

ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

ОФИЦИАЛЬНЫЙ

РАЗРАБОТЧИК КОНТРОЛЬНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ
для ЕДИНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ЭКЗАМЕНА

ЕГЭ-2008

МАТЕМАТИКА

- типовые задания частей А, В, С
- ответы и комментарии
- бланки ответов образца 2008 года
- правила заполнения бланков
- инструкция по проведению экзамена

РЕАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ



ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

ЕГЭ-2008

МАТЕМАТИКА

РЕАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ



АСТ • Астрель
Москва

УДК 373:51
ББК 22.1я721
Е28

Авторы-составители:

**В. В. Кочагин, Е. М. Бойченко, Ю. А. Глазков, Л. О. Денищева,
Г. А. Захарова, П. М. Камаев, Н. Б. Мельникова, А. Р. Рязановский,
И. Н. Сергеев, А. А. Фомин**

**ЕГЭ-2008 : математика : реальные задания / авт.-сост.
Е28 В. В. Кочагин, Е. М. Бойченко, Ю. А. Глазков и др. — М.:
АСТ: Астрель, 2008. — 125, [3] с. — (Федеральный инсти-
тут педагогических измерений).**

ISBN 978-5-17-048885-8 (ООО «Издательство АСТ»)

ISBN 978-5-271-19090-2 (ООО «Издательство Астрель»)

**УДК 373:51
ББК 22.1я721**

Подписано в печать 10.11.2007. Формат 84х108 1/32.
Усл. печ. л. 6,72. Тираж 50000 экз. Заказ № 8225.

ISBN 978-5-17-048885-8 (ООО «Издательство АСТ»)

ISBN 978-5-271-19090-2 (ООО «Издательство Астрель»)

© ФИПИ, 2007

© ООО «Издательство Астрель», 2007

Содержание

<i>Предисловие. А. Г. ЕРШОВ</i>	4	Вариант 3	54
ОФИЦИАЛЬНЫЕ ДОКУМЕНТЫ		Часть 1	54
ЕГЭ		Часть 2	56
Правила для участников		Часть 3	57
единого государственного		<i>Бланки ответов</i>	58
экзамена	5	Вариант 4	60
Вариант бланков I		Часть 1	60
Описание форм бланков		Часть 2	62
ответов участника ЕГЭ,		Часть 3	63
проводимого с использо-		<i>Бланки ответов</i>	64
ванием АИС «Экзамен»	15	Вариант 5	66
Правила заполнения		Часть 1	66
бланков ответов	17	Часть 2	68
Образцы		Часть 3	69
экзаменационных		<i>Бланки ответов</i>	70
бланков	20	Вариант 6	72
Вариант бланков II		Часть 1	72
Описание бланков		Часть 2	74
регистрации и ответов		Часть 3	75
участника ЕГЭ	23	<i>Бланки ответов</i>	76
Правила заполнения		Вариант 7	78
бланков	25	Часть 1	78
Образцы экзаменационных		Часть 2	80
бланков	36	Часть 3	81
		<i>Бланки ответов</i>	82
ВАРИАНТЫ		Вариант 8	84
ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ		Часть 1	84
РАБОТ		Часть 2	86
Инструкция		Часть 3	87
по выполнению работы	41	<i>Бланки ответов</i>	88
Вариант 1	42	Вариант 9	90
Часть 1	42	Часть 1	90
Часть 2	44	Часть 2	92
Часть 3	45	Часть 3	93
<i>Бланки ответов</i>	46	<i>Бланки ответов</i>	94
Вариант 2	48	Вариант 10	96
Часть 1	48	Часть 1	96
Часть 2	50	Часть 2	98
Часть 3	51	Часть 3	99
<i>Бланки ответов</i>	52	<i>Бланки ответов</i>	100
		Ответы	102
		Разбор наиболее трудных	
		заданий	105

ВАРИАНТЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ РАБОТ

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике дается 4 часа (240 мин). Работа состоит из трех частей и содержит 26 заданий.

Часть 1 содержит 13 заданий (A1—A10, B1—B3) обязательно-го уровня по материалу курса «Алгебра и начала анализа» 10—11 классов. К каждому заданию A1—A10 приведены 4 варианта ответа, из которых только один верный. При выполнении этих заданий надо указать номер верного ответа. К заданиям B1—B3 надо дать краткий ответ.

Часть 2 содержит 10 более сложных заданий (B4—B11, C1, C2) по материалу курса «Алгебра и начала анализа» 10—11 классов, а также различных разделов курсов алгебры и геометрии основной и средней школы. К заданиям B4—B11 надо дать краткий ответ, к заданиям C1 и C2 — записать решение.

Часть 3 содержит 3 самых сложных задания, два — алгебраических (C3, C5) и одно — геометрическое (C4). При их выполнении надо записать обоснованное решение.

За выполнение работы выставляются две оценки: аттестационная отметка и тестовый балл. Аттестационная отметка за усвоение курса алгебры и начал анализа 10—11 классов выставляется по пятибалльной шкале. При ее выставлении не учитывается выполнение четырёх заданий (B9, B10, B11, C4). В тексте работы номера этих заданий отмечены звездочкой.

Тестовый балл выставляется по 100-балльной шкале на основе первичных баллов, полученных за выполнение всех заданий работы.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удастся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий вы сможете вернуться, если у вас останется время.

Желаем успеха!

Вариант 1

ЧАСТЬ I

При выполнении заданий А1—А10 в бланке ответов № 1 под номером выполняемого задания поставьте знак «х» в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

А1. Упростите выражение $\frac{11^{1.5}}{11^{0.3}}$.

- 1) 1,2 2) 5 3) $11^{1.2}$ 4) 11^5

А2. Найдите значение выражения $-4\log_{11}(11^3)$.

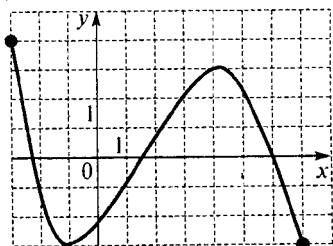
- 1) -64 3) -12
2) $-\frac{1}{64}$ 4) -1

А3. Вычислите: $\sqrt[4]{0,0625 \cdot 81}$.

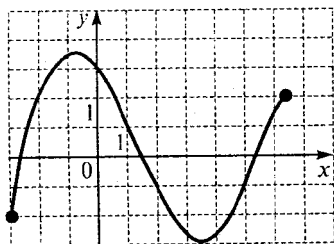
- 1) 1,5 2) 3,5 3) 0,45 4) 0,15

А4. На каком из следующих рисунков изображен график функции, возрастающей на промежутке $[0; 2]$?

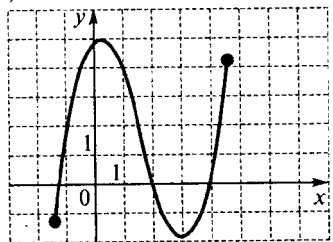
1)



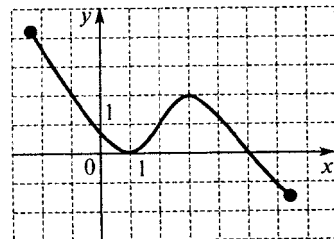
2)



3)



4)



A5. Найдите производную функции $y = 12x^3 - e^x$.

1) $y' = 15x^2 - xe^{x-1}$

3) $y' = 36x^2 - xe^{x-1}$

2) $y' = 3x^2 - \frac{e^x}{x+1}$

4) $y' = 36x^2 - e^x$

A6. Решите неравенство $7^{x+2,3} \leq \frac{1}{49}$.

1) $(-\infty; 0,3]$

2) $(-\infty; -4,3]$

3) $[-4,3; +\infty)$

4) $[0,3; +\infty)$

A7. Найдите наибольшее целое значение функции $y = 4,3\cos x$.

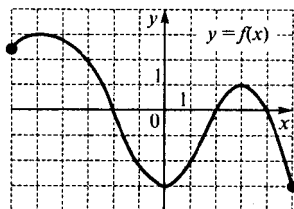
1) 1

2) 0

3) 5

4) 4

A8. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, заданной на отрезке $[-6; 5]$. Укажите те значения x , для которых выполняется неравенство $f(x) \geq 2$.



1) $[-6; -3]$

2) $[-6; -2] \cup [2; 4]$

3) $[-2; 2] \cup [4; 5]$

4) $[2; 3]$

A9. Найдите область определения функции $y = 10\sqrt{\log_2 x - 4}$.

1) $[16; +\infty)$

2) $(0; 16]$

3) $[4; +\infty)$

4) $(0; 4]$

A10. Решите уравнение $\cos 2x = 1$.

1) $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

2) $\pi n, n \in \mathbb{Z}$

3) $\frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$

4) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$

Ответом к заданиям B1–B11 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1. Решите уравнение $4^{x+1} + 8 \cdot 4^x = 3$.

B2. Найдите значение выражения $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - 4\cos(\pi - \alpha)$, если $\cos \alpha = -0,4$.

B3. Решите уравнение $5 \cdot 10^{\lg x} = 7x - 15$.

ЧАСТЬ 2

B4. Вычислите значение выражения $\log_{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi}{8} + \log_{\sqrt{2}} \sin \frac{3\pi}{8}$.

B5. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика функции $y = g(x)$ в точке $B(-6; 6)$. Найдите $g'(-6)$.

B6. Сколько целочисленных решений имеет неравенство

$$\frac{4 + 3x - x^2}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{2}} \geq 0?$$

B7. Решите уравнение $\sqrt{16 - (4x + 5)^2} = 4 + \cos^2 \frac{2\pi x}{5}$.

B8. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является четной периодической функцией с периодом, равным 8. На отрезке $[0; 4]$ функция $y = f(x)$ задана равенством $f(x) = -x^2 + 4x - 1$. Определите количество нулей функции $y = f(x)$ на отрезке $[-6; 4]$.

B9*. Бак заполняют керосином за 2 часа 30 минут с помощью трех насосов, работающих вместе. Производительности насосов относятся как 3 : 5 : 8. Сколько процентов объема будет заполнено за 1 час 18 минут совместной работы второго и третьего насосов?

B10*. Основание прямого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелограмм $ABCD$, в котором $CD = 2\sqrt{3}$, $\angle D = 60^\circ$. Тангенс угла между плоскостью основания и плоскостью $A_1 BC$ равен 6. Найдите высоту параллелепипеда.

B11*. Найдите площадь равнобедренной трапеции, если ее диагональ, равная 10, образует с основанием угол, косинус которого равен $\frac{\sqrt{2}}{10}$.

Для записи ответов на задания C1 и C2 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем решение.

C1. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = 0,25x - \frac{x+1}{x+2} + x^2 + (\sqrt{1-x^2})^2.$$

C2. Решите уравнение

$$\log_{3-4x}(4x^2 - 13x + 7) = 1 + \frac{1}{\log_2(3-4x)}.$$

ЧАСТЬ 3

Для записи ответов на задания (C3—C5) используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем обоснованное решение.

C3. Найдите все значения a , для которых при каждом x из промежутка $[-3; -1)$ значение выражения $x^4 - 7x^2 - 3$ не равно значению выражения ax^2 .

C4*. Основанием пирамиды $FABCD$ является прямоугольник $ABCD$. Плоскость AFC перпендикулярна плоскости ABC , тангенс угла FAC равен $\frac{16}{7}$, тангенс угла между прямой BC и плоскостью AFC равен 3. Точка M лежит на ребре BC , $BM = \frac{2}{3}BC$. Точка L лежит на прямой AF и равноудалена от точек M и C . Объем пирамиды $LAMC$ равен 48. Центр сферы, описанной около пирамиды $FABCD$, лежит в плоскости основания пирамиды. Найдите радиус этой сферы.

C5. Найдите все значения a , при каждом из которых оба числа $4\sin a - 3$ и $8\cos 2a + 16\sin a + 1$ являются решениями неравенства $\frac{(21x - 2x^2 + 65)\sqrt{x+2}}{\log_3 |x-9| - 2} \geq 0$.

Вариант 2

ЧАСТЬ 1

При выполнении заданий А1–А10 в бланке ответов № 1 под номером выполняемого задания поставьте знак «х» в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

А1. Упростите выражение $k^{-5,2} \cdot 3k^{0,8}$.

- 1) $3^{0,8}k^{-4,4}$ 2) $3k^{-6}$ 3) $3k^{-4,4}$ 4) $3^{0,8}k^{-6}$

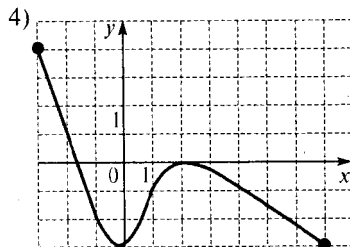
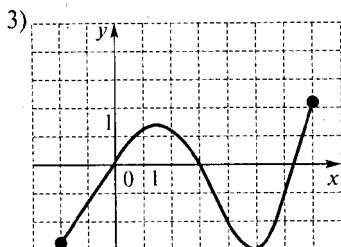
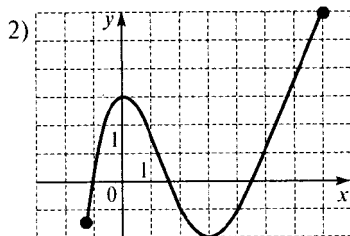
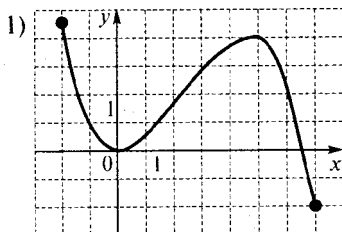
А2. Найдите значение выражения $-4\log_6(6^3)$.

- 1) $-\frac{1}{64}$ 2) -12 3) -64 4) -1

А3. Вычислите: $\sqrt[3]{0,008 \cdot 27}$.

- 1) 0,18 2) 0,006 3) 3,2 4) 0,6

А4. На каком из следующих рисунков изображен график функции, убывающей на промежутке $[3; 7]$?



А5. Найдите производную функции $y = 10x^3 - e^x$.

- 1) $y' = 30x^2 - xe^{x-1}$ 3) $y' = 30x^2 - \frac{e^{x+1}}{x+1}$
 2) $y' = 30x^2 - e^x$ 4) $y' = 13x^2 - xe^{x-1}$

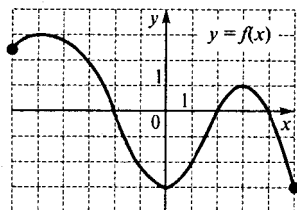
A6. Решите неравенство $3^{3x-2} \geq \frac{1}{9}$.

- 1) $(0; +\infty)$ 2) $(-\infty; 0)$ 3) $[0; +\infty)$ 4) $(-\infty; 0]$

A7. Найдите наибольшее целое значение функции $y = 3,9 \cos x$.

- 1) 1 2) 0 3) 3 4) 4

A8. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, заданной на отрезке $[-4; 7]$. Укажите те значения x , для которых выполняется неравенство $f(x) \geq -1$.



- 1) $[0; 7]$
 2) $[-4; 1] \cup [3; 5]$
 3) $[-1; 3]$
 4) $[-1; 7]$

A9. Найдите область определения функции $y = \sqrt[6]{\log_5 x - 3}$.

- 1) $[3; +\infty)$ 2) $(0; 3]$ 3) $(0; 125]$ 4) $[125; +\infty)$

A10. Решите уравнение $\sin 3x = -\frac{1}{2}$.

- 1) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$
 2) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$
 3) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$
 4) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$

Ответом к заданиям В1–В11 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1. Решите уравнение $x \cdot 6^{3x} - 36 \cdot 6^{3x} = 0$.

B2. Решите уравнение $7 \cdot 5^{\log_5 x} = x + 21$.

B3. Найдите значение выражения $4 \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) + \cos (\pi - \alpha)$, если $\cos \alpha = -0,9$.

ЧАСТЬ 2

В4. Вычислите значение выражения

$$\log_{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi}{8} + \log_{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi}{4} + \log_{\sqrt{2}} \sin \frac{3\pi}{8}.$$

В5. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика функции $y = h(x)$ в точке $C(-5; 15)$. Найдите $h'(-5)$.

В6. Сколько целых чисел являются решениями неравенства

$$\frac{8 + 2x - x^2}{\lg^2 \frac{\pi x}{4} + 8} \geq 0?$$

В7. Решите уравнение $\sqrt{9 + (2x + 7)^2} = 3 - \cos^2 \frac{3\pi x}{7}$.

В8. Функция $y = g(x)$ определена на всей числовой прямой и является четной периодической функцией с периодом, равным 6. На отрезке $[0; 3]$ функция $y = g(x)$ задана равенством $g(x) = -x^2 + 4x - 1$. Сколько нулей имеет функция $y = g(x)$ на отрезке $[-3; 5]$?

В9*. Цистерна заполняется керосином за 2 часа с помощью трех насосов, работающих вместе. Производительности насосов относятся как 1 : 2 : 7. Сколько процентов объема цистерны будет заполнено за 1 час 12 минут совместной работы первого и третьего насосов?

В10*. Радиус основания цилиндра равен 6, а высота равна 2. Отрезки AB и CD — диаметры одного из оснований цилиндра, а отрезок AA_1 — его образующая. Известно, что $BC = 2\sqrt{21}$. Найдите синус угла между прямыми A_1C и BD .

В11*. Найдите площадь равнобедренной трапеции, если ее высота равна 3, а тангенс угла между диагональю и основанием равен $\frac{1}{4}$.

Для записи ответов на задания C1 и C2 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем решение.

C1. Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = \frac{x+1}{x+2} - 0,25x + x^2 + (\sqrt{1-x^2})^2.$$

C2. Решите уравнение

$$\log_{3-4x}(16x^2 - 24x + 6) = 1 + \frac{1}{\log_2(3-4x)}.$$

ЧАСТЬ 3

Для записи ответов на задания (С3—С5) используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем обоснованное решение.

С3. Найдите все значения a , для которых при каждом x из промежутка $[-2; -1)$ значение выражения $x^4 - 2x^2$ не равно значению выражения $ax^2 + 5$.

С4*. Основанием пирамиды $FABCD$ является прямоугольник $ABCD$. Плоскость AFC перпендикулярна плоскости ABC , тангенс угла FAC равен $\frac{49}{16}$, тангенс угла между прямой BC и плоскостью AFC равен 3. Точка M лежит на ребре BC , $BM = \frac{2}{5}BC$. Точка L лежит на прямой AF и равноудалена от точек M и C . Объем пирамиды $LBDM$ равен 343. Центр сферы, описанной около пирамиды $FABCD$, лежит в плоскости основания пирамиды. Найдите радиус этой сферы.

С5. Найдите все значения a , при каждом из которых оба числа $a\sqrt{3a-11} - 5$ и $11a^2 + 20a\sqrt{3a-11} - 3a^3 - 93$ являются решениями неравенства $\log_{0.5x-2} \left(\log_4 \left(\frac{12}{\sqrt{3x-12}} \right) \right) \leq 0$.

Вариант 3

ЧАСТЬ 1

При выполнении заданий А1—А10 в бланке ответов № 1 под номером выполняемого задания поставьте знак «х» в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

А1. Упростите выражение $\sqrt[5]{11^{15}d^{10}}$.

- 1) 11^3d^2 2) $11^{10}d^5$ 3) $11^{75}d^{50}$ 4) $11^{20}d^{15}$

А2. Найдите значение выражения $4^{3a} \cdot 4^{-5a}$ при $a = -\frac{1}{2}$.

- 1) $\frac{1}{4}$ 2) 2 3) 3 4) 4

А3. Вычислите: $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{10} + \log_{\frac{1}{3}} 250$.

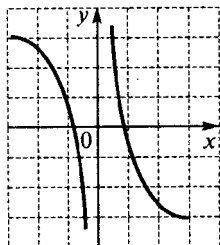
- 1) 25 2) 2 3) 5 4) -2

А4. Найдите производную функции $y = 3\cos x + x^2$.

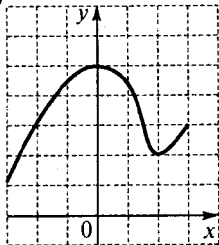
- 1) $y' = 3\sin x - 2x$ 3) $y' = 2x - 3\sin x$
2) $y' = 4x - \sin x$ 4) $y' = 4x^2 + 2\cos x$

А5. На одном из следующих рисунков изображен график нечетной функции. Укажите этот рисунок.

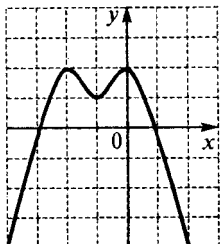
1)



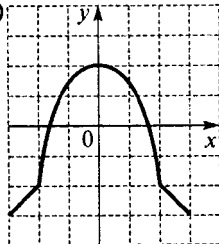
2)



3)



4)



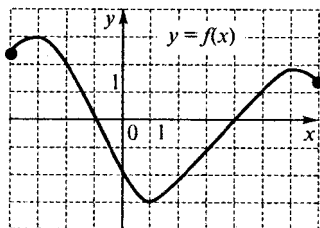
A6. Решите неравенство $3^{2x-1} \geq \frac{1}{9}$.

- 1) $(-0,5; +\infty)$ 2) $(-\infty; -0,5)$ 3) $[-1,5; +\infty)$ 4) $[-0,5; +\infty)$

A7. Найдите наибольшее целое значение функции $y = 6,5 \sin x$.

- 1) 1 2) 6 3) 7 4) 0

A8. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, заданной на отрезке $[-4; 7]$. Укажите те значения x , для которых выполняется неравенство $f(x) \leq -2$.



- 1) $[0; 2]$
 2) $[-4; -2]$
 3) $[-4; 0] \cup [2; 7]$
 4) $[-3; -2]$

A9. Найдите область определения функции $f(x) = \log_{0,2}(7x - x^2)$.

- 1) $(-\infty; 0) \cup (7; +\infty)$
 2) $(0; +\infty)$
 3) $(0; 7)$
 4) $(-\infty; -7) \cup (0; +\infty)$

A10. Решите уравнение $\cos 2x = \frac{1}{2}$.

- 1) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
 2) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$
 3) $\pm \frac{\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
 4) $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Ответом к заданиям В1–В11 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1. Решите уравнение $81 \cdot 9^{3x} + x \cdot 9^{3x} = 0$.

B2. Найдите значение выражения $3\sin^2 \alpha - 7\cos^2 \alpha$, если $\cos \alpha = -0,1$.

B3. Решите уравнение $\sqrt{4x^2 - 27} = -x$.

ЧАСТЬ 2

В4. Вычислите значение выражения

$$\log_2 \sin \frac{\pi}{8} + \log_2 \sin \frac{3\pi}{8}.$$

В5. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика функции $y = \varphi(x)$ в точке $D(-4; 6)$. Найдите $\varphi'(-4)$.

В6. Сколько целочисленных решений имеет неравенство

$$\frac{4 + 3x - x^2}{\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi x}{2} + 4} \geq 0?$$

В7. Решите уравнение

$$2(\sqrt{2} - \cos 15\pi x)(\sqrt{2} + \cos 15\pi x) = 4 + (10x + 1)^2.$$

В8. Функция $y = h(x)$ определена на всей числовой прямой и является четной периодической функцией с периодом, равным 8. На отрезке $[0; 4]$ функция $y = h(x)$ задана равенством $h(x) = x^2 - 4x + 1$. Определите количество нулей функции $y = h(x)$ на отрезке $[-7; 4]$.

В9*. Два каменщика, работая вместе, могут выполнить задание за 12 ч. Производительности труда первого и второго каменщиков относятся как 1 : 3. Каменщики договорились работать поочередно. Сколько времени должен проработать первый каменщик, чтобы это задание было выполнено за 20 ч?

В10*. Радиус основания цилиндра равен 5, а высота равна 6. Отрезки AB и CD — диаметры одного из оснований цилиндра, а отрезок AA_1 — его образующая. Известно, что $BC = 6\sqrt{2}$. Найдите синус угла между прямыми A_1C и BD .

В11*. Найдите площадь равнобедренной трапеции, если ее диагональ равна $2\sqrt{13}$, а средняя линия равна 4.

Для записи ответов на задания С1 и С2 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем решение.

С1. Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = \left| \sqrt{4 - x^2} - 3 \right| + \sqrt{4 - x^2} + x^3 - 4,5x^2.$$

С2. Найдите абсциссы всех точек пересечения графиков функций $y = \log_2^3 x + 3\log_2^2 x$ и $y = -\frac{1}{\log_x \sqrt{2}}$.

ЧАСТЬ 3

Для записи ответов на задания (С3–С5) используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем обоснованное решение.

С3. Найдите все значения a , для которых при каждом x из промежутка $[1; 2)$ значение выражения $x^4 - x^2 - 1$ не равно значению выражения ax^2 .

С4*. В пирамиде $FABC$ грани ABF и ABC перпендикулярны, $FB : FA = 20 : 7$. Тангенс угла между прямой BC и плоскостью ABF равен 3. Точка M выбрана на ребре BC так, что $BM : MC = 1 : 3$. Точка T лежит на прямой AF и равноудалена от точек M и B . Объем пирамиды $ABMT$ равен 16. Центр сферы, описанной около пирамиды $FABC$, лежит на ребре AB . Найдите площадь этой сферы.

С5. Найдите все значения a , при каждом из которых оба числа $a\sqrt{a-2} - 5$ и $2a^2 + 24\sqrt{a-2} - a^3 - 131$ являются решениями неравенства $\log_{2x-12}(\log_5(2x^2 - 41x + 200)) \geq 0$.

Вариант 4

ЧАСТЬ 1

При выполнении заданий А1—А10 в бланке ответов № 1 под номером выполняемого задания поставьте знак «х» в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

А1. Упростите выражение $\sqrt[3]{7^{12}c^{15}}$.

1) 7^9c^{12}

3) $7^{36}c^{45}$

2) 7^4c^5

4) $7^{15}c^{18}$

А2. Найдите значение выражения $2^{7a} \cdot 2^{-3a}$ при $a = \frac{1}{2}$.

1) 256

2) 32

3) 8

4) 4

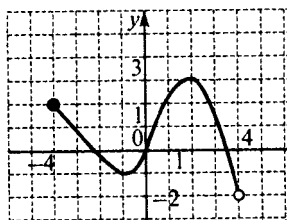
А3. Найдите значение выражения $\log_7(49a)$, если $\log_7 a = -8,6$.

1) -10,6

3) -6,6

2) -17,2

4) -57,6



А4. На рисунке изображен график функции, заданной на промежутке $[-4; 4]$. Укажите множество значений этой функции.

1) $[-1; 2]$

2) $(-2; 3]$

3) $[-4; 4]$

4) $(-2; 2]$

А5. Найдите производную функции $y = 20x^4 - e^x$.

1) $y' = 80x^3 - xe^{x-1}$

2) $y' = 4x^5 - \frac{e^{x+1}}{x+1}$

3) $y' = 80x^3 - e^x$

4) $y' = 5x^3 - xe^{x-1}$

А6. Найдите множество значений функции $y = 5^x + 10$.

1) $(10; +\infty)$

2) $(5; +\infty)$

3) $(15; +\infty)$

4) $[10; +\infty)$

А7. Решите неравенство $\frac{x+8}{(x-4)(7x+5)} \leq 0$.

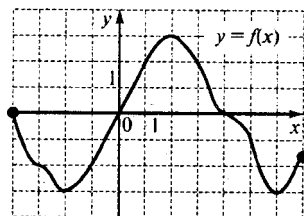
1) $[-8; -\frac{5}{7}) \cup (4; +\infty)$

2) $(-\infty; -8]$

3) $(-\infty; 4)$

4) $(-\infty; -8] \cup (-\frac{5}{7}; 4)$

A8. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, заданной на отрезке $[-4; 7]$. Укажите те значения x , для которых выполняется неравенство $f(x) \geq 2$.



- 1) $[-4; 0] \cup [4; 7]$
- 2) $[0; 4]$
- 3) $[1; 3]$
- 4) $[2; 7]$

A9. Найдите область определения функции $f(x) = \log_{0,3}(x^2 - 4x)$.

- 1) $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$
- 2) $(0; 2)$
- 3) $(0; 4)$
- 4) $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$

A10. Решите уравнение $\sin \frac{x}{5} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- 1) $\pm \frac{5\pi}{3} + 10\pi n, n \in \mathbb{Z}$
- 2) $(-1)^n \frac{5\pi}{3} + 5\pi n, n \in \mathbb{Z}$
- 3) $\pm \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
- 4) $(-1)^n \frac{5\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Ответом к заданиям В1—В11 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

В1. Решите уравнение $64 \cdot 8^{2x} + x \cdot 8^{2x} = 0$.

В2. Найдите значение выражения $2\sin^2 \alpha + 6\cos^2 \alpha$, если $\sin \alpha = -0,2$.

В3. Вычислите: $\sqrt[3]{38} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{19}}$.

ЧАСТЬ 2

В4. Вычислите значение выражения

$$\log_2 \sin \frac{\pi}{8} + \log_2 \sin \frac{\pi}{4} + \log_2 \sin \frac{3\pi}{8}.$$

В5. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика функции $y = g(x)$ в точке $F(2; 3)$. Найдите $g'(2)$.

В6. Сколько целых чисел являются решениями неравенства

$$\frac{8+2x-x^2}{3+\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi x}{4}} \geq 0?$$

В7. Решите уравнение $\sqrt{16+(2x-3)^2} = 4 - \cos^2 \frac{5\pi x}{3}$.

В8. Функция $y = h(x)$ определена на всей числовой прямой и является четной периодической функцией с периодом, равным 6. На отрезке $[0; 3]$ функция $y = h(x)$ задана равенством $h(x) = x^2 - 4x + 1$. Определите количество нулей функции $y = h(x)$ на отрезке $[-3; 5]$.

В9*. Отец с сыном должны вскопать огород. Производительность труда у отца в два раза больше, чем у сына. Работая вместе, они могут вскопать весь огород за 4 часа. Однако вместе они проработали только один час, потом некоторое время работал один сын, а заканчивал работу уже один отец. Сколько часов в общей сложности проработал на огороде отец, если вся работа на огороде была выполнена за 7 часов?

В10*. Радиус основания цилиндра равен 1, а высота равна $2\sqrt{6}$. Отрезки AB и CD — диаметры одного из оснований цилиндра, а отрезок AA_1 — его образующая. Известно, что $AD = \sqrt{3}$. Найдите косинус угла между прямыми A_1C и BD .

В11*. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла D пересекает сторону AB в точке K и прямую BC в точке P . Найдите периметр треугольника CDP , если $DK = 18$, $PK = 24$, $AD = 15$.

Для записи ответов на задания C1 и C2 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем решение.

C1. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = 0,5x + (\sqrt{4-x^2})^2 + x^2 - \frac{x+1}{x+3}.$$

C2. Найдите абсциссы всех точек пересечения графиков функций $y = \log_3^3 x - \log_5^2 x$ и $y = -\frac{1}{\log_x \sqrt{5}}$.

ЧАСТЬ 3

Для записи ответов на задания (C3–C5) используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем обоснованное решение.

C3. Найдите все значения a , для которых при каждом x из промежутка $[1; 2)$ значение выражения $x^8 - x^4 - 16$ не равно значению выражения ax^4 .

C4*. В пирамиде $FABC$ грани ABF и ABC перпендикулярны, $FB : FA = 15 : 11$. Тангенс угла между прямой BC и плоскостью ABF равен 5. Точка M выбрана на ребре BC так, что $BM : MC = 4 : 11$. Точка T лежит на прямой AF и равноудалена от точек M и B . Центр сферы, описанной около пирамиды $FABC$, лежит на ребре AB , площадь этой сферы равна 36π . Найдите объем пирамиды $ACMT$.

C5. Найдите все значения a , при каждом из которых оба числа $a \cdot 2^{a-4}$ и $a^2 \cdot 4^{a-4} + 104 - 5a \cdot 2^{a-2}$ являются решениями неравенства $\log_{10,5-x} \left(\log_2 \frac{x-2}{x-3} \right) \geq 0$.

Вариант 5

ЧАСТЬ 1

При выполнении заданий А1—А10 в бланке ответов № 1 под номером выполняемого задания поставьте знак «х» в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

А1. Упростите выражение $\sqrt[5]{3^{10}a^5}$.

- 1) $3^{50}a^{25}$ 2) $3^{15}a^{10}$ 3) 3^5a^{25} 4) 3^2a

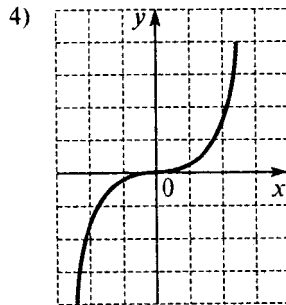
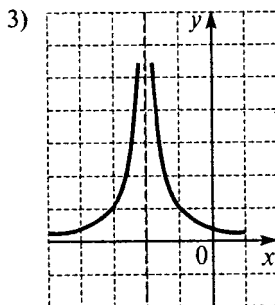
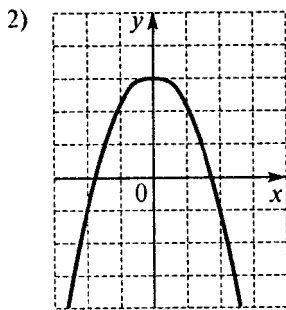
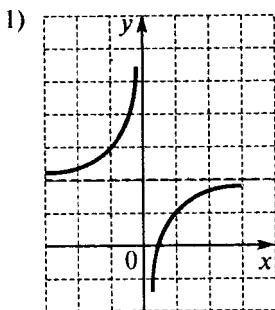
А2. Найдите значение выражения $3^{4a} \cdot 3^{-2a}$ при $a = \frac{1}{2}$.

- 1) 27 2) 4,5 3) 3 4) 81

А3. Найдите значение выражения $\log_5(125d)$, если $\log_5 d = -3,1$.

- 1) -6,1 2) -9,3 3) -0,1 4) -128,1

А4. На одном из следующих рисунков изображен график нечетной функции. Укажите этот рисунок.



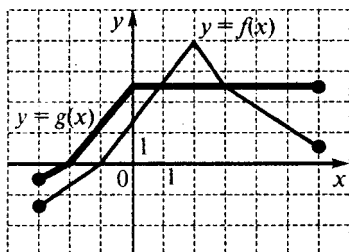
A5. Найдите множество значений функции $y = 11\cos x$.

- 1) $[0; 11]$ 2) $[-1; 1]$ 3) $(-\infty; +\infty)$ 4) $[-11; 11]$

A6. Решите неравенство $2^{10x-5} \geq \frac{1}{16}$.

- 1) $(0,1; +\infty)$ 2) $[0,1; +\infty)$ 3) $(-\infty; 0,1)$ 4) $[-0,9; +\infty)$

A7. На рисунке изображены графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, заданных на промежутке $[-3; 6]$. Укажите те значения x , для которых выполняется неравенство $f(x) \geq g(x)$.



- 1) $[-3; -2] \cup [-1; 6]$
 2) $[-3; 1] \cup [3; 6]$
 3) $[1; 3]$
 4) $[-2; -1]$

A8. Найдите производную функции $y = x^6 - 4\sin x$.

- 1) $y' = 6x^5 + 4\cos x$ 2) $y' = 6x^5 - 4\cos x$
 3) $y' = \frac{x^7}{7} + 4\cos x$ 4) $y' = x^5 - 4\cos x$

A9. Найдите область определения функции $f(x) = \log_{0,3}(6x - x^2)$.

- 1) $(-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$ 2) $(-\infty; -6) \cup (0; +\infty)$
 3) $(-6; 0)$ 4) $(0; 6)$

A10. Решите уравнение $\cos \frac{x}{5} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- 1) $\pm \frac{5\pi}{4} + 10\pi n, n \in \mathbb{Z}$ 2) $(-1)^n \frac{5\pi}{4} + 5\pi n, n \in \mathbb{Z}$
 3) $(-1)^n \frac{5\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ 4) $\pm \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Ответом к заданиям В1–В11 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

В1. Решите уравнение $\log_7(8x - 20) - \log_7 2 = \log_7 3$.

В2. Найдите значение выражения $5\sin^2 \alpha + 2\cos^2 \alpha$, если $\cos \alpha = -0,1$.

В3. Вычислите: $\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{\frac{25}{16}}$.

ЧАСТЬ 2

В4. Вычислите значение выражения

$$\log_{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{12} + \log_{\sqrt{2}} \cos \frac{5\pi}{12}.$$

В5. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика функции $y = \varphi(x)$ в точке $T(4; 10)$. Найдите $\varphi'(4)$.

В6. Сколько целочисленных решений имеет неравенство

$$\frac{10 + 3x - x^2}{1 + \log_2 x} \geq 0?$$

В7. Решите уравнение

$$16x^2 + 24x + 12 = (\sqrt{3} - \cos \frac{14\pi x}{3})(\sqrt{3} + \cos \frac{14\pi x}{3}).$$

В8. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является четной периодической функцией с периодом, равным 6. На отрезке $[0; 3]$ функция $y = f(x)$ задана равенством $f(x) = x^2 - 2x - 1$. Определите количество нулей функции $y = f(x)$ на отрезке $[-1; 5]$.

В9*. Два плотника, работая вместе, могут выполнить задание за 36 ч. Производительности труда первого и второго плотников относятся как 3 : 4. Плотники договорились работать поочередно. Какую часть этого задания должен выполнить второй плотник, чтобы все задание было выполнено за 69,3 ч?

В10*. В основании конуса проведена хорда. Через данную хорду и вершину конуса S проведена плоскость так, что угол при вершине S образовавшегося в сечении треугольника равен 60° . Найдите расстояние от центра основания конуса O до данной плоскости, если высота конуса равна 2, а образующая равна $\frac{8}{3}$.

В11*. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла B пересекает сторону CD в точке T и прямую AD в точке M . Найдите периметр треугольника ABM , если $BC = 15$, $BT = 18$, $TM = 12$.

Для записи ответов на задания C1 и C2 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем решение.

C1. Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = \frac{x+1}{x+3} - 0,5x + x^2 + (\sqrt{4-x^2})^2.$$

C2. Решите уравнение

$$\log_{2-x}(x^2 - 3x + 2) = 1 + \frac{1}{\log_3(2-x)}.$$

ЧАСТЬ 3

Для записи ответов на задания (C3–C5) используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем обоснованное решение.

C3. Найдите все значения a , для которых при каждом x из промежутка $(-4; -1]$ значение выражения $x^2 - |x| - 1$ не равно значению выражения $a|x|$.

C4*. Около правильной пирамиды $FABC$ описана сфера, центр которой лежит в плоскости основания ABC пирамиды. Точка M лежит на ребре AB так, что $AM : MB = 2 : 7$. Точка T лежит на прямой AF и равноудалена от точек M и B . Объем пирамиды $TBCM$ равен $\frac{154\sqrt{3}}{81}$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды $FABC$.

C5. Найдите все значения a , при каждом из которых оба числа $a \cdot 2^{a-2}$ и $3a \cdot 2^a - 4a^2 \cdot 4^{a-3} - 27$ являются решениями неравенства $\log_{x-5,5}(\log_4 \frac{x-13}{x-10}) \geq 0$.

Вариант 6

ЧАСТЬ 1

При выполнении заданий A1—A10 в бланке ответов № 1 под номером выполняемого задания поставьте знак «x» в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

A1. Упростите выражение $k^{-5,3} \cdot 4k^{0,1}$.

1) $4^{0,1}k^{-5,2}$

3) $4k^{-5,4}$

2) $4k^{-5,2}$

4) $4^{0,1}k^{-5,4}$

A2. Вычислите: $\frac{5\sqrt[3]{17}}{\sqrt[3]{136}}$.

1) 0,5

2) 2

3) 2,5

4) 4

A3. Найдите значение выражения $\log_4(64c)$, если $\log_4 c = -3,5$.

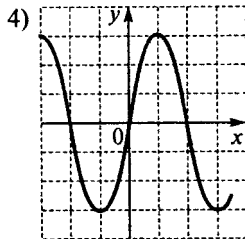
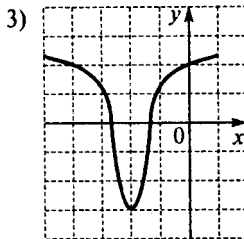
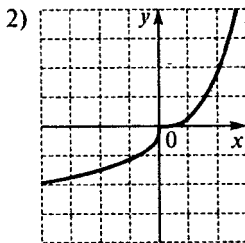
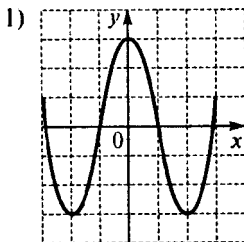
1) -6,5

2) -0,5

3) -10,5

4) -67,5

A4. На одном из следующих рисунков изображен график четной функции. Укажите этот рисунок.



A5. Найдите множество значений функции $y = 11\sin x$.

1) $[-11; 11]$

3) $[-1; 1]$

2) $[0; 11]$

4) $(-\infty; +\infty)$

A6. Найдите область определения функции $f(x) = \frac{25}{3 - 4\sqrt{x}}$.

1) $[0; 3) \cup (3; +\infty)$

3) $[0; 81) \cup (81; +\infty)$

2) $[0; +\infty)$

4) $(-\infty; 81) \cup (81; +\infty)$

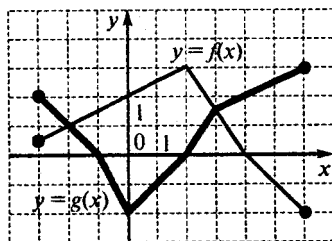
A7. На рисунке изображены графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, заданных на промежутке $[-3; 6]$. Укажите те значения x , для которых выполняется неравенство $f(x) \leq g(x)$.

1) $[-1; 2]$

2) $[-2; 3]$

3) $[-3; -1] \cup [2; 6]$

4) $[-3; -2] \cup [3; 6]$



A8. Найдите производную функции $y = \frac{5}{2}x^4 - 3x^2 + 2x - 1$.

1) $y' = 10x^3 - 15x + x^2$

2) $y' = 10x^3 - 6x + 2$

3) $y' = \frac{1}{2}x^5 - x^3 + x^2 - x$

4) $y' = 5x^3 - 5x + x^2$

A9. Решите неравенство $\log_{\frac{5}{6}}(2x-9) > \log_{\frac{5}{6}}x$.

1) $(-\infty; 9)$

2) $(4,5; 9)$

3) $(4,5; +\infty)$

4) $(9; +\infty)$

A10. Решите уравнение $\sin \frac{x}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1) $(-1)^n \frac{4\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

2) $\pm \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

3) $(-1)^n \frac{4\pi}{3} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$

4) $\pm \frac{4\pi}{3} + 8\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Ответом к заданиям В1–В11 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1. Решите уравнение $\log_2(15x - 10) - \log_2 5 = \log_2 13$.

В2. Найдите значение выражения $\sqrt{15} \sin \alpha$,

если $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{11}{15}}$, $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$.

В3. Вычислите: $\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt[3]{\frac{16}{6}}$.

ЧАСТЬ 2

В4. Вычислите значение выражения

$$\log_2 \cos \frac{\pi}{12} + \log_2 \cos \frac{5\pi}{12}.$$

В5. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика функции $y = g(x)$ в точке $M(6; 9)$. Найдите $g'(6)$.

В6. Сколько целых чисел являются решениями неравенства

$$\frac{6 - 5x - x^2}{2 + \log_3^2 x} \geq 0?$$

В7. Решите уравнение

$$25x^2 + 60x + 39 = (\sqrt{3} - \cos \frac{5\pi x}{4})(\sqrt{3} + \cos \frac{5\pi x}{4}).$$

В8. Функция $y = g(x)$ определена на всей числовой прямой и является четной периодической функцией с периодом, равным 4. На отрезке $[0; 2]$ функция $y = g(x)$ задана равенством $g(x) = 2x^2 - 4x + 1$. Сколько нулей имеет функция $y = g(x)$ на отрезке $[-3; 3]$?

В9*. Два фермера, работая вместе, могут вспахать поле за 25 ч. Производительности труда первого и второго фермеров относятся как 2 : 5. Фермеры планируют работать поочередно. Сколько времени должен проработать второй фермер, чтобы это поле было вспахано за 45,5 ч?

В10*. Угол между образующими SA и SB конуса равен 90° , высота конуса равна 4, а радиус основания равен $\frac{4\sqrt{15}}{3}$. Найдите градусную меру угла между плоскостью ABC и плоскостью основания конуса.

В11*. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла D пересекает сторону AB в точке K и прямую BC в точке P . Найдите периметр треугольника CDP , если $AK = 12$, $BK = 9$, $PK = 15$.

Для записи ответов на задания C1 и C2 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем решение.

C1. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{x+1}{x+4} + x^2 + (\sqrt{9-x^2})^2.$$

C2. Решите уравнение

$$\log_{1-x}(2x^2 - 7x + 3) = 2 + \frac{1}{\log_3(1-x)}.$$

ЧАСТЬ 3

Для записи ответов на задания (C3—C5) используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем обоснованное решение.

C3. Найдите все значения a , для которых при каждом x из промежутка $[-5; -2)$ значение выражения $x^2 - 4|x| - 2$ не равно значению выражения $a|x|$.

C4*. Около правильной пирамиды $FABC$ описана сфера, центр которой лежит в плоскости основания ABC пирамиды. Точка M лежит на ребре AB так, что $AM : MB = 1 : 3$. Точка T лежит на прямой AF и равноудалена от точек M и B . Объем пирамиды $TBCM$ равен $\frac{5}{64}$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды $FABC$.

C5. Найдите все значения a , при каждом из которых оба числа $4\cos a + 4$ и $8\cos 2a - 32\cos a + 23$ являются решениями неравенства $\frac{1 - \log_5 |x-4|}{(114 - x - 3x^2)\sqrt{x+3}} \leq 0$.

ЧАСТЬ 1

При выполнении заданий А1—А10 в бланке ответов № 1 под номером выполняемого задания поставьте знак «х» в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

A1. Упростите выражение $c^{4,5} \cdot 13c^{-0,5}$.

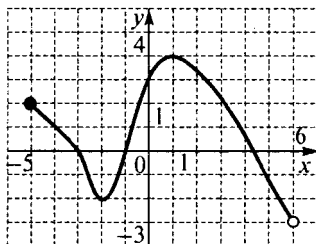
- 1) $13^{-0,5}c^5$
2) $13c^4$

A2. Вычислите: $\frac{\sqrt[3]{152}}{4\sqrt[3]{19}}$.

- 1) 0,5 2) 2 3) 2,5 4) 4

A3. Найдите значение выражения $\log_{\frac{1}{7}} 245 + \log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{5}$.

- 1) 49 2) 2 3) -2 4) 7



A4. На рисунке изображен график функции, заданной на промежутке $[-5; 6)$. Укажите множество значений этой функции.

- 1) $[-5; 6)$
- 2) $[-2; 4]$
- 3) $(-3; 4]$
- 4) $(-3; 2]$

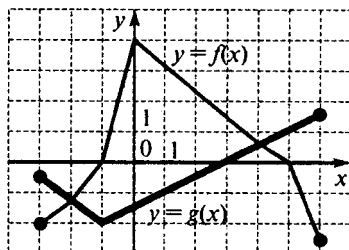
A5. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(7x-21) > \log_{\frac{1}{2}}(6x)$.

- 1) $(-\infty; 21)$
- 2) $(3; 21)$
- 3) $(3; +\infty)$
- 4) $(21; +\infty)$

A6. Найдите область определения функции $f(x) = \frac{7}{\sqrt[6]{x}-2}$.

- 1) $[0; +\infty)$
- 2) $[0; 2) \cup (2; +\infty)$
- 3) $(-\infty; 32) \cup (32; +\infty)$
- 4) $[0; 64) \cup (64; +\infty)$

А7. На рисунке изображены графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, заданных на промежутке $[-3; 6]$. Укажите те значения x , для которых выполняется неравенство $f(x) \geq g(x)$.



- 1) $[-1; 5]$
- 2) $[-3; -2] \cup [4; 6]$
- 3) $[-3; -1] \cup [5; 6]$
- 4) $[-2; 4]$

А8. Найдите производную функции $y = -\frac{7}{6}x^6 + 5x^4 - 14$.

- 1) $y' = -7x^7 + x^5 - 14x$
- 2) $y' = -\frac{1}{6}x^7 + x^5 - 14x$
- 3) $y' = -7x^5 + 20x^3$
- 4) $y' = -7x^5 + 9x^3$

А9. Решите уравнение $\operatorname{tg} 5x = -\sqrt{3}$.

- 1) $-\frac{\pi}{15} + \frac{\pi}{5}n, n \in \mathbb{Z}$
- 2) $-\frac{5\pi}{3} + 5\pi n, n \in \mathbb{Z}$
- 3) $-\frac{\pi}{15} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
- 4) $-\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

А10. Найдите множество значений функции $y = 4\cos x$.

- 1) $[-1; 1]$
- 2) $[-4; 4]$
- 3) $(-\infty; +\infty)$
- 4) $[0; 4]$

Ответом к заданиям В1–В11 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

В1. Решите уравнение $\log_9 (20x - 16) - \log_9 4 = \log_9 18$.

В2. Найдите значение выражения $\sqrt{19} \sin \alpha$, если $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{3}{19}}, \pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$.

В3. Решите уравнение $\sqrt{11x^2 - 490} = -x$.

ЧАСТЬ 2

В4. Вычислите значение выражения

$$\log_4 \cos \frac{\pi}{12} + \log_4 \cos \frac{5\pi}{12}.$$

В5. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика функции $y = \varphi(x)$ в точке $T(6; 3)$. Найдите $\varphi'(6)$.

В6. Сколько целочисленных решений имеет неравенство

$$\frac{10 - 3x - x^2}{1 + \log_4 x} \geq 0?$$

В7. Решите уравнение

$$25x^2 - 20x + 6 = (\sqrt{2} - \cos \frac{5\pi x}{4})(\sqrt{2} + \cos \frac{5\pi x}{4}).$$

В8. Функция $y = h(x)$ определена на всей числовой прямой и является нечетной периодической функцией с периодом, равным 4. На отрезке $[0; 2]$ функция $y = h(x)$ задана равенством $h(x) = x^2 - 2x$. Определите количество нулей функции на отрезке $[-3; 3]$.

В9*. Набор химических реактивов состоит из трех веществ. Массы первого, второго и третьего веществ в этом наборе относятся как 3 : 7 : 10. Массу первого вещества увеличили на 8%, а второго — на 4%. На сколько процентов надо уменьшить массу третьего вещества, чтобы масса всего набора не изменилась?

В10*. Угол между образующими SA и SB конуса равен 60° , высота конуса равна 4, а радиус основания равен $\frac{4\sqrt{15}}{3}$. Найдите градусную меру угла между плоскостью ABC и плоскостью основания конуса.

В11*. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла B пересекает сторону CD в точке T и прямую AD в точке M . Найдите периметр треугольника CBT , если $AB = 21$, $BM = 35$, $MD = 9$.

Для записи ответов на задания C1 и C2 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем решение.

C1. Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = \frac{x+1}{x+4} - \frac{1}{3}x + (\sqrt{9-x^2})^2 + x^2.$$

C2. Найдите абсциссы всех точек пересечения графиков функций $y = \log_{2+x}(2x^2 + 14x + 19)$ и $y = 1 + \frac{1}{\log_5(2+x)}$.

ЧАСТЬ 3

Для записи ответов на задания (C3—C5) используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем обоснованное решение.

C3. Найдите все значения a , для которых при каждом x из промежутка $(-5; -2]$ значение выражения $x^2 - 4|x|$ не равно значению выражения $a|x| + 4$.

C4*. Основанием пирамиды $FABCD$ является прямоугольник $ABCD$. Плоскость AFC перпендикулярна плоскости ABC , тангенс угла FAC равен $\frac{15}{7}$, тангенс угла между прямой BC и плоскостью AFC равен 2. Точка M лежит на ребре BC , $BM = \frac{6}{\sqrt{5}}$. Точка

L лежит на прямой AF и равноудалена от точек M и C . Центр сферы, описанной около пирамиды $FABCD$, лежит в плоскости основания пирамиды, радиус этой сферы равен 4. Найдите объем пирамиды $LAMC$.

C5. Найдите все значения a , при каждом из которых оба числа $3\sin a + 5$ и $9\cos 2a - 36\sin a - 18$ являются решениями неравенства $\frac{(25x - 3x^2 + 18)\sqrt{x-1}}{\log_4 |x-7| - 1} \geq 0$.

Вариант 8

ЧАСТЬ 1

При выполнении заданий А1—А10 в бланке ответов № 1 под номером выполняемого задания поставьте знак «х» в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

А1. Упростите выражение $b^{-5.6} \cdot 11b^{0.4}$.

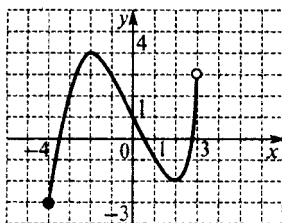
- 1) $11b^{-5.2}$ 2) $11^{0.4}b^{-5.2}$ 3) $11b^{-6}$ 4) $11^{0.4}b^{-6}$

А2. Вычислите: $\frac{3\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{189}}$.

- 1) 1 2) 4,5 3) 8 4) 21

А3. Вычислите: $\log_3 54 + \log_3 \frac{1}{2}$.

- 1) 27 2) 2 3) 3 4) 9



А4. На рисунке изображен график функции, заданной на промежутке $[-4; 3)$. Укажите множество значений этой функции.

- 1) $[-3; 4]$
 2) $[-4; 3]$
 3) $[-3; 3]$
 4) $[-3; 3) \cup (3; 4]$

А5. Найдите производную функции $y = -\frac{5}{4}x^4 + 3x^2 - 2x + 11$.

- 1) $y' = -5x^3 + 6x - x^2 + 11x$
 2) $y' = -\frac{1}{4}x^5 + x^3 - x^2 + 11x$
 3) $y' = -5x^3 + 6x - 2$
 4) $y' = -5x^3 + 6x - x^2$

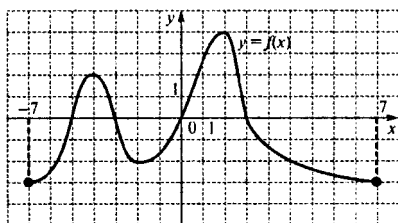
А6. Решите неравенство $\frac{(x-1)(4x+2)}{x+3} \geq 0$.

- 1) $(-\infty; -3) \cup [-\frac{1}{2}; 1]$ 3) $(-3; -\frac{1}{2}] \cup [1; +\infty)$
 2) $(-3; +\infty)$ 4) $[1; +\infty)$

А7. Укажите множество значений функции $y = 3^x + 10$.

- 1) $(-\infty; +\infty)$ 2) $(10; +\infty)$ 3) $(0; 10)$ 4) $[13; +\infty)$

A8. Решите неравенство $f(x) \geq 0$, если на рисунке изображен график функции $y = f(x)$, заданной на промежутке $[-7; 7]$.



- 1) $[-4; -2] \cup [2; 7]$
- 2) $[-7; -4] \cup [-2; 2]$
- 3) $[-3; 4]$
- 4) $[-5; -3] \cup [0; 3]$

A9. Найдите область определения функции $f(x) = \log_3(5x + x^2)$.

- 1) $(0; +\infty)$
- 2) $(5; +\infty)$
- 3) $(-5; 0) \cup (0; +\infty)$
- 4) $(-\infty; -5) \cup (0; +\infty)$

A10. Решите уравнение $\operatorname{tg} 3x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

- 1) $\frac{\pi}{2} + 3\pi n, n \in \mathbb{Z}$
- 3) $\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
- 2) $\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3}n, n \in \mathbb{Z}$
- 4) $\frac{\pi}{18} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Ответом к заданиям В1–В11 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

В1. Решите уравнение $\log_5(12x + 8) - \log_5 4 = \log_5 23$.

В2. Найдите значение выражения $\sqrt{21} \cos \alpha$, если $\sin \alpha = \sqrt{\frac{5}{21}}, \frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$.

В3. Решите уравнение $\sqrt{3x^2 - 128} = -x$.

ЧАСТЬ 2

В4. Вычислите значение выражения

$$\log_4 \cos \frac{\pi}{8} + \log_4 \cos \frac{3\pi}{8}.$$

В5. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика функции $y = f(x)$ в точке $O(4; -8)$. Найдите $f'(4)$.

В6. Сколько целых чисел являются решениями неравенства

$$\frac{10 + 3x - x^2}{2 + \sqrt[4]{x}} \geq 0?$$

В7. Решите уравнение

$$2(\sqrt{3} - \cos 10\pi x)(\sqrt{3} + \cos 10\pi x) = 8 + (20x + 3)^2.$$

В8. Функция $y = h(x)$ определена на всей числовой прямой и является нечетной периодической функцией с периодом, равным 4. На отрезке $[-2; 0]$ функция $y = h(x)$ задана равенством $h(x) = -x^2 - 2x$. Определите количество нулей функции $y = h(x)$ на отрезке $[-5; 3]$.

В9*. Подарочный набор состоит из трех сортов конфет. Массы конфет первого, второго и третьего сорта в этом наборе относятся как 1 : 2 : 8. Массу конфет первого сорта увеличили на 20%, а второго — на 6%. На сколько процентов надо уменьшить массу конфет третьего сорта, чтобы масса всего набора не изменилась?

В10*. Концы отрезка MK лежат на окружностях двух оснований цилиндра. Угол между прямой MK и плоскостью основания цилиндра равен 30° , $MK = 8$, площадь боковой поверхности цилиндра равна 40π . Найдите периметр осевого сечения цилиндра.

В11*. Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, если средняя линия трапеции равна $\sqrt{10}$, а косинус угла при основании трапеции равен $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Для записи ответов на задания C1 и C2 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем решение.

C1. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = x^2 + (\sqrt{4 - x^2})^2 + 0,25x - \frac{x+2}{x+3}.$$

С2. Найдите абсциссы всех точек пересечения графиков функций $y = \log_{3+x}(x^2 + 8x + 17)$ и $y = 1 + \frac{1}{\log_5(3+x)}$.

ЧАСТЬ 3

Для записи ответов на задания (С3—С5) используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем обоснованное решение.

С3. Найдите все значения a , для которых при каждом x из промежутка $[-5; -1)$ значение выражения $x^2 - 3$ не равно значению выражения $(a + 4)|x|$.

С4*. Отрезок AB — диаметр сферы. Точки C, D лежат на сфере так, что объем пирамиды $ABCD$ наибольший. Найдите косинус угла между прямыми CM и AB , если M — середина ребра BD .

С5. Решите уравнение $f(g(x)) + g(f(x)) = 32$, если известно, что

$$f(x) = 0,5x^2 - 2x + 12 \quad \text{и} \quad g(x) = \begin{cases} 20 & \text{при } x \geq 5, \\ 0,5 \cdot 2^x + \frac{8}{6-x} & \text{при } x < 5. \end{cases}$$

Вариант 9

ЧАСТЬ 1

При выполнении заданий А1—А10 в бланке ответов № 1 под номером выполняемого задания поставьте знак «х» в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

А1. Упростите выражение $\frac{7^{2.7}}{7^{0.9}}$.

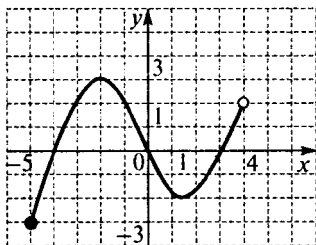
- 1) 7^3 2) 1,8 3) 3 4) $7^{1.8}$

А2. Вычислите: $\frac{\sqrt[3]{250}}{4\sqrt[3]{2}}$.

- 1) 1,5 3) 1,25
2) 12,5 4) 2,25

А3. Вычислите: $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{225} + \log_{\frac{1}{3}} 9$.

- 1) -2 2) 2 3) 25 4) -1



А4. На рисунке изображен график функции, заданной на промежутке $[-5; 4)$. Укажите множество значений этой функции.

- 1) $[-5; 4)$
2) $[-3; 2)$
3) $[-3; 3]$
4) $[-3; 2) \cup (2; 3]$

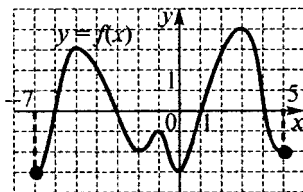
А5. Найдите производную функции $y = 15x^2 + e^x$.

- 1) $y' = 17x + xe^{x-1}$
2) $y' = 5x^3 + \frac{e^{x+1}}{x+1}$
3) $y' = 45x + e^x$
4) $y' = 30x + e^x$

А6. Укажите множество значений функции $y = 2^x + 5$.

- 1) $(5; +\infty)$ 3) $(-\infty; +\infty)$
2) $(0; +\infty)$ 4) $(7; +\infty)$

A7. Решите неравенство $f(x) \geq 0$, если на рисунке изображен график функции $y = f(x)$, заданной на промежутке $[-7; 5]$.



- 1) $[-5; -2] \cup [-1; 0] \cup [3; 5]$
- 2) $[0; 4]$
- 3) $[-6; -3] \cup [1; 4]$
- 4) $[-7; -5] \cup [-2; -1] \cup [0; 3]$

A8. Найдите область определения функции $f(x) = \frac{12}{\sqrt[4]{x-2}}$.

- 1) $[0; 16) \cup (16; +\infty)$
- 2) $[0; 2) \cup (2; +\infty)$
- 3) $[0; +\infty)$
- 4) $(-\infty; 16) \cup (16; +\infty)$

A9. Решите уравнение $\operatorname{tg} 5x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

- 1) $\frac{\pi}{30} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
- 2) $\frac{\pi}{30} + \frac{\pi}{5} n, n \in \mathbb{Z}$
- 3) $\frac{5\pi}{6} + 5\pi n, n \in \mathbb{Z}$
- 4) $\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

A10. Решите неравенство $\log_{\frac{3}{4}}(2x-5) > \log_{\frac{3}{4}} x$.

- 1) $(2,5; 5)$
- 2) $(2,5; +\infty)$
- 3) $(5; +\infty)$
- 4) $(-\infty; 5)$

Ответом к заданиям B1—B11 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1. Решите уравнение $3^{x+2} - 5 \cdot 3^x = 324$.

B2. Найдите значение выражения $\sqrt{21} \sin \alpha$, если $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{5}{21}}$,

$$\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi.$$

B3. Решите уравнение $\sqrt{64 - 3x^2} = -x$.

ЧАСТЬ 2

В4. Вычислите значение выражения

$$\log_{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{8} + \log_{\sqrt{2}} \cos \frac{3\pi}{8}.$$

В5. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика функции $y = g(x)$ в точке $M(2; -1)$. Найдите $g'(2)$.

В6. Сколько целочисленных решений имеет неравенство

$$\frac{6 - 5x - x^2}{3 + \sqrt[4]{x}} \geq 0?$$

В7. Решите уравнение

$$3^{(\sqrt{2} - \sin 15\pi x)(\sqrt{2} + \sin 15\pi x)} = 9 + (5x + 3)^2.$$

В8. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является нечетной периодической функцией с периодом, равным 8. На отрезке $[0; 4]$ функция $y = f(x)$ задана равенством $f(x) = x^2 - 4x$. Определите количество нулей функции $y = f(x)$ на отрезке $[-2; 5]$.

В9*. Объемы ежегодной добычи нефти первой, второй и третьей скважинами относятся как 7 : 6 : 5. Планируется уменьшить годовую добычу нефти из первой скважины на 4%, а из второй — на 2%. На сколько процентов нужно увеличить годовую добычу нефти из третьей скважины, чтобы суммарный объем добываемой за год нефти не изменился?

В10*. Точки B и D лежат на окружностях двух оснований цилиндра. Синус угла между прямой BD и плоскостью основания цилиндра равен 0,3, $BD = 15$, объем цилиндра равен 450л. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

В11*. Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, если средняя линия трапеции равна 12, а косинус угла при основании трапеции равен $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

Для записи ответов на задания C1 и C2 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем решение.

C1. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = \left| \sqrt{4 - x^2} - 4 \right| + \sqrt{4 - x^2} + 4,5x^2 - x^3.$$

C2. Решите уравнение

$$\log_{2x+1}(14x^2 + 11x) = 2 + \frac{1}{\log_3(2x+1)}.$$

ЧАСТЬ 3

Для записи ответов на задания (C3—C5) используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем обоснованное решение.

C3. Найдите все значения a , для которых при каждом x из промежутка $(-3; -1]$ значение выражения $x^4 - 3x^2 - 9$ не равно значению выражения ax^2 .

C4*. Отрезок PN , равный 8, — диаметр сферы. Точки M , L лежат на сфере так, что объем пирамиды $PNML$ наибольший. Найдите площадь треугольника KLT , где K и T — середины ребер PM и NM соответственно.

C5. Решите уравнение $f(g(x)) + g(1 + f(x)) = 33$, если известно, что

$$f(x) = x^2 - 6x + 15 \text{ и } g(x) = \begin{cases} 18 & \text{при } x > 4, \\ 3^x + \frac{12}{5-x} & \text{при } x < 4. \end{cases}$$

Вариант 10

ЧАСТЬ 1

При выполнении заданий A1–A10 в бланке ответов № 1 под номером выполняемого задания поставьте знак «x» в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

A1. Упростите выражение $\frac{6^{1.4}}{6^{0.7}}$.

- | | |
|--------------|----------|
| 1) $6^{0.7}$ | 3) 0,7 |
| 2) 2 | 4) 6^2 |

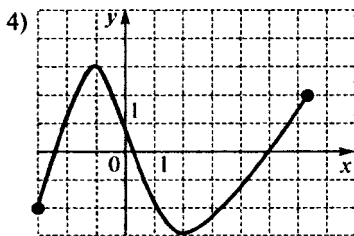
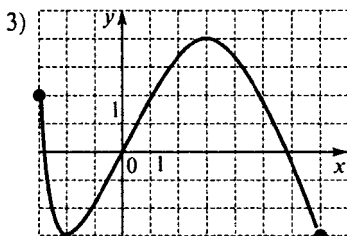
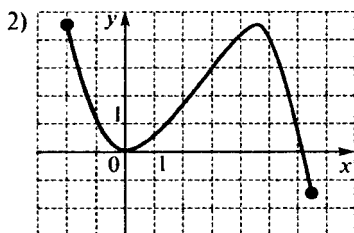
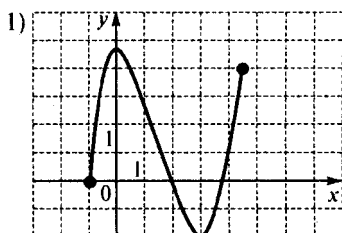
A2. Найдите значение выражения $-7\log_{12}(12^2)$.

- | | |
|--------------------|--------|
| 1) 49 | 3) -14 |
| 2) $-\frac{1}{49}$ | 4) -5 |

A3. Вычислите: $\sqrt[4]{625 \cdot 0,0016}$.

- | | |
|--------|----------|
| 1) 1 | 3) 0,05 |
| 2) 5,2 | 4) 0,001 |

A4. На каком из следующих рисунков изображен график функции, возрастающей на промежутке $[-1; 2]$?



A5. Найдите производную функции $y = e^x + 3x^2$.

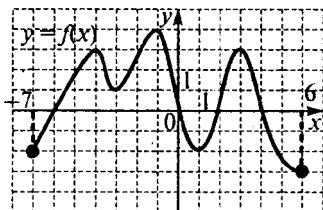
- 1) $y' = xe^{x-1} + 6x$
- 2) $y' = e^x + x^3$
- 3) $y' = e^x + 2x$
- 4) $y' = e^x + 6x$

A6. Решите неравенство $\frac{(x-6)(9x+5)}{x+11} \geq 0$.

- 1) $(-\infty; -11) \cup [-\frac{5}{9}; 6]$
- 2) $(-11; 6]$
- 3) $(-11; -\frac{5}{9}] \cup [6; +\infty)$
- 4) $[6; +\infty)$

A7. Решите неравенство $f(x) > 0$, если на рисунке изображен график функции $y = f(x)$, заданной на промежутке $[-7; 6]$.

- 1) $(-4; -3) \cup (-1; 1) \cup (3; 6]$
- 2) $[-7; -4) \cup (-3; -1) \cup (1; 3)$
- 3) $[0; 4]$
- 4) $(-6; 0) \cup (2; 4)$



A8. Найдите наибольшее целое значение функции $y = 5,6\cos x$.

- 1) 1
- 2) 5
- 3) 0
- 4) 6

A9. Найдите область определения функции $y = \sqrt[12]{\log_9 x - 2}$.

- 1) $[2; +\infty)$
- 2) $(0; 81]$
- 3) $(0; \frac{2}{9}]$
- 4) $[81; +\infty)$

A10. Решите уравнение $\cos \frac{x}{3} = \frac{1}{2}$.

- 1) $(-1)^n\pi + 3\pi n, n \in \mathbb{Z}$
- 2) $\pm\pi + 6\pi n, n \in \mathbb{Z}$
- 3) $(-1)^n\pi + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
- 4) $\pm\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Ответом к заданиям В1–В11 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1. Решите уравнение $7^{x+1} - 5 \cdot 7^x = 98$.

В2. Найдите значение выражения $5\sin(\pi + \alpha) + \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)$, если $\sin \alpha = 0,5$.

В3. Решите уравнение $3 \cdot 10^{\lg x} = 5x - 11$.

ЧАСТЬ 2

В4. Вычислите значение выражения

$$\log_4 \sin \frac{\pi}{12} + \log_4 \sin \frac{\pi}{6} + \log_4 \sin \frac{5\pi}{12}.$$

В5. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика функции $y = h(x)$ в точке $N(4; -6)$. Найдите $h'(4)$.

В6. Сколько целых чисел являются решениями неравенства

$$\frac{3 + 2x - x^2}{4 + \sqrt[6]{x}} \geq 0?$$

В7. Решите уравнение $\sqrt{16 - (5x + 2)^2} = 4 + \cos^2 \frac{15\pi x}{4}$.

В8. Функция $y = g(x)$ определена на всей числовой прямой и является нечетной периодической функцией с периодом, равным 8. На отрезке $[-4; 0]$ функция $y = g(x)$ задана равенством $g(x) = -x^2 - 4x$. Сколько нулей имеет функция $y = g(x)$ на отрезке $[-5; 3]$?

В9*. Три насоса, работая вместе, заполняют цистерну нефтью за 5 часов. Производительности насосов относятся как 4 : 3 : 1. Сколько процентов объема цистерны будет заполнено за 8 часов совместной работы второго и третьего насосов?

В10*. Точки K и M лежат на окружностях двух оснований цилиндра. Синус угла наклона прямой KM к плоскости основания цилиндра равен 0,6, $KM = 10$, объем цилиндра равен 150π . Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

В11*. Найдите среднюю линию равнобедренной трапеции, описанной около окружности радиуса 2, если тангенс угла при основании трапеции равен $\frac{1}{\sqrt{15}}$.

Для записи ответов на задания C1 и C2 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем решение.

C1. Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = \left| \sqrt{9-x^2} - 5 \right| + \sqrt{9-x^2} + x^3 - 6x^2.$$

C2. Решите уравнение

$$\log_{3x+1}(17x^2 + 15x + 2) = 2 + \frac{1}{\log_2(3x+1)}.$$

ЧАСТЬ 3

Для записи ответов на задания (C3—C5) используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем обоснованное решение.

C3. Найдите все значения a , для которых при каждом x из промежутка $(-2; -1]$ значение выражения $x^8 - 3x^4 - 16$ не равно значению выражения ax^4 .

C4*. Дана сфера радиусом 12. Сечением этой сферы плоскостью является окружность с диаметром AB . Плоскость сечения удалена от центра сферы на расстояние 4. Точка D выбрана на сфере, а точка C — на окружности сечения так, что объем пирамиды $ABCD$ наибольший. Найдите площадь треугольника DMN , где M и N — середины ребер AC и BC соответственно.

C5. Решите уравнение $f(g(x)) + g(2 + f(x)) = 29$, если известно, что

$$f(x) = 0,5x^2 - 4x + 13 \text{ и } g(x) = \begin{cases} 26 & \text{при } x \geq 6, \\ 4^x + \frac{24}{7-x} & \text{при } x < 6. \end{cases}$$

Ответы

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
Вариант 1	3	3	1	1	4	2	4	1	1	2
Вариант 2	3	2	4	4	2	3	3	1	4	2
Вариант 3	1	4	4	3	1	4	2	1	3	1
Вариант 4	2	4	3	2	3	1	4	3	4	2
Вариант 5	4	3	3	4	4	2	3	2	4	1
Вариант 6	2	3	2	1	1	3	4	2	2	3
Вариант 7	2	1	3	3	2	4	4	3	1	2
Вариант 8	1	1	3	1	3	3	2	4	4	2
Вариант 9	4	3	2	3	4	1	3	1	2	1
Вариант 10	1	3	1	3	4	3	4	2	4	2

	B1	B2	B3	B4	B5	B6
Вариант 1	-1	-2	7,5	-3	-1	3
Вариант 2	36	3,5	-2,7	-4	-3	5
Вариант 3	-81	2,9	-3	-1,5	-1,5	3
Вариант 4	-64	5,84	2	-2	1,5	5
Вариант 5	3,25	4,97	2,5	-4	2,5	5
Вариант 6	5	2	6	-2	1,5	1
Вариант 7	4,4	-4	-7	-1	0,5	1
Вариант 8	7	-4	-8	-0,75	-2	6
Вариант 9	4	4	-4	-3	-0,5	2
Вариант 10	2	-3	5,5	-1,5	-1,5	4

	B7	B8	B9	B10	B11
Вариант 1	-1,25	5	42,25	18	14
Вариант 2	-3,5	3	48	0,25	36
Вариант 3	-0,1	5	6	0,75	24
Вариант 4	1,5	3	4	0,2	112
Вариант 5	-0,75	2	0,7	1	80
Вариант 6	-1,2	6	28	60	77
Вариант 7	0,4	3	5,2	45	44
Вариант 8	-0,15	4	4	28	1,5
Вариант 9	-0,6	2	8	90	4,5
Вариант 10	-0,4	2	80	60	16

	C1	C2	C3
Вариант 1	1,5	0,25	$(-\infty; -9] \cup (1\frac{2}{3}; +\infty)$
Вариант 2	0	-0,25	$(-\infty; -6] \cup (0,75; +\infty)$
Вариант 3	3	0,25; 0,5	$(-\infty; -1) \cup [2,75; +\infty)$
Вариант 4	3,5	25; 0,2	$(-\infty; -16) \cup [14; +\infty)$
Вариант 5	4,5	-2	$(-\infty; -1) \cup [2,75; +\infty)$
Вариант 6	$8\frac{2}{3}$	-1	$(-\infty; -3] \cup (0,6; +\infty)$
Вариант 7	$9\frac{1}{3}$	-1,5	$(-\infty; -4) \cup [0,2; +\infty)$
Вариант 8	3,25	-1	$(-\infty; -6] \cup (0,4; +\infty)$
Вариант 9	4	1,5	$(-\infty; -11) \cup [5; +\infty)$
Вариант 10	5	3	$(-\infty; -17) \cup [12; +\infty)$

	C4	C5
Вариант 1	5	$(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$
Вариант 2	10	5
Вариант 3	64π	6
Вариант 4	6	5
Вариант 5	2	3
Вариант 6	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$2\pi m, m \in Z$
Вариант 7	16	$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$
Вариант 8	5	3
Вариант 9	64	10
Вариант 10	$\frac{297}{32}$	1,5

Разбор наиболее трудных заданий

Рассмотрим задания повышенного (В4—С2) и высокого (С3—С5) уровней сложности варианта 1. Приведем решение заданий с комментариями. Предложенные решения не следует рассматривать как образец оформления. Задания могут быть решены разными способами.

Напомним, что в заданиях В4—В11 контролируется только ответ, а все преобразования и вычисления ученик выполняет в черновике.

В4

Вычислите значение выражения $\log_{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi}{8} + \log_{\sqrt{2}} \sin \frac{3\pi}{8}$.

Обсуждение подходов к решению.

Выражение представляет собой сумму логарифмов с одинаковыми основаниями, поэтому применяем соответствующее свойство логарифма произведения.

$$\log_{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi}{8} + \log_{\sqrt{2}} \sin \frac{3\pi}{8} = \log_{\sqrt{2}} \left(\sin \frac{\pi}{8} \cdot \sin \frac{3\pi}{8} \right).$$

Рассмотрим подлогарифмическое выражение $\sin \frac{\pi}{8} \cdot \sin \frac{3\pi}{8}$ и представим его в виде степени $\sqrt{2}$.

1 способ.

Так как $\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$, то воспользуемся формулами приведения, т.е.

$$\sin \frac{\pi}{8} \cdot \sin \frac{3\pi}{8} = \sin \frac{\pi}{8} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = \sin \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8}.$$

Далее используем формулу синуса двойного аргумента:

$$\sin \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{(\sqrt{2})^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{-3}.$$

2 способ

$$\begin{aligned} \text{Применим формулу произведения синусов: } \sin \frac{\pi}{8} \cdot \sin \frac{3\pi}{8} &= \\ = \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{8} - \frac{3\pi}{8} \right) - \cos \left(\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} \right) \right) &= \frac{1}{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) - \cos \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{4} = \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} &= (\sqrt{2})^{-3}. \end{aligned}$$

Остается вычислить логарифм: $\log_{\sqrt{2}}((\sqrt{2})^{-3}) = -3$.

Возможная запись решения ученика в черновике.

$$\begin{aligned} \log_{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi}{8} + \log_{\sqrt{2}} \sin \frac{3\pi}{8} &= \log_{\sqrt{2}} \left(\sin \frac{\pi}{8} \cdot \sin \frac{3\pi}{8} \right) = \log_{\sqrt{2}} \left(\sin \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8} \right) = \\ = \log_{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right) &= \log_{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \log_{\sqrt{2}}((\sqrt{2})^{-3}) = -3 \end{aligned}$$

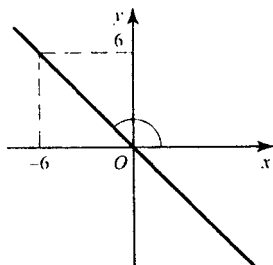
Ответ: -3 .

B5

Прямая, проходящая через начало координат, касается графика функции $y = g(x)$ в точке $B(-6; 6)$. Найдите $g'(x)$.

Обсуждение подходов к решению.

Данная прямая является касательной к графику функции $y = g(x)$ в точке $B(-6; 6)$. Изобразим схематически эту прямую.



Касательная образует с положительным направлением оси OX угол 135° , тангенс которого равен (-1) , значит, $g'(-6) = \operatorname{tg} 135^\circ = -1$ (используем геометрический смысл производной функции в точке).

Возможная запись решения ученика в черновике.

$$g'(-6) = \operatorname{tg} 135^\circ = -1.$$

Ответ: -1 .

B6

Сколько целочисленных решений имеет неравенство

$$\frac{4 + 3x - x^2}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{2}} \geq 0?$$

Обсуждение подходов к решению.

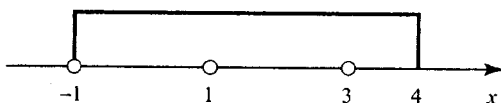
Так как выражение $1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{2}$ положительно при всех значениях x , для которых определено ($\cos \frac{\pi x}{2} \neq 0$), то исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 4 + 3x - x^2 \geq 0, & (1) \\ \cos \frac{\pi x}{2} \neq 0. & (2) \end{cases}$$

Решением неравенства (1) является отрезок $[-1; 4]$.

(2) $\cos \frac{\pi x}{2} \neq 0$, если $\frac{\pi x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, т.е. $x \neq 1 + 2n$, $n \in \mathbb{Z}$.

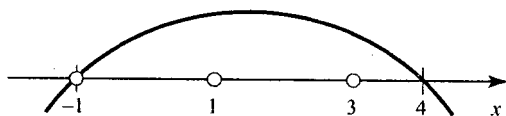
Из целых чисел вида $1 + 2n$, $n \in \mathbb{Z}$ только числа $-1, 1, 3$ принадлежат отрезку $[-1; 4]$.



Получаем, что целочисленными решениями неравенства являются числа 0; 2; 4, т.е. три целых числа.

Возможная запись решения ученика в черновике.

$$\begin{cases} 4 + 3x - x^2 \geq 0 \\ \cos \frac{\pi x}{2} \neq 0 \end{cases}$$



Ответ: 3.

В7

Решите уравнение $\sqrt{16 - (4x + 5)^2} = 4 + \cos^2 \frac{2\pi x}{5}$.

Обсуждение подходов к решению.

Рассмотрим функции $f(x) = \sqrt{16 - (4x + 5)^2}$ и $g(x) = 4 + \cos^2 \frac{2\pi x}{5}$.

На области определения функции $y = f(x)$ $\sqrt{16 - (4x + 5)^2} \leq \sqrt{16} = 4$, т.е. наибольшее значение функции $f(x) = \sqrt{16 - (4x + 5)^2}$ равно 4 и достигается только при одном значении $x = -1,25$.

Наименьшее значение функции $g(x) = 4 + \cos^2 \frac{2\pi x}{5}$ тоже равно 4. Причем

$$g(-1,25) = 4 + \cos^2 \frac{2\pi(-1,25)}{5} = 4 + \cos^2 \left(\frac{\pi}{2}\right) = 4.$$

Значит, $x = -1,25$ является единственным корнем исходного уравнения.

Возможная запись решения ученика в черновике.

$$\sqrt{16 - (4x + 5)^2} \leq 4,$$

$$4 + \cos^2 \frac{2\pi x}{5} \geq 4,$$

$$\begin{cases} \sqrt{16 - (4x + 5)^2} = 4, \\ 4 + \cos^2 \frac{2\pi x}{5} = 4, \end{cases}$$

$$x = -1,25.$$

Ответ: $-1,25$.

В8

Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является четной периодической функцией с периодом, равным 8. На отрезке $[0; 4]$ функция $y = f(x)$ задана равенством

$$f(x) = -x^2 + 4x - 1.$$

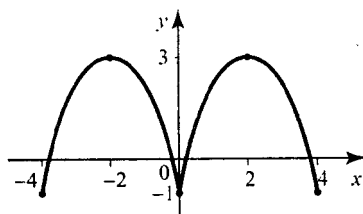
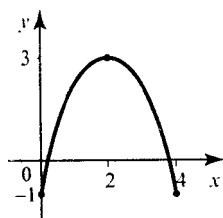
Определите количество нулей функции $y = f(x)$ на отрезке $[-6; 4]$.

Обсуждение подходов к решению.

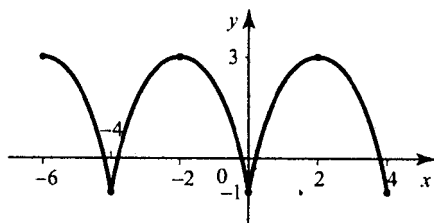
Изобразим схематически график функции $y = f(x)$ на отрезке $[0; 4]$.

Графиком функции $f(x) = -x^2 + 4x - 1$ является парабола, ветви которой направлены вниз. Вершина параболы — точка $(2; 3)$

Так как функция $y = f(x)$ является четной, то на отрезке $[-4; 4]$ ее график выглядит следующим образом.

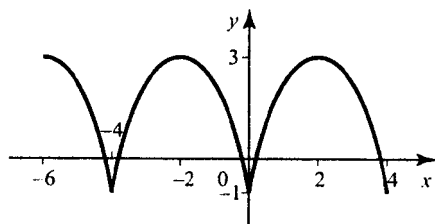


Так как функция $y = f(x)$ является периодической функцией с периодом, равным 8, то на отрезке $[-6; 4]$ ее график выглядит следующим образом.



Получаем, что функция $y = f(x)$ на отрезке $[-6; 4]$ имеет 5 нулей.

Возможная запись решения ученика в черновике.

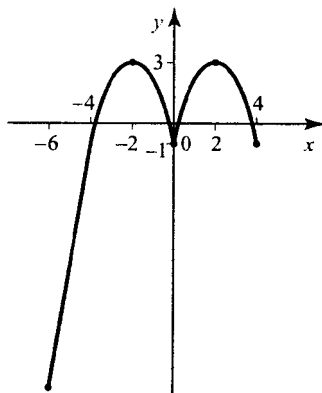


Ответ: 5.

Замечание. Если функция $f(x) = -x^2 + 4x - 1$ из задания В8 не обладает свойством периодичности, то ее график на отрезке $[-6; 4]$ выглядит так, как показано на рисунке слева.

В9*

Бак заполняют керосином за 2 часа 30 минут с помощью трех насосов, работающих вместе. Производительности насосов относятся как 3 : 5 : 8. Сколько процентов объема будет заполнено за 1 час 18 минут совместной работы второго и третьего насосов?



Обсуждение подходов к решению.

Так как объем бака не указан, то примем его за 1. Пусть коэффициент пропорциональности равен x , тогда производительности насосов равны $3x$, $5x$, $8x$. И время наполнения бака при совместной работе всех трех насосов равно $\frac{1}{3x+5x+8x} = \frac{1}{16x}$ или, по условию задачи, 2 часа 30 минут.

Решим уравнение $\frac{1}{16x} = 2,5$.

$$x = \frac{1}{40}.$$

Производительность второго насоса равна $\frac{1}{40} \cdot 5 = \frac{1}{8}$.

Производительность третьего насоса равна $\frac{1}{40} \cdot 8 = \frac{1}{5}$.

Совместная производительность второго и третьего насосов равна $\frac{1}{8} + \frac{1}{5} = \frac{13}{40}$.

За 1 час 18 минут второй и третий насосы наполнят $\frac{13}{40} \cdot 1 \frac{18}{60} = \frac{13}{40} \cdot 1,3 = \frac{16,9}{40} = 0,4225$ объема бака.

Итак, при совместной работе второго и третьего насосов за 1 час 18 минут будет заполнено $0,4225 \cdot 100\% = 42,25\%$ объема бака.

Возможная запись решения ученика в черновике.

$$\frac{1}{3x+5x+8x} = \frac{1}{16x}$$

$$\frac{1}{16x} = 2,5, x = \frac{1}{40}.$$

Производительность II насоса равна $\frac{1}{40} \cdot 5 = \frac{1}{8}$.

Производительность III насоса — $\frac{1}{40} \cdot 8 = \frac{1}{5}$.

Совместная производительность II и III насосов —

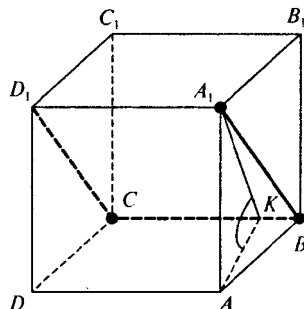
$$\frac{1}{8} + \frac{1}{5} = \frac{13}{40}.$$

За 1 час 18 минут II и III насосы наполнят $\frac{13}{40} \cdot 1 \frac{18}{60} = \frac{13}{40} \times 1,3 = \frac{16,9}{40} = 0,4225$ объема бака.

Ответ: 42,25.

В10*

Основание прямого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелограмм $ABCD$, в котором $CD = 2\sqrt{3}$, $\angle D = 60^\circ$. Тангенс угла между плоскостью основания и плоскостью $A_1 BC$ равен 6. Найдите высоту параллелепипеда.



Обсуждение подходов к решению.

1. Определим, какой многоугольник является сечением параллелепипеда плоскостью $A_1 BC$. Плоскости DCC_1 и ABB_1 параллельны. По свойству параллельных плоскостей (если две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью, то линии их пересечения параллельны) секущая плоскость $A_1 BC$ пересекает плоскость DCC_1 по прямой, параллельной $A_1 B$ и проходящей через точку C . Сечением параллелепипеда плоскостью $A_1 BC$ является параллелограмм $A_1 BCD_1$.

2. Построим линейный угол двугранного угла между плоскостью $A_1 BC$ и плоскостью основания. Для этого в грани $ABCD$ проведем высоту параллелограмма AK .

Так как $BC \perp AK$, то $BC \perp A_1 K$ (по теореме о трех перпендикулярах), поэтому угол $A_1 KA$ является искомым линейным углом и $\operatorname{tg} \angle A_1 KA = 6$.

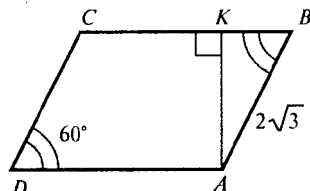
3. Высота параллелепипеда $A_1 A$ является катетом прямоугольного треугольника $A_1 KA$ ($\angle A_1 AK = 90^\circ$).

Чтобы найти $A_1 A$, достаточно найти AK .

1 способ

Из треугольника AKB

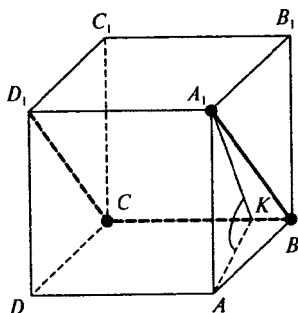
$$AK = AB \cdot \sin \angle ABK = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3.$$



2 способ

Так как в прямоугольном треугольнике AKB $\angle KAB = 30^\circ$, то $BK = 0,5AB = \sqrt{3}$. По теореме Пифагора

$$AK = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2} = 3.$$



4. Осталось найти A_1A из треугольника A_1KA .

$$A_1A = AK \cdot \operatorname{tg} \angle A_1KA = 3 \cdot 6 = 18.$$

Возможная запись решения ученика в черновике.

$$\operatorname{tg} \angle A_1KA = 6.$$

$$\begin{aligned} \text{Из } \triangle AKB: AK &= AB \cdot \sin \angle ABK = \\ &= 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Из } \triangle A_1KA: A_1A &= AK \cdot \operatorname{tg} \angle A_1KA = \\ &= 3 \cdot 6 = 18. \end{aligned}$$

Ответ: 18.

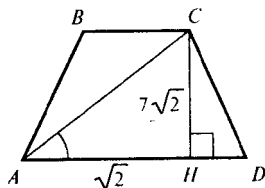
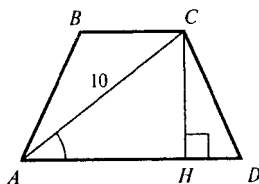
В11*

Найдите площадь равнобедренной трапеции, если ее диагональ, равная 10, образует с основанием угол, косинус которого равен $\frac{\sqrt{2}}{10}$.

Обсуждение подходов к решению.

1. Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$ ($AB = CD$), в которой

$$AC = 10 \text{ и } \cos \angle CAH = \frac{\sqrt{2}}{10} \quad (CH — \text{высота трапеции}).$$



2. Найдем площадь трапеции $ABCD$.

1 способ

$$S = \frac{AD+BC}{2} \cdot CH.$$

А) Найдем сначала высоту трапеции.

Из треугольника ACH :

$$\sin \angle CAH = \frac{CH}{AC}, \text{ значит,}$$

$$CH = AC \cdot \sin \angle CAH = 10 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2} = 10 \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = 7\sqrt{2}.$$

Б) Найдем длину средней линии трапеции (т. е. величину $\frac{AD+BC}{2}$).

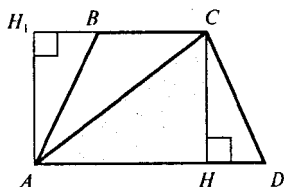
$$AH = AD - \frac{AD-BC}{2} = \frac{AD+BC}{2}.$$

$$\text{Из треугольника } ACH: AH = AC \cdot \cos \angle CAH = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{10} = \sqrt{2}.$$

$$\text{Площадь трапеции равна } S = \frac{AD+BC}{2} \cdot CH = \sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2} = 14.$$

2 способ

Площадь трапеции $ABCD$ равна площади прямоугольника $AHCH_1$ ($AH_1 \perp BC$). А площадь прямоугольника $AHCH_1$ в два раза больше площади треугольника ACH .



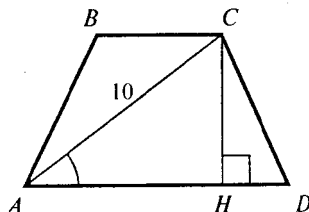
Найдем длины катетов AH и CH треугольника ACH ($AH = \sqrt{2}$, $CH = 7\sqrt{2}$, см. решение 1-м способом).

Тогда

$$S_{ABCD} = 2S_{ACH} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2} = 14.$$

Возможная запись решения ученика в черновике.

$$S = \frac{AD+BC}{2} \cdot CH.$$



Из $\triangle ACH$:

$$CH = AC \cdot \sin \angle CAH = 10 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2} = 10 \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = 7\sqrt{2}.$$

$$AH = AC \cdot \cos \angle CAH = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{10} = \sqrt{2}.$$

$$S = \frac{AD+BC}{2} \cdot CH = \sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2} = 14.$$

Ответ: 14.

Напомним, что **решения заданий C1–C5 записываются на отдельных бланках**. В зависимости от полноты и правильности решения за выполнение заданий C1 и C2 выставляется от 0 до 2 баллов, за выполнение заданий C3–C5 — от 0 до 4 баллов.

При выполнении заданий C1–C2 не требуется приводить обоснования выполненных действий, как это принято при выполнении заданий C3–C5. Достаточно записать полное решение с необходимыми преобразованиями и вычислениями. Приведем возможные решения ученика на 2 балла.

C1

Найдите наименьшее значение функции $f(x) = 0,25x - \frac{x+1}{x+2} + x^2 + (\sqrt{1-x^2})^2$.

Обсуждение подходов к решению.

1) Большинство учеников начинают решать это задание с упрощения формулы, задающей функцию.

$$\frac{x+1}{x+2} - 0,25x + x^2 + (\sqrt{1-x^2})^2 = \frac{x+1}{x+2} - 0,25x + 1.$$

Данные преобразования не являются равносильными, так как область определения выражения при этом расширяется.

Поэтому стоит с самого начала найти область определения исходной функции, т.е. решить систему

$$\begin{cases} x+2 \neq 0 \\ 1-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

2) Если $x \in [-1; 1]$, то

$$\frac{x+1}{x+2} - 0,25x + x^2 + (\sqrt{1-x^2})^2 = \frac{x+1}{x+2} - 0,25x + 1.$$

И решение задания С1 сводится к стандартной задаче: нахождению наибольшего значения непрерывной на отрезке функции.

Найдем наибольшее значение функции

$$f(x) = \frac{x+1}{x+2} - 0,25x + 1 \text{ при } x \in [-1; 1].$$

$$f'(x) = \frac{(x+1)'(x+2) - (x+1)(x+2)'}{(x+2)^2} - 0,25 = \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{4},$$

$$f'(x) = \frac{4 - (x+2)^2}{4(x+2)^2} = \frac{(2-x-2)(2+x+2)}{4(x+2)^2} = \frac{-x(x+4)}{4(x+2)^2},$$

$$f'(x) = 0 \text{ при } x = 0, x = -4 \notin [-1; 1].$$

$$f(-1) = 1,25, f(1) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + 1 = 1\frac{5}{12}, f(0) = 1\frac{1}{2} = 1\frac{6}{12}.$$

Наибольшее значение функции равно 1,5.

Возможная запись решения ученика.

1) Область определения функции

$$f(x) = 0,25x - \frac{x+1}{x+2} + x^2 + (\sqrt{1-x^2})^2 - \text{отрезок } [-1; 1].$$

2) Найдем наибольшее значение функции

$$f(x) = \frac{x+1}{x+2} - 0,25x + 1 \text{ при } x \in [-1; 1].$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{4},$$

$$f'(x) = \frac{4 - (x+2)^2}{4(x+2)^2} = \frac{-x(x+4)}{4(x+2)^2},$$

$$f'(x) = 0 \text{ при } x = 0, x = -4 \notin [-1; 1].$$

$$f(-1) = 1,25, f(1) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + 1 = 1\frac{5}{12}, f(0) = 1\frac{1}{2} = 1\frac{6}{12},$$

$$\max_{[-1;1]} f(x) = f(0) = 1,5.$$

Ответ: 1,5.

Замечание. Функция $f(x) = \frac{x+1}{x+2} - 0,25x + 1$ не имеет наибольшего значения.

C2

Решите уравнение

$$\log_{3-4x}(4x^2 - 13x + 7) = 1 + \frac{1}{\log_2(3-4x)}.$$

Обсуждение подходов к решению.

В левой части уравнения — логарифм с основанием $(3 - 4x)$. Преобразуем выражение в правой части уравнения так, чтобы это выражение представляло собой логарифм с основанием $(3 - 4x)$.

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{\log_2(3-4x)} &= \log_{3-4x}(3-4x) + \frac{1}{\log_2(3-4x)} = \\ &= \log_{3-4x}(3-4x) + \log_{3-4x}2 = \log_{3-4x}(2(3-4x)). \end{aligned}$$

$$\text{Имеем: } \log_{3-4x}(4x^2 - 13x + 7) = \log_{3-4x}(2(3-4x)).$$

Далее многие ученики избавляются от знака логарифма и забывают о равносильности преобразований.

$$\log_{3-4x}(4x^2 - 13x + 7) = \log_{3-4x}(2(3-4x)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 13x + 7 = 2(3-4x) \\ 3-4x > 0 \\ 3-4x \neq 1 \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы условий:

$$4x^2 - 13x + 7 = 2(3-4x)$$

$$4x^2 - 13x + 7 = 6 - 8x$$

$$4x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = 0.25 \end{cases}$$

Система условий равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} 4x^2 - 13x + 7 = 2(3-4x) \\ 3-4x > 0 \\ 3-4x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0.25 \\ x < \frac{3}{4} \\ x \neq 0.5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.25$$

Возможная запись решения ученика.

$$1) \log_{3-4x}(4x^2 - 13x + 7) = \log_{3-4x}(2(3-4x))$$

$$2) \begin{cases} 4x^2 - 13x + 7 = 6 - 8x \\ 3-4x > 0 \\ 3-4x \neq 1 \end{cases}$$

$$4x^2 - 13x + 7 = 6 - 8x$$

$$4x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$\begin{cases} x = 1 \text{ не удовлетворяет условию } 3 - 4x > 0 \\ x = 0,25 \end{cases}$$

Ответ: 0,25.

В решении заданий высокого уровня сложности С3—С5 на 4 балла обоснования всех ключевых моментов решения обязательны.

С3

Найдите все значения a , для которых при каждом x из промежутка $[-3; -1]$ значение выражения $x^4 - 7x^2 - 3$ не равно значению выражения ax^2 .

Обсуждение подходов к решению.

1) Значения указанных в задаче выражений не равны друг другу тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$x^4 - 7x^2 - 3 \neq ax^2 \Leftrightarrow f(t) \neq 0, \text{ где } t = x^2 \text{ и}$$

$$f(t) = t^2 - (a + 7)t - 3.$$

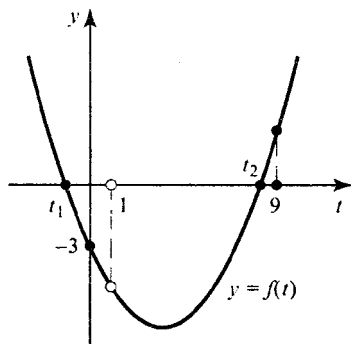
Следовательно, в задаче требуется, чтобы уравнение $f(t) = 0$ не имело корней на промежутке $((-1)^2; (-3)^2] = (1; 9]$.

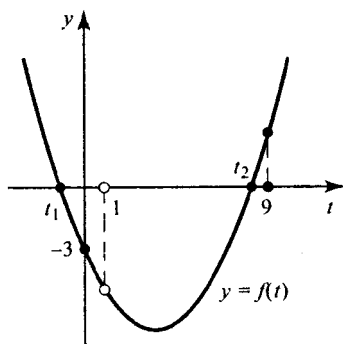
2) График функции $y = f(t)$ (относительно переменной $t \in \mathbb{R}$) есть парабола, изображенная на рисунке: ее ветви направлены вверх, а точка пересечения с осью ординат лежит ниже оси абсцисс (так как $f(0) = -3$). Поэтому квадратный трехчлен $f(t)$ имеет два корня $t_1 < 0$ и $t_2 > 0$. Если $0 < t < t_2$, то $f(t) < 0$, а если $t > t_2$, то $f(t) > 0$, поэтому уравнение $f(t) = 0$ имеет корень на промежутке $(1; 9]$ тогда и только тогда, когда

$$1 < t_2 \leq 9 \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) < 0, \\ f(9) \geq 0. \end{cases}$$

3) Решим полученную систему:

$$\begin{cases} 1^2 - (a + 7) - 3 < 0 \\ 9^2 - 9(a + 7) - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -9 < a \leq \frac{5}{3}.$$





Итак, уравнение $f(t) = 0$ не имеет корней на промежутке $(1; 9]$ для всех остальных значений a , т. е. тогда и только тогда, когда $a \leq -9$ или $a > \frac{5}{3}$.

Замечание. В работах выпускников в шаге 2) могут отсутствовать словесные описания, а корни квадратного трехчлена $f(t)$ могут быть вычислены.

Возможная запись решения ученика.

$$1) x^4 - 7x^2 - 3 \neq ax^2,$$

$$x^4 - (a + 7)x^2 - 3 \neq 0.$$

Пусть $t = x^2$, $t \in (1; 9]$.

$$f(t) = t^2 - (a + 7)t - 3.$$

2) Уравнение $f(t) = 0$ имеет корень на промежутке $(1; 9]$ тогда и только тогда,

$$\text{когда } \begin{cases} f(1) < 0 \\ f(9) \geq 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 1^2 - (a + 7) - 3 < 0, \\ 9^2 - 9(a + 7) - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -9 < a \leq \frac{5}{3}$$

3) Уравнение $f(t) = 0$ не имеет корней на промежутке $(1; 9]$ для всех остальных значений a , т. е. $a \leq -9$ или $a > \frac{5}{3}$.

Ответ: $(-\infty; -9] \cup (1\frac{2}{3}; +\infty)$.

C4*

Основанием пирамиды $FABCD$ является прямоугольник $ABCD$. Плоскость AFC перпендикулярна плоскости ABC , тангенс угла FAC равен $\frac{16}{7}$, тангенс угла между прямой BC и плоскостью

AFC равен 3. Точка M лежит на ребре BC , $BM = \frac{2}{5}BC$. Точка L лежит на прямой AF и равноудалена от точек M и C . Объем пирамиды $LAMC$ равен 48. Центр сферы, описанной около

пирамиды $FABCD$, лежит в плоскости основания пирамиды. Найдите радиус этой сферы.

Обсуждение подходов к решению.

1. Для нахождения радиуса сферы следует установить положение центра сферы.

Пусть точка O — точка пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$. Докажем, что точка O — центр сферы, описанной около пирамиды $FABCD$.

Так как $OA = OB = OC = OD$, то точка O равноудалена от точек A, B, C, D . Значит, центр сферы, описанной около пирамиды $FABCD$, лежит на прямой, проходящей через точку O и перпендикулярной к плоскости ABC . Так как центр сферы лежит в плоскости основания пирамиды, то центр сферы совпадает с точкой O и $OF = OA = OB = OC = OD = R$.

2. Объем V пирамиды $LAMC$ выразим через R . Примем за основание пирамиды треугольник AMC , тогда $V = \frac{1}{3} \cdot S_{AMC} \cdot h$, где h — высота пирамиды, опущенная из вершины L .

А) Площадь треугольника AMC можно найти разными способами.

1 способ

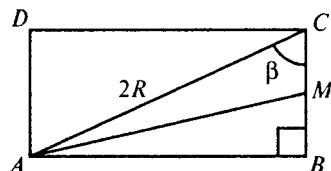
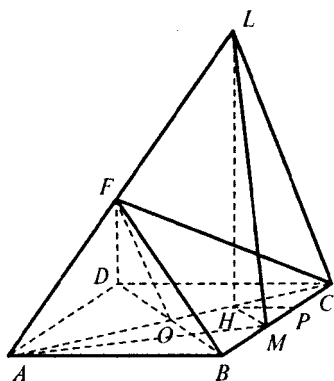
$$S_{AMC} = \frac{1}{2} \cdot MC \cdot AB.$$

Плоскости ABC и AFC перпендикулярны, поэтому прямая AC — проекция прямой BC на плоскость AFC . Следовательно, угол BCA равен углу между прямой BC и плоскостью AFC . Пусть $\angle BCA = \beta$. По условию $\operatorname{tg} \beta = 3$.

Так как по условию $BM = \frac{2}{5} BC$, то $MC = \frac{3}{5} BC$.

Из треугольника ABC находим:

$$BC = AC \cdot \cos \beta = \frac{2R}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{2R}{\sqrt{10}}.$$



Отсюда получаем:

$$MC = \frac{3BC}{5} = \frac{6R}{5\sqrt{10}}.$$

$$AB = AC \cdot \sin \beta = \frac{2R \operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{6R}{\sqrt{10}}.$$

$$S_{AMC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6R}{5\sqrt{10}} \cdot \frac{6R}{\sqrt{10}} = \frac{36R^2}{100} = \frac{9R^2}{25}.$$

2 способ

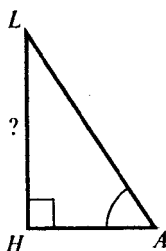
$$S_{AMC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot MC \cdot \sin \beta.$$

$$AC = 2R, MC = \frac{3BC}{5} = \frac{6R}{5\sqrt{10}}, \sin \beta = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

$$S_{AMC} = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot \frac{6R}{5\sqrt{10}} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{18R^2}{50} = \frac{9R^2}{25}.$$

Б) Найдем высоту пирамиды $LAMC$, опущенную из вершины L .

1. По условию $L \in AF$ и $LM = LC$. В плоскости AFC из точки L опустим перпендикуляр LH на прямую AC . Так как $AFC \perp ABC$, то $LH \perp ABC$ и LH высота пирамиды $LAMC$.



2. Найдем LH из прямоугольного треугольника AHL .

Известно, что $\operatorname{tg} \angle LAN = \frac{16}{7}$.

Чтобы найти LH , достаточно найти AH .

$$AH = AC - HC = 2R - HC.$$

Отрезки HM и HC — проекции равных наклонных LM и LC . Значит, $HM = HC$, и треугольник CHM — равнобедренный, а его высота HP является медианой, то есть $MP = PC$.

В прямоугольном треугольнике CPH найдем $HC = \frac{PC}{\cos \beta}$.

$$PC = 0,5MC = 0,5 \cdot \frac{6R}{5\sqrt{10}} = \frac{3R}{5\sqrt{10}}.$$

Значит,

$$HC = \frac{\frac{3R}{5\sqrt{10}}}{\frac{1}{\sqrt{10}}} = \frac{3R}{5}.$$

Следовательно,

$$AH = 2R - \frac{3R}{5} = \frac{7R}{5}.$$

В прямоугольном треугольнике AHL

$$\operatorname{tg} \angle A = \frac{16}{7}.$$

Поэтому

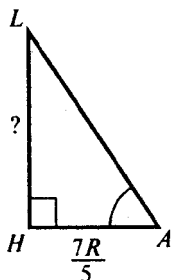
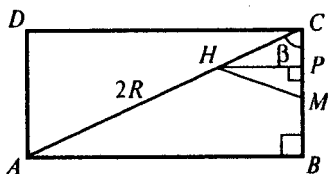
$$LH = AH \cdot \operatorname{tg} \angle A = \frac{16R}{5}.$$

3. Объем пирамиды $LAMC$ равен 48.

С другой стороны,

$$V = \frac{1}{3} \cdot LH \cdot S_{AMC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{16R}{5} \cdot \frac{9R^2}{25} = \frac{48R^3}{125}.$$

Решим уравнение $\frac{48R^3}{125} = 48$. $R = 5$.



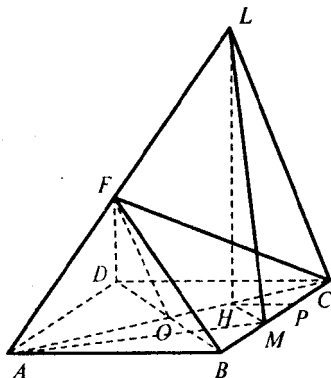
Возможная запись решения ученика.

1. Пусть точка O , лежащая в плоскости ABC , является центром сферы, описанной около пирамиды $FABCD$. Тогда $OA = OB = OC = OD = OF = R$, и значит, O — точка пересечения диагоналей $ABCD$.

2. $ABC \perp AFC$, поэтому прямая AC — проекция прямой BC на плоскость AFC . И $\angle BCA$ равен углу между прямой BC и плоскостью AFC .

Пусть $\angle BCA = \beta$. По условию $\operatorname{tg} \beta = 3$.

3. $L \in AF$ и $LM = LC$. В плоскости AFC из точки L опустим перпендикуляр LH на прямую AC . Так как $AFC \perp ABC$, то $LH \perp ABC$, и HM и HC — проекции



равных наклонных LM и LC . Значит, $HM = HC$, и $\triangle CHM$ – равнобедренный. $MP = PC$.

$$4. V = \frac{1}{3} \cdot LH \cdot S_{AMC}$$

$$\text{В } \triangle ACB: BC = AC \cdot \cos \beta = \frac{2R}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{2R}{\sqrt{10}}.$$

$$MC = \frac{3BC}{5} = \frac{6R}{5\sqrt{10}} \text{ и } PC = 0,5MC = \frac{3R}{5\sqrt{10}};$$

$$AB = AC \cdot \sin \beta = \frac{2R \operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{6R}{\sqrt{10}}.$$

$$\text{В } \triangle CPH: HC = \frac{PC}{\cos \beta} = \frac{3R}{5}.$$

$$AH = AC - HC = \frac{7R}{5}.$$

$$S_{AMC} = \frac{1}{2} \cdot MC \cdot AB = \frac{9R^2}{25}.$$

$$\text{В } \triangle AHL: \operatorname{tg} \angle A = \frac{16}{7}. LH = AH \cdot \operatorname{tg} \angle A = \frac{16R}{5}.$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{16R}{5} \cdot \frac{9R^2}{25} = \frac{48R^3}{125}. \quad \frac{48R^3}{125} = 48. \quad R = 5.$$

Ответ: 5.

C5

Найдите все значения a , при каждом из которых оба числа $4\sin a - 3$ и $8\cos 2a + 16\sin a + 1$ являются решениями неравенс-

тва $\frac{(21x - 2x^2 + 65)\sqrt{x+2}}{\log_3|x-9|-2} \geq 0$.

Обсуждение подходов к решению.

1 способ

1. Решим неравенство $\frac{(21x - 2x^2 + 65)\sqrt{x+2}}{\log_3|x-9|-2} \geq 0$ методом интервалов.

А) Пусть $f(x) = \frac{(21x - 2x^2 + 65)\sqrt{x+2}}{\log_3|x-9|-2}$.

Найдем область определения функции $y = f(x)$.

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ \log_3|x-9|-2 \neq 0 \\ |x-9| \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ |x-9| \neq 9 \\ x \neq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \neq 0 \\ x \neq 9 \\ x \neq 18 \end{cases}$$

Область определения функции $y = f(x)$ — объединение промежутков $[-2; 0) \cup (0; 9) \cup (9; 18) \cup (18; +\infty)$.

Б) Найдем нули функции $y = f(x)$.

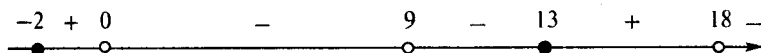
$$\frac{(21x - 2x^2 + 65)\sqrt{x+2}}{\log_3|x-9|-2} = 0 \Leftrightarrow \frac{-2(x+2,5)(x-13)\sqrt{x+2}}{\log_3|x-9|-2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 13 \\ x = -2. \end{cases}$$

Функция $f(x) = \frac{(21x - 2x^2 + 65)\sqrt{x+2}}{\log_3|x-9|-2}$ определена при $x \geq -2$;

$x \neq 0$; $x \neq 9$; $x \neq 18$ и непрерывна. Находим знаки функции.

$$f(19) < 0, f(17) > 0, f(12) < 0, f(1) < 0, f(-1) > 0.$$



Значит, $f(x) \geq 0$ при $x \in [-2; 0) \cup [13; 18)$.

2. Найдем все значения параметра a , при каждом из которых оба числа $4\sin a - 3$ и $8\cos 2a + 16\sin a + 1$ принадлежат множеству $[-2; 0) \cup [13; 18)$.

А) Рассмотрим сначала число $4\sin a - 3$. Так как $-1 \leq \sin a \leq 1$, то $-7 \leq 4\sin a - 3 \leq 1$, т. е. число $4\sin a - 3$ может принадлежать только промежутку $[-2; 0)$. Найдем, при каких значениях $\sin a$ это возможно.

$$-2 \leq 4\sin a - 3 < 0 \Leftrightarrow 1 \leq 4\sin a < 3 \Leftrightarrow 0,25 \leq \sin a < 0,75.$$

Итак, число $4\sin a - 3$ является решением исходного неравенства, если

$$0,25 \leq \sin a < 0,75.$$

Б) Рассмотрим число $8\cos 2a + 16\sin a + 1$.

$$8\cos 2a + 16\sin a + 1 = 8(1 - 2\sin^2 a) + 16\sin a + 1 = -16\sin^2 a + 16\sin a + 9.$$

Определим, какие значения принимает выражение $-16\sin^2 a + 16\sin a + 9$ при $0,25 \leq \sin a < 0,75$.

Пусть $\sin a = t$, $0,25 \leq t < 0,75$. Рассмотрим квадратичную функцию $f(t) = -16t^2 + 16t + 9$. График функции $y = f(t)$ — парабола.

Найдем множество значений функции $y = f(t)$ при $0,25 \leq t < 0,75$.

Абсцисса вершины параболы $t_v = -\frac{16}{2 \cdot (-16)} = 0,5$.

$f(0,5) = 13$, $f(0,25) = 12$, $f(0,75) = 12$.

Множеством значений функции $f(t) = -16t^2 + 16t + 9$ при $0,25 \leq t < 0,75$ является отрезок $[12; 13]$, т. е. выражение $-16\sin^2 a + 16\sin a + 9$ при $0,25 \leq \sin a < 0,75$ может принимать значения только из отрезка $[12; 13]$.

Число $8\cos 2a + 16\sin a + 1 = -16\sin^2 a + 16\sin a + 9$ должно принадлежать объединению промежутков $[-2; 0) \cup [13; 18]$.

Это возможно, только если $8\cos 2a + 16\sin a + 1 = 13$, т. е.

$$-16\sin^2 a + 16\sin a + 9 = 13.$$

$$4\sin^2 a - 4\sin a + 1 = 0.$$

$$\sin a = 0,5.$$

Итак, в пунктах А) и Б) мы показали, что число $4\sin a - 3$ является решением исходного неравенства, если $0,25 \leq \sin a < 0,75$, при этом число $8\cos 2a + 16\sin a + 1$ является решением исходного неравенства, если $\sin a = 0,5$.

По условию и число $4\sin a - 3$, и число $8\cos 2a + 16\sin a + 1$ являются решениями исходного неравенства. Значит, $\sin a = 0,5$

$$\text{и } a = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

2 способ

1. Решим сначала неравенство $\frac{(21x - 2x^2 + 65)\sqrt{x+2}}{\log_3|x-9|-2} \geq 0$.

$$\frac{(21x - 2x^2 + 65)\sqrt{x+2}}{\log_3|x-9|-2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} (21x - 2x^2 + 65)\sqrt{x+2} \geq 0 & (1) \\ \log_3|x-9|-2 > 0 & (2) \end{cases} \\ \begin{cases} (21x - 2x^2 + 65)\sqrt{x+2} \leq 0 & (3) \\ \log_3|x-9|-2 < 0 & (4) \end{cases} \end{cases}$$

Решим каждое неравенство.

$$(1) (21x - 2x^2 + 65)\sqrt{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2(x+2,5)(x-13)\sqrt{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+2,5)(x-13)\sqrt{x+2} \leq 0 \Leftrightarrow$$

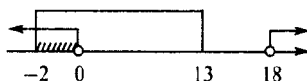
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ (x+2) \geq 0 \\ (x+2,5)(x-13) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x \geq -2 \\ -2,5 \leq x \leq 13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 13$$

$$(2) \log_3|x-9|-2 > 0 \Leftrightarrow \log_3|x-9| > \log_3 9 \Leftrightarrow |x-9| > 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-9 > 9 \\ x-9 < -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 18 \\ x < 0 \end{cases}$$

Отметим решение неравенств (1) и (2) на координатной прямой.



Решением первой системы неравенств является промежуток $[-2; 0)$.

Рассуждая аналогично, можно получить, что решением второй системы неравенств является промежуток $[13; 18)$.

Итак, решением неравенства $\frac{(21x - 2x^2 + 65)\sqrt{x+2}}{\log_3|x-9|-2} \geq 0$ является объединение промежутков $[-2; 0) \cup [13; 18)$.

2. Найдем все значения параметра a , при каждом из которых оба числа $4\sin a - 3$ и число $8\cos 2a + 16\sin a + 1$ принадлежат множеству $[-2; 0) \cup [13; 18)$.

А) Пусть $x = 4\sin a - 3$. Выразим через x число

$$8\cos 2a + 16\sin a + 1.$$

$$\sin a = \frac{x+3}{4}, \quad 16\sin a = 4(x+3),$$

$$8\cos 2a = 8(1 - 2\sin^2 a) = 8 - 16 \cdot \frac{(x+3)^2}{16} = -1 - x^2 - 6x,$$

$$8\cos 2a + 16\sin a + 1 = -1 - x^2 - 6x = -x^2 - 2x + 12 = 13 - (x+1)^2.$$

Б) По условию и число x , и число $13 - (x + 1)^2$ являются решениями исходного неравенства, т. е. принадлежат множеству $[-2; 0) \cup [13; 18)$.

Так как $-7 \leq 4\sin a - 3 \leq 1$, то случай $x \in [13; 18)$ невозможен. Точка $(-1; 13)$ — вершина параболы $y = 13 - (x + 1)^2$, ветви которой направлены вниз.

Если $x \in [-2; -1) \cup (-1; 0)$, то $12 = y(-2) \leq y < y(-1) = 13$, т. е. y не принадлежит множеству $[-2; 0) \cup [13; 18)$. Если $x = -1$, то $y = 13$, т. е. и число x , и число y являются решениями исходного неравенства.

Итак, число a удовлетворяет условию задачи, только если $x = 4\sin a - 3 = -1$, $\sin a = 0,5$, $a = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, n — целое.

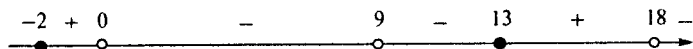
Возможная запись решения ученика.

$$1. (21x - 2x^2 + 65)\sqrt{x+2} = (2x+5)(13-x)\sqrt{x+2}.$$

$$\log_3 |x-9| = 2, |x-9| = 9, x-9 = \pm 9, x = 0 \text{ или } x = 18.$$

$$2. \text{ Функция } (x) = \frac{(21x - 2x^2 + 65)\sqrt{x+2}}{\log_3 |x-9| - 2} \text{ определена при } x \geq -2,$$

$x \neq 0, x \neq 9, x \neq 18$ и непрерывна. При этом $f(19) < 0$, $f(17) > 0$, $f(12) < 0$, $f(1) < 0$, $f(-1) > 0$.



$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-2; 0) \cup [13; 18).$$

$$3. x = 4\sin a - 3, \sin a = \frac{x+3}{4},$$

$$8\cos 2a = 8(1 - 2\sin^2 a) = 8 - 16 \cdot \frac{(x+3)^2}{16} = -1 - x^2 - 6x,$$

$$8\cos 2a + 16\sin a + 1 = -1 - x^2 - 6x + 4(x+3) + 1 = -x^2 - 2x + 12 = 13 - (x+1)^2.$$

И число x , и число $13 - (x + 1)^2$ принадлежат множеству $[-2; 0) \cup [13; 18)$.

4. Так как $-7 \leq 4\sin a - 3 \leq 1$, то случай $x \in [13; 18)$ невозможен.

Точка $(-1; 13)$ — вершина параболы $y = 13 - (x + 1)^2$.

Если $x \in [-2; -1) \cup (-1; 0)$, то $12 = y(-2) \leq y < y(-1) = 13$, т. е. y не принадлежит множеству $[-2; 0) \cup [13; 18)$.

Если $x = -1$, то $y = 13$, т. е. и число x , и число y являются решениями исходного неравенства.

$$x = 4\sin a - 3 = -1, \sin a = 0,5, a = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $a = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ

Передовые технологии
в сочетании с традиционными методами обучения

Качественная очная и заочная подготовка
в современном Центре образования «УНИКУМ»

www.unicenter.ru

8 (499) 615-2031

Справочное издание

ЕГЭ-2008
МАТЕМАТИКА
РЕАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Авторы-составители

**Вадим Витальевич Кочагин, Елена Михайловна Бойченко,
Юрий Александрович Глазков, Лариса Олеговна Денищева,
Галина Алексеевна Захарова, Петр Михайлович Камаев,
Наталья Борисовна Мельникова,
Андрей Рафаилович Рязановский,
Игорь Николаевич Сергеев,
Александр Александрович Фомин**

Редакция «Образовательные проекты»

Ответственный за выпуск *Н. А. Шармай*

Редактор *А. Ю. Котова*

Технический редактор *А. Л. Шелудченко*

Корректор *И. Н. Мокина*

Оригинал-макет подготовлен *ООО «Бета-Фрейм»*

Общероссийский классификатор продукции ОК-005-93, том 2;
953005 — литература учебная

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.007027.06.07 от 20.06.2007 г.

ООО «Издательство Астрель»

129085, Москва, пр-д Ольминского, д. 3а

ООО «Издательство АСТ»

170002, РФ, г. Тверь, пр-т Чайковского, д. 27/32

Наши электронные адреса: www.ast.ru E-mail: astpub@aha.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ООО «Типография ИПО профсоюзов «Профиздат»
144003, г. Электросталь, Московская область, ул. Тевосяна, д. 25

По вопросам приобретения книг обращаться по адресу:
129085, Москва, Звездный бульвар, дом 21, 7 этаж

Отдел реализации учебной литературы
«Издательской группы АСТ»

Справки по телефону: (495)615-53-10, факсе 232-17-04