ТАБЛИЦА КВАДРАТОВ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ОТ 10 ДО 99

Десятки	Единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

КВАДРАТЫ И КУБЫ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ОТ 1 ДО 10

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
n^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	10000

СТЕПЕНИ ЧИСЕЛ 2 И 3

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512
3^n	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683

СТЕПЕНИ

Формулы сокращенного умножения

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$
$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

Степени и корни

$a^k \cdot a^n = a^{k+n}$ $\qquad$ $a^0 = 1,\ a \neq 0$

$(a^k)^n = a^{kn}$ $\qquad$ $(ab)^n = a^n b^n$

$\dfrac{a^k}{a^n} = a^{k-n}$ $\qquad$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n};\ a \neq 0$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n,\ a \neq 0,\ b \neq 0$

$\sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}},\ a > 0$ $\qquad$ $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$

$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$ $\qquad$ $\sqrt{x^2} = |x|$

ЛОГАРИФМЫ

Логарифмом $\log_a b = c$ называется такое число c, что $a^c = b$, где $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Десятичными логарифмами называются логарифмы, основание которых равно 10.

$$\log_{10} b = \lg b$$

Натуральными логарифмами называются логарифмы, основание которых равно e.

$$\log_e b = \ln b$$

Основное тождество

$$a^{\log_a b} = b$$

Свойства логарифмов

$$\log_a b + \log_a c = \log_a bc$$

$$\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$$

$$n \log_a b = \log_a b^n$$

$$\log_{a^k} b^n = \frac{n}{k} \log_a b$$

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_{\sqrt[n]{a}} \sqrt[n]{b} = \log_a b$$

$$\log_{\frac{1}{a}} a = \log_a \frac{1}{a} = -1$$

$$\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$$

$$\log_a 1 = 0$$

ПРОГРЕССИИ

Арифметическая прогрессия

$$a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n$$

Формула n-го члена прогрессии

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

Характеристическое свойство прогрессии

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$$

Сумма n первых членов прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n,$$

или

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

Геометрическая прогрессия

$$b_1,\ b_2,\ldots,\ b_n,\ q \neq 0$$

Формула n-го члена прогрессии

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

Характеристическое свойство прогрессии

$$b_k = \pm\sqrt{b_{k-1} \cdot b_{k+1}}$$

Сумма n первых членов прогрессии

$$S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1-q},$$

или

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$$

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$S = \frac{b_1}{1-q}$$

КООРДИНАТЫ

Точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$.

Координаты середины отрезка AB:

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

Длина отрезка AB:

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Уравнение окружности:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

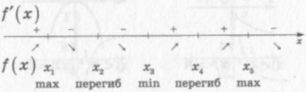
Уравнение сферы:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Для непрерывной и дифференцируемой функции на ОДЗ $y=f(x)$ справедливы следующие утверждения.

Корни уравнения $f'(x)=0$ x_1, x_2,..., x_i являются критическими точками функции $f(x)$.



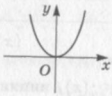
Если $f''(a)>0$, то $f(x)$ в точке $x=a$ имеет минимум, а если $f''(b)<0$, то $f(x)$ в точке $x=b$ имеет максимум.

ГРАФИКИ

$y = kx + b$

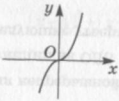
$k > 0$, $b > 0$ $\quad k = 0$, $b > 0$ $\quad x = a$, $a > 0$

$y = ax^2$, $a > 0$

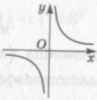


$y = \sqrt{x}$, $x \geqslant 0$

$y = x^3$

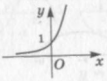


$y = \dfrac{k}{x}$, $k > 0$

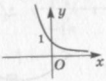


$y = a^x$

а) $a > 1$

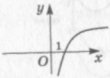


б) $0 < a < 1$

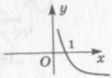


$y = \log_a x$

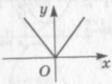
а) $a > 1$



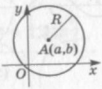
б) $0 < a < 1$



$y = |x|$

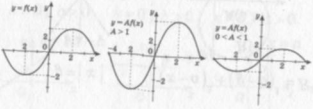


$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

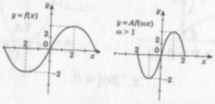


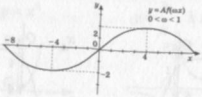
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

$y = Af(x)$

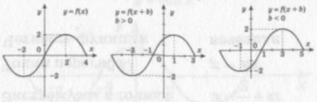


$y = f(\omega x)$

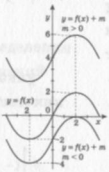




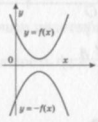
$y = f(x + b)$



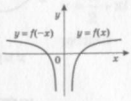
$y = f(x) + m$



$y = -f(x)$

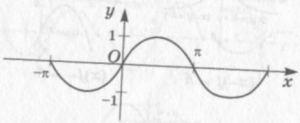


$y = f(-x)$



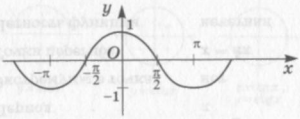
СВОЙСТВА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

$y = \sin x$



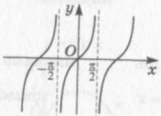
Область определения	$-\infty < x < +\infty$
Область значений	$-1 \le y \le +1$
Нули	$x = k\pi$
Полюсы	нет
Период	2π
Экстремумы в точках	$x = \frac{\pi}{2} + \pi l$
Точки перегиба	$x = k\pi$
Четность функции	нечетная

$y = \cos x$



Область определения	$-\infty < x < +\infty$
Область значений	$-1 \le y \le +1$
Нули	$x = \frac{\pi}{2} + \pi l$
Полюсы	нет
Период	2π
Экстремумы в точках	$x = k\pi$
Точки перегиба	$x = \frac{\pi}{2} + \pi l$
Четность функции	четная

$y = \operatorname{tg} x$



Область определения	$-\infty < x < +\infty$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi l$
Область значений	$-\infty < y < +\infty$
Нули	$x = k\pi$
Полюсы	$x = \frac{\pi}{2} + \pi l$
Период	π
Экстремумы в точках	нет
Точки перегиба	$x = k\pi$
Четность функции	нечетная

Знаки тригонометрических функций

$y = \sin x$ $\quad$ $y = \cos x$ $\quad$ $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1, \ \alpha \neq \frac{\pi k}{2}$$

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \ \alpha \neq \pi n, \ n \in Z$$

Теоремы сложения для суммы и разности аргументов

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha}$$

Теоремы сложения для кратных аргументов

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}$$

Функции половинного аргумента

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha} = \frac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

Теоремы сложения и разности функций

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha \pm \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\pm\alpha\right)$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \pm\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$$

Произведения тригонометрических функций

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right)$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right)$$

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\beta - \sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta = \frac{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}$$

Значения тригонометрических функций некоторых углов

α, град	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
α, рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	–

Замечание. $1/\sqrt{2}=\sqrt{2}/2$; $1/\sqrt{3}=\sqrt{3}/3$

Формулы приведения

Функция	Аргумент			
	$\beta=\frac{\pi}{2}\pm\alpha$	$\beta=\pi\pm\alpha$	$\beta=\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$	$\beta=2\pi\pm\alpha$
$\sin\beta$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\,\beta$	$\mp\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mp\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\,\beta$	$\mp\mathrm{tg}\,\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$

Связь между тригонометрическими функциями одного аргумента

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\sin\alpha$		$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$		$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\dfrac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$		$\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\dfrac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$	

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

$$\arcsin a+\arccos a=\frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(-a)=-\arcsin a=\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

$$\arccos(-a)=\pi-\arccos a=\operatorname{arcctg}\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$$

$$\operatorname{arcctg} a+\operatorname{arctg} a=\frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arctg}\alpha=-\operatorname{arctg}(-\alpha)=\arcsin\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

$$\operatorname{arcctg}\alpha=\pi-\operatorname{arcctg}(-\alpha)=\arccos\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

Значение арксинуса и арккосинуса некоторых чисел

a	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\arcsin a$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$
$\arccos a$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$

Значение арктангенса и арккотангенса некоторых чисел

a	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\operatorname{arctg} a$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$
$\operatorname{arcctg} a$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$

Свойства обратных тригонометрических функций

$y = \arcsin x$

Область определения	$-1 \leqslant x \leqslant +1$
Множество значений	$-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant +\frac{\pi}{2}$
Монотонность	$\nearrow$
Точки перегиба	$(0; 0)$
$\lim\limits_{x \to +\infty} y$	нет

$y = \arccos x$

Область определения	$-1 \leqslant x \leqslant +1$
Множество значений	$0 \leqslant y \leqslant \pi$
Монотонность	$\searrow$
Точки перегиба	$(0; \pi/2)$
$\lim\limits_{x \to +\infty} y$	нет

$y = \operatorname{arctg} x$

Область определения	$-\infty \leqslant x \leqslant +\infty$
Множество значений	$-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant +\frac{\pi}{2}$
Монотонность	$\nearrow$
Точки перегиба	$(0; 0)$
$\lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ x \to +\infty}} y$	$-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$

$y = \operatorname{arcctg} x$

Область определения	$-\infty \leqslant x \leqslant +\infty$
Множество значений	$0 \leqslant y \leqslant \pi$
Монотонность	$\searrow$
Точки перегиба	$(0; \pi/2)$
$\lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ x \to +\infty}} y$	$\pi; 0$

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

$f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x)\cdot(x) > g(x)\cdot(x)$,
если $(x) > 0$;

$f(x) > g(x) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} > \dfrac{g(x)}{\varphi(x)}$, если $(x) > 0$;

$f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x)\cdot(x) < g(x)\cdot(x)$,
если $(x) < 0$;

$f(x) > g(x) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} < \dfrac{g(x)}{\varphi(x)}$, если $(x) < 0$.

Геометрическая интерпретация неравенств

$x \text{ III } a \Leftrightarrow x \to (a; \infty)$.

$x \leq b \Leftrightarrow x \to (-\infty; b]$

Показательные неравенства

$$a^x > a^c \Leftrightarrow \begin{cases} x > c, \text{ если } a > 1, \\ x < c, \text{ если } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Логарифмические неравенства

$$\log_a x > \log_a c \Leftrightarrow \begin{cases} x > c, \text{ если } a > 1, \\ 0 < x < c, \text{ если } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Иррациональные неравенства

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \geqslant 0, \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \end{array} \right.$$

Линейное уравнение

Линейным уравнением с одной переменной x называется уравнение вида $a \cdot x = b$, где a и b — заданные числа; a называется коэффициентом при переменной x, b — свободным членом.

1) $a \neq 0$, тогда $x = \frac{b}{a}$ — единственный корень уравнения;
2) $a = 0$, $b = 0$, тогда $0 \cdot x = 0$, x — любое действительное число;
3) $a = 0$, $b \neq 0$, тогда $0 \cdot x = b$, не имеет корней.

Уравнения, приводимые к линейным

1) $\frac{x}{a} = b \Rightarrow x = a \cdot b \ (a \neq 0)$;

2) $\frac{a}{x} = b \Leftrightarrow x = \frac{a}{b} \ (b \neq 0)$;

3) $ax + b = c \Rightarrow x = \frac{c - b}{a} \ (a \neq 0)$;

4) $ax + b = cx + d \Rightarrow x = \frac{d - b}{a - c} \ (a \neq c)$;

5) $\frac{ax + b}{cx + d} = \frac{m}{n} \Rightarrow x = \frac{md - nb}{na - mc} \ (na - mc \neq 0)$.

Квадратное уравнение

$$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$$

$D=b^2-4ac>0$	$y=ax^2+bx+c$	
	$a>0$	$a<0$
1) Если $D>0$ — 2 решения $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$		
2) Если $D=0$ — 1 решение $\left(x=-\dfrac{b}{2a}\right)$		
3) Если $D<0$ — решений нет		

Теорема Виета

Теорема Виета: если приведенное квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ имеет действительные корни x_1 и x_2, то их сумма равна $(-p)$, а произведение равно q

$$x^2+px+q=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1\cdot x_2=q. \end{cases}$$

Теорема Виета для неприведенного квадратного уравнения имеет вид

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases} \quad (a\neq 0).$$

Из теоремы Виета следует, что квадратный трехчлен может быть разложен на линейные множители:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1, x_2 — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Показательные уравнения

$$a^{f(x)} = b$$

1. $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$, где $a>0$, $a \neq 1$.
2. $a^x = 1 \Leftrightarrow a^x = a^0 \Leftrightarrow x = 0$;
3. $a^{f(x)} = 1 \Leftrightarrow a^{f(x)} = a^0 \Leftrightarrow f(x) = 0$;
4. $a^{f(x)} = a^c \Leftrightarrow f(x) = c$;
5. $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$ — следует из определения логарифма);
6. $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$;
7. $P(a^x) = 0$, замена $y = a^x \Leftrightarrow P(y) = 0$

(Предполагается, что $a>0$, $a \neq 1$, $b>0$.)

Логарифмические уравнения

1. $\log_a x = b \Leftrightarrow \log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b, a>0, a \neq 1$;
2. $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow \log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$, $a>0$, $a \neq 1$;
3. $\log_a f(x) = g(x) \Leftrightarrow \log_a f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = a^{g(x)}$, $a>0$, $a \neq 1$;
4. $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases},$$

где $a > 0$, $a \neq 1$.

РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Решение уравнений вида $\cos x = a$.

при $-1 \leqslant a \leqslant 1$ $x = \pm \arccos a + 2\pi n$, $n \in Z$

при $a = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi l$, $l \in Z$

при $a = 1$ $x = 2\pi n$, $n \in Z$

при $a = -1$ $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$

Решение уравнений вида $\sin x = a$

при $-1 \leqslant a \leqslant 1$ $x = (1-)^k \arcsin a + \pi k$, $k \in Z$

при $a = 0$ $x = \pi l$, $l \in Z$

при $a = 1$ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$

при $a = -1$ $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$

Решение уравнений вида $\operatorname{tg} x = a$,

$a \in R$: $x = \operatorname{arctg} a + \pi k$, $k \in Z$

Решение уравнений вида $\operatorname{ctg} x = a$,

$a \in R$: $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$, $n \in Z$

Пусть заданы точки $A(a_1;\, a_2)$ и $B(b_1;\, b_2)$, тогда $\overrightarrow{AB}(b_1-a_1;\, b_2-a_2)$

Пусть заданы точки $A(a_1;\, a_2)$ и $B(b_1;\, b_2)$, тогда длина вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$

Векторы $\vec{a}(a_1;\, a_2)$ и $\vec{b}(b_1;\, b_2)$ коллинеарны тогда и только тогда, когда

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\lambda$$

$\vec{a}(a_1;\, a_2)=\vec{b}(b_1;\, b_2)$ тогда и только тогда, когда $a_1=b_1$; $a_2=b_2$.

$$\vec{a}(a_1;\, a_2)\pm\vec{b}(b_1;\, b_2)=\left(a_1\pm b_1;\, a_2\pm b_2\right)$$

$\vec{a}(a_1,\, a_2)=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2$, где $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ — единичные, взаимно перпендикулярные векторы (орты)

Скалярное произведение векторов

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$, или $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$, где φ — угол между векторами

$$\cos\varphi=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos 0^\circ=a^2$$

$$(\vec{a}\perp\vec{b})\Leftrightarrow(|a||b|\cos 90^\circ=0)$$

КОМБИНАТОРИКА. БИНОМ НЬЮТОНА. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Размещения
(не все элементы, важен порядок)

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1),\ A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Перестановки
(используются все элементы)

$$P_n = n!,\ n! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot n$$

Сочетания
(не все элементы, порядок элементов не важен)

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!},$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Свойства сочетаний

$$C_n^k = C_n^{n-k} \qquad C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$$

Бином Ньютона

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^n a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n,$$

где $k+1$ элемент разложения

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b_k$$

Треугольник Паскаля для определения биноминальных коэффициентов

n	C_n^k
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
...	. . . . .

Вероятность события A

$P(A) = \frac{m}{n}$, где n — число всех возможных случаев события A, а m — число благоприятных исходов события A

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Правила дифференцирования

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad (cu)' = cu'$$

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$$

$$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Правила интегрирования

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

$$\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k} f(kx+b) + c$$

Интегрирование по частям:

$$\int uv'dx = uv - \int vu'dx$$

Определенный интеграл

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0\,;$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,,\ a < c < b$$

$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$, если $f(x)$ нечетная, непрерывная

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

$y=f(x)$	$y'=f'(x)$
C	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x^k}=x^{\frac{k}{n}}$	$\frac{k}{n}x^{\frac{k}{n}-1}$
$\frac{1}{x^k}=x^{-k}$	$-kx^{-k-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$

$y=f(x)$	$y'=f'(x)$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$
$\lvert x \rvert$	$\begin{cases} x, \text{ если } x>0 \\ 0, \text{ если } x=0 \\ -1, \text{ если } x<0 \end{cases}$

ТАБЛИЦА ПЕРВООБРАЗНЫХ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

$f(x)$	$F(x)=\int f(x)\,dx$
1	$x+C$
k	$kx+C$
x	$\frac{x^2}{2}+C$
$x^n\ (n\neq 1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+C$
e^x	e^x+C
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+C$
$\sin x$	$-\cos x+C$
$\cos x$	$\sin x+C$

$f(x)$	$F(x)=\int f(x)\,dx$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x+C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x+C$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a}+C,\ a>0$
$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C,$ $a\neq 0$
$\frac{1}{a^2-x^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert+C$

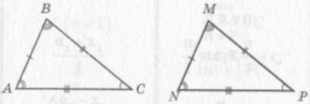
ТРЕУГОЛЬНИКИ

Признаки равенства треугольников:

1) $AB = NM$; $BC = MP$; $AC = NP$.

2) $AC = NP$; $\angle BAC = \angle MNP$; $\angle BCA = \angle MPN$;

3) $AB = MN$; $BC = MP$; $\angle ABC = \angle NMP$.



Соотношения между сторонами и углами треугольника:

1) против большей стороны лежит больший угол;

2) против большего угла лежит большая сторона;

3) против равных сторон лежат равные углы, и обратно, против равных углов лежат равные стороны.

4) Сумма любых внутренних углов треугольника равна внешнему углу треугольника, смежному с третьим углом.

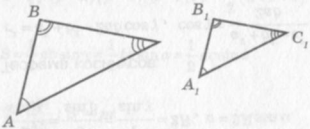
Подобие треугольников

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$:

$\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$,

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k,$$

k — коэффициент подобия.



Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R\,,\ a=2R\sin\alpha$$

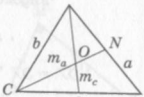
Теорема косинусов:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma\,,\ \cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

Медиана треугольника

$$\frac{CO}{ON}=\frac{2}{1}$$

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$$

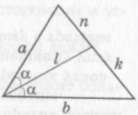


Биссектриса

$$\frac{a}{b}=\frac{n}{k}$$

$$l^2=ab-nk$$

$$l=\frac{2ab\cos\alpha}{a+b}$$

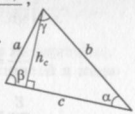


Высота треугольника

$$h_c=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c}\,,$$

где p — полупериметр.

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$$



Площадь треугольника

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\ p=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

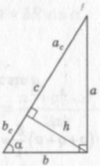
$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}bc\sin a=\frac{1}{2}ac\sin b$$

$$S=\frac{abc}{4R}\,;\ S=pr$$

Прямоугольный треугольник

a, b — катеты,

c — гипотенуза



Теорема Пифагора:

$a^2 + b^2 = c^2$

$\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$ $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$ $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{b}{a}$

$a^2 = c \cdot a_c$ $b^2 = c \cdot b_c$

$S = \dfrac{ab}{2}$ $S = \dfrac{ch}{2}$

$h^2 = a_c \cdot b_c$ $h = \dfrac{ab}{c}$

$R = \dfrac{c}{2}$ $r = \dfrac{a+b-c}{2}$

Равнобедренный треугольник

$a = b$, $\alpha = \beta$

1) углы при основании треугольника равны;

2) высота, проведенная из вершины, является также биссектрисой и медианой.

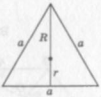
Равносторонний треугольник

1) $\alpha = \beta = \gamma = 60°$

2) Каждая высота является также биссектрисой и медианой;

3) Центр описанной окружности совпадает с центром вписанной окружности.

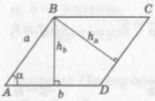
$h = R + r$ $a = 2r\sqrt{3}$



$R = 2r$ $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$a = R\sqrt{3}$ $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ



Свойства параллелограмма

1. $AB = DC$, $AD = BC$;

2. $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$;

3. $AO = OC$, $BO = OD$, т. O — центр симметрии параллелограмма;

4. $\Delta ABC = \Delta ACD$, $\Delta ABD = \Delta BCD$;

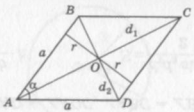
5. $\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = \angle C + \angle D = \angle D + \angle A = 180°$;

$2a^2 + 2b^2 = d_1^2 + d_2^2$

$S = bh_b$; $S = ah_a$

$S = ab\sin\alpha$ $S = \dfrac{d_1 d_2 \sin\varphi}{2}$

РОМБ



Свойства ромба

1. $AB = BC = CD = DA$

2. $d_1 \perp d_2$

3. $\angle BAO = \angle OAD$, $\angle ADO = \angle ODC$, $\angle DCO = \angle OCB$, $\angle CBO = \angle OBA$

Диагональ ромба — ось симметрии.

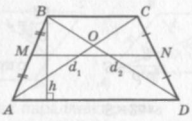
$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$

$S = ah$; $S = 2ar$

$S = a^2\sin\alpha$ $S = \dfrac{d_1 d_2}{2}$

$r = \dfrac{d_1}{2}$; $r = \dfrac{S}{2a}$

ТРАПЕЦИЯ



Свойства трапеции

1. $AD \parallel BC$

2. $\angle DAB + \angle ABC = \angle BCD + \angle CDA = 180°$

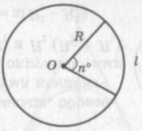
3. $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$.

Если $AB = CD$, то трапеция равнобедренная. Тогда,

$$\angle BAD = \angle ADC,\ \angle ABC = \angle BCD$$

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h \qquad S = \frac{d_1 d_2 \sin\varphi}{2}$$

ОКРУЖНОСТЬ И КРУГ



Длина C окружности:

$$C = 2\pi R,$$

R — радиус окружности

Длина дуги окружности радиуса R:

$$l = \frac{\pi R n^\circ}{180^\circ} \text{ или } l = \varphi R,$$

где l — длина дуги окружности; n° — градусное измерение дуги; φ — радианное измерение дуги.

Отношение длин двух окружностей:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Площадь круга:

$$S = \pi R^2.$$

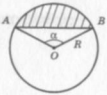
Отношение площадей двух кругов:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2}.$$

Площадь сектора:

$$S = \frac{\pi R^2 n°}{360°} \text{ или } S = \frac{R^2 \varphi}{2}$$

Площадь кругового сегмента можно вычислить по формуле:



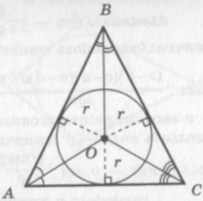
$$S_{\text{кр.сегм.}} = S_{\text{кр.сек.}} \mp S\Delta_{AOB}$$

при $\alpha < 180°$ берем «–»,
при $\alpha > 180°$ — «+».

Площадь кольца, образованного двумя концентрическими окружностями радиусов R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$):

$$S_{\text{кольца}} = \pi(R_2^2 - R_1^2)$$

Окружность, вписанная в треугольник

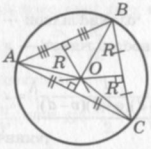


Центр вписанной в треугольник окружности является точкой пересечения биссектрис внутренних углов треугольника:

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},$$

где a, b, c — длины сторон треугольника; p — полупериметр, $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Окружность, описанная около треугольника

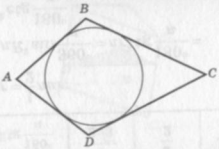


Центр описанной около треугольника окружности является точкой пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам:

1. $R = \dfrac{a}{2\sin A}$, где a — длина стороны треугольника; A — угол треугольника, противолежащий стороне a.

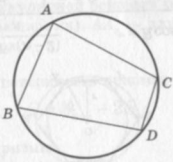
2. $R = \dfrac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$, где a, b, c — длины сторон треугольника, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ — полупериметр

Окружность, вписанная в четырехугольник



$$AB + CD = AD + BC$$

Окружность, описанная около четырехугольника



$$\angle B + \angle D = \angle A + \angle C = 180°$$

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

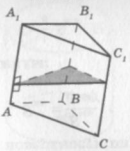
$$\alpha = \frac{180^\circ \cdot (n-2)}{n} \qquad r = R\cos\frac{180^\circ}{n}$$

	n	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
R	$\frac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$	$\frac{a}{\sqrt{3}}$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	a
r	$\frac{a_n}{2\,\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}}$	$\frac{a}{2\sqrt{3}}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$S_n = pr = \frac{1}{2}nar;$$

$$S_n = \frac{1}{2}nR^2\sin\frac{360^\circ}{n} = nr^2\,\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n} =$$
$$= \frac{1}{4}nr^2\,\mathrm{ctg}\frac{180^\circ}{n}$$

ПРИЗМА



Площадь боковой поверхности призмы:

$$S_{бок} = P \cdot AA_1,$$

где P — периметр перпендикулярного сечения (сечения призмы плоскостью, перпендикулярной боковым ребрам и пересекающей их), AA_1 — длина бокового ребра.

Полная поверхность призмы:

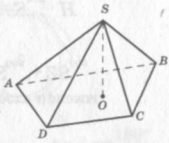
$$S = S_{бок} + 2S_{осн}$$

Объем призмы:

$$V = S_{осн} \cdot H$$

ПИРАМИДА

$$S = S_{бок} + S_{осн}$$



Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему:

$$S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot SK = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot l \cdot$$

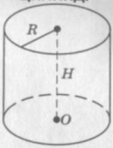
Если боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом, а площадь основания пирамиды равна $S_{осн}$, то площадь поверхности пирамиды:

$$S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos\varphi}.$$

Объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$$

ЦИЛИНДР



Площадь поверхности цилиндра:

$$S = 2\pi RH + 2\pi R^2$$

Площадь боковой поверхности цилиндра:

$$S_{бок} = 2\pi H$$

Площадь основания цилиндра:

$$S_{осн} = \pi R^2$$

Объем цилиндра:

$$V = \pi R^2 H$$