует обратить особое внимание при принятии решения.

Дополнительное преимущество состоит в том, что при математическом моделировании не представляет труда испытать исследуемую систему в идеальных условиях или, наоборот, в экстремальных режимах, требующих для реальных объектов или процессов больших затрат или связанных с риском.

В зависимости от вида системы и конкретных целей, которые ставятся при анализе, возможны различные методы описания систем, т.е. существует несколько различных подходов к математическому моделированию и системному анализу. В основе каждого подхода лежат те или иные представления, какой-то основной набор идей и теоретических предпосылок или, как сейчас принято говорить, *определенная концепция*.

Одна из возможных целей математического моделирования связана с желанием разобраться, хотя бы качественно, в свойствах систем вообще. В этом случае требуется иметь модель, охватывающую как можно более широкий класс объектов и процессов. Другая задача состоит в тщательном, количественном изучении систем определенного класса. При этом необходимо дать подробное математическое описание объектов интересующего класса и столь же подробное математическое описание происходящих в них процессов. Наконец, третий подход, с которым часто приходится сталкиваться, связан со стремлением использовать для анализа какие-то конкретные виды математических моделей

10.2. Исследование операций

В настоящее время, когда техника все быстрее развивается и усложняется, во все сферы внедряется автоматика, расширяются масштабы производства, последствия принимаемых решений оказывают большое влияние на все стороны социальной и общественной жизни людей, затрагивают интересы всего населения страны, необходимы рекомендации по правильному и научно обоснованному управлению. В самых разных областях практики — организация промышленного или сельскохозяйственного производства, эксплуатация транспорта, школьное образование, здравоохранение, бытовое обслуживание населения, телефонная и почтовая связь, торговля и общественное питание — возникают задачи сход-

ные между собой по постановке, обладающие рядом общих признаков и решаемые сходными методами.

| Основные вопросы постановки задачи | | | |
|---|----------------------------------|--------------------------------|----------------------------|
| Набор независимых параметров (переменных) | Определение условий их изменения | Выбор количественного критерия | Формулировка задачи поиска |

Типичная ситуация такова: организуется какое-то мероприятие, которое можно осуществить тем или другим способом, т. е. выбрать какое-то решение из ряда возможных вариантов. Какой из них выбрать? Каждый вариант обладает как преимуществами, так и недостатками. Причем в силу сложности обстановки не ясно, какой из всех возможных лучше других. Для этого организуется серия математических расчетов. Их задача — помочь людям, ответственным за принятие решения, сделать обоснованный выбор. Впервые научные методы обоснования принимаемых решений были применены в военном деле. Так, в годы второй мировой войны для облегчения принята решения командующим штабы стали выполнять основанные на математических расчетах исследования, показывающие возможные результаты различных военных операций. Поэтому все эти методы получили название *исследование операций*. В дальнейшем стало ясно, что операции, представляющие собой ряд целенаправленных действий, имеют место не только в военном деле. В равной мере они характерны и для таких областей, как организация промышленности, транспорта, сельского хозяйства, бытового обслуживания населения и т.д. Фактически последовательностью различных по своим масштабам операций является производственная деятельность в любой отрасли промышленности.

Операцией называют комплекс мероприятий, объединенных общим замыслом и направленных на достижение поставленной цели. Операция является управляемым мероприятием.

Проводит операцию целый коллектив, а руководит ею отдельный человек (директор, главный инженер и т.д.). Для осуществления операции необходимы материалы, оборудование и другие средства или, как мы говорили раньше, определенные ресурсы (природные, материальные, трудовые, денежные и т.д.). Тот, кто проводит операцию, очевидно, такими ресурсами обладает, но в общем случае количество находящихся в его распоряжении ресурсов ограничено. Поэтому первая задача заключается в том, чтобы найти такой способ действия, т. е. так распределить и

использовать имеющиеся ресурсы, чтобы добиться достижения цели наилучшим образом. Задачей руководителя при этом будет сравнение результатов, получаемых при различных стратегиях (решениях), и выбора, по его мнению, наилучшей из них.

Само принятие решения выходит за рамки исследования операций и относится к компетенции ответственного лица (или группы лиц), которому предоставлено право окончательного выбора. При этом выборе он может учитывать наряду с рекомендациями, вытекающими из математического расчета, еще ряд соображений, не учтенных этим расчетом.

В зависимости от того, какой информацией обладают руководитель и его сотрудники, подготавливающие решения (его штаб), условия принятия решений меняются и изменяются математические методы, применяемые для выработки рекомендаций. Если известны все действующие в системе факторы, т. е. отсутствуют случайные воздействия, то это будет *принятие решений в условиях определенности*.

Когда решение может привести не к определенному исходу, а к одному из множества возможных с разными вероятностями их осуществления, то принимающий решение рискует получить не тот результат, на который он рассчитывает. Поскольку исход каждой конкретной реализации случаен и потому заранее точно непредсказуем, метод называют *принятием решений в условиях риска*.

Если же исход операции зависит не только от стратегии, избранной руководителем, но и от ряда факторов, не известных в момент принятия решения, например погодных условий, действий, которые предпримет конкурент, противник и т.п., то такая задача называется *принятием решений в условиях неопределенности*.

В общем случае цель операции выражается в стремлении к достижению максимального значения критерия эффективности. При наличии неопределенности это уже не строго математическая задача, которая дает однозначное решение. Теперь нет уверенности в том, что можно будет получить решение, а если оно будет получено, то нет гарантии в том, что оно будет единственно правильным. Именно поэтому в формулировке задачи приходится делать оговорку "*по возможности*".

Таким образом, при решении проблем, возникающих в реальной жизни, математическая теория и научно обоснованные методы не дают точного решения. Причина этого в том, что когда нет точных данных, т.е. *нет полной информации, то остается лишь предполагать и строить догадки, но было бы наивно считать, что все предположения обязательно сбываются*.

И все-таки решение, принятое хотя и в условиях неопределенности, но на основании математических расчетов, будет лучше, чем взятое нау-

гад первое попавшееся. Задача исследования операций заключается в том, чтобы это решение в возможно большей степени содержало черты разумности, именно в этом смысле надо понимать определение "по возможности оптимальное".

Один из зарубежных специалистов так определил исследование операций: это искусство давать плохие ответы на те практические вопросы, на которые другими методами ответы даются еще худшие. Действительно, любой конструктивный или технологический вариант, выбранный в условиях неопределенности, вполне вероятно может оказаться хуже, выбранного в условиях, когда известны все факторы и все причины, влияющие на функционирование. Но все же лучше проанализировать предположения и догадки, чем просто наобум взять случайно попавшийся вариант. Это необходимо учитывать при разработке модели операции: нет надобности разрабатывать точную и подробную модель, поскольку решение все равно будет приближенным.

Сложность задач принятия решений в условиях неопределенности зависит от того, какова природа неизвестных факторов. По этому признаку они делятся на два класса:

1) стохастические задачи исследования операций, когда неизвестные факторы представляют собой случайные величины, для которых известны законы распределения вероятностей и другие статистические характеристики;

2) неопределенные задачи исследования операций, когда неизвестные факторы не могут быть описаны статистическими методами.

Приведем пример стохастической задачи исследования операций. Пусть организуется работа кафе, столовой или другого предприятия общественного питания. Какое количество посетителей придет в него за день, нам в точности не известно. Точно так же не известно, сколько времени будет продолжаться обслуживание каждого посетителя. Однако характеристики этих случайных величин могут быть получены статистическим путем. Показатель эффективности, зависящий от случайных факторов, тоже будет случайной величиной.

Первое, что приходит в голову, взять в качестве показателя эффективности не саму случайную величину, а ее среднее значение и выбрать такое решение, при котором это среднее значение обращается в максимум (или минимум). Именно так и поступают, т.е. выбирают в качестве показателя эффективности операции, исход которой зависит от случайных факторов, среднее значение. Таким образом получают "средний доход" за единицу времени, "среднее время простоя" и т. д.

Для решения задач исследования операций используются разнообразнейшие методы.

| МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ | |
|---|--|
| Детерминированные модели | Стохастические (вероятностные) модели |
| <p style="text-align: center;">↓</p> <p>Линейное программирование¹ Целочисленное программирование Потоки в сетях Геометрическое программирование Нелинейное программирование Оптимальное управление</p> | <p style="text-align: center;">↓</p> <p>Теория массового обслуживания Теория полезности Теория принятия решений Теория игр Имитационное моделирование Динамическое программирование</p> |

Многообразие методов лишь раз подтверждает сложность решаемых задач. Следует также подчеркнуть, что эти методы, положенные в основу алгоритмов поиска оптимальных решений, предполагают, в основном, компьютерную реализацию (см., например: *Курицкий Б.* Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0. СПб.: ВHV – Санкт-Петербург, 1997).

10.3. Общая постановка задачи о принятии решения

Что такое теория принятия решений? Теория принятия решений представляет собой набор понятий и систематических методов, позволяющих всесторонне анализировать проблемы принятия решений в условиях неопределенности. Совершенствование процесса принятия решений — цель рассматриваемой теории. В основе логических построений теории принятия решений лежит ряд аксиом. Если лицо, принимающее решение, рассматривает эти аксиомы как руководство к действию, то оно должно принимать решение, следуя методам теории принятия решений и результатам, полученным из теории. Другими словами, лицо, принимающее решение, должно либо отбросить аксиомы теории принятия решений, либо действовать в соответствии с ее методами.

¹ Термин «программирование» заимствован из зарубежной литературы и по существу означает «планирование». Его не следует путать с термином, действительно означающим составление программ для ЭВМ.

В основе теории принятия решений лежит предположение о том, что выбор альтернатив *должен* определяться двумя факторами:

1) представлениями лица, принимающего решение о вероятностях различных возможных исходов (последствий), которые могут иметь место при выборе того или иного варианта решения;

2) предпочтениями, отдаваемыми им различным возможным исходам. Оба фактора формально входят в теорию принятия решений, и чтобы их учесть, потребуется представить в виде цифр: а) суждения о возможных последствиях (опираясь на понятие субъективной вероятности) и б) высказывания о предпочтениях (используя теорию полезности). «Разделяй и властвуй» — вот девиз теории принятия решений. Согласно методике этой теории, рассматриваемую проблему необходимо разбить на части, которые следует изучать и анализировать отдельно, а затем построить общую модель для принятия решений.

Для удобства следует выделить следующие этапы в процессе принятия решений.

1. *Определение альтернативных способов действия.* Должен быть задан подходящий набор целей и указаны соответствующие им меры эффективности; это даст возможность определить степень, с которой заданные цели могут быть достигнуты с помощью различных способов действия. Для каждого способа действия возможные исходы описываются в единицах принятых мер эффективности. Кроме того, необходимо указать, как изучаемый процесс (задача) развивается во времени, и описать способ сбора информации.

2. *Описание вероятностей возможных исходов.* При этом требуется, чтобы неопределенность, связанная с альтернативными решениями, была выражена численно через распределение вероятностей. В результате такой операции становится известной вероятность каждого возможного исхода для каждого принятого решения.

3. *Ранжировка предпочтений возможных исходов через их полезность.* Для этого выбирают меру эффективности, а затем с ее помощью представляют в числовой форме как отношение лица, принимающего решение, к последствиям (исходам), так и вероятности возможных исходов.

4. *Рациональный синтез информации, полученной на первых трех этапах.* Следует проанализировать и эффективно использовать всю полученную информацию для того, чтобы решить, какой из возможных альтернатив следует отдать предпочтение. Данный этап включает также анализ чувствительности.

Эти этапы являются основой подхода к принятию решений с точки зрения здравого смысла. Отличительной чертой процесса принятия решений является степень формализации каждого этапа.

Значение теории принятия решений. Теория принятия решений предписывает нормы поведения лицу, принимающему решение, которым он должен следовать, чтобы не вступить в противоречие со своими собственными суждениями и предпочтениями. Теория не дает метода описания того, как фактически отдельные лица должны себя вести. Она помогает лицу, принимающему решение, вооружая методологией для принятия сложных решений, которые включают элементы субъективизма, однако не заменяет его. Характерно, что с ростом сложности задачи уменьшается способность человека к неформальной обработке всей информации в соответствии с его собственными суждениями и предпочтениями. В такой ситуации теория принятия решений имеет преимущества перед другими аналитическими подходами, поскольку включает в формализованном виде многие субъективные аспекты проблемы. Первая попытка применения теории принятия решений может потребовать значительных усилий, но они того же порядка, что для любого метода анализа сложной ситуации.

Круг задач, стоящих перед теорией принятия решений. Типичные задачи принятия решений имеют много характерных особенностей, которые можно проанализировать и лучше понять с помощью теории принятия решений. Перечислим основные из них.

1. *Многоцелевой характер.* В большинстве сложных задач приходится стремиться к достижению различных целей. Эти цели почти всегда противоречивы, т. е. продвижение по пути достижения некоторой цели обычно сопровождается ухудшением результатов по другим. Таким образом, лицо, принимающее решение, неизбежно оказывается перед необходимостью выбора между противоречивыми целями.

2. *Воздействие фактора времени.* Все важные последствия решения задачи не проявляются сразу, и нельзя указать конкретный момент времени, когда можно наблюдать то или иное последствие. Например, при производстве нового товара иногда приходится рисковать значительными суммами в течение многих лет.

3. *Неформализуемые понятия.* Такие понятия, как добрая воля, престиж, волнение, шутка, страдание, политические действия и т. д., являются некоторыми примерами очень важных неформализуемых понятий, которые существенно усложняют задачу.

4. *Неопределенность.* Как уже отмечалось ранее, маловероятно, что в момент принятия решения (т.е. выбора альтернативного действия) из-

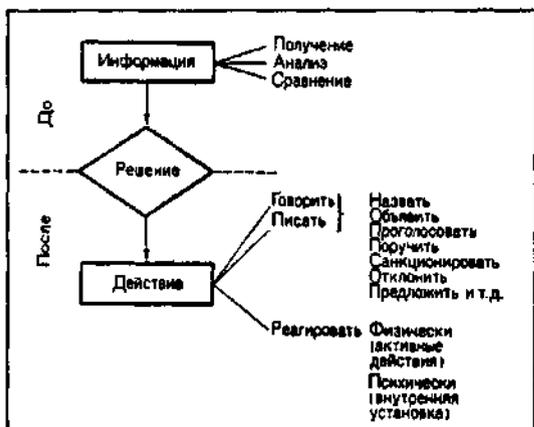
вестны последствия каждой из альтернатив. Такое утверждение становится особенно убедительным в свете описанных выше особенностей задачи.

5. *Возможности получения информации.* Часто удается получить некоторую информацию, помогающую решить, какую из альтернатив следует выбрать. Например, можно проанализировать рыночную конъюнктуру, чтобы оценить спрос на новый вид продукции. Однако получение такой информации может потребовать больших затрат времени и денег, и к тому же она может быть не вполне достоверной.

6. *Динамические аспекты процесса принятия решений.* После того как некоторое решение выработано (выбрана альтернатива), может оказаться, что задача не исчерпана до конца и потребуется принять очередное решение через несколько лет. Сегодняшнее решение может «захлопнуть дверь» перед некоторыми возможными действиями и «распахнуть ее пошире» перед другими. Важно распознать заранее такие динамические аспекты проблемы и увидеть, какие возможности могут открыться в будущем благодаря данному решению.

7. *Влияние решений на группы.* Некоторая выбранная альтернатива может повлиять на большое количество различных групп, особенно это относится к правительственным решениям. Очевидно, что в такой ситуации были бы полезны любые сведения, способные оказать помощь лицу, ответственному за принятие решения.

8. *Коллективное принятие решений.* Зачастую ответственность за выбор альтернативы несет не отдельное лицо, а целая группа. Фактически для определенного круга задач нельзя четко разграничить функции и ответственность лиц, принимающих решение по некоторому кругу вопросов.



Большинство задач не обладает перечисленными особенностями, однако их вполне достаточно для того, чтобы сделать задачу трудноразрешимой. Теория принятия решений позволяет проводить анализ всех этих вопросов независимо и дает схему для последующего синтеза информации с целью выработки наилучшего способа действия.

Выше приведена упрощённая схема действий при принятии решений; другие аспекты теории принятия решений изложены ниже.

Основные трудности

- Большое число критериев, которые не всегда согласованы между собой.
- Высокая степень неопределённости, обусловленная недостаточной информацией для обоснованного принятия решений

| Типы проблем | | |
|---|--|--|
| Хорошо структурированные (количественно сформулированные) | Слабо структурированные (качественные и количественные элементы) | Неструктурированные (сформулированные качественно) |

Этапы теории принятия решений

- Определение альтернативных способов действия.
- Описание вероятностей возможных исходов.
- Ранжирование возможных исходов по их полезности.
- Рациональный синтез информации.

Среди многообразия литературы по этому вопросу можно отметить следующую работу: Эддоус М., Стэнсфилд Д. Методы принятия решений. М.: Аудит: ЮНИТИ, 1997.

* * *

В заключение хочется подчеркнуть, что дальнейшее освоение математических методов возможно при самостоятельной работе, причем как с учебниками математики и статистики, так и с конкретным материалом, для анализа которого используются математические методы. Это чрезвычайно интересно и плодотворно, хотя нелегко, но вполне посильно для любого. В применении математических методов в гуманитарных науках много нового, неизведанного, поскольку это одно из новых, молодых направлений науки. И для каждого, кто пожелает здесь приложить свои силы, открывается широкое поле деятельности.

Я слышу, и я забываю
 Я вижу, и я запоминаю
 Я делаю, и я понимаю
 Китайская пословица

ВАРИАНТЫ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задание 1

Задача 1. Заданы два множества: A и B (см. таблицу). Определить множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$.

| Вариант | Множество A | Множество B |
|---------|------------------|-------------------|
| 1 | {1, 5, 7, 11} | {5, 9, 11, 15} |
| 2 | {1, 3, 5, 7, 11} | {3, 5, 9} |
| 3 | {2, 4, 6, 9} | {1, 2, 3, 6} |
| 4 | {4, 6, 10, 16} | {6, 10, 12, 16} |
| 5 | {4, 6, 10, 12} | {4, 8, 12, 16} |
| 6 | {1, 3, 5, 9} | {3, 5, 7, 11, 13} |
| 7 | {2, 4, 9, 13} | {4, 6, 9} |
| 8 | {1, 3, 9, 11} | {2, 3, 5, 6, 7} |
| 9 | {2, 4, 8, 12} | {3, 4, 5, 8, 10} |
| 10 | {1, 3, 6, 8} | {3, 4, 5, 6} |

Задача 2. По данным промежуткам A и B на числовой прямой, определить $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

| Вариант | A | B |
|---------|------------------|-------------------|
| 1 | (0, 3] | (3, 6) |
| 2 | [0, 5) | [1, ∞) |
| 3 | (0, 3) | [1, 4] |
| 4 | [2, ∞) | (1, 7] |
| 5 | [-6, -3] | [-5, -1) |
| 6 | [-4, -0,5) | ($-\infty$, -2) |
| 7 | ($-\infty$, 1) | (-2, ∞) |
| 8 | [-6, 7] | (0, 10) |
| 9 | (-6, 2] | [-2, 3] |
| 10 | (0, 2) | [1, 5) |

Задача 3. Найти пределы функции $\lim_{x \rightarrow a} y$ при различных значениях a (не применяя правила Лопиталя).

| Вариант | y | a |
|---------|---|------------------|
| 1 | $\frac{2x^2 - 5x - 3}{3x^2 - 4x - 15}$ | 2, 3, ∞ |
| 2 | $\frac{4x^2 - 7x - 2}{2x^2 - x - 6}$ | 0; 2; ∞ |
| 3 | $\frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 5x + 6}$ | 3; -3, ∞ |
| 4 | $\frac{3x^2 + 11x + 10}{2x^2 + 5x + 2}$ | -3, -2, ∞ |
| 5 | $\frac{3x^2 + 14x + 8}{2x^2 - 7x - 4}$ | 2, 4, ∞ |
| 6 | $\frac{4x^2 - 25x + 25}{2x^2 - 15x + 25}$ | 2, 5; ∞ |
| 7 | $\frac{7x^2 + 26x - 8}{2x^2 + x - 28}$ | 1; -4, ∞ |
| 8 | $\frac{2x^2 + 15x + 25}{x^2 + 15x + 50}$ | 5; -5, ∞ |
| 9 | $\frac{3x^2 + 5x - 8}{2x^2 + 3x - 5}$ | -2, 1, ∞ |
| 10 | $\frac{6x^2 + 13x + 7}{3x^2 + 8x + 5}$ | -2, -1, ∞ |

Задание 2

Задача 1. Вычислить производную функций.

| Вариант | y | y' |
|---------|-----------------------|---|
| 1 | $3x^2 + 4x^3 - 1$ | $\sin(x) (2x^5 + 5x - 5)$ |
| 2 | $-3x^{-5} + 4x^2 - 3$ | $\operatorname{arctg}(x) (x^5 - x - 3)$ |
| 3 | $-x^{-2} - x^4 + 1$ | $\operatorname{ctg}(x) (5x^3 + 4x + 2)$ |
| 4 | $-x^{-3} + 4x^3 - 2$ | $\ln(x) (3x^2 - 3x + 4)$ |
| 5 | $-3x^{-6} + 2x^5 + 4$ | $\operatorname{tg}(x) (3x^3 - 2x - 3)$ |
| 6 | $-2x^{-3} + 4x^3 + 3$ | $\sin(x) (-3x^3 + 2x - 1)$ |
| 7 | $5x^{-6} + 2x^4 - 3$ | $\operatorname{arccotg}(x) (4x^5 - 5x - 3)$ |

| | | |
|----|-----------------------|------------------------------------|
| 8 | $-2x^{-5} - 2x^3 - 1$ | $\cos(x) \cdot (-2x^4 + x + 1)$ |
| 9 | $4x^4 - 3x^5 - 2$ | $\ln(x) \cdot (2x^4 - 3x + 2)$ |
| 10 | $2x^{-2} + 5x^3 + 5$ | $\arccos(x) \cdot (3x^2 - 2x + 4)$ |

Задача 2. Вычислить y' в точке x_1 .

| Вариант | y | x_1 |
|---------|-----------------------|-------|
| 1 | $\frac{5x-3}{3x-3}$ | 5 |
| 2 | $\frac{-3x-1}{2x+3}$ | -5 |
| 3 | $\frac{-2x+5}{4x-5}$ | 2 |
| 4 | $\frac{-x-1}{-x+2}$ | 0 |
| 5 | $\frac{2x-1}{4x+3}$ | -5 |
| 6 | $\frac{5x-5}{5x+2}$ | 3 |
| 7 | $\frac{-4x-4}{5x+5}$ | 5 |
| 8 | $\frac{-2x+2}{-5x+4}$ | 3 |
| 9 | $\frac{-2x+4}{3x-1}$ | -5 |
| 10 | $\frac{-4x+3}{3x-4}$ | 3 |

Задача 3. Найти экстремумы функции.

| Вариант | y |
|---------|---------------------------|
| 1 | $2x^3 - 27x^2 + 108x + 5$ |
| 2 | $2x^3 + 6x^2 - 90x - 2$ |
| 3 | $2x^3 + 6x^2 - 48x + 5$ |
| 4 | $2x^3 - 3x^2 - 36x - 3$ |
| 5 | $2x^3 + 15x^2 + 24x - 3$ |
| 6 | $2x^3 - 3x^2 - 36x + 3$ |
| 7 | $2x^3 - 18x^2 + 48x + 4$ |
| 8 | $2x^3 + 12x^2 + 18x - 4$ |
| 9 | $2x^3 - 15x^2 + 36x - 1$ |
| 10 | $2x^3 + 12x^2 - 30x - 3$ |

Задача 4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции y на отрезке.

| Вариант | y | отрезок |
|---------|-------------------|------------|
| 1 | $-5x^2 + 40x + 3$ | $[0, 7]$ |
| 2 | $4x^2 - 24x + 5$ | $[2, 5]$ |
| 3 | $4x^2 + 32x + 4$ | $[-6, -3]$ |
| 4 | $3x^2 + 24x - 2$ | $[-6, -3]$ |
| 5 | $-5x^2 - 50x - 2$ | $[-6, -1]$ |
| 6 | $3x^2 + 30x - 2$ | $[-6, -2]$ |
| 7 | $2x^2 - 20x + 2$ | $[2, 9]$ |
| 8 | $2x^2 - 20x + 5$ | $[1, 8]$ |
| 9 | $2x^2 - 12x - 1$ | $[2, 6]$ |
| 10 | $4x^2 + 32x - 4$ | $[-8, -3]$ |

Задача 5. Вычислить $\lim_{x \rightarrow a} y$.

| Вариант | y | a |
|---------|--|-----|
| 1 | $\frac{4x^2 - 8x + 4}{4x^2 + 12x - 16}$ | 1 |
| 2 | $\frac{-4x^3 - 24x - 32}{5x^2 + 10x}$ | -2 |
| 3 | $\frac{3x^2 + 9x + 6}{-2x^2 - 12x - 10}$ | -1 |
| 4 | $\frac{-3x^2 - 15x - 18}{5x^2 + 15x}$ | -3 |
| 5 | $\frac{5x^2 - 10x - 15}{-3x^2 + 12x + 15}$ | -1 |
| 6 | $\frac{-5x^2 - 10x - 5}{-2x^2 + 6x + 8}$ | -1 |
| 7 | $\frac{-2x^2 - 4x + 6}{3x^2 + 18x + 27}$ | -3 |

| | | |
|----|---|----|
| 8 | $\frac{2x^2 - 14x + 24}{-24x^2 + 8x - 6}$ | 3 |
| 9 | $\frac{-3x^2 - 18x - 15}{5x^2 + 50x + 125}$ | -5 |
| 10 | $\frac{2x^2 + 10x + 12}{4x^2 + 4x - 24}$ | -3 |

Задание 3

Задача 1. Вычислить следующие интегралы:

| Вариант | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>в</i> |
|---------|--------------------------------------|-------------------------|---------------------|
| 1 | $\int \frac{-8x^2 - 4x - 2}{-5x} dx$ | $\int \sin(-2x + 5) dx$ | $\int x^2 \ln x dx$ |
| 2 | $\int \frac{4x^2 + 5x - 5}{-3x} dx$ | $\int \sin(2x + 3) dx$ | $\int x^7 \ln x dx$ |
| 3 | $\int \frac{-4x^2 - 2x - 2}{-x} dx$ | $\int \cos(3x - 4) dx$ | $\int x^5 \ln x dx$ |
| 4 | $\int \frac{-10x^2 + 4x + 5}{3x} dx$ | $\int \sin(-2x + 5) dx$ | $\int x^8 \ln x dx$ |
| 5 | $\int \frac{-4x^2 - 2x - 1}{-2x} dx$ | $\int \cos(-3x + 3) dx$ | $\int x^7 \ln x dx$ |
| 6 | $\int \frac{8x^2 + 2x - 5}{5x} dx$ | $\int \sin(-5x + 3) dx$ | $\int x^4 \ln x dx$ |
| 7 | $\int \frac{10x^2 - 5x + 5}{-3x} dx$ | $\int \sin(3x - 1) dx$ | $\int x^8 \ln x dx$ |
| 8 | $\int \frac{-4x^2 - 5x - 5}{-5x} dx$ | $\int \sin(-2x - 3) dx$ | $\int x^6 \ln x dx$ |
| 9 | $\int \frac{6x^2 + 4x - 5}{-4x} dx$ | $\int \cos(5x + 3) dx$ | $\int x^9 \ln x dx$ |
| 10 | $\int \frac{10x^2 - 5x - 4}{4x} dx$ | $\int \sin(2x - 3) dx$ | $\int x^3 \ln x dx$ |

Задача 2 Вычислить следующие определенные интегралы.

| Вариант | a | b |
|---------|---|------------------------------|
| 1 | $\int_1^2 (x^2 + 2x + 1) dx$ | $\int_e^4 x \ln x dx$ |
| 2 | $\int_1^0 (x^3 + 2x) dx$ | $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$ |
| 3 | $\int_{-2}^3 (4x^3 - 3x^2 + 2x + 1) dx$ | $\int_0^1 x e^{-x} dx$ |
| 4 | $\int_1^2 (3x^4 + 2x^2 - 5) dx$ | $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx$ |
| 5 | $\int_0^1 \sqrt[3]{x} dx$ | $\int_0^1 x e^x dx$ |
| 6 | $\int_2^3 (2x^3 + x^2 - 5) dx$ | $\int_0^{\pi} x \cos x dx$ |
| 7 | $\int_{-2}^2 (x^3 + 4x) dx$ | $\int_1^2 x^{-5} \ln x dx$ |
| 8 | $\int_1^8 \sqrt[3]{x^2} dx$ | $\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx$ |
| 9 | $\int_1^4 (x^2 + 0,5) dx$ | $\int_1^2 x^2 \ln x dx$ |
| 10 | $\int_0^2 (2x + 4) dx$ | $\int_{-1}^1 x e^x dx$ |

Задание 4

Задача 1 Решить дифференциальное уравнение

| Вариант | Уравнение |
|---------|---------------------|
| 1 | $y' = (y-5)(8x+1)$ |
| 2 | $y' = (y-3)(-8x+4)$ |
| 3 | $y' = (y+5)(8x-3)$ |
| 4 | $y' = (y-2)(8x+4)$ |
| 5 | $y' = (y-3)(8x-2)$ |
| 6 | $y' = (y+4)(4x-1)$ |
| 7 | $y' = (y-4)(-6x-3)$ |
| 8 | $y' = (y+5)(10x-1)$ |
| 9 | $y' = (y-4)(4x+5)$ |
| 10 | $y' = (y+3)(-2x-3)$ |

Задача 2 Решить задачу Коши

| Вариант | Уравнение | Начальное условие |
|---------|------------------------|-------------------|
| 1 | $y' = -15x^2 - 4x - 3$ | $y(0) = -3$ |
| 2 | $y' = -6x^2 - 4x - 1$ | $y(0) = -1$ |
| 3 | $y' = -12x^2 + 8x + 4$ | $y(0) = 4$ |
| 4 | $y' = -6x^2 - 4x + 5$ | $y(0) = -5$ |
| 5 | $y' = -12x^2 - 6x - 2$ | $y(0) = 3$ |
| 6 | $y' = 15x^2 - 2x - 3$ | $y(0) = 5$ |
| 7 | $y' = -9x^2 - 4x + 5$ | $y(0) = -5$ |
| 8 | $y' = 15x^2 + 4x + 3$ | $y(0) = -1$ |
| 9 | $y' = -9x^2 + 10x - 1$ | $y(0) = -5$ |
| 10 | $y' = -6x^2 + 8x - 1$ | $y(0) = 3$ |

Задача 3

1. Из урны с 7 красными и 3 синими шарами берут наугад 5 шаров. Какова вероятность того, что все взятые шары окажутся красными?
2. Брошены 2 игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков не превзойдет 6.
3. Брошены 3 игральные кости. Найти вероятность того, что 2 очка не выпадут ни на одной кости.
4. В урне лежат 8 занумерованных шаров. Наугад берут 4 шара. Найти вероятность того, что среди взятых шаров 3 будут иметь четные номера.
5. Колода из 36 карт раскладывается случайным образом на две части поровну. Какова вероятность того, что все тузы будут в одной части?
6. Набирая номер телефона, абонент забыл три последние цифры. Помня лишь, что все цифры различны, он набирает их наугад. Какова вероятность того, что будут набраны нужные цифры?
7. Имеются 4 ящика, в которые наугад бросают шарики. Всего шариков 4. Какова вероятность того, что все шарики окажутся в одном ящике?
8. 6 студентов условились ехать в одном электропоезде, но не договорились о вагоне. Какова вероятность того, что все поедут в одном вагоне, если в поезде 10 вагонов?
9. Телефонный номер содержит 5 цифр. Какова вероятность того, что все цифры различны?
10. В ящике лежат 16 лампочек, из которых 6 перегоревших. Наугад берут 4 лампы. Какова вероятность того, что взятые лампы окажутся хорошими?

Задача 4

1. Из урны, содержащей 4 синих, 3 красных и 2 зеленых шара, наугад выбирают 2 шара. Какова вероятность выбрать 2 шара одного цвета?
2. Из партии в 60 деталей, содержащей 5 % брака, наугад выбирают 3 детали. Какова вероятность того, что в выборку попадет не более одной бракованной детали?
3. Из колоды в 32 карты наугад берут 3 карты. Какова вероятность того, что не менее двух карт будут иметь одну масть?
4. В партии 30 деталей, из них 5 нестандартных. Наугад взято 4 детали. Какова вероятность того, что среди взятых деталей более двух стандартных?
5. Из колоды в 52 карты наугад берут 4 карты. Какова вероятность того, что среди взятых карт не меньше двух тузов?

6. В лотерее 30 билетов, из которых 5 выигрышных. Какова вероятность получить более одного выигрышного билета, взяв наудачу 4 билета?
7. Из урны с 4 белыми, 2 синими и 5 черными шарами берут наугад 4 шара. Какова вероятность того, что среди взятых больше половины шаров окажутся черными?
8. Из урны, содержащей 6 белых и 6 черных шаров, наугад берут 4 шара. Какова вероятность того, что белых шаров окажется больше, чем черных?
9. Из партии в 100 деталей, содержащей 5 % брака, берут для проверки 5 деталей. Партия принимается, если среди проверяемых не более одной бракованной детали. Найти вероятность приема партии.
10. Из ящика, в котором лежат 3 красных, 5 зеленых и 5 синих шаров, наугад берут 3 шара. Какова вероятность того, что выбранные шары не будут одного цвета?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Кудрявцев В А, Демидович Б П* Краткий курс высшей математики М Наука, 1989
- Шипачев В С* Основы высшей математики М Высш шк, 1998
- Зайцев И А* Высшая математика М Высш шк, 1998
- Натансон И П* Краткий курс высшей математики СПб Лань, 1997
- Шнейдер В Е, Слуцкий А И, Шумов А С* Краткий курс высшей математики М Высш шк, 1978 Т 1, 2
- Тихомиров Н Б, Шелехов А М* Математика Учебный курс для юристов М Юрайт, 1999
- Дорофеева А В* Учебник по высшей математике для философских факультетов университетов М Изд-во МГУ, 1971
- Лихтарников Л М, Поволоцкий А И* Основы математического анализа СПб Лань, 1997
- Богомолов Н В* Практические занятия по математике М Высш шк, 1997
- Данко П Е, Попов А Г* Высшая математика в упражнениях и задачах В 2 ч М Высш шк, 1996
- Выгодский М Я* Справочник по высшей математике М Наука, 1977
- Бронштейн И Н, Семендяев К А* Справочник по математике М Наука, 1986
- Математический энциклопедический словарь* М Сов энцикл, 1988
- Стьюарт Я* Концепции современной математики Минск Высшш шк, 1980
- Юшкевич А П* Математика и ее история М Янус, 1996
- Очерки по истории математики / Под ред Б В Гнеденко М Изд-во МГУ, 1997
- Стройк Д Я* Краткий очерк истории математики М Наука, 1984
- Бородин А Н* Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики СПб. Лань, 1998
- Гмурман В Е* Теория вероятностей и математическая статистика М Высш шк, 1977
- Гмурман В Е* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике М Высш шк, 1979
- Вентцель Е С* Исследование операций задачи, принципы, методология М Наука, 1980
- Мышкис А Д* Элементы теории математических моделей М Физматлит, 1994

Содержание

| | |
|---|-----|
| ПРЕДИСЛОВИЕ | 3 |
| ВВЕДЕНИЕ | 8 |
| I ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ | 10 |
| 1 Предмет математики. Методологические проблемы и принципы | 10 |
| 1.1 Предмет математики | 10 |
| 1.2 Математический язык: особенность, становление и развитие | 17 |
| 1.3 Геометрия Евклида как первая естественно-научная теория | 21 |
| 1.4 Место и роль математики в современном мире, мировой культуре и истории, в том числе в гуманитарных науках | 26 |
| 2 Теория множеств | 31 |
| 2.1 Множества. Операции над множествами | 31 |
| 2.2 Множества и отношения | 36 |
| 3 Элементы дискретной математики | 42 |
| 3.1 Элементы комбинаторики | 42 |
| 3.2 Элементы теории графов | 45 |
| 4 Элементы математической логики | 48 |
| 4.1 Сущность математической логики | 48 |
| 4.2 Особенности математической логики | 50 |
| II ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА | 55 |
| 5 Введение в анализ | 55 |
| 5.1 Понятие функции | 55 |
| 5.2 Предел функции | 57 |
| 6 Дифференциальное исчисление | 61 |
| 6.1 Производная. Правила и формулы дифференцирования | 61 |
| 6.2 Приложения производной | 64 |
| 7 Интегральное исчисление | 66 |
| 7.1 Неопределенный интеграл. Методы интегрирования | 66 |
| 7.2 Определенный интеграл | 69 |
| 8 Дифференциальные уравнения | 71 |
| III МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ | 73 |
| 9 Основы теории вероятностей и математической статистики | 73 |
| 9.1 Событие и вероятность: основные понятия, определение вероятности | 74 |
| 9.2 Случайные величины | 81 |
| 9.3 Основные понятия математической статистики | 83 |
| 10 Математическое моделирование и принятие решений | 87 |
| 10.1 Математические методы и моделирование в целенаправленной деятельности | 87 |
| 10.2 Исследование операций | 92 |
| 10.3 Общая постановка задачи о принятии решения | 96 |
| ВАРИАНТЫ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ | 101 |
| Задание 1 | 101 |
| Задание 2 | 102 |
| Задание 3 | 105 |
| Задание 4 | 107 |
| СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ | 110 |

Учебное издание
Грес Павел Власович
МАТЕМАТИКА ДЛЯ ГУМАНИТАРИЕВ

Оригинал-макет подготовил *Л В Грес*

Изд лиц ЛР № 064893 от 24.12.96
Подписано к печати 05.11.99. Формат 60×90^{1/16}
Гарнитура «Times New Roman Cyr» Усл. печ. л. 7,0. Бумага газетная.
Печать офсетная. Тираж 5 000 экз. Заказ № 1208

Издательство «Юрайт»
Генеральный директор *В Ю Ильин*
Руководитель издательства *А В Лустов*
Главный редактор *Г Л Гуртова*
105037, Москва, городок им. Баумана, д. 3, корп. 4, стр. 10
Тел. (095) 742-72-12. E-mail: urait@aha.ru
Home Page: www.ih.ru/~urait

Отпечатано в ОАО «Типография №9»
109033, Москва, ул. Волочаевская, д. 40
(095) 362-89-59