

Учебный центр «Резольвента»

Кандидат физико-математических наук, доцент

С. С. САМАРОВА

ФИГУРЫ НА КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ, ЗАДАнные НЕРАВЕНСТВАМИ

Учебно-методическое пособие для подготовки к
ЕГЭ и ГИА по математике

© С. С. Самарова, 2010

© ООО «Резольвента», 2010

Начнем с рассмотрения простых задач.

Задача 1. Изобразить на координатной плоскости XOY фигуру M , состоящую из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$xy < 0.$$

Решение. Поскольку

$$\{xy < 0\} \Leftrightarrow \{x < 0, y > 0\} \cup \{x > 0, y < 0\},$$

то фигура M является объединением 2-го и 4-го квадрантов координатной плоскости (рис.1).

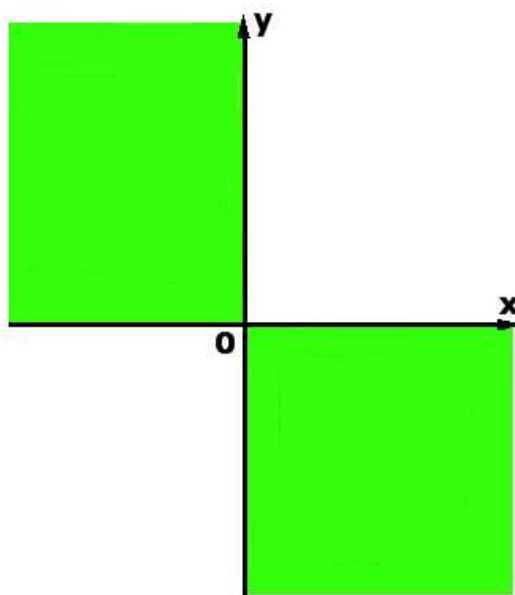


Рис.1

Задача 2. Изобразить на координатной плоскости XOY фигуру M , состоящую из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$2x + 3y > 6. \quad (1)$$

Решение.

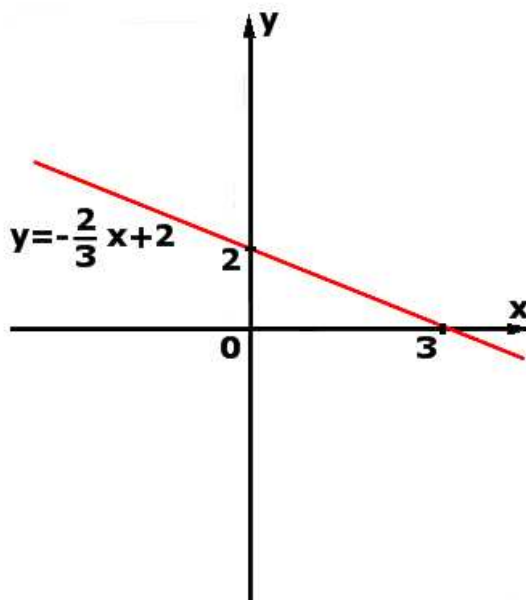


Рис.2

Преобразуем сначала неравенство (1) к равносильной форме:

$$y > -\frac{2}{3}x + 2, \quad (2)$$

и нарисует на координатной плоскости XOY график функции

$$y = -\frac{2}{3}x + 2, \quad (3)$$

представляющий собой прямую линию (рис.2).

Прямая линия (3) делит плоскость на две полуплоскости — верхнюю и нижнюю. Докажем, что координаты каждой точки, лежащей в верхней полуплоскости, удовлетворяют неравенствам (1) и (2), а координаты каждой точки, лежащей в нижней полуплоскости, удовлетворяют неравенству

$$2x + 3y < 6,$$

а также равносильному ему неравенству

$$y < -\frac{2}{3}x + 2. \quad (4)$$

С этой целью проведем через произвольную точку B , лежащую в верхней полуплоскости, прямую l , параллельную оси OY , и обозначим точку пересечения прямых l и (3) буквой A . Координаты $(x_0; y_0)$ точки A связаны соотношением

$$y_0 = -\frac{2}{3}x_0 + 2,$$

а точка B имеет координаты $(x_0; y_1)$, причем выполняется неравенство $y_1 > y_0$, а вместе с ним и неравенство (2). Совершенно аналогично доказывается, что координаты каждой точки, лежащей в нижней полуплоскости, удовлетворяют неравенству (4).

Следовательно, фигура M , заданная неравенством (1), изображается так, как показано на рис. 3.

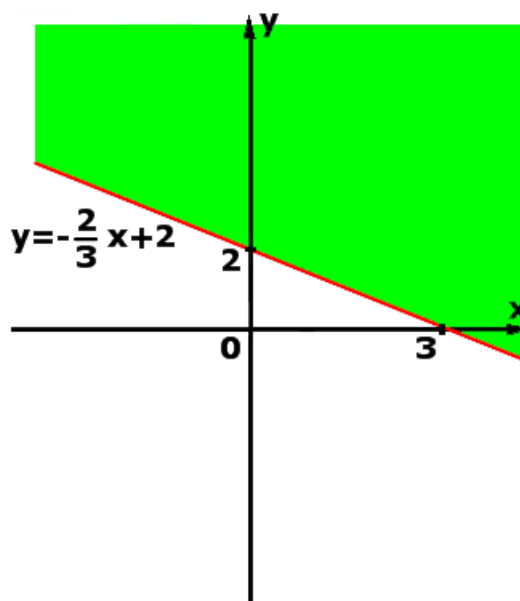


Рис. 3

Задача 3. Изобразить на координатной плоскости XOY фигуру M , состоящую из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$y > x^2 - 1. \quad (5)$$

Решение. Парабола

$$y = x^2 - 1,$$

ветви которой направлены вверх (рис. 4), делит плоскость на две части — внутренность параболы и внешность параболы.

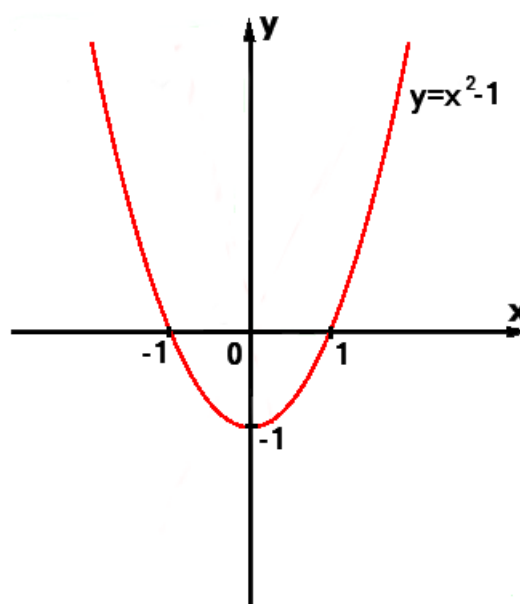


Рис. 4

Почти дословно повторяя доказательство, проведенное при решении задачи 2, заключаем, что координаты каждой точки, лежащей во внутренности параболы, удовлетворяют неравенствам (5), а координаты каждой точки, лежащей во внешности параболы, удовлетворяют неравенству

$$y < x^2 - 1.$$

Следовательно, фигура M , заданная неравенством (5), изображается так, как показано на рис. 5.

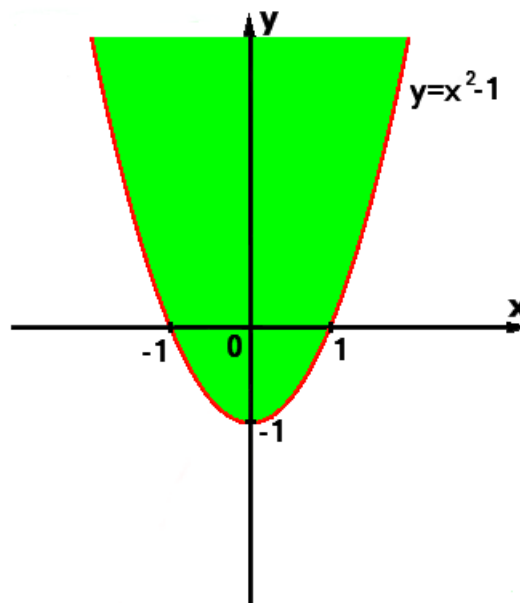


Рис. 5

Задача 4. Изобразить на координатной плоскости XOY фигуру M , состоящую из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$y < |x + 2|. \quad (6)$$

Решение. График функции

$$y = |x + 2|$$

изображен на рис. 6. Почти дословно повторяя доказательство, проведенное при решении задач 2 и 3, заключаем, что фигура M , заданная неравенством (6), изображается так, как показано на рис. 7.

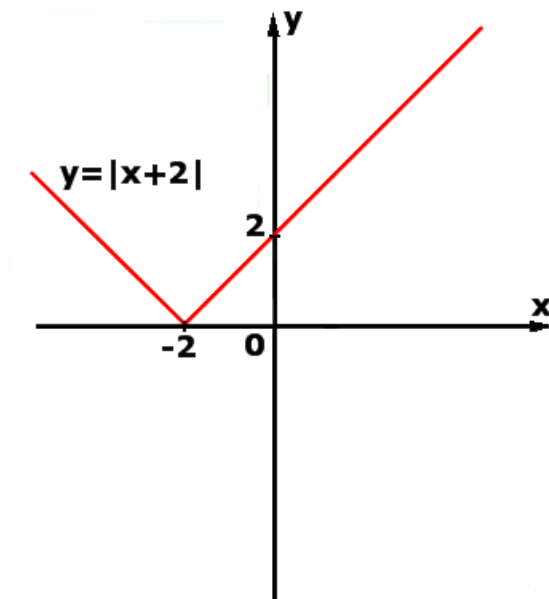


Рис. 6

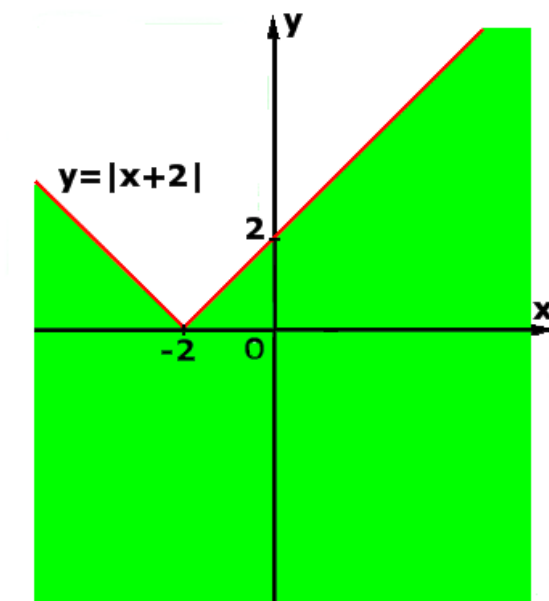


Рис. 7

Задача 5. Изобразить на координатной плоскости XOY фигуру M , состоящую из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$x^2 + y^2 < 4. \quad (7)$$

Решение. Уравнение с двумя переменными

$$x^2 + y^2 = 4$$

задает на координатной плоскости окружность радиуса 2 с центром в начале координат. Эта окружность делит плоскость на две части — внутренность круга и внешность круга. Каждая точка, лежащая вне круга, отделена от начала координат на расстояние, большее, чем 2, а каждая точка, лежащая внутри круга, отделена от начала координат на расстояние, меньшее, чем 2. Следовательно, фигура M , заданная неравенством (7), является внутренностью круга (рис. 8)

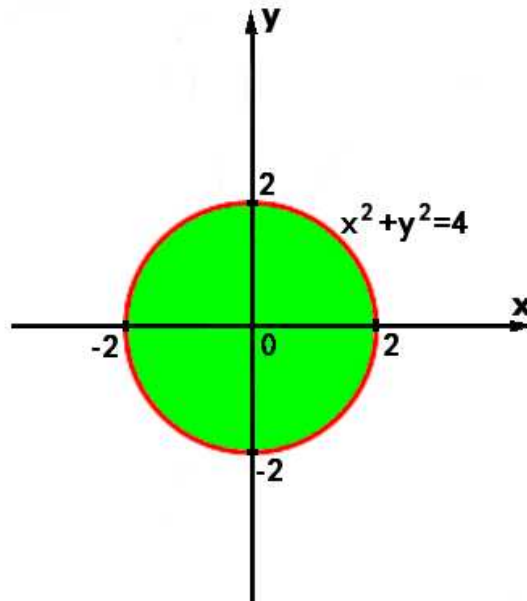


Рис. 8

Задача 6. Изобразить на координатной плоскости XOY фигуру M , состоящую из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$y^2 + xy - 6x^2 > 0. \quad (8)$$

Решение. Разложим многочлен, стоящий в левой части неравенства (8) на множители. С этой целью, решая относительно y уравнение

$$y^2 + xy - 6x^2 = 0,$$

получаем

$$y^2 + xy - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + 24x^2}}{2} = \frac{-x \pm 5x}{2} \Leftrightarrow y_1 = -3x, y_2 = 2x.$$

Таким образом, разложение на множители многочлена из левой части неравенства (8) имеет вид:

$$y^2 + xy - 6x^2 = (y + 3x)(y - 2x).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} y^2 + xy - 6x^2 > 0 &\Leftrightarrow (y + 3x)(y - 2x) > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y + 3x > 0, \\ y - 2x > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y + 3x < 0, \\ y - 2x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > -3x, \\ y > 2x \end{cases} \cup \begin{cases} y < -3x, \\ y < 2x \end{cases}, \end{aligned}$$

и задача сводится к изображению фигуры, заданной неравенствами:

$$\begin{cases} y > -3x, \\ y > 2x \end{cases} \cup \begin{cases} y < -3x, \\ y < 2x \end{cases} \quad (9)$$

Для того, чтобы изобразить на координатной плоскости фигуру, заданную неравенствами (9), нарисуем на координатной плоскости прямые $y = -3x$ и $y = 2x$. Эти прямые проходят через начало координат и делят координатную плоскость на 4 части (рис. 9).

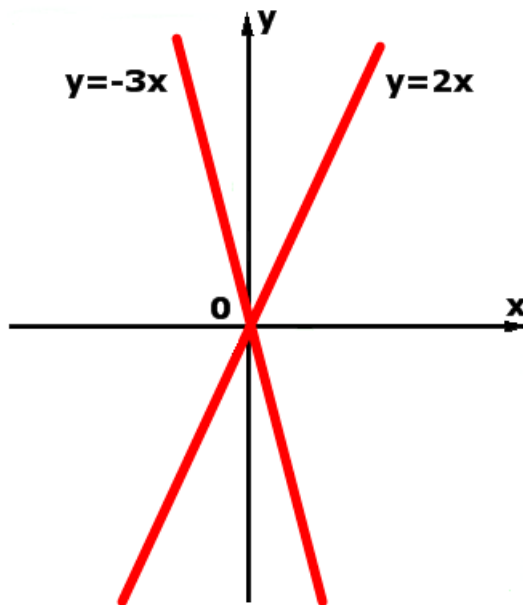


Рис. 9

Точки, координаты которых удовлетворяют системе (9), а, тем самым, и неравенству (8), изображены на рис. 10. При этом точки, координаты которых, удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y > -3x, \\ y > 2x, \end{cases}$$

лежат в верхней части фигуры M , а точки, координаты которых, удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y < -3x, \\ y < 2x, \end{cases}$$

лежат в нижней части фигуры M .

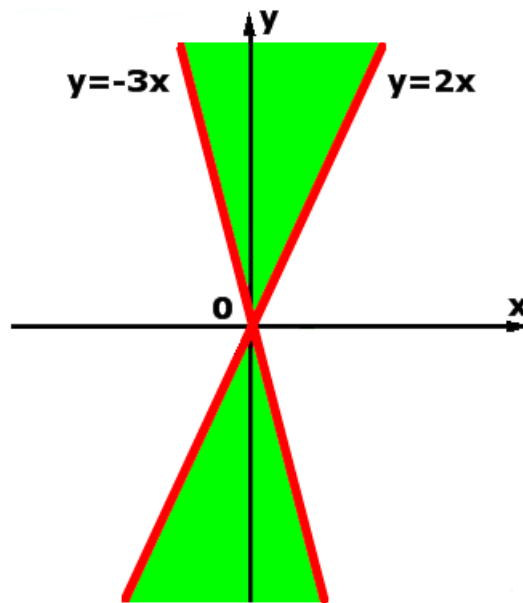


Рис. 10

Задача 7. Изобразить на координатной плоскости XOY фигуру M , состоящую из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$(y - x - 1)(y + 2x - 4) < 0. \quad (10)$$

Решение. Левая часть неравенства (10) уже разложена на множители, поэтому

$$\begin{aligned} (y - x - 1)(y + 2x - 4) < 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} y - x - 1 > 0, \\ y + 2x - 4 < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y - x - 1 < 0, \\ y + 2x - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y > x + 1, \\ y < -2x + 4 \end{cases} \cup \begin{cases} y < x + 1, \\ y > -2x + 4 \end{cases} \end{aligned}$$

и задача сводится к изображению фигуры, заданной неравенствами:

$$\begin{cases} y > x+1, \\ y < -2x+4 \end{cases} \cup \begin{cases} y < x+1, \\ y > -2x+4. \end{cases} \quad (11)$$

Для того, чтобы изобразить на координатной плоскости фигуру, заданную неравенствами (11), нарисуем на координатной плоскости прямые $y = x+1$ и $y = -2x+4$. Эти прямые проходят через точку с координатами $(x=1; y=2)$ и делят координатную плоскость на 4 части (рис. 11).

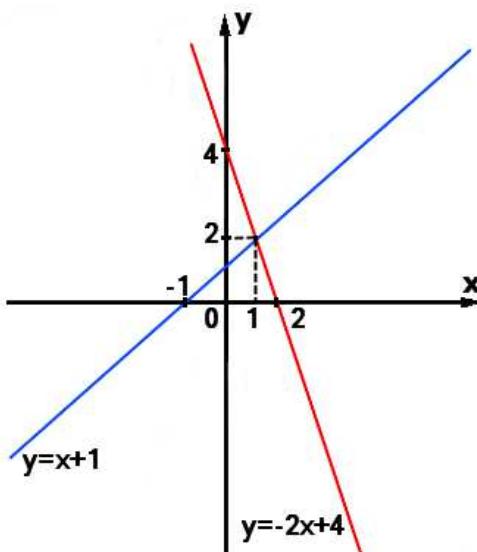


Рис. 11

Точки, координаты которых удовлетворяют системе (11), а, тем самым, и неравенству (10), изображены на рис. 12.

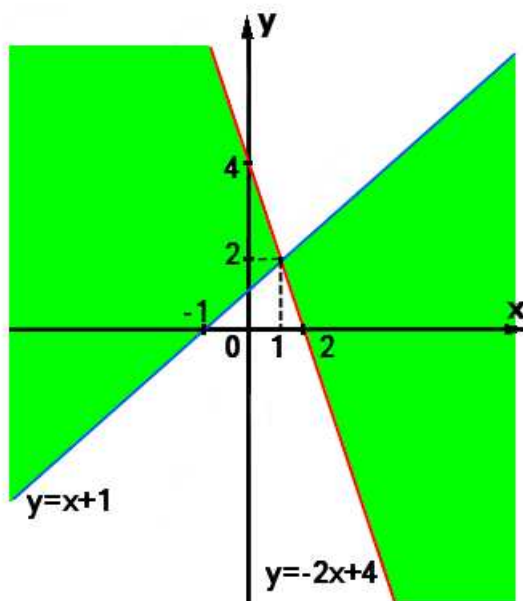


Рис.12

При этом точки, координаты которых, удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y > x + 1, \\ y < -2x + 4, \end{cases}$$

лежат в левой части фигуры M , а точки, координаты которых, удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y < x + 1, \\ y > -2x + 4, \end{cases}$$

лежат в правой части фигуры M .

Задача 8. Изобразить на координатной плоскости XOY фигуру M , состоящую из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\frac{y-x}{x-1} > x. \quad (12)$$

Решение. Преобразуем сначала неравенство (12) к равносильной форме:

$$\begin{aligned} \frac{y-x}{x-1} > x &\Leftrightarrow \frac{y-x}{x-1} - x > 0 \Leftrightarrow \frac{y-x-x^2+x}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{y-x^2}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y-x^2 > 0, \\ x-1 > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y-x^2 < 0, \\ x-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > x^2, \\ x > 1 \end{cases} \cup \begin{cases} y < x^2, \\ x < 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Теперь нарисуем на координатной плоскости две линии: параболу $y = x^2$ и прямую $x = 1$ (рис. 13).

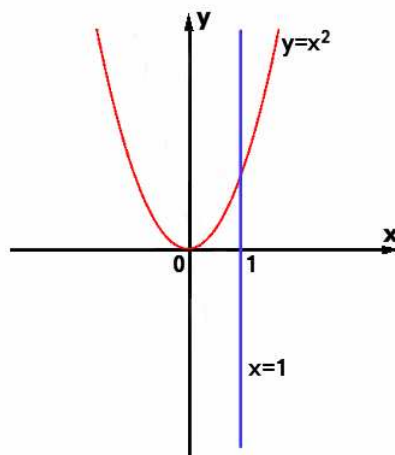


Рис. 13

Фигура M , заданная неравенством (12), изображена на рис.14.

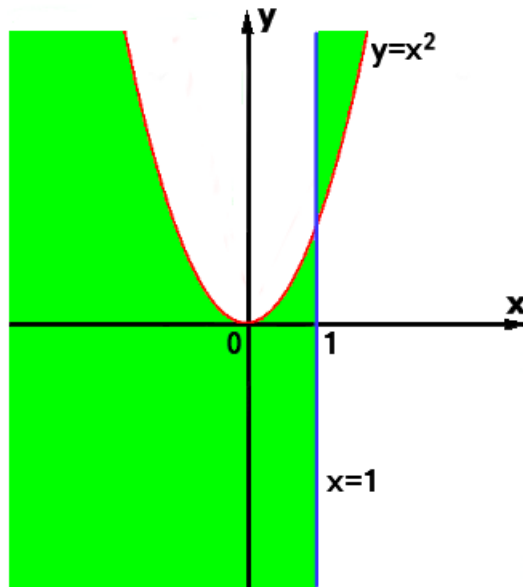


Рис. 14

Задача 9. Изобразить на координатной плоскости XOY фигуру M , состоящую из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\frac{1 - y^2}{x} > x. \quad (13)$$

Решение. Преобразуем сначала неравенство (13) к равносильной форме:

$$\begin{aligned} \frac{1 - y^2}{x} > x &\Leftrightarrow \frac{1 - y^2}{x} - x > 0 \Leftrightarrow \frac{1 - y^2 - x^2}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2 - 1}{x} < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 > 0, \\ x < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 < 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 > 1, \\ x < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2 + y^2 < 1, \\ x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Теперь нарисуем на координатной плоскости две линии: окружность радиуса 1 с центром в начале координат, задаваемую уравнением

$$x^2 + y^2 = 1$$

и прямую (ось ординат), задаваемую уравнением $x = 0$ (рис. 15).

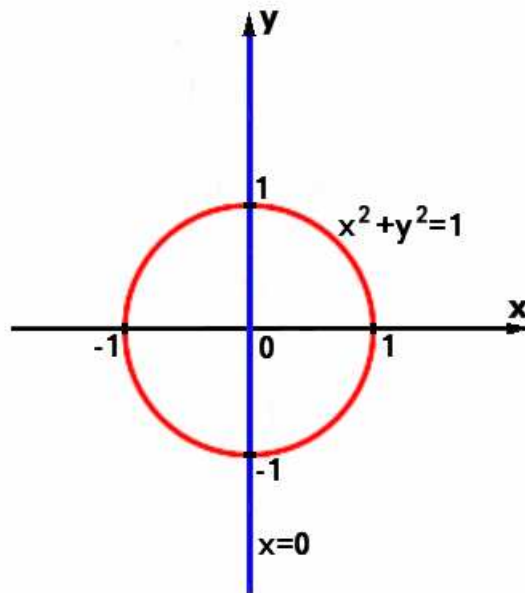


Рис. 15

Фигура M , заданная неравенством (13), изображена на рис.16.

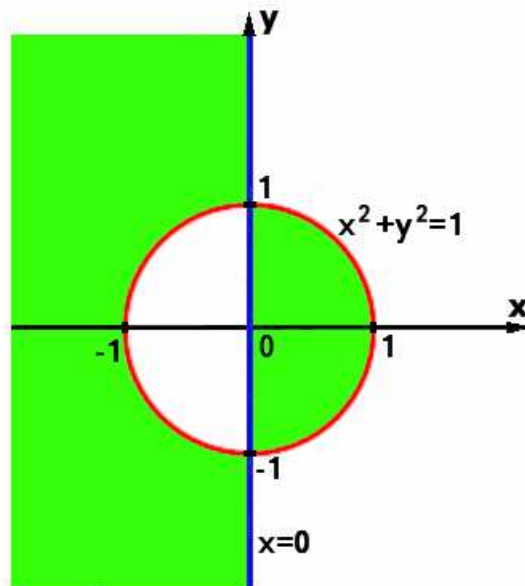


Рис. 16

Задача 10. Изобразить на координатной плоскости XOY фигуру M , состоящую из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$xy > 2. \quad (14)$$

Решение. Напомним, что при делении неравенства на положительное число, знак неравенства сохраняется, а при делении неравенства на отрицательное число, знак неравенства меняется на противоположный. Заметим также, что ко-

ординаты точек, лежащих на оси ординат, задаваемой уравнением $x=0$, не удовлетворяют неравенству (13). Поэтому неравенство (14) можно преобразовать к следующей равносильной форме:

$$xy > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > \frac{2}{x} \end{cases} \cup \begin{cases} x < 0 \\ y < \frac{2}{x} \end{cases}$$

Теперь изобразим на координатной плоскости гиперболу $y = \frac{2}{x}$ и прямую (ось ординат) $x=0$ (рис. 17).

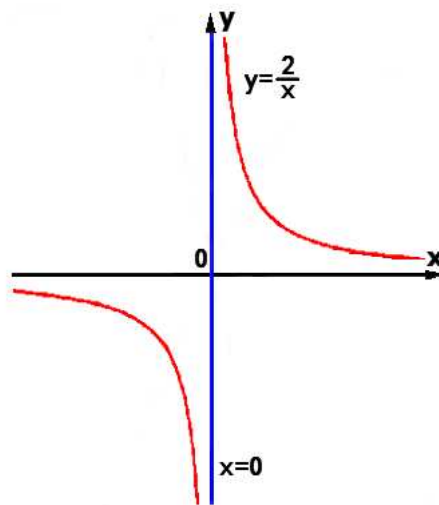


Рис. 17

Фигура M , заданная неравенством (14), изображена на рис.18.

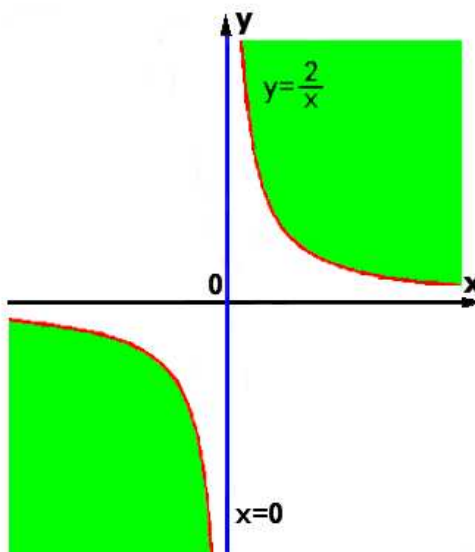


Рис. 18

Задача 11. Фигура M задана на координатной плоскости неравенствами:

$$2|x| \leq y \leq |x| + 1. \quad (15)$$

Изобразить фигуру M и найти её площадь.

Решение. Фигура M имеет вид, изображенный на рис. 19, и состоит из двух равных треугольников OAB и OBC , вершины которых имеют следующие координаты: $A = (1; 2)$, $B = (0; 1)$, $C = (-1; 2)$.

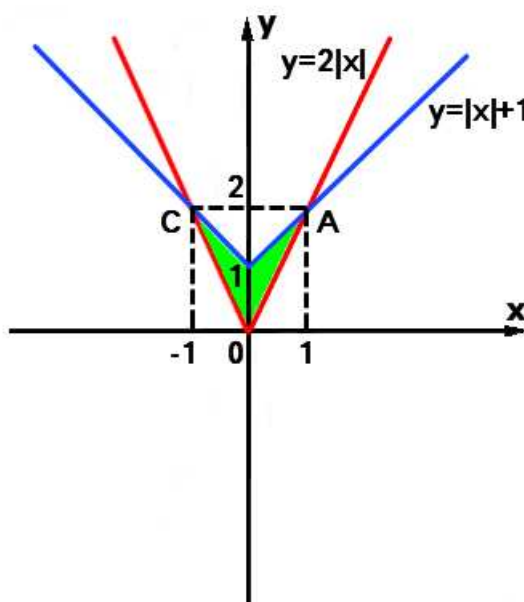


Рис. 19

В треугольнике OAB основание OB равно 1, и высота, опущенная из вершины A на основание, равна 1. Следовательно, площадь треугольника OAB равна $\frac{1}{2}$, а площадь фигуры M равна 1.

Задача 12. Фигура M задана на координатной плоскости неравенствами:

$$4|x| - 2 \leq y \leq 3 - |x|.$$

Изобразить фигуру M и найти её площадь.

Решение. Фигура M имеет вид, изображенный на рис. 20, и состоит из двух равных треугольников OAB и OBC , вершины которых имеют следующие координаты: $A = (1; 2)$, $B = (0; 3)$, $C = (-1; 2)$.

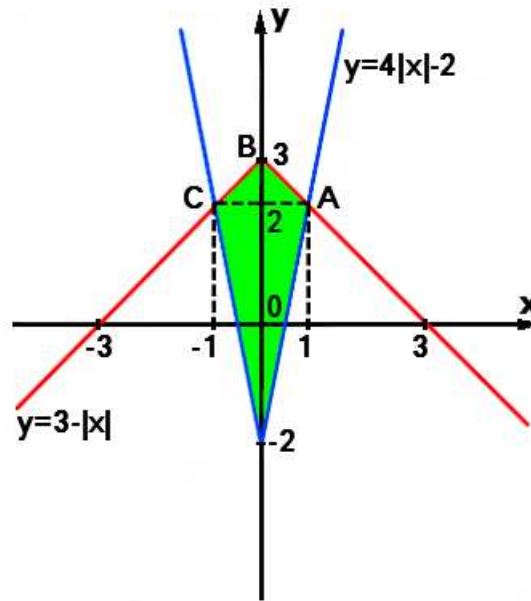


Рис. 20

В треугольнике OAB основание OB равно 3, и высота, опущенная из вершины A на основание, равна 1. Следовательно, площадь треугольника OAB равна $\frac{3}{2}$, а площадь фигуры M равна 3.

Задача 13. Фигура M задана на координатной плоскости неравенствами:

$$|x - 1| \leq y \leq 2 - |x|.$$

Изобразить фигуру M и найти её площадь.

Решение. Фигура M имеет вид, изображенный на рис. 21, и является прямоугольником $ABCD$, вершины которого имеют следующие координаты:

$$A = (1; 0), \quad B = \left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right), \quad C = (0; 3), \quad D = \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

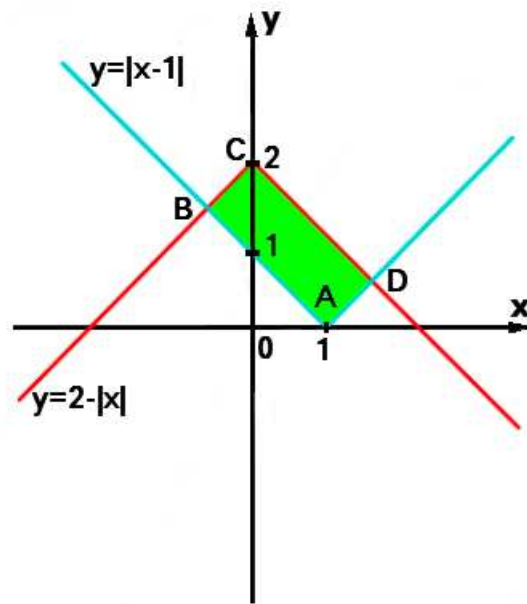


Рис. 21

Поэтому,

$$|AB| = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}},$$

$$|AD| = \sqrt{\left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$S_{ABCD} = |AB| \cdot |AD| = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}.$$

Следовательно, площадь фигуры M равна $\frac{3}{2}$.

Задача 14. Фигура M задана на координатной плоскости системой неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4, \\ x^2 \leq 4, \\ (y - x)(y + 2) \leq 0. \end{cases} \quad (16)$$

Изобразить фигуру M и найти её площадь.

Решение. Первое неравенство системы (16) задает внешность круга радиуса 2 с центром в начале координат. Второе неравенство задает вертикальную

полосу: $\{-2 \leq x \leq 2\}$. Третье неравенство задает пару вертикальных углов, образованных прямыми $y = x$ и $y = -2$.

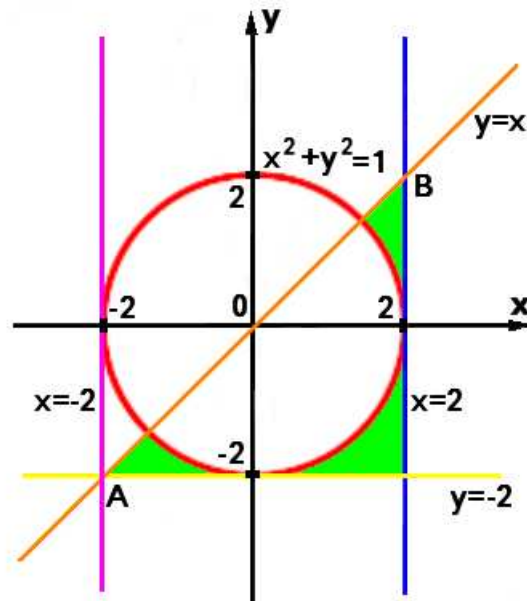


Рис. 22

Следовательно, фигура M имеет вид, изображенный на рис. 22, и является общей частью внутренности прямоугольного треугольника ABC и внешности круга радиуса 2 с центром в начале координат. Вершины треугольника ABC имеют координаты

$$A = (-2; -2), B = (2; 2), C = (2; -2).$$

Площадь треугольника

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8.$$

Для того, чтобы найти площадь фигуры M , остается из площади треугольника ABC вычесть площадь полукруга с радиусом 2:

$$S = 8 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 = 8 - 2\pi.$$

Итак, площадь фигуры M равна $8 - 2\pi$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Изобразить на координатной плоскости XOY фигуру M , состоящую из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\frac{y-3x}{x-3} < x.$$

2. Изобразить на координатной плоскости XOY фигуру M , состоящую из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\frac{4-x^2}{y} < y.$$

3. Изобразить на координатной плоскости XOY фигуру M , состоящую из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\frac{y-x}{x-2} > 1.$$

4. Изобразить на координатной плоскости XOY фигуру M , состоящую из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$xy < 1.$$

5. Фигура M задана на координатной плоскости неравенствами:

$$3|x| \leq y \leq 2|x| + 2.$$

Изобразить фигуру M и найти её площадь.

6. Фигура M задана на координатной плоскости неравенствами:

$$|x| - 5 \leq y \leq 1 - 2|x|.$$

Изобразить фигуру M и найти её площадь.

7. Фигура M задана на координатной плоскости неравенствами:

$$|x| - 6 \leq y \leq -|x + 2|.$$

Изобразить фигуру M и найти её площадь.

8. Фигура M задана на координатной плоскости неравенствами:

$$-|x| \leq y \leq 5|x| + 12.$$

Изобразить фигуру M и найти её площадь.

9. Фигура M задана на координатной плоскости неравенствами:

$$-2|x| \leq y \leq -4|x| + 8.$$

Изобразить фигуру M и найти её площадь.