

Учебный центр «Резольвента»

Доктор физико-математических наук, профессор

К. Л. САМАРОВ

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЯМИ

Учебное пособие для подготовки к ЕГЭ и ГИА по математике

© К. Л. Самаров, 2010

© ООО «Резольвента», 2010

Пример 1. Решить уравнение

$$|2x+1|=3$$

Решение.

$$|2x+1|=3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=3 \\ 2x+1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=2 \\ 2x=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

Ответ. 1; - 2

Пример 2. Решить уравнение

$$\left| x^3 - \frac{5}{2}x - 2 \right| = \left| x^3 + x^2 + \frac{3}{2}x + 2 \right|$$

Решение.

$$\left| x^3 - \frac{5}{2}x - 2 \right| = \left| x^3 + x^2 + \frac{3}{2}x + 2 \right| \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - \frac{5}{2}x - 2 = x^3 + x^2 + \frac{3}{2}x + 2 \\ x^3 - \frac{5}{2}x - 2 = -\left(x^3 + x^2 + \frac{3}{2}x + 2\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 4 = 0 \\ 2x^3 + x^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2 = 0 \\ x(2x^2 + x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2 = 0 \\ x = 0 \\ 2x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 0 \\ x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = -1; \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ответ. $-2; -1; 0; \frac{1}{2}$

Пример 3. Решить уравнение

$$\frac{|x+3|-1}{x-1} = 4$$

Решение.

$$\frac{|x+3|-1}{x-1} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} |x+3|-1 = 4x-4 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+3| = 4x-3 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+3| = 4x-3 \\ 4x-3 \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3 = 4x-3 \\ 4x-3 \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x+3 = -(4x-3) \\ 4x-3 \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 3x \\ x \geq \frac{3}{4} \\ x \neq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x+3 = -4x+3 \\ x \geq \frac{3}{4} \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x \geq \frac{3}{4} \\ x \neq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 0 \\ x \geq \frac{3}{4} \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Ответ. 2

Пример 4. Решить уравнение

$$|2x^2 - 4x| = 3x - 3$$

Решение.

$$\begin{aligned} |2x^2 - 4x| = 3x - 3 &\Leftrightarrow \begin{cases} |2x^2 - 4x| = 3x - 3 \\ 3x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 4x = 3x - 3 \\ 3x - 3 \geq 0 \end{cases} \cup \\ \cup \begin{cases} -(2x^2 - 4x) = 3x - 3 \\ 3x - 3 \geq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 7x + 3 = 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} 2x^2 - x - 3 = 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} \\ x \geq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4} \\ x \geq 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{4} \\ x \geq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x_{3,4} = \frac{1 \pm 5}{4} \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2} = 3; \frac{1}{2} \\ x \geq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x_{3,4} = -1; \frac{3}{2} \\ x \geq 1 \end{cases} &\Leftrightarrow x = 3 \cup x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Ответ. $\frac{3}{2}; 3$

Пример 5. Решить неравенство

$$|x - 3| < 7$$

Решение.

$$\begin{aligned} |x - 3| < 7 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 < 7 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} -(x - 3) < 7 \\ x - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 10 \\ x \geq 3 \end{cases} \cup \begin{cases} x - 3 > -7 \\ x - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in [3, 10) \cup x \in (-4, 3) \Leftrightarrow x \in (-4, 10) \end{aligned}$$

Ответ. $x \in (-4, 10)$

Пример 6. Решить неравенство

$$6x^2 - |x| - 2 \leq 0$$

Решение. Заметим, что исходное неравенство эквивалентно объединению двух систем неравенств:

$$6x^2 - |x| - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - x - 2 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 6x^2 + x - 2 \leq 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

Решим первую систему неравенств. Для этого сначала найдем корни соответствующего квадратного уравнения:

$$6x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{12} = \frac{1 \pm 7}{12} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{2}{3}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} 6x^2 - x - 2 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right] \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{2}{3}\right]$$

Теперь решим вторую систему неравенств. Для этого найдем корни соответствующего квадратного уравнения:

$$6x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{12} = \frac{-1 \pm 7}{12} \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = \frac{1}{2}$$

Далее получаем:

$$\begin{cases} 6x^2 + x - 2 \leq 0 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right] \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{2}{3}, 0\right)$$

Объединение решений первой и второй систем неравенств дает ответ задачи.

Ответ. $x \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$

Пример 7. Решить неравенство

$$2x|x+1| - x - 1 > 0$$

Решение. Заметим, что исходное неравенство эквивалентно объединению двух систем неравенств:

$$\begin{aligned} 2x|x+1| - x - 1 > 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x(x+1) - x - 1 > 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} -2x(x+1) - x - 1 > 0 \\ x+1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x - 1 > 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} -2x^2 - 3x - 1 > 0 \\ x+1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x - 1 > 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \cup \begin{cases} 2x^2 + 3x + 1 < 0 \\ x < -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Теперь решим первую систему неравенств. Для этого сначала найдем корни соответствующего квадратного уравнения:

$$2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{2}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} 2x^2 + x - 1 > 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, -1) \cup x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

Теперь решим вторую систему неравенств. Для этого найдем корни соответствующего квадратного уравнения:

$$2x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{-3 \pm 1}{4} \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{2}$$

Далее получаем

$$\begin{cases} 2x^2 + 3x + 1 < 0 \\ x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \\ x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Таким образом, вторая система неравенств решений не имеет, и решение первой системы неравенств дает ответ задачи.

Ответ. $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Пример 8. Найти множество значений параметра p , при которых уравнение

$$2px - 2x - 4|x-1| - 1 = 0$$

имеет ровно два корня.

Решение. В случае $x \geq 1$ получаем

$$\begin{aligned} 2px - 2x - 4|x-1| - 1 = 0 &\Leftrightarrow 2px - 2x - 4(x-1) - 1 = 0 \Leftrightarrow 2px - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x(p-3) = -3 \end{aligned}$$

Таким образом, при $p \neq 3$ решение уравнения имеет вид

$$x = \frac{-3}{2(p-3)}, \quad (1)$$

а при $p=3$ уравнение решений не имеет. Кроме того, поскольку $x \geq 1$, то должно выполняться неравенство

$$\begin{aligned} \frac{-3}{2(p-3)} \geq 1 &\Leftrightarrow \frac{-3}{p-3} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{-3}{p-3} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-3-2(p-3)}{p-3} \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{3-2p}{p-3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2p-3}{p-3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{p-\frac{3}{2}}{p-3} \leq 0 \Leftrightarrow p \in \left[\frac{3}{2}, 3 \right) \end{aligned}$$

В случае $x < 1$ получаем

$$\begin{aligned} 2px - 2x - 4|x-1| - 1 = 0 &\Leftrightarrow 2px - 2x + 4(x-1) - 1 = 0 \Leftrightarrow 2px + 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x(p+1) = 5 \end{aligned}$$

Таким образом, при $p \neq -1$ решение уравнения имеет вид

$$x = \frac{5}{2(p+1)}, \quad (2)$$

а при $p=-1$ уравнение решений не имеет. Кроме того, поскольку $x < 1$, то должно выполняться неравенство

$$\begin{aligned} \frac{5}{2(p+1)} < 1 &\Leftrightarrow \frac{5}{p+1} < 2 \Leftrightarrow \frac{5}{p+1} - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{5-2(p+1)}{p+1} < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{3-2p}{p+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{2p-3}{p+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{p-\frac{3}{2}}{p+1} > 0 \Leftrightarrow p \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty \right) \end{aligned}$$

Следовательно, в случае

$$p \in \left(\frac{3}{2}, 3 \right)$$

исходное уравнение имеет 2 решения: решение, определяемое по формуле (1) и удовлетворяющее неравенству $x \geq 1$, и решение, определяемое по формуле (2) и удовлетворяющее неравенству $x < 1$.

Ответ. $p \in \left(\frac{3}{2}, 3 \right)$

Пример 9. Найти все значения параметра p , при которых уравнение

$$x^2 + p|x| + \frac{7-6p}{4} = 0$$

имеет хотя бы один корень.

Решение. Поскольку

$$\begin{aligned} x^2 + p|x| + \frac{7-6p}{4} = 0 &\Leftrightarrow |x|^2 + p|x| + \frac{7-6p}{4} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |x|_{1,2} &= \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - (7-6p)}}{2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 + 6p - 7}}{2} = \frac{-p \pm \sqrt{(p+7)(p-1)}}{2}, \end{aligned}$$

то исходное уравнение имеет хотя бы один корень тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\frac{-p + \sqrt{(p+7)(p-1)}}{2} \geq 0 \Leftrightarrow -p + \sqrt{(p+7)(p-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{(p+7)(p-1)} \geq p.$$

Таким образом, задача свелась к решению неравенства

$$\sqrt{(p+7)(p-1)} \geq p. \quad (3)$$

Для того, чтобы решить неравенство (3), рассмотрим два случая.

В случае $p < 0$ должны выполняться неравенства

$$\begin{cases} (p+7)(p-1) \geq 0 \\ p < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \in (-\infty, -7) \cup (1, +\infty) \\ p \in (-\infty, 0) \end{cases} \Leftrightarrow p \in (-\infty, -7).$$

Поскольку при этом левая часть неравенства (3) неотрицательна, а правая – отрицательна, то неравенство (3) верно.

В случае $p \geq 0$ обе части неравенства (3) можно возвести в квадрат:

$$\sqrt{(p+7)(p-1)} \geq p \Leftrightarrow (p+7)(p-1) \geq p^2 \Leftrightarrow 6p - 7 \geq 0 \Leftrightarrow p \in \left[\frac{7}{6}, +\infty \right)$$

Объединение полученных областей дает ответ задачи.

Ответ. $p \in (-\infty, -7) \cup \left[\frac{7}{6}, +\infty \right)$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить уравнения

1. $|3x + 2| = 1$

2. $|4x - 1| = 1$

3. $|5x - 2| = 2$

4. $\frac{3x - 5}{|x - 1| - 4} = 1$

5. $\frac{|x - 2| + 1}{2x + 1} = -1$

6. $\frac{7 + 3x}{|x + 1| - 6} = -1$

7. $|x^2 - 8x + 12| = 3x - 12$

8. $|x^2 - 4x| = 3x - 6$

9. $|x^2 - 2x - 8| = 8x - 8$

10. $|x^2 + 8x| = 6x + 24$

11. $|x^2 - 2x - 3| = 3x - 3$

12. $|x^2 - 3x| = 4x - 6$

13. $|x^2 - x - 2| = 4x - 2$

14. $|3x^3 + 12x + 1| = |3x^3 - 18x^2 - 1|$

15. $|8x^3 - 5x - 2| = |8x^3 + 4x^2 + 3x + 2|$

16. $\left|8x + \frac{14}{x} - \frac{7}{x^3}\right| = \left|8x - \frac{18}{x} - \frac{5}{x^3}\right|$

17. $\left|-4x + \frac{1}{x} - \frac{3}{2x^3}\right| = \left|-4x - \frac{3}{x} + \frac{5}{2x^3}\right|$

18. $|x^3 + 36x + 9| = |x^3 - 18x^2 - 9|$

$$19. \left| x^3 + 7x - \frac{14}{x} \right| = \left| x^3 - 9x - \frac{10}{x} \right|$$

Решить неравенства

$$20. |x-1| > 3$$

$$21. |2x+1| < 5$$

$$22. |3x-2| < 4$$

$$23. (x-1)|x| - 2x + 2 \leq 0$$

$$24. x^2 - 3|x-1| - 1 \leq 0$$

$$25. (x+4)|x| - 3x - 6 > 0$$

$$26. x^2 - 2|x| - 3 \geq 0$$

$$27. 3x|2x-3| + 7x - 8 < 0$$

$$28. x^2 - |5x+1| + 5 > 0$$

29. Найти множество значений параметра p , при которых уравнение

$$2px - 4x + 6|x-1| - 3 = 0$$

имеет ровно два корня.

30. Найти множество значений параметра p , при которых уравнение

$$|x-2| + px + 2x - 1 = 0$$

не имеет корней.

31. Найти все значения параметра p , при которых уравнение

$$x^2 - p|x| + \frac{p^2 - p - 6}{4} = 0$$

имеет ровно 4 различных корня.

32. Найти множество значений параметра p , при которых уравнение

$$|x-2| - px - x + 1 = 0$$

не имеет корней.