ФДП

МАТЕМАТИКА. ЕГЭ 2013

Многогранники: типы задач и методы их решения

(типовые задания С2)

Прокофьев А.А.

Корянов А.Г.

Прокофьев А.А. – доктор педагогических наук, заведующий кафедрой высшей математики №1 НИУ МИЭТ, учитель математики ГОУ лицей №1557 г. Зеленограда; e-mail: aaprokof@yandex.ru

Корянов А.Г. – методист по математике городского информационно-методического Центра (МБОУ БГИМЦ) г. Брянска, учитель математики МОУ лицей №27 г. Брянска; e-mail: akoryanov@mail.ru

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Задачи части «С» Единого государственного экзамена по стереометрии в последнее время большей частью посвящены вычислению расстояний и углов в пространстве.

Около 30 % выпускников приступало к решению задачи С2 на ЕГЭ 2010-2012 гг. Так в 2010 году процент приступивших к выполнению составил 30%, в 2011 году – 33,1%, а в 2012 году – 29%.

Задание С2 оценивается в 2 балла. В 2010 году от 1 до 2 баллов за задачу С2 смогли получить 11,6% участников экзамена, в 2011 – 13,9%, а в 2012 – 5,53%.

Полное решение каждой задачи состоит из теоретической части, заключающейся в обосновании взаимного расположения элементов заданной стереометрической конфигурации, и вычислительной части. При проверке задачи С2 выставление баллов производится в соответствии со следующими критериями.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

В первой главе «Расстояния и углы» представлены разные методы решения задач типа С2. Геометрические методы решения задачи опираются на определения расстояния или угла, и требуют от учащихся развитого пространственного воображения. Кроме этого подхода в пособии рассмотрены координатный и векторный методы, которые могут быть эффективно использованы при решении задач разного вида. Применение опорных задач также может привести к рациональному решению задачи.

Следует отметить, что при решении задачи координатным или векторным методами выпускник должен получить правильный ответ, и только тогда его решение будет оценено в 2 балла. В противном случае его решение не соответствует приведенным критериям и будет оценено в 0 баллов.

В кодификатор элементов содержания к уровню подготовки выпускников входят разделы, связанные с темой «Многогранники», которые отражены в данном пособии: сечения куба, призмы, пирамиды; боковая поверхность призмы, пирамиды; объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы. Во второй главе «Площади и объемы» представлены методы решения стереометрических задач на многогранниках с использованием формул их площади поверхности и объема.

В третьей главе «Дополнения» собран основной материал, который используется при решении многих стереометрических задач, владение которым подразумевается. В частности, представлены основные способы построения сечений многогранников плоскостью, основные способы введения систем координат для использования координатного метода, дано представление о векторном методе решения задач. В решениях многих задач, приведенных в данном пособии, имеются ссылки на опорные задачи, полный набор которых помещен в пункте 3.4 на стр. 93-99.

Авторы надеются, что данное пособие будет полезно учащимся при их подготовке к итоговому экзамену.

Желаем успеха!

Глава 1. Расстояния и углы

Тема «Расстояния и углы» является основой для других разделов стереометрии. В данном разделе представлено взаимное расположение точек, прямых и плоскостей на многогранниках, рассмотрены основные виды задач и методы их решения.

1.1. Расстояние между двумя точками

Расстояние между точками A и B можно вычислить:

1) как длину отрезка AB, если отрезок AB удается включить в некоторый треугольник в качестве одной из его сторон;

2) по формуле

$$\rho(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}, \quad (1)$$

где $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$;

3) по формуле

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}, \quad (2)$$

где $\{a, b, c\}$ – координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ в декартовой системе координат.

Поэтапно-вычислительный метод

Пример 1. *В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на диагоналях граней AD_1 и D_1B_1 взяты точки E и F так, что $D_1E=\frac{1}{3}AD_1$, $D_1F=\frac{2}{3}D_1B_1$. Найти длину отрезка EF.*

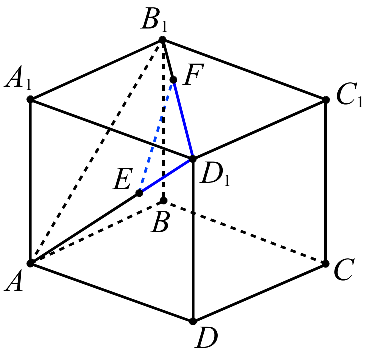


Рис. 1

Решение. Длину отрезка EF найдем по теореме косинусов из треугольника D_1EF (см. рис. 1), в котором $D_1F=\frac{2}{3}\sqrt{2}$, $D_1E=\frac{1}{3}\sqrt{2}$, $\angle FD_1E=\frac{\pi}{3}$ (треугольник AB_1D_1 является равносторонним). Имеем

$$EF^2=D_1E^2+D_1F^2-2D_1E\cdot D_1F\cdot\cos\frac{\pi}{3}=$$

$$=\frac{2}{9}+\frac{8}{9}-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{3},$$

откуда $EF=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Координатный метод

Приступая к решению задач этим методом полезно разобрать задачу №1 из списка опорных задач (см. главу 3 п. 3.4).

Пусть точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ – концы отрезка AB. Тогда внутренняя точка C отрезка AB такая, что $AC:CB=k$, имеет координаты $C\left(\frac{x_1+k\,x_2}{k+1}; \frac{y_1+k\,y_2}{k+1}; \frac{z_1+k\,z_2}{k+1}\right)$.

Пример 2. *В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E и K – середины ребер AA_1 и CD соответственно, а точка M расположена на диагонали B_1D_1 так, что $B_1M=2MD_1$. Найти расстояние между точками Q и L, где Q – середина отрезка EM, а L – точка отрезка MK такая, что $ML=2LK$.*

Решение. Введем прямоугольную систему координат, как указано на рисунке 2.

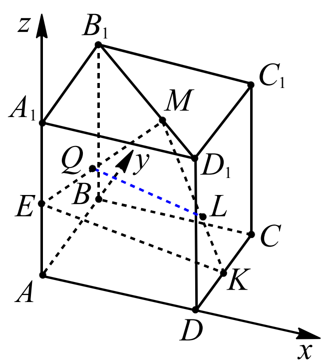


Рис. 2

Тогда $E\left(0; 0; \frac{1}{2}\right)$, $K\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$, $B_1(0; 1; 1)$, $D_1(1; 0; 1)$. Для нахождения координат точки M используем формулу координат точки (опорная задача 1), делящей отрезок B_1D_1 в отношении 2:1. Имеем

$$M\left(\frac{0+2\cdot 1}{1+2},\frac{1+2\cdot 0}{1+2},\frac{1+2\cdot 1}{1+2}\right)=\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};1\right).$$

Аналогично получим координаты точки L, делящей отрезок MK в отношении 2:1. Имеем

$$L\left(\frac{\frac{2}{3}+2\cdot 1}{1+2};\frac{\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{2}}{1+2};\frac{1+2\cdot 0}{1+2}\right)=\left(\frac{8}{9};\frac{4}{9};\frac{1}{3}\right).$$

Координаты точки Q равны полусуммам соответствующих координат точек E и M, поэтому $Q\left(\frac{1}{3};\frac{1}{6};\frac{3}{4}\right)$. Применим формулу (1) для расстояния между точками с заданными координатами

$$LQ=\sqrt{\left(\frac{1}{3}-\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{1}{6}-\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{725}{36^2}}=\frac{5\sqrt{29}}{36}.$$

Ответ: $\frac{5\sqrt{29}}{36}$.

Векторный метод

Пример 3. *В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на диагоналях граней AD_1 и D_1B_1 взяты точки E и F так, что $D_1E=\frac{1}{3}AD_1$, $D_1F=\frac{2}{3}D_1B_1$. Найти длину отрезка EF.*

Решение. Пусть $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$ (см. рис. 1), тогда $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=0$. Выразим вектор $\overrightarrow{FE}$ через базисные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{B_1F}=-\frac{2}{3}(\vec{a}+\vec{c})+$$

$$+(\vec{b}+\vec{c})+\frac{1}{3}(\vec{a}-\vec{b})=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}.$$

Тогда по формуле (2)

$$\left|\overrightarrow{FE}\right|=\sqrt{\overrightarrow{FE}^2}=\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{9}\vec{a}^2+\frac{4}{9}\vec{b}^2+\frac{1}{9}\vec{c}^2-\frac{4}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{1}{9}\vec{a}\cdot\vec{c}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Замечание. Вектор $\overrightarrow{FE}$ в данном базисе имеет координаты $\left\{-\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right\}$, поэтому его длину можно найти по формуле $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, то есть

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Тренировочные упражнения

1. Ребра правильной четырехугольной призмы равны 1, 4 и 4. Найдите расстояние от вершины до центра основания призмы, не содержащего эту вершину.

2. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E, K и L – середины ребер AA_1, CD и B_1C_1 соответственно, а точки M и N расположены соответственно на отрезках EK и LK так, что $EM:MK=2:3$, а $LN:NK=1:4$. Найдите длину отрезка MN.

3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ на ребрах AB и B_1C_1 выбраны точки E и K соответственно так, что $AE:EB=1:2$, а $B_1K:KC_1=5:1$. Найдите длину отрезка EK, сторона основания призмы равна 6, а боковое ребро равно 2.

4. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 2, найдите расстояние от точки A до точек: **а)** C_1; **б)** D_1; **в)** M, где M – центр грани EE_1D_1D.

5. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между точками A и E_1.

6. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, сторона основания и боковое ребро которой равны $4\sqrt{2}$ и 5 соответственно. Найдите расстояние между точками E и K, если известно, что E лежит на боковом ребре SB и $SE=2BE$, а K – на стороне основания AD и $AK=3KD$.

1.2. Расстояние от точки до прямой

- *Расстояние от точки до прямой*, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, проведенного из этой точки на прямую.
- *Расстояние между двумя параллельными прямыми* равно длине отрезка их общего перпендикуляра.
- *Расстояние между двумя параллельными прямыми* равно расстоянию от любой точки одной из этих прямых до другой прямой.

Поэтапно-вычислительный метод

Расстояние от точки M до прямой AB, обозначаемое $\rho(M;AB)$, вычисляют, как длину высоты, опущенной из точки M на основание AB (или ее продолжение) треугольника ABM.

Пример 4. *При условиях примера* 1 *найти расстояние от точки D_1 до прямой EF.*

Решение. Пусть h – длина высоты треугольника D_1EF, опущенной из точки D_1. Найдем h, используя метод площадей. Площадь треугольника D_1EF равна

$$\frac{1}{2}D_1F\cdot D_1E\cdot\sin\angle FD_1E=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{9}.$$

С другой стороны площадь треугольника D_1EF равна $\frac{1}{2}FE\cdot h=\frac{\sqrt{6}}{6}h$. Из уравнения $\frac{\sqrt{3}}{9}=\frac{\sqrt{6}}{6}h$ находим искомое расстояние $h=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Замечание. Можно заметить, что выполняется равенство $FE^2+D_1E^2=D_1F^2$, т.е. треугольник D_1EF прямоугольный и длина отрезка D_1E является искомым расстоянием.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Пример 5. *В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, ребра которой равны* 1, *найти расстояние от точки A до прямой BC_1.*

Решение. В квадрате BCC_1B_1 диагональ BC_1 равна $\sqrt{2}$ (см. рис. 3). В прямоугольном треугольнике ACD, где $\angle ACD=90°$, $AD=2$, находим $AC=$ $=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$. Из прямоугольного треугольника ACC_1 имеем $AC_1=$ $=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$. В треугольнике ABC_1, используя теорему косинусов, получаем

$$\cos\varphi=\frac{2^2+(\sqrt{2})^2-1^2}{2\cdot 2\cdot\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{8},$$

где $\angle AC_1B=\varphi$. Далее находим $\sin\varphi=\frac{\sqrt{14}}{8}$ и из треугольника AC_1H высоту

$$AH=AC_1\sin\varphi=2\cdot\frac{\sqrt{14}}{8}=\frac{\sqrt{14}}{4}.$$

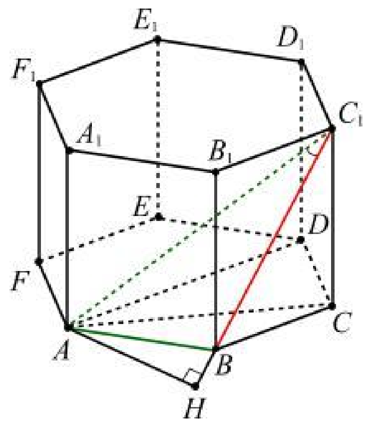


Рис. 3

Ответ: $\frac{\sqrt{14}}{4}$.

Пример 6. (МИОО, 2010). *В тетраэдре $ABCD$, все ребра которого равны* 1, *найти расстояние от точки A до прямой, проходящей через точку B и середину E ребра CD.*

Решение. Так как все ребра $ABCD$ – равные правильные треугольники, то медианы BE и AE треугольников BDC и

ADC (см. рис. 4) равны и $BE = AE = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Рассмотрим равнобедренный треугольник BEA и его высоты EM и AH. Выражая площадь треугольника BEA двумя способами, получаем

$$S_{BEA} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot EM \cdot AB,$$

получаем равенство $AH \cdot BE = EM \cdot AB$.

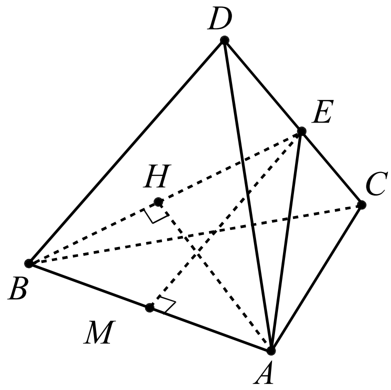


Рис. 4

Так как

$$EM = \sqrt{BE^2 - BM^2} = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

то получаем

$$AH = \frac{EM \cdot AB}{BE} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

В некоторых задачах удобно использовать плоскость, проходящую через данную точку перпендикулярно данной прямой.

Пример 7. *В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти расстояние от точки D до прямой A_1C.*

Решение. Пусть $A_1C \cap BDC_1 = F$ (рис. 5). Так как $A_1C \perp BDC_1$ (опорная задача 20), то $FC_1 = FB = FD$ как проекции на плоскость BDC_1 равных наклонных CC_1, CB и CD соответственно. Следовательно, точка F является центром правильного треугольника BDC_1. Поэтому искомое расстояние равно радиусу окружности, описанной около треугольника BDC_1. Сторона этого треугольника равна $\sqrt{2}$, значит,

$$\rho(D,\, A_1C) = DF = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

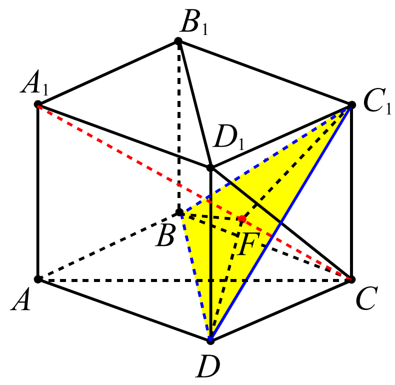


Рис. 5

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Метод параллельных прямых

Данный метод основан на использовании следующего утверждения: расстояние от точки M до прямой a равно расстоянию до прямой a от произвольной точки P, лежащей на прямой b, проходящей через точку M и параллельной прямой a.

Этот метод удобен в применении, когда искомый перпендикуляр выходит за пределы многогранника. В этом случае его можно заменить перпендикуляром, расположенным внутри многогранника, либо перпендикуляром, длина отрезка которого известна.

Решим указанным методом пример 5.

Решение. В квадрате BCC_1B_1 диагональ BC_1 равна $\sqrt{2}$ (см. рис. 6). Пусть O и O_1 – центры нижнего и верхнего оснований соответственно. Так как $AB \parallel O_1C_1$ и $AB = O_1C_1$, то ABC_1O_1 – параллелограмм. Отсюда $AO_1 \parallel BC_1$, поэтому расстояние $\rho(A; BC_1) = \rho(O_1; BC_1)$. Из прямоугольного треугольника BOO_1 находим $BO_1 = \sqrt{2}$.

В треугольнике BO_1C_1, используя теорему косинусов, получаем

$$\cos\varphi = \frac{1^2 + (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2}{2\cdot 1\cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

где $\varphi = \angle O_1C_1B$. Находим $\sin\varphi = \frac{\sqrt{14}}{4}$ и из треугольника O_1C_1H высоту

$$O_1H = O_1C_1 \sin\varphi = 1\cdot\frac{\sqrt{14}}{4} = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

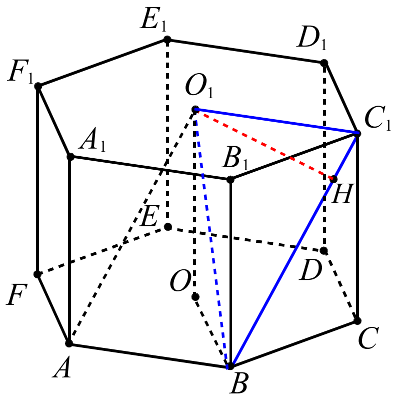


Рис. 6

Ответ: $\frac{\sqrt{14}}{4}$.

Координатный и векторный методы

Как уже было отмечено выше расстояние между точками A и B можно вычислить по формулам (1) и (2) (см. стр. 3).

Рассмотрим векторный подход к решению задач данного вида. Пусть дана прямая l с направляющим вектором $\vec{q}$, точка A лежит на прямой l, точка M вне прямой l, $\overrightarrow{MA} = \vec{m}$ (см. рис. 7).

Чтобы найти расстояние от точки M до прямой l, т.е. длину перпендикуляра MP ($P \in l$), представим вектор $\overrightarrow{MP}$ в виде $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP} = \vec{m} + x\cdot\vec{q}$.

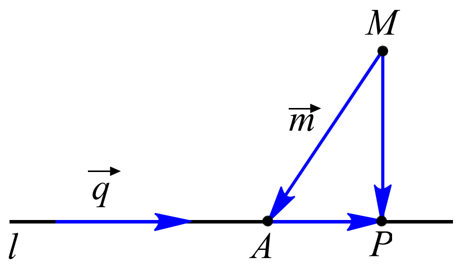


Рис. 7

Неизвестный коэффициент x находится из условия перпендикулярности вектора $\overrightarrow{MP}$ вектору $\vec{q}$:

$$\overrightarrow{MP}\cdot\vec{q} = 0 \Leftrightarrow (\vec{m} + x\cdot\vec{q})\cdot\vec{q} = 0.$$

Искомое расстояние выражается следующим образом:

$$\left|\overrightarrow{MP}\right| = \sqrt{(\vec{m} + x\cdot\vec{q})^2}.$$

Координатный метод

Пример 8. *В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти расстояние от точки D_1 до прямой PQ, где P и Q – середины соответственно ребер A_1B_1 и BC.*

Решение. Рассмотрим прямоугольную систему координат с началом в точке A (см. рис. 8). Найдем координаты точек

$$P\left(0; \frac{1}{2}; 1\right),\ Q\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right),\ D_1(1; 0; 1).$$

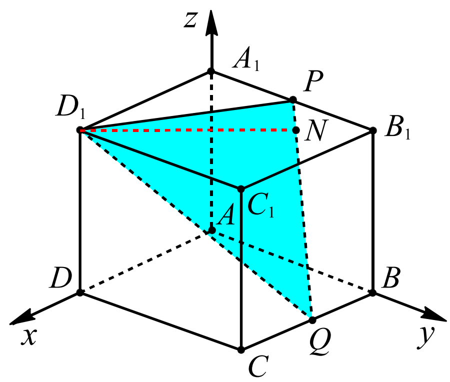


Рис. 8

Тогда

$$PQ = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{3}{2}},$$

$$D_1Q = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + 1} = \frac{3}{2},\ D_1P = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + 0} = \sqrt{\frac{5}{4}}.$$

Из треугольника D_1PQ, используя формулу

$$\cos\angle D_1PQ = \frac{D_1P^2 + QP^2 - D_1Q^2}{2\cdot D_1P\cdot QP},$$

находим

$$\cos\angle D_1PQ=\frac{\frac{5}{4}+\frac{3}{2}-\frac{9}{4}}{2\cdot\sqrt{\frac{5}{4}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}}=\sqrt{\frac{1}{30}}.$$

Далее получаем

$$\sin\angle D_1PQ=\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{1}{30}}\right)^2}=\sqrt{\frac{29}{30}}.$$

Пусть $D_1N\perp PQ$, где $N\in PQ$. Тогда

$$D_1N=D_1P\cdot\sin\angle D_1PQ,$$

$$D_1N=\sqrt{\frac{5}{4}}\cdot\sqrt{\frac{29}{30}}=\sqrt{\frac{174}{144}}=\frac{\sqrt{174}}{12}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{174}}{12}$.

Векторный метод

Пример 9. *В треугольной пирамиде $ABCD$ при вершине D все плоские углы равны $\frac{\pi}{3}$, $AD=2$, $BD=4$, $CD=3$. Точки P, M и K являются серединами ребер AD, BD и BC соответственно. Найти расстояние от точки M до прямой PK.*

Решение. Пусть $\overrightarrow{DA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{c}$ (см. рис. 9). Тогда имеем следующую таблицу умножения векторов базиса:

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	4	4	3
$\vec{b}$	4	16	6
$\vec{c}$	3	6	9

Если $MH\perp PK$, где $H\in PK$ (см. рис. 9), то в силу коллинеарности векторов $\overrightarrow{PH}$ и $\overrightarrow{PK}$ получаем $\overrightarrow{PH}=x\cdot\overrightarrow{PK}$. Выразим вектор $\overrightarrow{PK}$ через базисные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, используя правило многоугольника

$$\overrightarrow{PK}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MK}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c},$$

значит, $\overrightarrow{PH}=\frac{1}{2}x(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$. Теперь выразим вектор $\overrightarrow{MH}$:

$$\overrightarrow{MH}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PH}=\overrightarrow{DP}-\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{PH}=$$
$$=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}x(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).$$

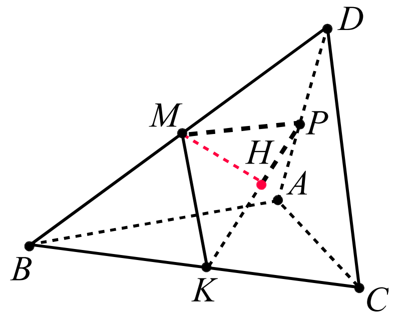


Рис. 9

Из условия перпендикулярности векторов $\overrightarrow{MH}$ и $\overrightarrow{PK}$ имеем $\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{PK}=0$ или

$$((1-x)\vec{a}+(x-1)\vec{b}+x\vec{c})(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0.$$

Используя таблицу умножения базисных векторов, получаем уравнение

$$(1-x)(-4+4+3+4-16-6)+$$
$$+x(-3+6+9)=0,$$

откуда $x=\frac{5}{9}$.

Тогда $\overrightarrow{MH}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9}(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=$

$$=\frac{2}{9}\vec{a}-\frac{2}{9}\vec{b}+\frac{5}{18}\vec{c}=\frac{1}{18}(4\vec{a}-4\vec{b}+5\vec{c}).$$

Отсюда

$$\left|\overrightarrow{MP}\right|=\frac{1}{18}\sqrt{(4\vec{a}-4\vec{b}+5\vec{c})^2}=$$
$$=\frac{\sqrt{16\cdot4+16\cdot16+25\cdot9-32\cdot4+40\cdot3-40\cdot6}}{18}=$$
$$=\sqrt{\frac{297}{324}}=\sqrt{\frac{11}{12}}.$$

Ответ: $\sqrt{\frac{11}{12}}$.

Пример 10. *В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти расстояние от точки D_1 до прямой PQ, где P и Q – середины соответственно ребер A_1B_1 и BC.*

Решение. Пусть $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$ (см. рис. 8), тогда $|\vec{a}|=|\vec{b}|=$ $=|\vec{c}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=0$.

Выразим вектор $\overrightarrow{PQ}$ через базисные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB_1} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BQ} =$$

$$= \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c},$$

$$\overrightarrow{PD_1} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}.$$

Пусть $D_1N \perp PQ$, где $N \in PQ$. Выразим вектор $\overrightarrow{D_1N}$, учитывая коллинеарность векторов $\overrightarrow{PN}$ и $\overrightarrow{PQ}$:

$$\overrightarrow{D_1N} = \overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PD_1} = x \cdot \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PD_1}.$$

Так как $\overrightarrow{D_1N} \perp \overrightarrow{PQ}$, то $\overrightarrow{D_1N} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$. Отсюда получаем

$$(x \cdot \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PD_1}) \cdot \overrightarrow{PQ} = 0,$$

$$x \cdot \overrightarrow{PQ}^2 = \overrightarrow{PD_1} \cdot \overrightarrow{PQ},$$

$$x \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}\right)^2 = \left(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right)\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}\right),$$

$$x \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}, \quad x = \frac{1}{6}.$$

$$\overrightarrow{D_1N} = \frac{1}{6} \cdot \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PD_1} =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}\right) + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a} =$$

$$= -\frac{11}{12}\vec{a} + \frac{7}{12}\vec{b} - \frac{1}{6}\vec{c}.$$

Длина вектора

$$\left|\overrightarrow{D_1N}\right| = \sqrt{\overrightarrow{D_1N}^2} = \sqrt{\left(-\frac{11}{12}\vec{a} + \frac{7}{12}\vec{b} - \frac{1}{6}\vec{c}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{121}{144} + \frac{49}{144} + \frac{1}{36}} = \frac{\sqrt{174}}{12}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{174}}{12}$.

Замечание. Решение данного примера векторным методом не является рациональным, но приведено с целью показа широких возможностей векторного метода при решении задач разных видов.

Тренировочные упражнения

7. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой: **а)** B_1D_1; **б)** A_1C; **в)** BD_1.

8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой BC_1.

9. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ высота равна 1, сторона основания равна 2. Найдите расстояние от точки A_1 до прямой BC_1.

10. (МИОО). В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ высота равна 2, сторона основания равна 1. Найдите расстояние от точки B_1 до прямой AC_1.

11. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой: **а)** DE; **б)** D_1E_1; **в)** B_1C_1; **г)** BE_1; **д)** BC_1; **е)** CE_1; **ж)** CF_1; **з)** CB_1.

12. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, стороны основания которой равны 5, а боковые ребра равны 11, найдите расстояние от точки C до прямой A_1F_1.

13. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания равна 3, а боковое ребро равно 2. Найдите расстояние от точки E до прямой B_1C_1.

14. (ЕГЭ, 2011). В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, стороны оснований которой равны 4, а боковые ребра равны 3, найдите расстояние от точки C до прямой D_1E_1.

15. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой CB_1.

16. Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – ромб $ABCD$, в котором $AB = 10$, $AC = 6\sqrt{7}$. Боковое ребро AA_1

равно $3\sqrt{21}$. Найдите расстояние от вершины B до прямой AC_1.

17. В тетраэдре $ABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой, проходящей чрез точку B и середину ребра CD.

18. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ сторона основания равна 2, а боковое ребро равно 4. Точка M – середина SD. Найдите расстояние от точки A до прямой MB.

19. (МИОО). В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна 1, а боковое ребро равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите расстояние от точки C до прямой SA.

20. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны оснований которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки C до прямой SF.

21. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны оснований которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки C до прямой SA.

22. В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найти расстояние от точки F до прямой BT, где T – середина ребра MC.

3. Расстояние от точки до плоскости

- *Расстояние от точки до плоскости*, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.
- *Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью* равно длине их общего перпендикуляра.
- *Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью* равно расстоянию от любой точки этой прямой до плоскости.
- *Расстояние между двумя параллельными плоскостями* равно длине их общего перпендикуляра.
- *Расстояние между двумя параллельными плоскостями* равно расстоянию между точкой одной из этих плоскостей и другой плоскостью.

Поэтапно-вычислительный метод

При решении задачи этим методом строится перпендикуляр из заданной точки на плоскость и вычисляется его длина.

Пример 11. *Найти расстояние от точки S до плоскости треугольника ABC, если известно, что* $SA = 2$, $AB = AC = 4$ *и* $SB = SC = BC = 2\sqrt{3}$.

Решение. Пусть M – середина BC (см. рис. 10). Тогда SM и AM – медианы (и высоты) равнобедренных треугольников ABC и SBC. Так как $SM \perp BC$ и $AM \perp BC$, то $BC \perp ASM$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

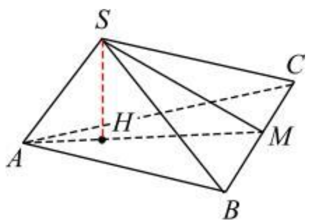


Рис. 10

Плоскость $ASM \perp ABC$ по признаку перпендикулярности плоскостей (плоскость ABC содержит прямую BC). Следовательно, перпендикуляр SH, проведенный из точки S на прямую пересечения этих плоскостей AM и есть перпендикуляр к плоскости ABC. Значит искомое расстояние равно высоте SH в треугольнике ASM, в котором $SA = 2$, $SM = 3$ и $AM = \sqrt{13}$. Обозначим $AH = x$, тогда $MH = \sqrt{13} - x$. Выразим SH^2 из прямоугольных треугольников ASH и SMH, и решим уравнение $4 - x^2 = 9 - (\sqrt{13} - x)^2$. Получаем $x = \dfrac{4}{\sqrt{13}}$.

Тогда $SH = \sqrt{4 - \left(\dfrac{4}{\sqrt{13}}\right)^2} = \dfrac{6}{\sqrt{13}}$.

Ответ: $\dfrac{6}{\sqrt{13}}$.

Пример 12. *В правильной четырехугольной призме* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *стороны основания равны* 1, *боковые ребра* 2. *Точка* E *– середина ребра* AA_1. *Найти расстояние от вершины* D *до плоскости* BED_1.

Решение. Построим перпендикуляр из точки D на плоскость BED_1. Пусть точка K – след плоскости BED_1 на ребре CC_1 (см. рис. 11). Так как $ED_1 \parallel BK$ (прямые пересечения плоскостью BED_1 параллельных граней параллельны), то из равенства прямоугольных треугольников EA_1D_1 и BKC следует, что $A_1E = CK$, а тогда $C_1K = KC$.

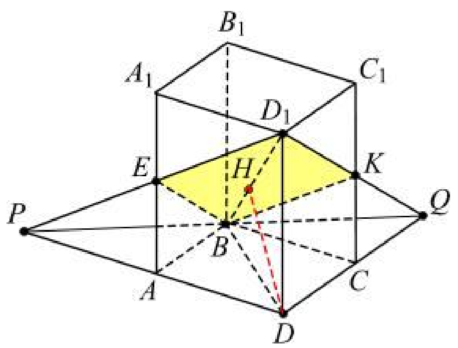


Рис. 11

Так как прямые ED_1 и AD лежат в одной плоскости и не параллельны, то $P = ED_1 \cap AD$ есть общая точка плоскости основания и плоскости BED_1. Аналогично их общей точкой является $Q = D_1K \cap DC$.

Точки P, B и Q лежат на прямой пересечения указанных плоскостей.

Из равенства прямоугольных треугольников EA_1D_1 и PEA следует $PA = A_1D_1$. Аналогично получаем, что $DC = CQ$. Следовательно, прямоугольных треугольник PDQ – равнобедренный и $PD = DQ = 2$. Тогда $PQ = 2\sqrt{2}$.

В этом треугольнике DB – биссектриса, а значит и высота, то есть $DB \perp PQ$. Тогда и $D_1B \perp PQ$ по теореме о трех перпендикулярах и $PQ \perp BD_1D$.

Плоскость $BD_1D \perp BED_1$ по признаку перпендикулярности плоскостей. Следовательно, длина перпендикуляра DH, проведенного из точки D на прямую пересечения этих плоскостей BD_1, есть искомое расстояние, равное высоте прямоугольного треугольника BD_1D, в котором $BD = \sqrt{2}$, $D_1D = 2$ и $BD_1 = \sqrt{6}$.

$$\rho(D; BED_1) = DH = \frac{D_1D \cdot BD}{BD_1} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Пример 13. *В правильной шестиугольной призме* $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, *ребра которой равны* 1, *найти расстояние от точки* A *до плоскости* A_1B_1C.

Решение. Прямая FC перпендикулярна AE и AA_1, поэтому перпендикулярна плоскости AA_1E_1 (см. рис. 12). Пусть $FC \cap AE = G$. Плоскость AA_1E_1 перпендикулярна плоскости A_1B_1C, содержащей прямую FC, и пересекает ее по прямой A_1G. Длина высоты AH в треугольнике AA_1G является искомым расстоянием.

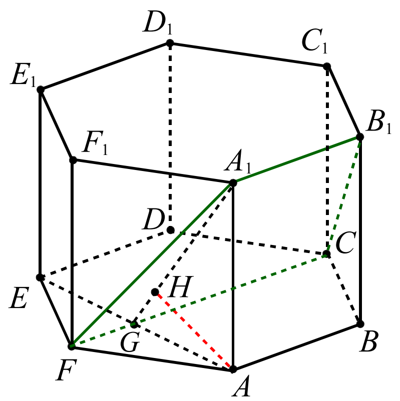


Рис. 12

Так как в прямоугольном треугольнике ADE $AE = \sqrt{AD^2 - ED^2}$, то есть

$AE=\sqrt{3}$, то $AG=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Из прямоугольного треугольника AGA_1 находим

$$GA_1=\sqrt{\frac{3}{4}+1}=\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Высота AH равна

$$AH=\frac{AG\cdot AA_1}{GA_1}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1\right):\frac{\sqrt{7}}{2}=\sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Ответ: $\sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

Метод параллельных прямых и плоскостей

Данный метод опирается на следующие два утверждения. Расстояние от точки M до плоскости α:

1) равно расстоянию до плоскости α от произвольной точки P, лежащей на прямой l, которая проходит через точку M и параллельна плоскости α;

2) равно расстоянию до плоскости α от произвольной точки P, лежащей на плоскости β, которая проходит через точку M и параллельна плоскости α.

Пример 14. *В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти расстояние от точки C_1 до плоскости AB_1C.*

Решение. Так как прямая A_1C_1 параллельна AC, то прямая A_1C_1 параллельна плоскости AB_1C (см. рис. 13). Поэтому искомое расстояние h равно расстоянию от произвольной точки прямой A_1C_1 до плоскости AB_1C. Обозначим расстояние от центра O_1 квадрата $A_1B_1C_1D_1$ до плоскости AB_1C через h.

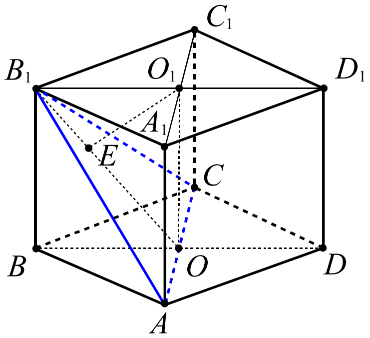


Рис. 13

Пусть E – основание перпендикуляра, опущенного из точки O_1 на прямую B_1O, где O – центр квадрата $ABCD$. Покажем, что $O_1E\perp AB_1C$. Прямая O_1E лежит в плоскости BB_1D_1D, а прямая AC перпендикулярна этой плоскости (объясните). Поэтому $O_1E\perp AC$ и O_1E – перпендикуляр к плоскости AB_1C, а $O_1E=h$.

Так как $B_1O_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $O_1O=1$, то из прямоугольного треугольника OB_1O_1 найдем $OB_1=\sqrt{\dfrac{1}{2}+1}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$. Искомое расстояние равно $h=\dfrac{B_1O_1\cdot O_1O}{OB_1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1:\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Пример 15. *В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые рёбра равны 4, найти расстояние от середины ребра BC до плоскости грани EMD.*

Решение. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ $BD\perp DE$ и $BD=\sqrt{3}$. Точка O – центр $ABCDEF$ (см. рис. 14). Тогда MO – высота пирамиды. Из прямоугольного треугольника MOD получаем $MO=\sqrt{15}$. Апофему MN боковой

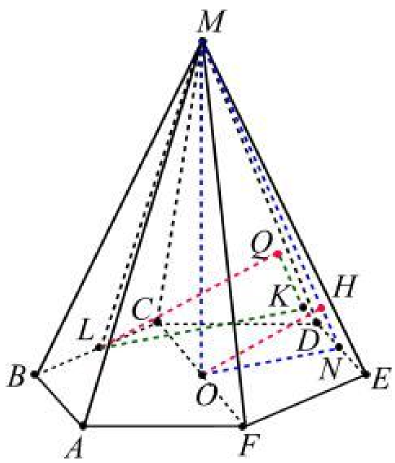


Рис. 14

грани DME находим из прямоугольного треугольника MDN

$$MN=\sqrt{MD^2-\left(\frac{DE}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{7}}{2}.$$

По признаку перпендикулярности плоскостей ($DE\perp MON$, поскольку $DE\perp MO$ и $DE\perp MN$) $MON\perp DME$. Поэтому высота OH треугольника MON перпендикулярна плоскости DME. Из прямоугольного треугольника MON, в котором $OL=\frac{BD}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, получаем

$$OH=\frac{MO\cdot ON}{MN}=\sqrt{15}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{3\sqrt{7}}{2}=\sqrt{\frac{5}{7}}.$$

Опустив из точки L перпендикуляры LQ на плоскость грани DME и LK на прямую DE, получим треугольник LQK, подобный треугольнику OHD. Так как расстояние от точки L до прямой DE равно $LK=\frac{3}{4}\cdot BD=\frac{3}{2}\cdot OL$, то коэффициент подобия этих треугольников равен $\frac{3}{2}$. Отсюда $LQ=\frac{3}{2}\cdot OH=\frac{3}{2}\cdot\sqrt{\frac{5}{7}}=\sqrt{\frac{45}{28}}$.

Ответ: $\sqrt{\frac{45}{28}}$.

Метод объёмов

При решении задач данного типа используется следующее утверждение.

Если объём пирамиды $ABCM$ равен V_{ABCM}, то расстояние от точки M до плоскости α, содержащей треугольник ABC, вычисляют по формуле

$$\rho(M,\alpha)=\rho(M,ABC)=\frac{3V_{ABCM}}{S_{ABC}}.$$

В общем случае рассматривают равенство объёмов одной фигуры, выраженные двумя независимыми способами.

Пример 16. *Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Найти расстояние от точки C до плоскости BDC_1.*

Решение. Искомое расстояние x равно высоте CQ (см. рис. 15), опущенной в пирамиде $BCDC_1$ из вершины C на основание BDC_1.

Объём этой пирамиды равен

$$\frac{1}{3}S_{BCD}\cdot CC_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot BC\cdot CD\cdot CC_1=\frac{a^3}{6}.$$

С другой стороны, так как треугольник BDC_1 равносторонний со стороной $a\sqrt{2}$, объём пирамиды равен

$$\frac{1}{3}S_{BC_1D}\cdot CQ=\frac{1}{3}\cdot\frac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4}\cdot x=\frac{a^2\sqrt{3}}{6}\cdot x.$$

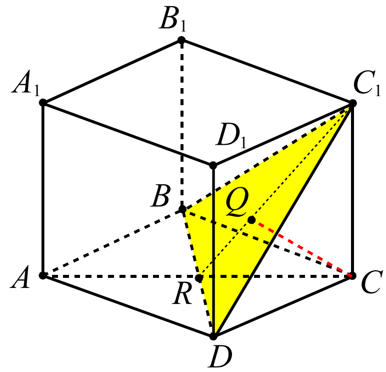


Рис. 15

Получаем уравнение $\frac{a^3}{6}=\frac{a^2\sqrt{3}}{6}\cdot x$, из которого находим $x=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Координатный метод

Расстояние от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости α, заданной уравнением $ax+by+cz+d=0$, можно вычислить по формуле

$$\rho(M,\alpha)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \qquad (3)$$

Вывод уравнения плоскости. Приведем один из способов получения уравнения плоскости, если известны координаты трех ее точек $M(x_M;y_M;z_M)$, $N(x_N;y_N;z_N)$, $P(x_P;y_P;z_P)$, не лежащих на одной прямой. Для этого нужно взять в общем виде уравнение плоскости $ax+by+cz+d=0$, в котором a,b,c,d – неизвестные числа. Подставив в него координаты точек M,N,P, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} ax_M + by_M + cz_M + d = 0, \\ ax_N + by_N + cz_N + d = 0, \\ ax_P + by_P + cz_P + d = 0. \end{cases}$$

Решив ее, найдем $a = pd, b = qd, c = rd$ (если окажется, что $d = 0$, то $a = pc$, $b = qc$; если $d = c = 0$, то $a = pb$). Подставив в исходное уравнение и сократив на $d \neq 0$, получим уравнение

$$px + qy + rz + 1 = 0.$$

Иногда удобно использовать *уравнение плоскости в отрезках*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \qquad (4)$$

если известны координаты точек $(a;0;0)$, $(0;b;0)$, $(0;0;c)$ пересечения данной плоскости с координатными осями Ox, Oy, Oz соответственно.

Пример 17. *Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки* $M(0;1;0)$, $N(1;0;0)$, $P(1;1;1)$.

Решение. Записав в общем виде уравнение плоскости $ax + by + cz + d = 0$ и подставив в него координаты этих точек, получим:

$$\begin{cases} a\cdot 0 + b\cdot 1 + c\cdot 0 + d = 0, \ (\textit{для точки } M) \\ a\cdot 1 + b\cdot 0 + c\cdot 0 + d = 0, \ (\textit{для точки } N) \\ a\cdot 1 + b\cdot 1 + c\cdot 1 + d = 0. \ (\textit{для точки } P) \end{cases}$$

Отсюда $b = -d, a = -d$ и $c = d$. Уравнение плоскости MNP имеет вид $-dx - dy + dz + d = 0$ или $x + y - z - 1 = 0$ после сокращения на $-d \neq 0$.

Пример 18. *В правильной шестиугольной призме* $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, *все ребра которой равны* 1, *найти расстояние от точки* A *до плоскости* DEF_1.

Решение. Введем систему координат, как показано на рисунке 16, и найдем координаты точек:

$A\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $D\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $E\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $F_1(1;0;1)$. Пусть $ax + by + cz + d = 0$ – уравнение плоскости DEF_1. Подставляя в него координаты точек D, E, F_1, получим:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b + d = 0, \ (\textit{для точки } D) \\ \frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b + d = 0, \ (\textit{для точки } E) \\ a + c + d = 0. \ (\textit{для точки } F_1) \end{cases}$$

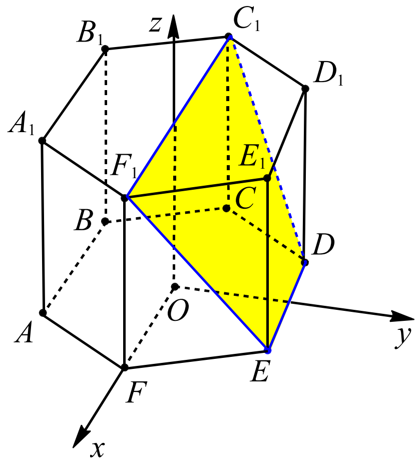


Рис. 16

Отсюда имеем $a = 0$, $b = -\frac{2\sqrt{3}}{3}d$, $c = -d$. Уравнение плоскости DEF_1 примет вид $2\sqrt{3}y + 3z - 3 = 0$. Вычислим расстояние от точки A до плоскости DEF_1 по формуле (3):

$$\rho(A;\, DEF_1) = \frac{\left|0\cdot\frac{1}{2} - 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\cdot 0 - 3\right|}{\sqrt{0^2 + (2\sqrt{3})^2 + 3^2}} =$$

$$= \frac{6}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

Пример 19. *В единичном кубе* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *найти расстояние от точки* A_1 *до плоскости* BDC_1.

Решение. Составим уравнение плоскости, проходящей через точки $B(0;1;0)$, $D(1;0;0)$ и $C_1(1;1;1)$ (см. рис. 17).

Для этого подставим координаты этих точек в общее уравнение плоскости $ax + by + cz + d = 0$. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} b + d = 0, \\ a + d = 0, \\ a + b + c + d = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} b = -d, \\ a = -d, \\ c = d. \end{cases}$$

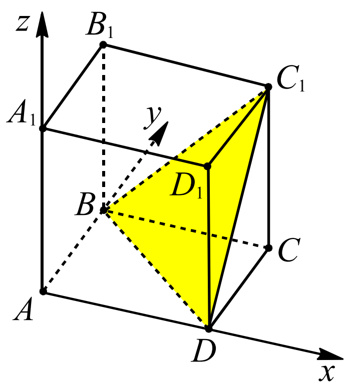


Рис. 17

Отсюда находим уравнение

$$-dx - dy + dz + d = 0$$

или

$$x + y - z - 1 = 0.$$

По формуле (3) находим расстояние от точки $A_1(0;0;1)$ до плоскости $\beta = BDC_1$:

$$\rho(A_1;\beta) = \frac{|0+0-1-1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Векторный метод

Пусть дана плоскость α, содержащая два неколлинеарных вектора $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$, точка A принадлежит плоскости α, точка M вне плоскости α, $\overrightarrow{MA} = \vec{m}$ (см. рис. 18).

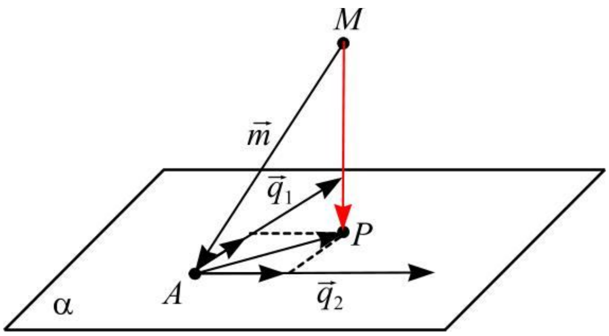


Рис. 18

Чтобы найти расстояние от точки M до плоскости α, то есть длину перпендикуляра MP ($P \in \alpha$), представим вектор $\overrightarrow{MP}$ в виде

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP} = \vec{m} + x\cdot\vec{q}_1 + y\cdot\vec{q}_2.$$

Неизвестные коэффициенты x, y находятся из условия перпендикулярности вектора $\overrightarrow{MP}$ векторам $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MP}\cdot\vec{q}_1 = 0, \\ \overrightarrow{MP}\cdot\vec{q}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\vec{m} + x\cdot\vec{q}_1 + y\cdot\vec{q}_2)\cdot\vec{q}_1 = 0, \\ (\vec{m} + x\cdot\vec{q}_1 + y\cdot\vec{q}_2)\cdot\vec{q}_2 = 0. \end{cases}$$

Искомое расстояние выражается следующим образом:

$$\left|\overrightarrow{MP}\right| = \sqrt{(\vec{m} + x\cdot\vec{q}_1 + y\cdot\vec{q}_2)^2}.$$

Пример 20. *В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти расстояние от точки A_1 до плоскости BDC_1.*

Решение. Пусть $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$ (см. рис. 19), тогда $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{c} = 0$.

Выразим векторы $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC_1}$, $\overrightarrow{C_1A_1}$ через базисные $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$\overrightarrow{DB} = \vec{b} - \vec{a},\ \overrightarrow{DC_1} = \vec{b} + \vec{c},\ \overrightarrow{C_1A_1} = -\vec{a} - \vec{b}.$$

Пусть $MA_1 \perp BDC_1$, где $M \in BDC_1$. Вектор $\overrightarrow{C_1M} = x\cdot\overrightarrow{DB} + y\cdot\overrightarrow{DC_1}$, поэтому

$$\overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{C_1A_1} - \overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1A_1} - (x\cdot\overrightarrow{DB} + y\cdot\overrightarrow{DC_1}).$$

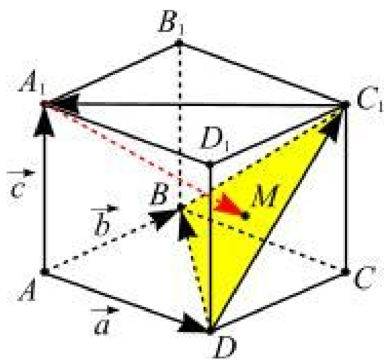


Рис. 19

Далее имеем

$$\begin{cases} \overrightarrow{MA_1} \perp \overrightarrow{DB}, \\ \overrightarrow{MA_1} \perp \overrightarrow{DC_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA_1}\cdot\overrightarrow{DB} = 0, \\ \overrightarrow{MA_1}\cdot\overrightarrow{DC_1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{C_1A_1}\cdot\overrightarrow{DB} - \left(x\cdot\overrightarrow{DB}^2 + y\cdot\overrightarrow{DC_1}\cdot\overrightarrow{DB}\right) = 0, \\ \overrightarrow{C_1A_1}\cdot\overrightarrow{DC_1} - \left(x\cdot\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC_1} + y\cdot\overrightarrow{DC_1}^2\right) = 0. \end{cases}$$

Так как

$$\overrightarrow{C_1A_1}\cdot\overrightarrow{DB} = (-\vec{a} - \vec{b})(\vec{b} - \vec{a}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = 0,$$

$$\overrightarrow{DC_1}\cdot\overrightarrow{DB}=(\vec b+\vec c)(\vec b-\vec a)=\vec b^2=1,$$

$$\overrightarrow{DC_1}\cdot\overrightarrow{C_1A_1}=(\vec b+\vec c)(-\vec a-\vec b)=-\vec b^2=-1,$$

$$\overrightarrow{DB}^2=(\vec b-\vec a)^2=\vec b^2+\vec a^2=2,$$

$$\overrightarrow{DC_1}^2=(\vec b+\vec c)^2=\vec b^2+\vec c^{\,2}=2,$$

то имеем $\begin{cases}0-(x\cdot 2+y\cdot 1)=0,\\ -1-(x\cdot 1+y\cdot 2)=0\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=0,\\ x+2y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1/3,\\ y=-2/3.\end{cases}$$

Отсюда получаем

$$\overrightarrow{MA_1}=-\vec a-\vec b-\frac{1}{3}(\vec b-\vec a)+\frac{2}{3}(\vec b+\vec c)=$$

$$=-\frac{2}{3}\vec a-\frac{2}{3}\vec b+\frac{2}{3}\vec c,$$

$$\left|\overrightarrow{MA_1}\right|=\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\vec a-\frac{2}{3}\vec b+\frac{2}{3}\vec c\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}}=\frac{2\sqrt3}{3}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt3}{3}$.

Замечание. Вектор $\overrightarrow{MA_1}$ в данном базисе имеет координаты $\left\{-\frac{2}{3};-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right\}$, поэтому длину этого вектора можно найти по формуле $\left|\overrightarrow{MA_1}\right|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, то есть

$$\overrightarrow{MA_1}=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}}=\frac{2\sqrt3}{3}.$$

Метод опорных задач

Применение данного метода состоит в использовании известных опорных задач, которые в большинстве случаев формулируются как теоремы.

Расстояние от точки M до плоскости α можно вычислить по формуле $\rho=\rho_1\frac{r}{r_1}$, где $\rho=\rho(M,\alpha)$, $\rho_1=\rho(M_1,\alpha)$, $OM=r$, $OM_1=r_1$, $MM_1\cap\alpha=O$; в частности, $\rho=\rho_1$, если $r=r_1$ (прямая m, проходящая через точку M, пересекает плоскость α в точке O, а точка M_1 лежит на прямой m (см. рис. 20*а* и 20*б*)).

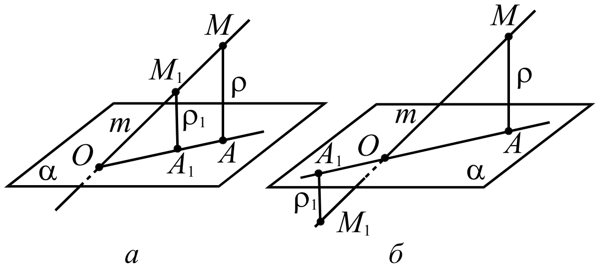


Рис. 20

Пример 21. *В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти расстояние от точки D_1 до плоскости AB_1C.*

Решение. Используем найденное расстояние (пример 14) от точки C_1 (от точки O_1) до плоскости AB_1C. Опустим перпендикуляр D_1F на прямую B_1E (см. рис. 21). Тогда имеем

$$\rho(D_1,AB_1C)=\rho(O_1,AB_1C)\cdot\frac{B_1D_1}{B_1O_1},$$

$$\rho(D_1,AB_1C)=\frac{\sqrt3}{3}\cdot 2=\frac{2\sqrt3}{3}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt3}{3}$.

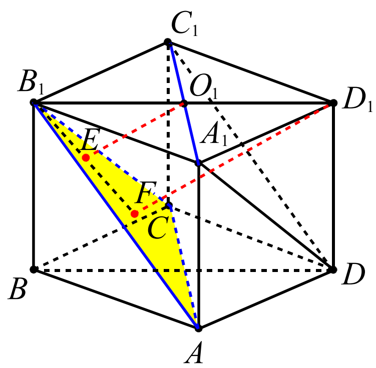


Рис. 21

Пример 22. *Точки A,B,C,D являются вершинами параллелограмма, ни одна из сторон которого не пересекает плоскость α. Точки A, B, C удалены от плоскости α на расстояние 2, 3, 6 соответственно. Найти расстояние от вершины D до плоскости α.*

Решение. Опустим перпендикуляры из вершин A,B,C и D на плоскость α. Точки A_1,B_1,C_1,D_1 – их ортогональные проекции на α (см. рис. 22).

Точка O – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, которая проектируется в точку O_1 – точку пересечения диагоналей параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$ (по свойству проекций). Так как точка O делит отрезки AC и BD пополам, то по свойству проекций отрезков точка O_1 также делит отрезки A_1C_1 и B_1D_1 пополам. Четырехугольники C_1CAA_1 и D_1DBB_1 – трапеции. Отрезок OO_1 их средняя линия. Тогда

$$\frac{CC_1+AA_1}{2}=\frac{DD_1+BB_1}{2}.$$

Отсюда $DD_1=CC_1+AA_1-BB_1$ и, так как $CC_1=6,\ BB_1=3,\ AA_1=2$, то $DD_1=5$.

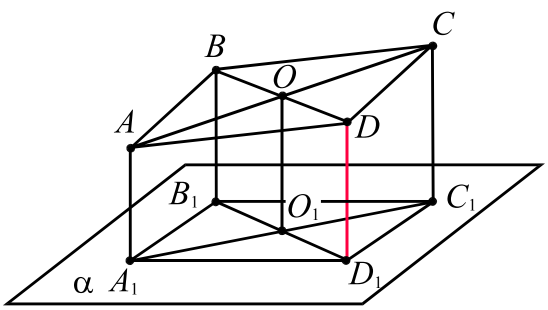


Рис. 22

Ответ: 5.

Решение одной задачи разными методами

Пример 23. *В правильной треугольной пирамиде SABC точка S – вершина. Точка M – середина ребра SA, точка K – середина ребра SB. Найти расстояние от вершины A до плоскости CMK, если SC* = 6, *AB* = 4.

Решение. 1-*й* ***способ*** **(*координатный метод*).** Пусть SO – высота пирамиды, которую найдем из треугольника SOC (см. рис. 23):

$$SO=\sqrt{SC^2-OC^2}=\sqrt{6^2-\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{92}{3}}.$$

Введем систему координат, как показано на рисунке 23, и найдем координаты точек $C\left(\frac{4\sqrt{3}}{3};0;0\right)$, $A\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3};-2;0\right)$. Так как ME – средняя линия в треугольнике SOA, DE – средняя линия в треугольнике OAL, то

$$M\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};-1;\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{92}{3}}\right),\ K\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};1;\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{92}{3}}\right).$$

Составим уравнение плоскости, проходящей через три точки C, M и K. Подставим координаты точек C, M и K в общее уравнение плоскости $ax+by+cz+d=0$, получим систему уравнений

$$\begin{cases}\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot a+d=0,\\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot a-b+\sqrt{\frac{23}{3}}\cdot c+d=0,\\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot a+b+\sqrt{\frac{23}{3}}\cdot c+d=0.\end{cases}$$

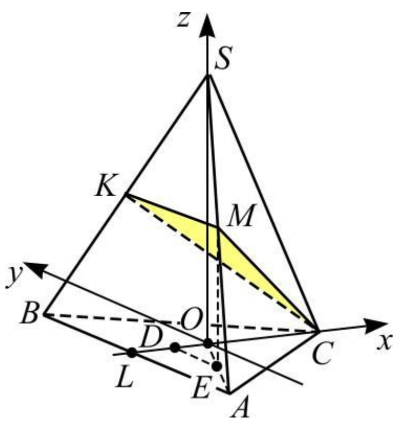


Рис. 23

Вычитая из третьего уравнения второе, определяем $b=0$. Теперь из первого уравнения выразим $a=-\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot d$ и подставим во второе. Получим

$$c=-\frac{5\sqrt{3}}{4\sqrt{23}}\cdot d.$$

Уравнение плоскости CMK имеет вид

$$-\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot dx-\frac{5\sqrt{3}}{4\sqrt{23}}\cdot dz+d=0$$

или

$$\sqrt{69}x+5\sqrt{3}\,z-4\sqrt{23}=0.$$

Воспользуемся формулой (3) расстояния от точки до плоскости

$$\rho(A; CMK) =$$

$$= \frac{\left|\sqrt{69}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) + 0\cdot(-2) + 5\sqrt{3}\cdot 0 - 4\sqrt{23}\right|}{\sqrt{(\sqrt{69})^2 + 0^2 + (5\sqrt{3})^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{23}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{23}}{2}$.

2-*й* ***способ*** **(*метод объемов*).** Так как середина отрезка *SA* точка *M* принадлежит плоскости *CMK*, то точки *A* и *S* равноудалены от этой плоскости (см. рис. 24). Расстояние от точки *S* до плоскости *CMK* высоте пирамиды *SKMC*, опущенной на основание *KMC*.

Найдем объём пирамиды *SKMC* и площадь треугольника *KMC*.

$$V_{SKMC} = \frac{SM}{SA}\cdot\frac{SK}{SB}\cdot V_{SABC} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot V_{SABC} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot SO\cdot S_{ABC} =$$

$$= \frac{1}{12}\cdot\sqrt{\frac{92}{3}}\cdot\frac{16\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{23}}{3}.$$

где *SO* – высота пирамиды *SABC*, опущенной на основание *ABC* (см. рис. 23).

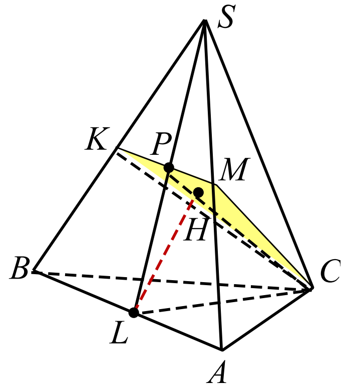


Рис. 24

Треугольник *KMC* равнобедренный *KC* = *MC* и *KM* = 2 (как средняя линия треугольника *SAB*). Найдем *MC* из треугольника *ASC* (как его медиану):

$$MC = \frac{1}{2}\sqrt{2\cdot AC^2 + 2\cdot SC^2 - AS^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 4^2 + 2\cdot 4^2 - 4^2} = \sqrt{17}.$$

Тогда высота треугольника *KMC*, опущенная на *KM* из точки *C*, равна

$$\sqrt{MC^2 - \left(\frac{KM}{2}\right)^2} = \sqrt{17-1} = 4$$

и площадь $S_{KMC} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4 = 4$.

Соответственно, искомое расстояние

$$\rho(A; KMC) = \rho(S; KMC) =$$

$$= \frac{3\cdot V_{SKMC}}{S_{KMC}} = \frac{3\cdot\frac{2\sqrt{23}}{3}}{4} = \frac{\sqrt{23}}{2}.$$

3-*й* ***способ*** **(*поэтапно-вычислительный*).** Так как прямая *BA* параллельна плоскости *CMK* ($BA \parallel KM$) (см. рис. 24), то искомое расстояние равно расстоянию от любой точки этой прямой до данной плоскости.

Пусть точка *L* – середина стороны *BA*. Тогда $SL \perp BA$ и $CL \perp BA$ (как медианы равнобедренных треугольников, опущенные на основание) и $BA \perp SLC$, а, следовательно, и $KM \perp SLC$. По признаку перпендикулярности плоскостей $KMC \perp SLC$.

Так как $PC = KMC \cap SLC$, то перпендикуляр *LH*, опущенный из точки *L* на PC, будет являться перпендикуляром к плоскости *CMK* и его длина будет равна искомому расстоянию.

Рассмотрим треугольник *LSC*. Так как точка *P* лежит на *KM*, то $LP = PS$ и площадь этого треугольника равна половине площади треугольника *LSC*.

$$S_{LSC} = \frac{1}{2}\cdot SO\cdot LC = 2\sqrt{23},$$

где $SO = \sqrt{SC^2 - \left(\frac{AC}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2\sqrt{23}}{\sqrt{3}}$ – высота пирамиды, а $LC = AC\cdot\sin 60° = 2\sqrt{3}$. Тогда

$$S_{LPC} = \frac{1}{2}\cdot S_{LSC} = \sqrt{23}.$$

Найдем *PC* из треугольника *LSC* (как его медиану)

$$PC=\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot LC^2+2\cdot SC^2-SL^2}=$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{24+72-32}=4.$$

Тогда $LH=\dfrac{2S_{LPC}}{PC}=\dfrac{\sqrt{23}}{2}$.

Тренировочные упражнения

23. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости BDA_1.

24. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно $\sqrt{3}$. Найдите расстояние от вершины C до плоскости BDC_1.

25. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 4, точки E и F – середины ребер AB и B_1C_1 соответственно, а точка P расположена на ребре CD так, что $CP=3PD$. Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости треугольника EPF.

26. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 1, а боковое ребро равно 2. Точка M – середина ребра AA_1. Найдите расстояние от точки M до плоскости DA_1C_1.

27. (ЕГЭ, 2012). В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 1, боковые ребра равны 2. Точка E – середина ребра AA_1. Найдите расстояние от вершины A до плоскости BED_1.

28. (ЕГЭ, 2011). В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка M – середина ребра AA_1, точка K – середина ребра BB_1. Найдите расстояние от вершины A_1 до плоскости CMK, если $AA_1=6$, $AB=4$.

29. (ЕГЭ, 2012). В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 2, а боковые ребра равны 3. Точка D – середина ребра CC_1. Найдите расстояние от вершины C до плоскости AB_1D.

30. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости BFE_1.

31. Дан правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром $\sqrt{6}$. Найдите расстояние от вершины A до плоскости BDC.

32. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка S – вершина. Точка M – середина ребра SA, точка K – середина ребра SB. Найдите расстояние от вершины A до плоскости CMK, если $SC=6$, $AB=4$.

33. Известно, что в треугольной пирамиде все плоские углы при вершине – прямые. Найдите длину ее высоты, если длины ее боковых ребер равны a, b и c.

34. Ребро AD пирамиды $DABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC. Найдите расстояние от вершины A до плоскости, проходящей через середины ребер AB, AC и AD, если $AD=2\sqrt{5}$, $AB=AC=10$, $BC=4\sqrt{5}$.

35. В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ сторона основания равна 3, высота 2. Найдите расстояние от вершины A до грани PCD.

36. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ (с вершиной S) сторона основания равна 2 и высота равна 1. Найдите расстояние от точки D до плоскости BCS.

37. На продолжении ребра SK за точку K правильной четырехугольной пирамиды $SKLMN$ с вершиной S взята точка A так, что расстояние от точки A до плоскости MNS равно 24. Найдите длину отрезка KA, если $SL=2\sqrt{41}$, $MN=16$.

38. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с основанием $ABCDEF$ сторона основания равна 5, а боковое ребро равно 8. Точка K – середина ребра SB. Найдите расстояние от точки A до плоскости KDF.

1.4. Расстояние между скрещивающимися прямыми

● *Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми* равно длине отрезка их общего перпендикуляра.

Для нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми можно воспользоваться одним из четырех приведенных ниже способов.

1. (***Метод построения общего перпендикуляра или поэтапно-вычислительный метод***). В этом случае строится общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых (отрезок с концами на этих прямых и перпендикулярный каждой из них) и находится его длина.

2. (***Метод параллельных прямой и плоскости***). В этом случае строится плоскость, содержащую одну из прямых и параллельную второй. Тогда искомое расстояние будет равно расстояние от какой-нибудь точки второй прямой до построенной плоскости.

3. (***Метод параллельных плоскостей***). В этом случае данные скрещивающиеся прямые заключаются в параллельные плоскости, проходящие через них, и находится расстояние между этими плоскостями.

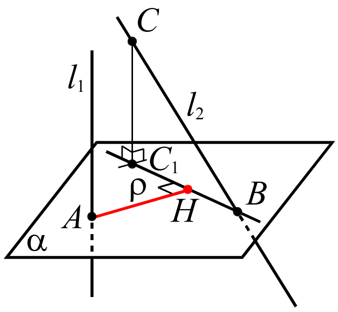


Рис. 25

4. (***Метод ортогонального проектирования***). В этом случае строится плоскость, перпендикулярная одной из данных прямых, и строится на этой плоскости ортогональная проекция другой прямой (см. рис. 25).

$$\rho(l_1; l_2) = \rho(A; BC_1) = AH,$$

где $A = l_1 \cap \alpha$, $\alpha \perp l_1$, BC_1 – ортогональная проекция l_2 на плоскость α, H – основание перпендикуляра, опущенного из A на BC_1.

Продемонстрируем применение всех указанных методов на следующем простом примере.

Пример 24. *В кубе, длина ребра которого равна a, найти расстояние между ребром и диагональю, не пересекающей его грани.*

Решение. В качестве примера найдем расстояние между ребром AA_1 и диагональю D_1C (см. рис. 26). Прямые AA_1 и D_1C – скрещивающиеся. Используя каждый из отмеченных способов, покажем, что расстояние ρ между ними равно a.

1-*й способ* (см. рис. 26*а*). Так как $A_1D_1 \perp AA_1$ и $A_1D_1 \perp D_1C$, то A_1D_1 – общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых AA_1 и D_1C. Расстояние ρ между AA_1 и D_1C равно $A_1D_1 = a$.

2-*й способ* (см. рис. 26*б*). Так как плоскость DD_1C_1, содержащая D_1C, параллельна AA_1, то расстояние ρ от AA_1 до DD_1C_1 равно a.

3-*й способ* (см. рис. 26*в*). Плоскость DD_1C_1, содержащая D_1C, параллельна плоскости AA_1B_1, содержащей AA_1, и расстояние ρ между ними равно a.

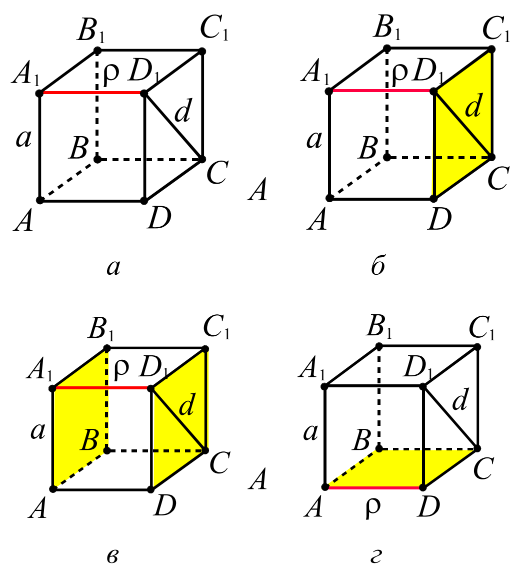


Рис. 26

4-*й способ* (см. рис. 26*г*). Плоскость ABC перпендикулярна прямой AA_1. Точка A – проекция AA_1 на эту плоскость. Проекцией D_1C на плоскость ABC является DC. Расстояние ρ от точки A до DC. равно a.

Ответ: a.

Поэтапно-вычислительный метод

Пример 25. *В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найти расстояние между прямыми BD и SA.*

Решение. Пусть E – основание перпендикуляра (см. рис. 27), опущенного из точки O на ребро SA. Так как $BD \perp AOS$ (объясните), то $BD \perp OE$.

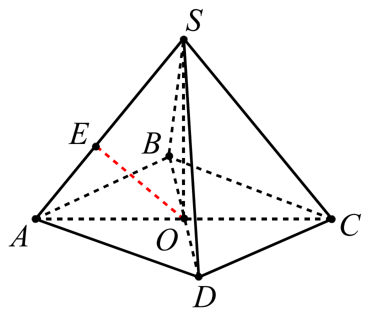


Рис. 27

Таким образом, OE – общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым BD и SA. Найдем его длину как высоту OE, опущенную на гипотенузу AS треугольника AOS. Так как $AO = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $AS = 1$, $SO = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, то $OE = 0{,}5$.

Ответ: 0,5.

Метод параллельных прямой и плоскости

В общем случае не обязательно строить общий перпендикуляр.

Пример 26. *В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найти расстояние между прямыми AA_1 и B_1C.*

Решение. Прямая B_1C лежит в плоскости BCC_1 (см. рис. 28). Так как $AA_1 \parallel CC_1$, то $AA_1 \parallel BCC_1$. Для нахождения искомого расстояния достаточно найти расстояние от точки A прямой AA_1 до плоскости BCC_1. Плоскости ABC и BCC_1 перпендикулярны и пересекаются по прямой BC. В равностороннем треугольнике ABC высота $AD \perp BC$, поэтому $AD \perp BCC_1$. Отсюда следует, что $AD = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ – искомое расстояние.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

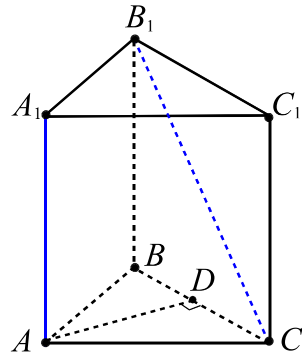


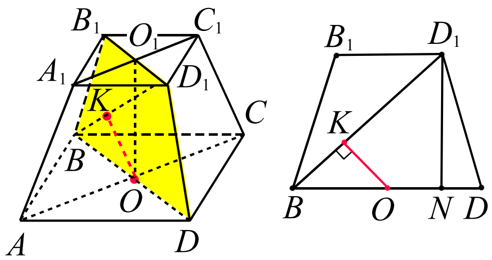
Рис. 28

Замечание. Отметим, что в свою очередь последнюю задачу можно свести к задаче о нахождении расстояния от произвольной точки прямой до плоскости.

Метод ортогонального проектирования

Пример 27. *В правильной усечённой четырехугольной пирамиде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со сторонами оснований равными a и b ($a > b$), и высотой h найти расстояние между диагональю BD_1 и диагональю большего основания AC.*

Решение. Прямые BD_1 и AC скрещиваются (см. рис. 29*а*). Точки O и O_1 – точки пересечения диагоналей оснований пирамиды. $OO_1 \perp AC$ и $OO_1 \perp BD$, как отрезок, соединяющий середины оснований равнобедренных трапеций BB_1D_1D и AA_1C_1C.



а *б*

Рис. 29

Построим плоскость перпендикулярную одной из скрещивающихся прямых

BD_1 и AC. Плоскость $BB_1D_1 \perp AC$, так как AC перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости: $AC \perp BD$ ($ABCD$ – квадрат) и $AC \perp OO_1$ (OO_1 – высота пирамиды). Прямая BD_1 лежит в плоскости BB_1D_1, поэтому искомое расстояние равно длине перпендикуляра, опущенного из точки O на BD_1. OK найдем из подобия прямоугольных треугольников BD_1N и BKO (см. рис. 29*б*), имеющих общий острый угол. В треугольнике BD_1N:

$$D_1N = h,\ BN = BD - ND =$$

$$= a\sqrt{2} - \frac{(a-b)\sqrt{2}}{2} = \frac{(a+b)\sqrt{2}}{2},$$

$$BD_1 = \sqrt{D_1N^2 + BN^2} = \sqrt{h^2 + \frac{(a+b)^2}{2}}.$$

В треугольнике BKO $BO = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Тогда $\frac{OK}{D_1N} = \frac{BO}{BD_1}$ или

$$OK = \frac{BO \cdot D_1N}{BD_1} \frac{ah}{\sqrt{2h^2 + (a+b)^2}}.$$

Ответ: $\frac{ah}{\sqrt{2h^2+(a+b)^2}}$.

Продемонстрируем применение всех указанных методов на следующем примере.

Пример 28. *Найти расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней куба, длина ребра которого равна* a.

Решение. Найдем расстояние между диагоналями A_1C_1 и AD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1-*й способ*. Пусть отрезок PQ (см. рис. 30) есть общий перпендикуляр скрещивающихся прямых A_1C_1 и AD_1, а PN и KQ – его ортогональные проекции на плоскости $A_1B_1C_1$ и AA_1D_1 соответственно ($PK \perp A_1D_1$ и $QN \perp A_1D_1$). На основании теоремы о трех перпендикулярах $PN \perp A_1C_1$ и $KQ \perp AD_1$. Треугольники A_1PN и KQD_1 – прямоугольные и равнобедренные, поэтому $A_1K = KN = ND_1 = \frac{a}{3}$.

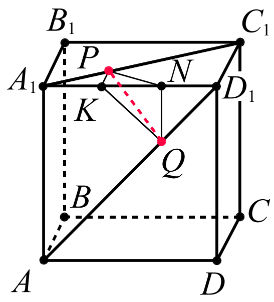


Рис. 30

Аналогично, $NQ = ND_1 = A_1K = KP = \frac{a}{3}$ и $A_1P = PN = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. Тогда из прямоугольного треугольника PNQ получим расстояние между A_1C_1 и AD_1:

$$PQ = \sqrt{PN^2 + NQ^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{9} + \frac{a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

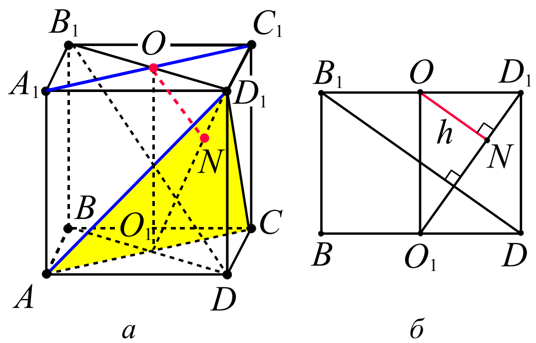


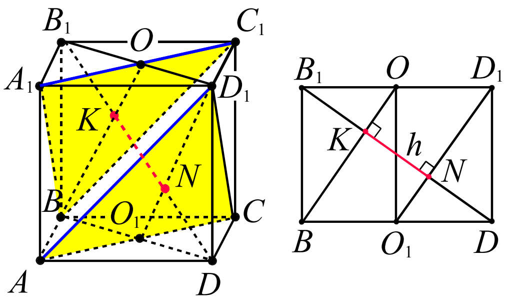
Рис. 31

2-*й способ*. Построим плоскость, содержащую AD_1 и параллельную A_1C_1 (см. рис. 31*а*). Искомой плоскостью является AD_1C. Найдем расстояние до нее от какой-либо точки прямой A_1C_1. Для этого опустим из точки O (см. рис. 31*а*) на указанную плоскость перпендикуляр. Плоскости BB_1D_1 и AD_1C перпендикулярны ($AC \perp BD$ и $AC \perp D_1D$, и $AC \subset AD_1C$).

Так как $B_1D \perp D_1O_1$ (см. рис. 31*б*) (докажите самостоятельно!), то $ON \perp AD_1C$ ($ON \parallel B_1D$) и из подобия треугольников BB_1D и OD_1N следует

$$\frac{ON}{BD} = \frac{OD_1}{B_1D} \text{ или } h = ON = \frac{BD \cdot OD_1}{B_1D} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

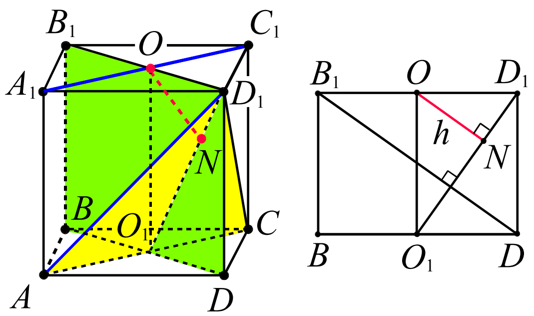
Замечание. Для нахождения расстояния от точки O до плоскости AD_1C можно воспользоваться результатом примера 14.



а *б*

Рис. 32

3-*й способ*. Построим параллельные плоскости AD_1C и BA_1C_1 (см. рис. 32*а*), содержащие прямые AD_1 и A_1C_1 соответственно. Диагональ B_1D куба перпендикулярна обеим плоскостям и (см. рис. 32*б*) точками K и N делится на три равные части (опорная задача № 20 глава 3 п. 3.4). Расстояние между плоскостями AD_1C и BA_1C_1 равно длине отрезка KN, т.е. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.



а *б*

Рис. 33

4-*й способ*. Плоскость BB_1D_1 перпендикулярна прямой A_1C_1 ($A_1C_1 \perp B_1D_1$ и $A_1C_1 \perp D_1D$) и плоскости AD_1C ($B_1D \perp AD_1C$) (см. рис. 33*а*). D_1O_1 – проекция AD_1 на плоскость BB_1D_1. Расстояние от точки O (проекции A_1C_1 на плоскость BB_1D_1) до D_1O_1 равно длине отрезка ON (см. рис. 33*б*).

Векторно-координатный метод

Так как задачу данного типа можно свести к задаче о вычислении расстояния от точки до плоскости, то здесь уместно применить формулу расстояния от точки до плоскости, применяя координатный метод.

Рассмотрим векторный подход к решению задач данного типа. Пусть даны прямые l_1 с направляющим вектором $\vec{q}_1$ и l_2 с направляющим вектором $\vec{q}_2$. Точки A_1 и A_2 лежат на прямых l_1 и l_2 соответственно, $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{m}$ (см. рис. 34).

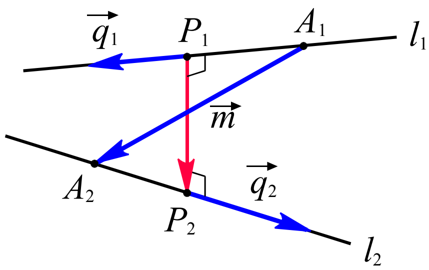


Рис. 34

Чтобы определить расстояние между прямыми l_1 и l_2, то есть найти длину их общего перпендикуляра P_1P_2 ($P_1 \in l_1$ и $P_2 \in l_2$), представим вектор $\overrightarrow{P_1P_2}$ в виде

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_1A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2P_2} = x \cdot \vec{q}_1 + \vec{m} + y \cdot \vec{q}_2 .$$

Неизвестные коэффициенты x, y находятся из условия перпендикулярности вектора $\overrightarrow{P_1P_2}$ векторам $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{q}_1 = 0, \\ \overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{q}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x \cdot \vec{q}_1 + \vec{m} + y \cdot \vec{q}_2) \cdot \vec{q}_1 = 0, \\ (x \cdot \vec{q}_1 + \vec{m} + y \cdot \vec{q}_2) \cdot \vec{q}_2 = 0. \end{cases}$$

Искомое расстояние выражается следующим образом:

$$\left| \overrightarrow{P_1P_2} \right| = \sqrt{(x \cdot \vec{q}_1 + \vec{m} + y \cdot \vec{q}_2)^2} .$$

В большинстве случаев при решении подобных задач удобнее ввести декартову систему координат, выразить векторы $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{m}$ через ее базисные векторы и провести все вычисления в координатной форме.

Используя приведенные выводы, решим следующие задачи.

Пример 29. *В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти расстояние между диагональю куба BD_1 и диагональю грани AB_1.*

Решение. Введем прямоугольную систему координат (см. рис. 35), тогда $A(0;0;0)$, $B(0;1;0)$, $B_1(0;1;1)$, $D_1(1;0;1)$.

Пусть EF – общий перпендикуляр скрещивающихся прямых BD_1 и AB_1, то есть $EF\perp AB_1$, $EF\perp BD_1$, причем $E\in AB_1$ и $F\in BD_1$. Обозначим $\lambda=\dfrac{AE}{B_1E}$, $\mu=\dfrac{BF}{D_1F}$ и воспользуемся формулами для координат точки (опорная задача 1), которая делит данный отрезок в заданном отношении. Получим

$$E\left(0,\frac{\lambda}{1+\lambda},\frac{\lambda}{1+\lambda}\right),\ F\left(\frac{\mu}{1+\mu},\frac{1}{1+\mu},\frac{\mu}{1+\mu}\right).$$

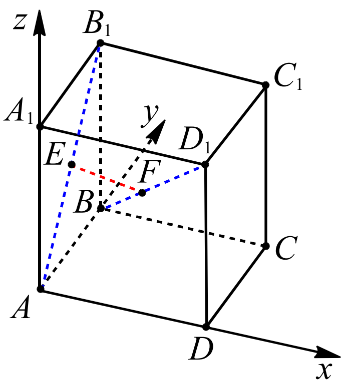


Рис. 35

Пусть $\dfrac{\lambda}{1+\lambda}=p$, $\dfrac{\mu}{1+\mu}=q$, тогда $E(0,p,p)$, $F(q,1-q,q)$. Так как вектор $\overrightarrow{EF}=\{q,\ 1-q-p,\ q-p\}$ должен быть перпендикулярным векторам $\overrightarrow{AB_1}=\{0;1;1\}$ и $\overrightarrow{BD_1}=\{1;-1;1\}$, то имеем систему уравнений:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\\ \overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{EF}=0\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}1-q-p+q-p=0,\\ q-1+q+p+q-p=0\end{cases}\Leftrightarrow\ p=\frac{1}{2},q=\frac{1}{3}.$$

Отсюда $\overrightarrow{EF}=\left\{\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{6},\ -\dfrac{1}{6}\right\}$, $EF=\left|\overrightarrow{EF}\right|=$

$$=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}}=\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Пример 30. *Найти расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней куба, длина ребра которого равна a.*

Решение. Найдем расстояние между диагоналями A_1C_1 и AD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 36).

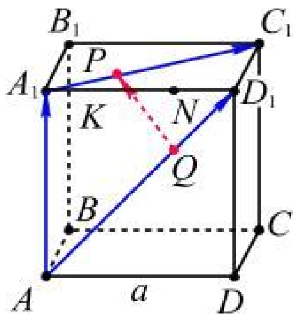


Рис. 36

Введем векторы $\overrightarrow{A_1C_1}=\vec{q}_1$ и $\overrightarrow{AD_1}=\vec{q}_2$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{m}$. Поскольку $|\vec{q}_1|=|\vec{q}_2|=a\sqrt{2}$, $|\vec{m}|=a$, $\angle(\vec{q}_1,\vec{q}_2)=60°$, $\angle(\vec{q}_1,\vec{m})=90°$, $\angle(\vec{q}_2,\vec{m})=45°$, то

$$\vec{q}_1\cdot\vec{q}_1=\vec{q}_1^{\,2}=2a^2,$$
$$\vec{q}_2\cdot\vec{q}_2=\vec{q}_2^{\,2}=2a^2,\ \vec{m}\cdot\vec{m}=\vec{m}^2=a^2,$$
$$\vec{q}_1\cdot\vec{q}_2=|\vec{q}_1|\cdot|\vec{q}_2|\cdot\cos 60°=a^2,$$
$$\vec{q}_1\cdot\vec{m}=|\vec{q}_1|\cdot|\vec{m}|\cdot\cos 90°=0,$$
$$\vec{q}_2\cdot\vec{m}=|\vec{q}_2|\cdot|\vec{m}|\cdot\cos 45°=a^2.$$

Пусть отрезок QP есть общий перпендикуляр скрещивающихся прямых A_1C_1 и AD_1. Представим вектор $\overrightarrow{QP}$ в виде

$$\overrightarrow{QP}=x\cdot\vec{q}_1+\vec{m}+y\cdot\vec{q}_2.$$

Из условия перпендикулярности вектора $\overrightarrow{P_1P_2}$ векторам $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$ получаем

$$\begin{cases}(x\cdot\vec{q}_1+\vec{m}+y\cdot\vec{q}_2)\cdot\vec{q}_1=0,\\ (x\cdot\vec{q}_1+\vec{m}+y\cdot\vec{q}_2)\cdot\vec{q}_2=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\cdot \vec{q}_1^{\,2} + \vec{m}\cdot\vec{q}_1 + y\cdot(\vec{q}_2\cdot\vec{q}_1) = 0, \\ x\cdot(\vec{q}_1\cdot\vec{q}_2) + \vec{m}\cdot\vec{q}_2 + y\cdot\vec{q}_2^{\,2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2(2x+y) = 0, \\ a^2(x+1+2y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=0, \\ x+1+2y=0. \end{cases}$$

Отсюда $x=\frac{1}{3}$, $y=-\frac{2}{3}$. Тогда

$$\left|\overrightarrow{QP}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\vec{q}_1 + \vec{m} - \frac{2}{3}\vec{q}_2\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{\vec{q}_1^{\,2} + 9\vec{m}^2 + 4\vec{q}_2^{\,2} + 6(\vec{q}_1\cdot m) - 12(\vec{q}_2\cdot m) - 4(\vec{q}_1\cdot\vec{q}_2)}}{3} =$$

$$= \frac{a\sqrt{2+9+8+0-12-4}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Замечание. В большинстве случаев при решении подобных задач удобнее ввести декартову систему координат, выразить векторы $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{m}$ через ее базисные векторы и провести все вычисления в координатной форме.

Пример 31. *В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ с основанием $ABCD$ высота и сторона основания равны* 4, *точки E и F – середины ребер AM и DC соответственно. Найти расстояние между прямыми BE и FM.*

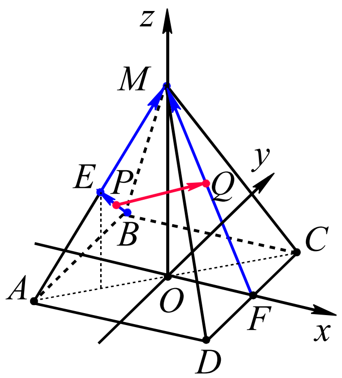


Рис. 37

Решение. Введем декартову систему координат следующим образом. Пусть начало координат O находится в центре основания, ось x проходит через точку O параллельно ребру AD, ось y проходит через точку O параллельно ребру AB, ось z проходит через точку O перпендикулярно плоскости основания (см. рис. 37). Тогда вершины пирамиды имеют координаты:

$$A(-2;-2;0),\ B(-2;2;0),\ C(2;2;0),$$
$$D(2;-2;0),\ M(0;0;4).$$

В этой системе координат $E(-1;-1;2)$ и $F(2;0;0)$. Введем векторы $\overrightarrow{BE} = \vec{q}_1 = \{1;-3;2\}$, $\overrightarrow{FM} = \vec{q}_2 = \{-2;0;4\}$ и $\overrightarrow{EM} = \vec{m} = \{1;1;2\}$.

Тогда

$$\vec{q}_1\cdot\vec{q}_1 = 1\cdot1 + (-3)\cdot(-3) + 2\cdot2 = 14,$$
$$\vec{q}_2\cdot\vec{q}_2 = (-2)\cdot(-2) + 0\cdot0 + 4\cdot4 = 20,$$
$$\vec{m}\cdot\vec{m} = 1\cdot1 + 1\cdot1 + 2\cdot2 = 6,$$
$$\vec{q}_1\cdot\vec{q}_2 = 1\cdot(-2) + (-3)\cdot0 + 2\cdot4 = 6,$$
$$\vec{q}_1\cdot\vec{m} = 1\cdot1 + (-3)\cdot1 + 2\cdot2 = 2,$$
$$\vec{q}_2\cdot\vec{m} = (-2)\cdot1 + 0\cdot1 + 4\cdot2 = 6.$$

Пусть отрезок PQ есть общий перпендикуляр скрещивающихся прямых BE и FM. Представим вектор $\overrightarrow{PQ}$ в виде

$$\overrightarrow{PQ} = x\cdot\vec{q}_1 + \vec{m} + y\cdot\vec{q}_2.$$

Из условия перпендикулярности вектора $\overrightarrow{PQ}$ векторам $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$ получаем

$$\begin{cases} (x\cdot\vec{q}_1 + \vec{m} + y\cdot\vec{q}_2)\cdot\vec{q}_1 = 0, \\ (x\cdot\vec{q}_1 + \vec{m} + y\cdot\vec{q}_2)\cdot\vec{q}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 14x + 2 + 6y = 0, \\ 6x + 6 + 20y = 0. \end{cases}$$

Отсюда $x = -\frac{1}{61}$, $y = -\frac{18}{61}$. Тогда

$$\overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{61}\vec{q}_1 + \vec{m} - \frac{18}{61}\vec{q}_2 =$$

$$= -\frac{1}{61}\{1;-3;2\} + \{1;1;2\} - \frac{18}{61}\{-2;0;4\} =$$

$$= \frac{1}{61}\{96;64;48\}.$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \frac{1}{61}\sqrt{96^2 + 64^2 + 48^2} = \frac{16\sqrt{61}}{61}.$$

Ответ: $\frac{16\sqrt{61}}{61}$.

Если скрещивающиеся прямые поместить в параллельные плоскости, то расстояние между этими прямыми будет равно расстоянию между построенными плоскостями, а оно равно расстоянию от любой точки одной прямой до плоскости, содержащей вторую прямую.

В случае применения координатного метода можно воспользоваться формулой расстояния от точки до плоскости.

Пример 32. (ЕГЭ, 2011). *В правильной треугольной призме* $ABCA_1B_1C_1$, *все рёбра которой равны* 7, *найти расстояние между прямыми* AA_1 *и* BC_1.

Решение. Введем прямоугольную систему координат, как показано на рис. 38.

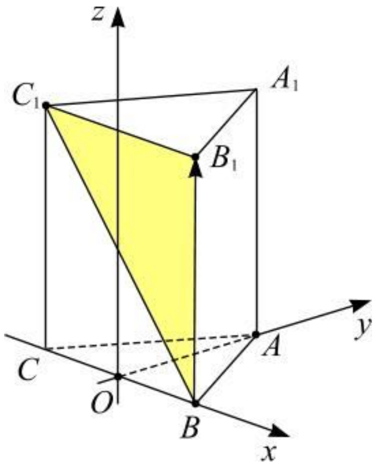


Рис. 38

Поскольку прямые AA_1 и BB_1 параллельны, то плоскость C_1B_1B и прямая AA_1 также параллельны. Плоскость C_1B_1B совпадает с плоскостью грани CC_1B_1B и в введенной системе координат задается уравнением $y = 0$, а ее нормальный вектор имеет следующие координаты: $\vec{n} = \{0; 1; 0\}$.

Так как расстояние между прямыми AA_1 и BB_1 равно расстоянию от любой точки прямой AA_1 до плоскости C_1B_1B, то возьмем, например, точку $A\left(0; \frac{7\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ и, подставив в формулу (4), получим:

$$\rho(AA_1; BB_1) = \rho(A; C_1B_1B) =$$

$$= \frac{\left|0\cdot 0 + 1\cdot\frac{7\sqrt{3}}{2} + 0\cdot 0 + 0\right|}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: $\frac{7\sqrt{3}}{2}$.

Метод опорных задач

При решении задач этого типа можно воспользоваться опорной задачей № 9 (см. главу 3 п. 3.4).

Если AB и CD – скрещивающиеся ребра треугольной пирамиды ABCD, d – расстояние между ними, $AB = a$, $CD = b$, φ *– угол между AB и CD, V – объем пирамиды ABCD, то* $d = \frac{6V}{ab\sin\varphi}$.

Пример 33. *В единичном кубе* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *найти расстояние между диагональю куба* BD_1 *и диагональю грани* AB_1.

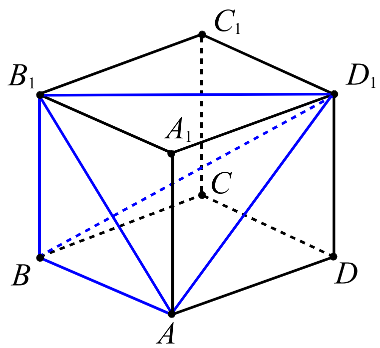


Рис. 39

Решение. Найдем искомое расстояние по формуле $d = \frac{6V}{AB_1\cdot BD_1\sin\varphi}$, где V – объём пирамиды ABB_1D_1 (см. рис. 39), $AB_1 = \sqrt{2}$, $BD_1 = \sqrt{3}$, $\varphi = 90°$ – угол между прямыми BD_1 и AB_1. Так как площадь основания ABB_1 пирамиды ABB_1D_1 равна $\frac{1}{2}$, а высота A_1D_1 равна 1, то $V = \frac{1}{6}$.

Следовательно, $d = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Пример 34. *В правильной шестиугольной призме* $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, *все рёбра которой равны* 1, *найти расстояние между прямыми* AB_1 и BC_1.

Решение. Найдем синус угла φ между данными прямыми. Так как $AB_1 \parallel BM$, то получим косинус угла φ из треугольника MBC_1 (см. рис. 40):

$$\cos\varphi = \frac{BM^2 + BC_1^2 - MC_1^2}{2\cdot BM\cdot BC_1}\frac{2+2-1}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{3}{4}.$$

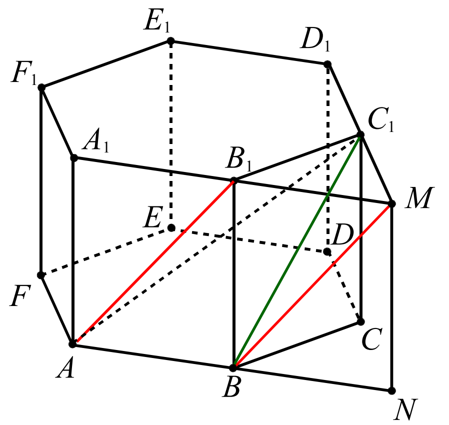


Рис. 40

Тогда $\sin\varphi = \sqrt{1-\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Расстояние от точки C_1 до прямой A_1B_1 равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Объем пирамиды ABB_1C_1 с основанием ABB_1 равен $V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12}$.

Расстояние между прямыми AB_1 и BC_1 равно $d = \dfrac{6\cdot\frac{\sqrt{3}}{12}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Ответ: $\sqrt{21}/7$.

Тренировочные упражнения

39. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми AB_1 и A_1C_1.

40. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между диагональю куба BD_1 и диагональю грани AB_1.

41. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB и A_1C.

42. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 1, а боковое ребро равно 3. Найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1.

43. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1.

44. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми DE_1 и BC_1.

45. Сторона основания ABC правильной треугольной пирамиды $ABCD$ равна $8\sqrt{3}$, высота пирамиды $DO = 6$. Точки A_1, C_1 – середины рёбер AD и CD соответственно. Найдите расстояние между прямыми BA_1 и AC_1.

46. В пирамиде $DABC$ известны длины рёбер: $AB = AC = DB = DC = 10$, $BC = DA = 12$. Найдите расстояние между прямыми DA и BC.

47. В тетраэдре $ABCD$ известно, что $AC = BD = 14$, $BC = AD = 13$, $AB = CD = 15$. Найдите расстояние между прямыми AC и BD.

48. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми MA и BC.

49. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ сторона основания равна 3, а боковое ребро равно 4. Точка M – середина SB. Найдите расстояние между прямыми SA и MC.

50. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с основанием $ABCDEF$ боковое ребро и сторона основания равны 5 и 3 соответственно. Точка N – середина ребра SF, а точка M делит ребро SD так, что $SM : MD = 1:3$. Найдите расстояние между прямыми AN и EM.

1.5. Угол между двумя прямыми

● *Углом между двумя пересекающимися прямыми* называется наименьший из углов, образованных при пересечении прямых.

● $0° < \angle(a, b) \le 90°$.

● *Углом между скрещивающимися прямыми* называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся.

● Две прямые называются *перпендикулярными*, если угол между ними равен $90°$.

● *Угол между параллельными прямыми* считается равным нулю.

Поэтапно-вычислительный метод

При нахождении этим методом угла φ между прямыми m и l используют формулу

$$\cos\varphi = \frac{|b^2 + c^2 - a^2|}{2bc},$$

где a и b – длины сторон треугольника ABC, соответственно параллельных этим прямым.

Пример 35. *В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти угол между прямыми A_1D и D_1E, где E – середина ребра CC_1.*

Решение. Пусть F – середина ребра BB_1, a – ребро куба, φ – искомый угол (см. рис. 41).

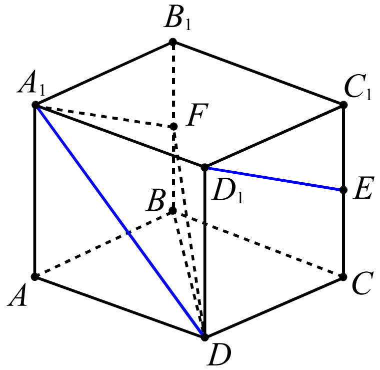


Рис. 41

Так как $A_1F \parallel D_1E$, то φ – угол при вершине A_1 в треугольнике A_1FD. Из треугольника BFD имеем

$$FD^2 = BD^2 + BF^2 = 2a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{9a^2}{4},$$

а из треугольника A_1B_1F получаем

$$A_1F^2 = A_1B_1^{\ 2} + B_1F^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4},$$

откуда $A_1F = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Далее в треугольнике A_1FD используем теорему косинусов

$$FD^2 = A_1D^2 + A_1F^2 - 2A_1D \cdot A_1F\cos\varphi,$$

$$\frac{9a^2}{4} = 2a^2 + \frac{5a^2}{4} - 2a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2}\cos\varphi,$$

откуда $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ и $\varphi = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Ответ: $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Замечание. Для упрощения вычислений длину ребра куба удобно принять за единицу.

Пример 36. *В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найти угол между прямыми AC_1 и B_1C.*

Решение. Проведем $CM \parallel AC_1$ (см. рис. 42). Тогда

$$\angle(AC_1, B_1C) = \angle(CM, B_1C) = \varphi.$$

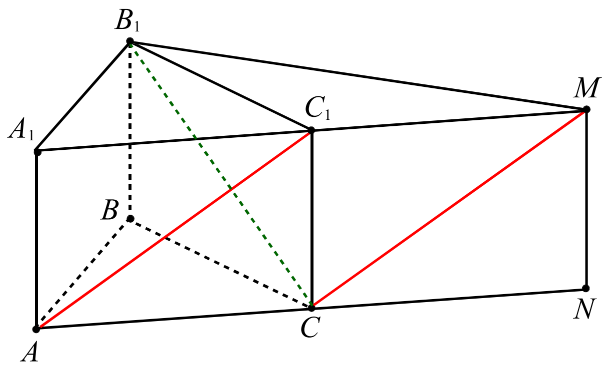


Рис. 42

Из треугольника MC_1B_1 с помощью теоремы косинусов находим

$$MB_1^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-0{,}5) = 3.$$

Далее из треугольника MCC_1, используя теорему косинусов, получаем

$$\cos\varphi = \frac{2+2-3}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{4} \text{ и } \varphi = \arccos\frac{1}{4}.$$

Ответ: $\arccos\frac{1}{4}$.

Пример 37. (МИОО, 2010). *В правильной шестиугольной пирамиде* $MABCDEF$, *стороны основания которой равны* 1, *а боковые рёбра равны* 2, *найти косинус угла между* MB *и* AD.

Решение. Прямая AD параллельна прямой BC (см. рис. 43). Следовательно, искомый угол MBC. В равнобедренном треугольнике MBC проведем апофему ML, $BL = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}$.

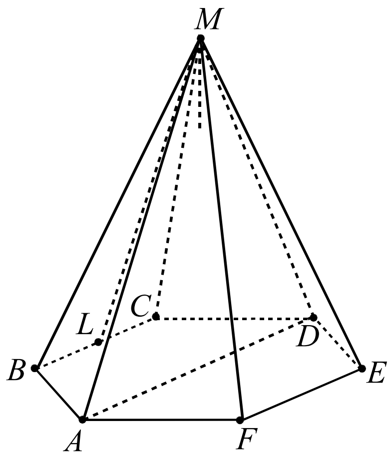


Рис. 43

Из прямоугольного треугольника BML получаем $\cos\angle MBL = \frac{BL}{BM} = \frac{1}{4}$.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Векторно-координатный метод

При нахождении угла φ между прямыми m и l используют формулу

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{p}\cdot\vec{q}|}{|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|}$$

или в координатной форме:

$$\cos\varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}, \quad (5)$$

где $\vec{p} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{q} = \{x_2, y_2, z_2\}$ – векторы, соответственно параллельные этим прямым; в частности, для того чтобы прямые m и l были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы $\vec{p}\cdot\vec{q} = 0$ или $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

Пример 38. *В единичном кубе* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *найти угол между прямыми AE и DF, где E и F – точки, расположенные на рёбрах CD и* C_1D_1 *так, что* $DE = \frac{1}{3}DC$, $C_1F = \frac{1}{3}C_1D_1$.

Решение. Введем прямоугольную систему координат, как указано на рисунке 44.

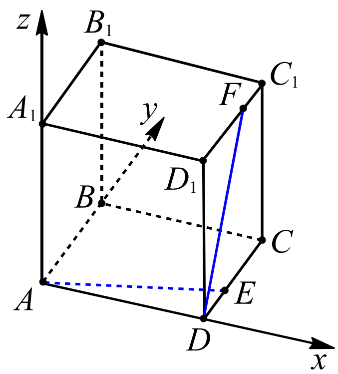


Рис. 44

Тогда $A(0;0;0)$, $D(1;0;0)$, $E\left(1;\frac{1}{3};0\right)$, $F\left(1;\frac{2}{3};1\right)$, $\overrightarrow{AE} = \left\{1;\frac{1}{3};0\right\}$, $\overrightarrow{DF} = \left\{0;\frac{2}{3};1\right\}$.

По формуле (5) получаем

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DF}\right|}{\left|\overrightarrow{AE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DF}\right|} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{\sqrt{10}}{3}\cdot\frac{\sqrt{13}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{130}},$$

$\alpha = \arccos\frac{2}{\sqrt{130}}$, где α – искомый угол.

Ответ: $\arccos\frac{2}{\sqrt{130}}$.

Пример 39. *В правильной шестиугольной призме* $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, *все рёбра которой равны* 1, *найти угол между прямыми* AB_1 и BF_1.

Решение. Введем прямоугольную систему координат, как указано на рисунке 45.

Тогда $A\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $B_1\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$,

$B\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $F_1(-1;0;1)$, $\overrightarrow{AB_1}=\{1;0;1\}$,

$$\overrightarrow{BF_1}=\left\{-\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right\}.$$

По формуле (5) получаем

$$\cos\varphi=\frac{\left|\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BF_1}\right|}{\left|\overrightarrow{AB_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BF_1}\right|}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}\cdot 2}=\frac{\sqrt{2}}{8},$$

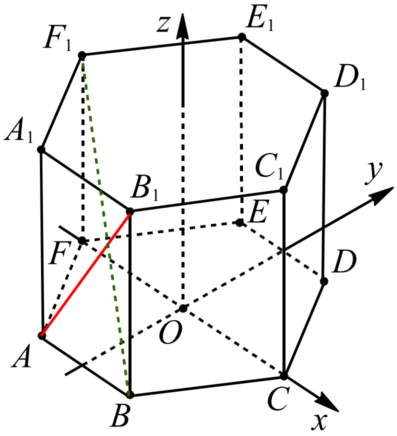


Рис. 45

$\varphi=\arccos\frac{\sqrt{2}}{8}$, где φ – искомый угол.

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{2}}{8}$.

Векторный метод

При использовании данного метода применяют формулу

$$\cos\varphi=\frac{|\vec{p}\cdot\vec{q}|}{|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|},$$

где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ – векторы, соответственно параллельные данным прямым.

Пример 40. *В кубе* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *найти угол между прямыми* EF *и* PQ, *где* E, F, P, Q *– середины рёбер* DD_1, BC, AA_1 *и* B_1C_1 *соответственно.*

Решение. Пусть $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$ (см. рис. 46), где $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=0$.

Тогда

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}=-\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a},$$

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1Q}=\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a},$$

откуда находим

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{EF}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}\right)\left(-\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)=$$

$$=\vec{b}^2-\frac{1}{4}\vec{c}^2-\frac{1}{4}\vec{a}^2=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}\vec{c}^2+\vec{b}^2+\frac{1}{4}\vec{a}^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{2}},$$

$$\left|\overrightarrow{EF}\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}\vec{c}^2+\vec{b}^2+\frac{1}{4}\vec{a}^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{2}},$$

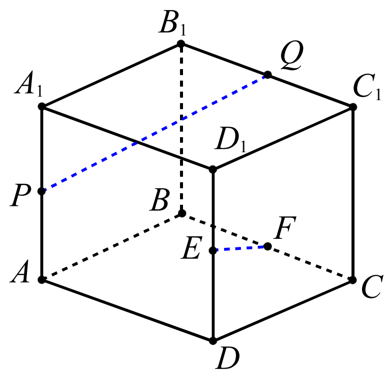


Рис. 46

Подставляя полученные значения в формулу, имеем:

$$\cos\varphi=\frac{\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{EF}\right|}{\left|\overrightarrow{PQ}\right|\cdot\left|\overrightarrow{EF}\right|}=\frac{1}{2}:\frac{3}{2}=\frac{1}{3}.$$

Отсюда $\varphi=\arccos\frac{1}{3}$, где φ – искомый угол.

Ответ: $\arccos\frac{1}{3}$.

Метод опорных задач

При решении задач этого типа можно воспользоваться опорными задачами № 2, 3 и 5 (глава 3 п. 3.4).

Применение теоремы «о трех косинусах»

Пусть α *– величина угла между наклонной* l *и ее проекцией на некоторую плоскость,* β *– величина угла между проекцией наклонной* l *и прямой, проведенной через основание той же наклонной в плоскости проекции, и* γ *– величина угла между наклонной* l *и прямой, проведенной через ее основание в плоскости проекции. Тогда справедливо следующее соотношение:*

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta .$$

Доказательство теоремы приведено в главе 3 п. 3.4, опорная задача №3.

Пример 41. *Угол между боковыми рёбрами правильной четырехугольной пирамиды, не лежащими в одной грани, равен* $120°$. *Найти плоский угол при вершине пирамиды.*

Решение. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ проведем диагональное сечение ASC (см. рис. 47); SD – наклонная к плоскости сечения, SO – высота пирамиды и проекция SD на эту плоскость, SC – прямая, проведенная в плоскости ASC через основание наклонной. По условию $\angle ASC = 120°$.

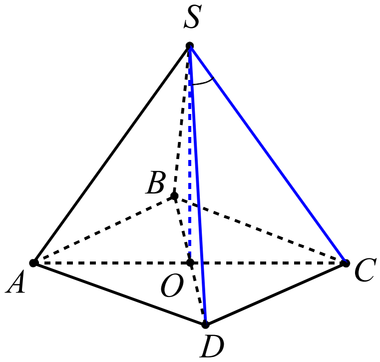


Рис. 47

Из теоремы о трех косинусах получаем:

$$\cos\angle DSC = \cos\angle DSO \cdot \cos\angle CSO .$$

Отсюда

$$\cos\angle DSC = \cos 60° \cdot \cos 60° = \cos^2 60° = \frac{1}{4} .$$

Следовательно, $\angle DSC = \arccos\frac{1}{4}$.

***Ответ*:** $\arccos\frac{1}{4}$.

Применение теоремы косинусов для трехгранного угла

Во всяком трехгранном угле, плоские углы которого равны α, β *и* γ, *а двугранные углы, противолежащие им, соответственно равны* φ_A, φ_B *и* φ_C, *имеют место следующие равенства:*

$$\cos\varphi_C = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta},$$

$$\cos\varphi_B = \frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma},$$

$$\cos\varphi_A = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

Доказательство теоремы приведено в главе 3 п. 3.4, опорная задача №2.

Пример 42. *В кубе* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *найти угол между прямыми* AD_1 *и* DM, *где* M *– середина ребра* D_1C_1.

Решение. Пусть ребро куба равно 1, точка N – середина ребра A_1B_1, тогда искомый угол γ равен углу между AD_1 и AN (см. рис. 48).

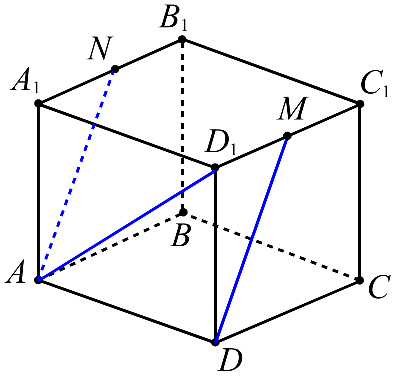


Рис. 48

Используем теорему косинусов для трехгранного угла с вершиной A (опорная задача № 2), в котором $\angle A_1AD_1 = \alpha$,

$\angle A_1AN = \beta$, $\angle NAD_1 = \gamma$. Так как в кубе все двугранные углы при ребрах прямые, то $\varphi = 90°$. Тогда из теоремы следует, что

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta.$$

Из прямоугольного треугольника A_1AD_1 находим $\cos\alpha = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, из треугольника A_1AN получаем

$$\cos\beta = \frac{AA_1}{AN} = 1 : \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Отсюда $\cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$.

Следовательно, $\gamma = \arccos\sqrt{\frac{2}{5}}$.

Ответ: $\arccos\sqrt{\frac{2}{5}}$.

<u>Применение формулы</u>

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

где α, β *и* γ *– углы, которые образует некоторая прямая с тремя попарно перпендикулярными прямыми.*

Доказательство этой формулы приведено в главе 3 п. 3.4, опорная задача №5.

Пример 43. *Дан прямоугольный параллелепипед* $ABCDA_1B_1C_1D_1$. *Его диагональ* B_1D *составляет с ребром* AD *угол* 45°, *а с ребром* DC *угол* 60°. *Найти угол между прямыми* B_1D *и* DD_1.

Решение. Так как параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прямоугольный, то его ребра, выходящие из одной вершины попарно перпендикулярны. Рассмотрим вершину D и воспользуемся данной выше формулой

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

где $\angle ADB_1 = \alpha$, $\angle CDB_1 = \beta$, $\angle D_1DB_1 = \gamma$ (см. рис. 49).

Так как по условию $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, то получаем

$$\cos^2 45° + \cos^2 60° + \cos^2\gamma = 1,$$

$$\cos^2\gamma = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Поскольку γ – острый угол, то $\cos\gamma = \frac{1}{2}$. Отсюда $\gamma = 60°$.

Ответ: 60°.

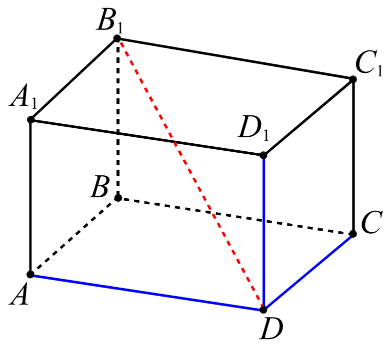


Рис. 49

Решение одной задачи разными методами

Пример 44. *В правильной шестиугольной пирамиде* $SABCDEF$, *стороны основания которой равны* 1, *а боковые рёбра равны* 2, *точка* K *– середина ребра* SD. *Найти косинус угла между прямыми* AS *и* FK.

Решение. *1-й способ* (***поэтапно-вычислительный***). Ребро AS и точка K лежат в плоскости ASD, тогда средняя линия KO треугольника ASD будет параллельна AS и угол $\angle(AS, FK) = \angle(KO, FK)$ (см. рис. 50). Точка O – центр основания пирамиды.

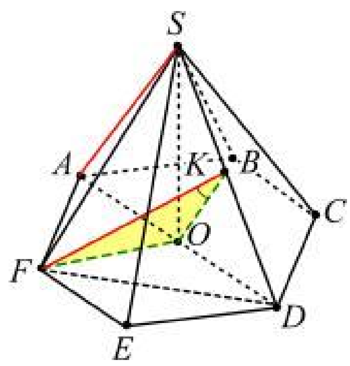


Рис. 50

Найдем угол FKO треугольника FKO. Для этого найдем длины его сторон. Так как в основании пирамиды лежит правильный шестиугольник, то отрезок FO равен его стороне, то есть $FO=1$. Соответственно отрезок KO – средняя линия треугольника ASD и $KO=\frac{AS}{2}=1$.

Найдем FK. Рассмотрим равнобедренный треугольник FSD, в котором $FS=SD=2$, а $FD=\sqrt{3}$ (меньшая диагональ правильного шестиугольника со стороной 1). Учитывая, что FK – медиана треугольника FSD получаем

$$FK=\frac{1}{2}\sqrt{2FS^2+2FD^2-SD^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Теперь из теоремы косинусов для треугольника FKO находим:

$$\cos(\angle FKO)=\frac{FK^2+KO^2-FO^2}{2\cdot FK\cdot KO}=\frac{\sqrt{10}}{4}.$$

Учитывая, что

$$\cos(\angle(AS,FK))=|\cos(\angle FKO)|,$$

получаем, что искомый угол равен $\arccos\frac{\sqrt{10}}{4}$.

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{10}}{4}$.

2-*й способ* (***координатно-векторный***). Введем прямоугольную систему координат, как указано на рисунке 51.

Так как пирамида правильная, то точка O – центр основания пирамиды и из прямоугольного треугольника ASO получаем $SO=\sqrt{AS^2-AO^2}=\sqrt{3}$.

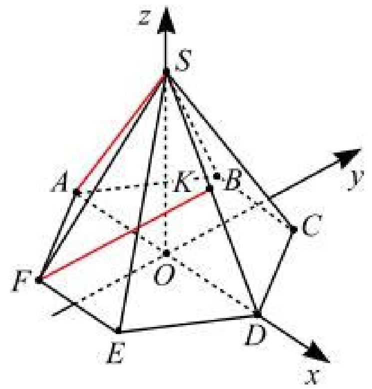


Рис. 51

Тогда $A(-1;0;0)$, $D(1;0;0)$, $F\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $S(0;0;\sqrt{3})$. Учитывая, что точка K – середина отрезка SD, получаем $K\left(\frac{1}{2};0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Отсюда имеем:

$$\overrightarrow{AS}=\{1;0;\sqrt{3}\},\ \overrightarrow{FK}=\left\{1;\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

Используя формулу (5), находим:

$$\cos(\angle(AS,FK))=|\cos(\angle(\overrightarrow{AS},\overrightarrow{FK}))|=$$

$$=\frac{\left|1\cdot 1+0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right|}{\sqrt{1^2+0^2+(\sqrt{3})^2}\cdot\sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{10}}{4}.$$

Отсюда искомый угол равен $\arccos\frac{\sqrt{10}}{4}$.

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{10}}{4}$.

Тренировочные упражнения

51. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка E – середина ребра A_1B_1. Найдите косинус угла между прямыми AE и BD_1.

52. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AD_1 и DM, где M – середина ребра D_1C_1.

53. (ЕГЭ, 2012). Точка E – середина ребра DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми CE и AC_1.

54. (ЕГЭ, 2012). На ребре CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечена точка E так, что $CE:EC_1=1:2$. Найдите угол между прямыми BE и AC_1.

55. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E, F – середины ребер соответственно A_1B_1 и B_1C_1. Найдите косинус угла между прямыми AE и BF.

56. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки *E*, *F* – середины рёбер соответственно A_1B_1 и C_1D_1. Найдите косинус угла между прямыми *AE* и *BF*.

57. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ к диагонали A_1C провели перпендикуляры из вершин *A* и *B*. Найдите угол между этими перпендикулярами.

58. К диагонали куба провели перпендикуляры из остальных вершин куба. На сколько частей и в каком отношении основания этих перпендикуляров разделили диагональ?

59. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ к диагонали A_1C провели перпендикуляры из середин ребер *AB* и *AD*. Найдите угол между этими перпендикулярами.

60. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Его диагональ B_1D составляет с ребром *AD* угол 45°, а с ребром *DC* угол 60°. Найдите угол между прямыми B_1D и DD_1.

61. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда образуют с плоскостью его основания углы φ и ψ. Найдите угол между этими диагоналями.

62. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 12, а боковое ребро равно 5. Найдите угол между прямыми *AC* и BC_1.

63. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми:

а) *AB* и A_1C; **б)** AB_1 и BC_1.

64. (МИОО). Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 8. Высота этой призмы равна 6. Найдите угол между прямыми CA_1 и AB_1.

65. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, точка *D* – середина ребра A_1B_1. Найдите косинус угла между прямыми *AD* и BC_1.

66. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, точки *D*, *E* – середины рёбер соответственно A_1B_1 и B_1C_1. Найдите косинус угла между прямыми *AD* и *BE*.

67. (МИОО). В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник *ABC* с гипотенузой *AB*, равной $8\sqrt{2}$. Высота этой призмы равна 6. Найдите угол между прямыми AC_1 и CB_1.

68. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.

69. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BD_1.

70. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и BE_1.

71. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, точка *G* – середина ребра A_1B_1. Найдите косинус угла между прямыми *AG* и BC_1.

72. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, точка *G* – середина ребра A_1B_1. Найдите косинус угла между прямыми *AG* и BD_1.

73. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, точки *G*, *H* – середины ребер соответственно A_1B_1 и B_1C_1. Найдите косинус угла между прямыми *AG* и *BH*.

74. Найдите угол между непересекающимися медианами граней правильного тетраэдра.

75. В правильном тетраэдре *ABCD* точка *K* – середина *BD*, точка *M* – середина *BC*. Найдите угол между прямыми *AK* и *DM*.

76. В правильной четырёхугольной пирамиде *SABCD* (с вершиной *S*) боковое ребро равно стороне основания. Точка *M* – середина ребра *SB*. Найдите угол между прямыми *CM* и *SO*, где точка *O* – центр основания пирамиды.

77. Ребра AD и BC пирамиды $DABC$ равны 24 *см* и 10 *см*. Расстояние между серединами ребер BD и AC равно 13 *см*. Найдите угол между прямыми AD и BC.

78. В тетраэдре $ABCD$ известно, что $AC = BD = 14$, $BC = AD = 13$, $AB = CD = 15$. Найдите угол между прямыми *AC* и *BD*.

79. В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD*, все рёбра которой равны 1, точки E, F – середины ребер соответственно *SB* и *SC*. Найдите косинус угла между прямыми *AE* и *BF*.

80. Угол между боковыми рёбрами правильной четырехугольной пирамиды, не лежащими в одной грани, равен $120°$. Найдите плоский угол при вершине пирамиды.

81. В правильной шестиугольной пирамиде *SABCDEF*, стороны оснований которой равны 1, а боковые рёбра равны 2, найдите косинус угла между прямыми *SB* и *AE*.

82. В правильной шестиугольной пирамиде *SABCDEF*, стороны оснований которой равны 1, а боковые рёбра равны 2, найдите косинус угла между прямыми *SB* и *AD*.

83. В правильной шестиугольной пирамиде *SABCDEF* с основанием *ABCDEF* сторона основания равна 2, а боковое ребро равно 4. Точка *M* – середина *SE*. Найдите угол между прямыми *SB* и *CM*.

1.6. Угол между прямой и плоскостью

- *Углом между плоскостью и не перпендикулярной ей прямой* называется угол между этой прямой и ее проекцией на данную плоскость.
- $0° < \angle(a, \alpha) < 90°$.
- *Угол между взаимно перпендикулярными прямой и плоскостью равен* $90°$.
- *Если прямая параллельна плоскости (или лежит в ней), то угол между ними считается равным* $0°$.

Поэтапно-вычислительный метод

Угол между прямой l и плоскостью α можно вычислить, если этот угол удается включить в прямоугольный треугольник в качестве одного из острых углов.

Пример 45. *В правильной треугольной призме* $ABCA_1B_1C_1$, *все рёбра которой равны* 1, *найти угол между прямой* AB_1 *и плоскостью* AA_1C_1C.

Решение. Пусть D – середина A_1C_1, тогда B_1D – перпендикуляр к плоскости AA_1C_1C, а D – проекция точки B_1 на эту плоскость (см. рис. 52).

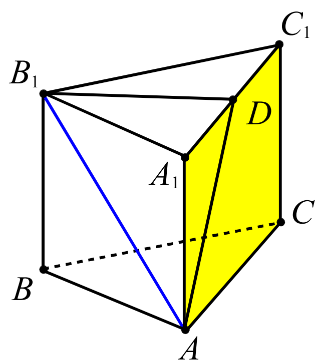


Рис. 52

Если φ – искомый угол, то $\sin\varphi = \dfrac{B_1D}{AB_1}$, где $AB_1 = \sqrt{2}$, $B_1D = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, и поэтому $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$. Отсюда $\varphi = \arcsin\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

Ответ: $\arcsin\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

Пример 46. *В правильной четырехугольной пирамиде* $MABCD$, *все рёбра которой равны* 1, *точка* E – *середина ребра* MC. *Найти синус угла между прямой* DE *и плоскостью* AMB.

Решение. Через вершину M проведем прямую параллельную прямой AD, и отложим на ней единичный отрезок MF (см. рис. 53).

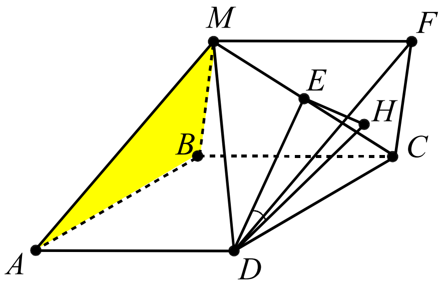


Рис. 53

В тетраэдре $MDCF$ все ребра равны 1 и плоскость DFC параллельна плоскости AMB. Перпендикуляр EH, опущенный из точки E на плоскость DFC, равен половине высоты тетраэдра $MDFC$, т.е. равен $\frac{\sqrt{6}}{6}$ (высота данного тетраэдра равна $\frac{\sqrt{6}}{3}$ – покажите самостоятельно). Угол между прямой DE и плоскостью AMB равен углу EDH, синус которого равен

$$\frac{EH}{DE} == \frac{\sqrt{6}}{6} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Пример 47. *В правильной шестиугольной пирамиде* $MABCDEF$, *стороны основания которой равны* 1, *а боковые рёбра равны* 4, *найти синус угла между прямой* BC *и плоскостью* EMD.

Решение. Так как $AD \parallel BC$, то $\angle(BC, EMD) = \angle(AD, EMD)$ (см. рис. 54). Найдем $\sin\angle(AD, EMD)$.

Высота пирамиды $MO = \sqrt{15}$ (см. пример 15). ML – апофема боковой грани EMD. Высота OH треугольника MOL перпендикулярна плоскости EMD и $OH = \sqrt{\frac{5}{7}}$.

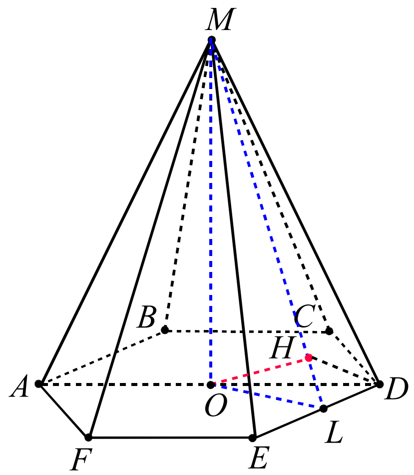


Рис. 54

Тогда прямая HD – ортогональная проекция прямой AD на плоскость EMD и из прямоугольного треугольника OHD

$$\sin\angle(AD, EMD) = \frac{OH}{OD} = \sqrt{\frac{5}{7}} : 1 = \sqrt{\frac{5}{7}}.$$

Ответ: $\sqrt{\frac{5}{7}}$.

Пример 48. (ЕГЭ, 2010). *В правильной треугольной пирамиде* $MABC$ *с основанием* ABC *известны рёбра* $AB = 7\sqrt{3}$, $MC = 25$. *Найти угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины ребер* AM *и* BC.

Решение. Пусть D и E – середины рёбер CB и AM соответственно. Так как пирамида правильная, то $AD \perp CB$ и $MD \perp CB$. Следовательно, $CB \perp ABC$ и $ABC \perp AMD$ (по признаку перпендикулярности плоскостей).

Опустим в плоскости AMD перпендикуляры MO и EF из точек M и E на прямую $AD = ABC \cap AMD$ (см. рис. 55). Так как AD – прямая пересечения перпендикулярных плоскостей, то MO и EF – перпендикулярны к плоскости основания. Тогда точка O – основание высоты MO является центром треугольника

ABC и $AO=\dfrac{AB}{\sqrt{3}}=7$, $OD=\dfrac{AO}{2}=\dfrac{7}{2}$, а прямая FD – ортогональная проекция прямой DE на плоскость основания. Точка F – середина отрезка AO ($EF \parallel MO$ и EF – средняя линия треугольника AMO). Тогда

$$FD=FO+OD=7.$$

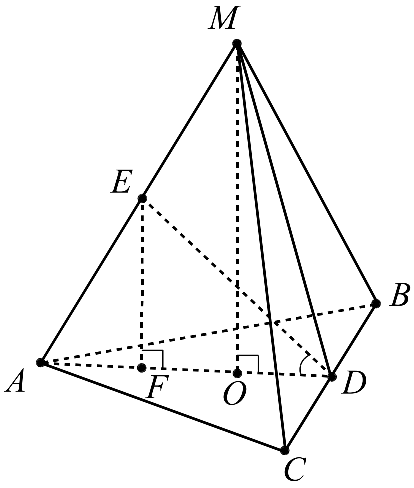


Рис. 55

Высоту пирамиды находим из прямоугольного треугольника AMO:

$$MO=\sqrt{AM^2-AO^2}=\sqrt{25^2-7^2}=24.$$

Тогда $EF=12$

Так как угол между прямой и плоскостью – угол между прямой и ее ортогональной проекцией на эту плоскость, то из прямоугольного треугольника FED получаем

$$\mathrm{tg}\angle(ED,\,ABC)=\frac{EF}{FD}=\frac{12}{7}.$$

Значит, искомый угол равен $\mathrm{arctg}\dfrac{12}{7}$.

Ответ: $\mathrm{arctg}\dfrac{12}{7}$.

Метод использования дополнительного угла

Угол φ между прямой l и плоскостью α и угол ψ между прямой l и перпендикуляром к плоскости α удовлетворяют соотношению $\varphi+\psi=90^\circ$ (см. рис. 56). Поэтому в некоторых случаях через дополнительный угол ψ легко выйти на искомый угол φ.

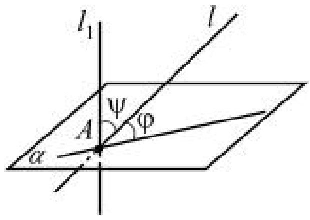


Рис. 56

Пример 49. *В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти угол между прямой CD_1 и плоскостью AB_1D_1.*

Решение. Прямая $A_1C_1 \perp B_1D_1$ ($A_1B_1C_1D_1$ – квадрат), тогда по теореме о трех перпендикулярах $A_1C \perp B_1D_1$ (см. рис. 57). Аналогично $A_1C \perp AD_1$. Следовательно, прямая A_1C перпендикулярна плоскости AB_1D_1. Так как $A_1D_1 \perp D_1C_1C$, то $A_1D_1 \perp D_1C$. Поэтому в прямоугольном треугольнике A_1D_1C $\angle D_1CA_1=\psi$ есть угол между данной прямой CD_1 и перпендикуляром A_1C к данной плоскости, а $\angle D_1A_1C=\varphi$, как дополнительный угол до 90° для $\angle D_1CA_1$, является искомым углом.

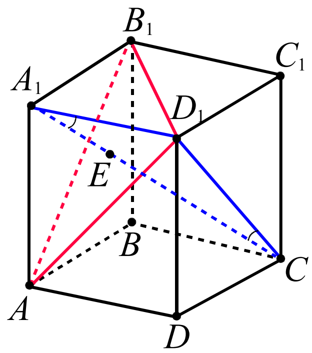


Рис. 57

Имеем $\cos\varphi=\dfrac{A_1D_1}{A_1C}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ или $\varphi=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Метод опорных задач

Пусть прямая l пересекает плоскость α в точке A, точка M принадлежит прямой l (см. рис. 58). Тогда угол φ между прямой l и плоскостью α можно вычислить, используя формулу:

$$\sin\varphi = \sin\angle(l, \alpha) = \frac{\rho(M, \alpha)}{AM}.$$

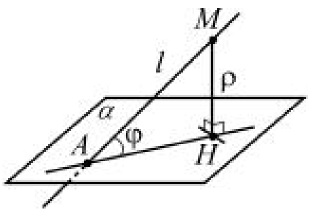


Рис. 58

Пример 50. *В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти угол между прямой A_1B_1 и плоскостью BDC_1.*

Решение. Так как $A_1B_1 \parallel D_1C_1$ (см. рис. 59), то $\angle(A_1B_1, BDC_1) = \angle(D_1C_1, BDC_1)$. Точки D_1 и O_1 лежат на прямой D_1B_1, параллельной плоскости BDC_1, значит, $\rho(D_1; BDC_1) = \rho(O_1; BDC_1) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (см. пример 14). Далее последовательно получаем

$$\sin\angle(A_1B_1, BDC_1) = \sin\angle(D_1C_1, BDC_1) =$$
$$= \frac{\rho(D_1, BDC_1)}{D_1C_1} = \frac{\rho(O_1, BDC_1)}{D_1C_1} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Отсюда $\angle(A_1B_1, BDC_1) = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$.

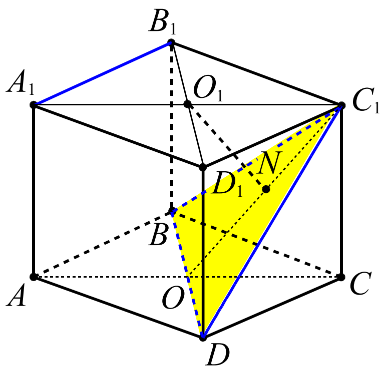


Рис. 59

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Векторно-координатный метод

Угол между прямой l и плоскостью α можно вычислить по формуле

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{p}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{p}|} \qquad (6)$$

или в координатной форме

$$\sin\varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

где $\vec{n} = \{x_1, y_1, z_1\}$ – вектор нормали плоскости α, $\vec{p} = \{x_2, y_2, z_2\}$ – направляющий вектор прямой l;

прямая l и плоскость α параллельны тогда и только тогда, когда

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

В задачах на вычисление угла между прямой и плоскостью или угла между пересекающимися плоскостями (будет рассмотрено позже) в общем случае уравнение плоскости находить не требуется.

Координаты вектора нормали можно вывести, если известны координаты трех точек плоскости M, N, P, не лежащих на одной прямой. Для этого находим координаты двух векторов плоскости $\vec{a} = \overrightarrow{MN} = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{MP} = \{b_1, b_2, b_3\}$.

Предположим, что вектор с координатами $\vec{n} = \{p, q, r\}$ (здесь p, q, r – неизвестные числа, которые нужно найти) перпендикулярен любому вектору плоскости α, в том числе векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Его координаты ищутся из условий равенства нулю скалярных произведений $\vec{n}$ с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{a} = 0,\\ \vec{n}\cdot\vec{b} = 0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_1p + a_2q + a_3r = 0,\\ b_1p + b_2q + b_3r = 0.\end{cases}$$

Эта система имеет бесконечное множество решений, так как векторов, перпендикулярных плоскости α, бесконечно много. Выразив, например, из системы координаты p и q через r, выберем ненулевой вектор $\vec{n} = \{p(r); q(r); r\}$, взяв в качестве r какое-нибудь число (обычно берут такое число, чтобы в координатах не было дробей или радикалов).

Пример 51. *В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти угол между прямой AD_1 и плоскостью α, проходящей через точки A_1, E и F, где точка E – середина ребра C_1D_1, а точка F лежит на ребре DD_1, так, что $D_1F = 2DF$.*

Решение. Введем прямоугольную систему координат, как указано на рисунке 60.

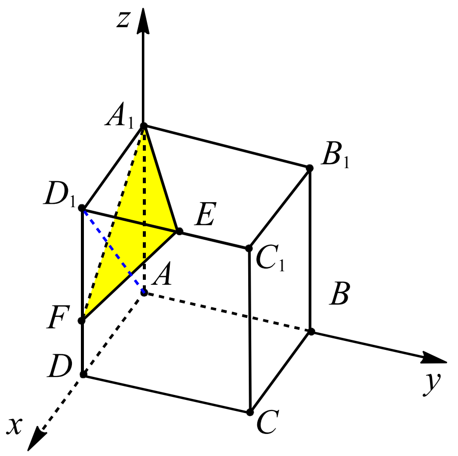


Рис. 60

Тогда $A(0;0;0)$, $A_1(0;0;1)$, $D_1(1;0;1)$, $E\left(1;\frac{1}{2};1\right)$, $F\left(1;0;\frac{1}{3}\right)$, $\overrightarrow{AD_1} = \{1;0;1\}$, $\overrightarrow{A_1E} = \left\{1;\frac{1}{2};0\right\}$, $\overrightarrow{A_1F} = \left\{1;0;-\frac{2}{3}\right\}$.

Пусть $\vec{n} = \{x, y, z\}$ – вектор, перпендикулярный плоскости α, φ – искомый угол. Тогда по формуле (6):

$$\sin\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{AD_1}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AD_1}\right|\cdot|\vec{n}|}.$$

Вектор $\vec{n}$ найдем из условий перпендикулярности этого вектора векторам $\overrightarrow{A_1E}$ и $\overrightarrow{A_1F}$, т.е. из условий

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1E} = 0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1F} = 0\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}x + \dfrac{y}{2} = 0,\\ x - \dfrac{2}{3}z = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = -2x,\\ z = 1{,}5x.\end{cases}$$

Пусть $x = 2$, тогда $y = -4$, $z = 3$ и $\vec{n} = \{2;-4;3\}$, $|\vec{n}| = \sqrt{29}$. Так как $\left|\overrightarrow{AD_1}\right| = \sqrt{2}$ и $\overrightarrow{AD_1}\cdot\vec{n} = 1\cdot 2 + 0\cdot(-4) + 1\cdot 3 = 5$, то

$$\sin\varphi = \frac{5}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{29}} = \frac{5}{\sqrt{58}}.$$

Отсюда $\varphi = \arcsin\frac{5}{\sqrt{58}}$.

***Ответ*:** $\arcsin\frac{5}{\sqrt{58}}$.

Пример 52. *В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найти угол между прямой AB_1 и плоскостью ACE_1.*

Решение. Введем прямоугольную систему координат, как указано на рисунке 61.

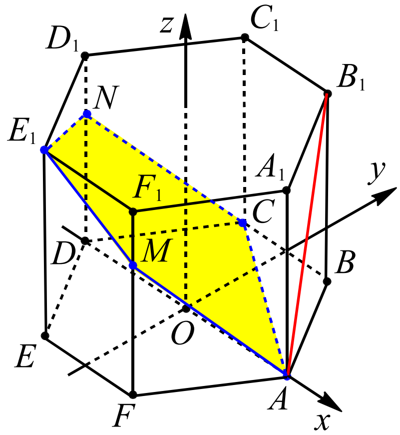


Рис. 61

Тогда

$A(1;0;0)$, $B_1\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$, $\overrightarrow{AB_1} = \left\{-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right\}$.

Составим уравнение плоскости, проходящей через точки

$A(1;0;0)$, $C\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $E_1\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$.

Подставляя координаты этих точек в общее уравнение плоскости

$$ax+by+cz+d=0,$$

получаем систему

$$\begin{cases} a+d=0, \\ -\dfrac{1}{2}a+\dfrac{\sqrt{3}}{2}b+d=0, \\ -\dfrac{1}{2}a-\dfrac{\sqrt{3}}{2}b+c+d=0 \end{cases}$$

Отсюда имеем $a=-d$, $b=-\sqrt{3}d$, $c=-3d$. Подставим в уравнение плоскости и сократим на $-d\neq 0$:

$$x+\sqrt{3}y+3z-1=0.$$

Вектор нормали полученной плоскости $\vec{n}=\{1;\sqrt{3};3\}$. Тогда по формуле (6)

$$\sin\varphi=\frac{\left|\overrightarrow{AB_1}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AB_1}\right|\cdot|\vec{n}|},$$

где φ – искомый угол. Имеем

$$\sin\varphi=\frac{4}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{26}}{13}.$$

Отсюда $\varphi=\arcsin\dfrac{2\sqrt{26}}{13}$.

Ответ: $\arcsin\dfrac{2\sqrt{26}}{13}$.

Векторный метод

Пример 53. *В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все рёбра которой равны 1, найти угол между прямой DE, где E – середина апофемы SF грани ASB, и плоскостью ASC.*

Решение. Так как прямая OD перпендикулярна плоскости ASC, то вектор $\overrightarrow{OD}$ является вектором нормали плоскости ASC.

Пусть $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AS}=\vec{c}$ (см. рис. 62), где $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{a}|^2\cos 60^\circ=0{,}5$. Тогда

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=$$
$$=-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})+\vec{a}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b}),$$

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}=$$
$$=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\left(\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)=$$
$$=-\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c},$$

$$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{OD}=\left(-\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)=$$
$$=-\frac{1}{2}\vec{a}^2-\frac{1}{8}\vec{b}^2+\frac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{c}-\frac{1}{4}\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8},$$

$$\left|\overrightarrow{DE}\right|=\sqrt{\left(-\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)^2}=$$
$$=\sqrt{\vec{a}^2+\frac{1}{16}\vec{b}^2+\frac{1}{4}\vec{c}^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\vec{a}\cdot\vec{c}+2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}}=$$
$$=\sqrt{1+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}=\sqrt{\frac{15}{16}},$$

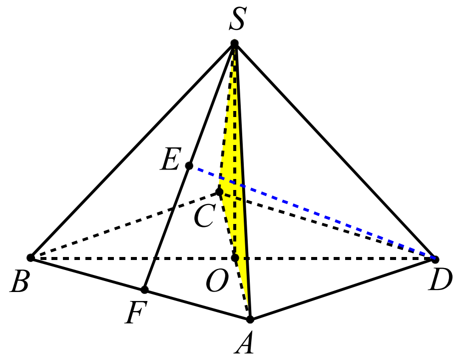


Рис. 62

$$\left|\overrightarrow{OD}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Подставляя полученные значения в формулу (6) $\sin\varphi=\dfrac{\left|\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{OD}\right|}{\left|\overrightarrow{DE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OD}\right|}$, имеем

$$\sin\varphi=\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{\sqrt{15}}\cdot\sqrt{2}=\frac{3}{\sqrt{30}}.$$

Отсюда $\varphi=\arcsin\dfrac{3}{\sqrt{30}}$, где φ – искомый угол.

Ответ: $\arcsin\dfrac{3}{\sqrt{30}}$.

Тренировочные упражнения

84. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой A_1B_1 и плоскостью BDC_1.

85. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1.

86. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите тангенс угла между прямой AA_1 и плоскостью BC_1D.

87. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите тангенс угла между прямой AC_1 и плоскостью BCC_1.

88. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка E – середина ребра A_1B_1. Найдите синус угла между прямой AE и плоскостью BDD_1.

89. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка E – середина ребра A_1B_1. Найдите синус угла между прямой AE и плоскостью BDC_1.

90. (ЕГЭ, 2012). В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $AB=2$, $AD=AA_1=1$. Найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1.

91. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью AA_1C и прямой A_1B, если $AA_1=3$, $AB=4$, $BC=4$.

92. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью A_1BC и прямой BC_1, если $AA_1=8$, $AB=6$, $BC=15$.

93. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AA_1=4$, $A_1D_1=6$, $C_1D_1=6$ найдите тангенс угла между плоскостью ADD_1 и прямой EF, проходящей через середины ребер AB и B_1C_1.

94. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB=4$, $BC=6$, $CC_1=4$ найдите тангенс угла между плоскостью ABC и прямой EF, проходящей через середины ребер AA_1 и C_1D_1.

95. (ЕГЭ, 2011). В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$, стороны основания которой равны 5, а боковые рёбра 7, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1.

96. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все стороны которой равны, найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью ABC_1.

97. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, точка D – середина ребра A_1B_1. Найдите синус угла между прямой AD и плоскостью BCC_1.

98. В основании прямой призмы $MNKM_1N_1K_1$ лежит прямоугольный треугольник MNK, у которого угол N равен $90°$, угол M равен $60°$, $NK=18$. Диагональ боковой грани M_1N составляет угол $30°$ с плоскостью MM_1K_1. Найдите высоту призмы.

99. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC, в котором угол C равен $90°$, угол A равен $30°$, $AC=10\sqrt{3}$. Диагональ боковой грани B_1C составляет угол $30°$ с плоскостью AA_1B_1. Найдите высоту призмы.

100. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания равна 3, а высота равна 1. Найдите угол между прямой F_1B_1 и плоскостью AF_1C_1.

101. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ACE_1.

102. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, точка G – середина ребра A_1B_1. Найдите синус угла между прямой AG и плоскостью BCC_1.

103. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, точка G – середина ребра C_1D_1. Найдите синус угла между прямой AG и плоскостью BCC_1.

104. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, точка G – середина ребра A_1B_1. Найдите синус угла между прямой AG и плоскостью BDD_1.

105. (МИОО). В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания равна 7, а высота равна 1. Найдите угол между прямой F_1B_1 и плоскостью AF_1C_1.

106. (ЕГЭ, 2010). В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны ребра: $AB = 20\sqrt{3}$, $SC = 29$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины ребер AS и BC.

107. (ЕГЭ, 2010). В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны рёбра: $AB = 12\sqrt{3}$, $SC = 13$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой AM, где M – точка пересечения медиан грани SBC.

108. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC сторона основания равна 2, а боковое ребро равно 3. Найдите угол между плоскостью BSC и прямой MN, где точка N – середина ребра AC, а точка M лежит на ребре SB так, что $BM = 1$.

109. Дана правильная треугольная пирамида $ABCD$, сторона основания и высота которой равны $6\sqrt{3}$ и 4 соответственно. Найдите угол между прямой EF и плоскостью основания ABC, если F – середина ребра DB, а E лежит на AD так, что $AE : ED = 3 : 1$.

110. (МИОО). В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC сторона основания равна $6\sqrt{3}$, а боковое ребро равно 10. Найдите угол между плоскостью ABC и прямой MN, где точка N – середина ребра AC, а точка M делит ребро BS так, что $BM : MS = 2 : 1$.

111. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все рёбра которой равны 1, найдите косинус угла между прямой AB и плоскостью SAD.

112. (ЕГЭ, 2011). В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, в которой $AB = 3$, $SA = 7$, точка E – середина ребра SB. Найдите угол между прямой CE и плоскостью SBD.

113. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, точка E – середина ребра MC. Найдите синус угла между прямой DE и плоскостью AMB.

114. В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые рёбра равны 4, найдите синус угла между прямой BC и плоскостью EMD.

115. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, боковые рёбра которой равны 2, а стороны основания – 1, найдите косинус угла между прямой AC и плоскостью SAF.

1.7. Угол между плоскостями

• *Двугранный угол, образованный полуплоскостями измеряется величиной его линейного угла, получаемого при пересечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру.*

• *Величина* ***двугранного угла*** *принадлежит промежутку* $(0°, 180°)$.

• *Величина угла* ***между пересекающимися плоскостями*** *принадлежит промежутку* $(0°, 90°]$.

• *Угол между двумя параллельными плоскостями* считается равным $0°$.

Построение линейного угла двугранного угла или поэтапно-вычислительный метод

Рассматриваемый метод позволяет находить поэтапно искомый угол при решении известных задач, к которым сводится данная задача. Перечислим типы этих задач, связанных с нахождением угла:

- между пересекающимися прямыми a и b, лежащими в рассматриваемых плоскостях и перпендикулярными их линии пересечения (см. рис. 63);

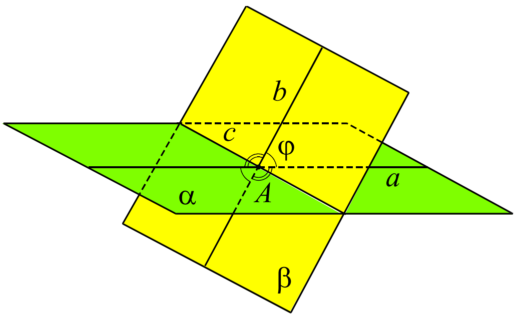


Рис. 63

- между прямыми, параллельными прямым a и b или между b и прямой, параллельной a;
- между плоскостями, параллельными данным плоскостям α и β или между α и плоскостью, параллельной β;
- между перпендикулярами к данным плоскостям.

Решение задачи этим методом сводится непосредственно к построению линейного угла двугранного угла, образованного пересекающимися плоскостями α и β, и вычислению его значения. Соответствующий линейный угол строится с помощью двух перпендикуляров a и b, проведенных в указанных плоскостях к прямой их пересечения, а его величина в дальнейшем находится либо из некоторого прямоугольного треугольника, либо из некоторого треугольника с применением теоремы косинусов.

Пример 54. *В правильной четырехугольной пирамиде* $SABCD$, *все рёбра которой равны* 1, *найти двугранный угол между основанием и боковой гранью.*

Решение. Пусть E и K – середины ребер AD и BC соответственно, O – центр основания $ABCD$ (см. рис. 64). Тогда $SE \perp AD$, $EK \perp AD$ и поэтому $\angle SEK = \varphi$ – линейный угол данного двугранного угла.

Так как $AD = 1$, $OE = \dfrac{1}{2}$, $SD = 1$, то

$$SE = \sqrt{SD^2 - ED^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\varphi = \frac{OE}{SE} = \frac{1}{\sqrt{3}},\quad \varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

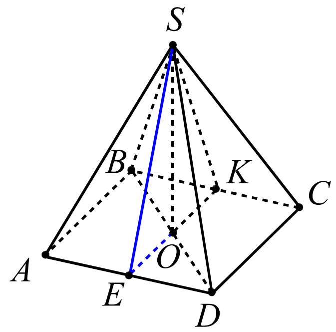


Рис. 64

Ответ: $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Пример 55. *В правильной шестиугольной пирамиде, стороны основания которой равны* 1, *а боковые рёбра равны* 2, *найти косинусы двугранных углов при основании и при боковом ребре.*

Решение. Рассмотрим пирамиду $MABCDEF$. Поскольку пирамида правильная, то равны все ее двугранные углы при основании и равны все углы между любыми ее смежными боковыми гранями. Найдем, например, угол между плоскостью основания и боковой гранью MAF и угол между боковыми гранями FME и MDE (см. рис. 65).

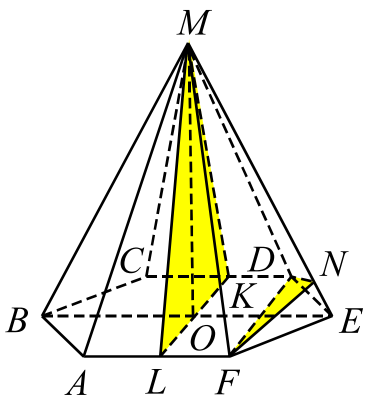


Рис. 65

Прямая AF – ребро двугранного угла $MAFE$. Пусть O – центр основания, тогда MO – высота пирамиды. Пусть L – середина отрезка AF, тогда ML – апофема грани AMF,

$$ML = \sqrt{AM^2 - AL^2} = \sqrt{4 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

По теореме о трех перпендикулярах прямая LO перпендикулярна AF. Следовательно, $\angle MLO$ – линейный угол двугранного угла $MAFB$. $LO = \frac{\sqrt{3}}{2}$, так как является высотой равностороннего треугольника AOF со стороной 1. Из прямоугольного треугольника LMO находим

$$\cos\angle MLO = \frac{LO}{ML} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Прямая ME – ребро двугранного угла $FMED$. В треугольниках FME и MDE проведём высоты к стороне ME из точек F и D соответственно. Поскольку $\Delta FME = \Delta DME$, то эти высоты «сойдутся» в одной точке N. Следовательно, $\angle DNF$ – линейный угол двугранного угла $FMED$.

Из равенства треугольников FME и MDE следует равенство высот FN и DN. Найдем FN. Для этого вычислим площадь треугольника FME. Поскольку апофема грани FME равна $ML = \frac{\sqrt{15}}{2}$, $S_{FME} = = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{15}}{4}$, то высота FN, опущенная на ME, равна:

$$FN = \frac{2S_{FME}}{ME} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Далее, рассмотрим равнобедренный треугольник FDN. В нем $FD = 2LO = \sqrt{3}$. Косинус угла DNF можно найти, воспользовавшись теоремой косинусов для стороны DF:

$$\cos\angle FND = \frac{FN^2 + DN^2 - FD^2}{2 \cdot FN \cdot DN} = -\frac{3}{5}.$$

Таким образом, искомые косинусы двугранных углов при основании и при боковом ребре равны $\frac{1}{\sqrt{5}}$ и $-\frac{3}{5}$ соответственно.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{5}}$ и $-\frac{3}{5}$.

Так как в подобных телах соответствующие углы равны, а линейные элементы (стороны, высоты, медианы и т.п.) пропорциональны, то при вычислении углов в какой-либо конфигурации (обычно в треугольнике) важно учитывать лишь отношение длин соответствующих отрезков. Поэтому, если все линейные элементы конфигурации зависят от одного параметра, то можно принимать значение этого параметра равным какому-нибудь числу. В частности, в кубе при нахождении угловых величин часто полагают длину его ребра равным единице.

Пример 56. *В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти угол между плоскостями сечений AB_1C_1D и CB_1A_1D.*

Решение. Пусть ребро куба равно 1. Прямая B_1D – линия пересечения плоскостей сечений AB_1C_1D и CB_1A_1D, так как B_1 и D – их общие точки (см. рис. 66). В прямоугольных треугольниках B_1A_1D и B_1C_1D проведем высоты к гипотенузе

B_1D из точек A_1 и C_1 соответственно. Поскольку треугольники B_1A_1D и B_1C_1D равны, то эти высоты «сойдутся» в одной точке N. Следовательно, $\angle A_1NC_1$ – линейный угол двугранного угла $A_1B_1DC_1$.

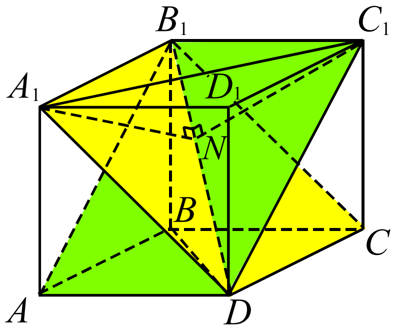


Рис. 66

Поскольку прямоугольные треугольники B_1A_1D и B_1C_1D равны, то равны и высоты A_1N и C_1N, опущенные на гипотенузу B_1D. Длины указанных высот можно найти, например, через площадь любого из этих треугольников:

$$A_1N = C_1N = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Далее, рассмотрим равнобедренный треугольник A_1C_1N. В нем $A_1C_1 = \sqrt{2}$. Найдём угол A_1NC_1, воспользовавшись теоремой косинусов для стороны A_1C_1:

$$\cos\angle A_1NC_1 = \frac{A_1N^2 + C_1N^2 - A_1C_1^2}{2\cdot A_1N\cdot C_1N} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 - (\sqrt{2})^2}{2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}} = -0{,}5.$$

Отсюда $\angle A_1NC_1 = \frac{2\pi}{3}$.

Следовательно, искомый угол между плоскостями сечений A_1B_1D и B_1C_1D равен $\frac{\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

Пример 57. *В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковое ребро равно b, а сторона основания a. Найти косинус угла между плоскостями ABC_1 и A_1B_1C.*

Решение. Построим линию пересечения плоскостей ABC_1 и A_1B_1C (см. рис. 67).

Диагонали AC_1 и A_1C в боковой грани AA_1C_1C призмы пересекаются в точке D и делятся этой точкой пополам. Аналогично, диагонали BC_1 и B_1C в боковой

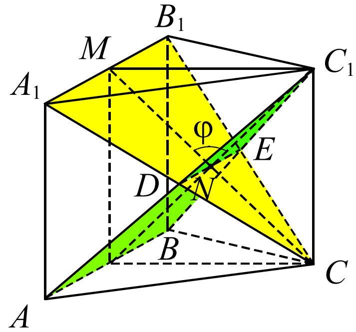


Рис. 67

грани BB_1C_1C призмы пересекаются в точке E и также делятся этой точкой пополам. Точки D и E – общие точки плоскостей ABC_1 и A_1B_1C, поэтому прямая DE является линией их пересечения. Кроме того, отрезок DE является средней линией равнобедренных треугольников ABC_1 и A_1B_1C, а значит, $DE \parallel AB$ и $DE \parallel A_1B_1$.

Рассмотрим равнобедренные треугольники C_1DE и CDE. Они равны по трем сторонам. Проведем в этих треугольниках медианы C_1N и CN к общему основанию DE. Тогда $C_1N \perp DE$ и $CN \perp DE$. Следовательно, $\angle C_1NC$ – линейный угол двугранного угла C_1DEC.

Найдем теперь косинус угла C_1NC. С этой целью рассмотрим равнобедренный треугольник C_1NC. В нем $C_1N =$

$$= CN = \frac{CM}{2} = \frac{\sqrt{CB_1^2 - MB_1^2}}{2} = \frac{\sqrt{3a^2 + 4b^2}}{4},$$

$CC_1 = b$. Воспользовавшись теоремой косинусов для стороны CC_1, получим:

$$\cos\angle C_1NC = \frac{C_1N^2 + CN^2 - CC_1^2}{2\cdot C_1N\cdot CN} = \frac{3a^2 - 4b^2}{3a^2 + 4b^2}.$$

В рассматриваемом примере требуется найти косинус угла φ между плоскостями ABC_1 и A_1B_1C. Встает закономерный вопрос. Нашли ли мы косинус того угла, который требуется в условии, или же нам необходим косинус смежного с ним угла C_1NM (кстати, на рис. 67 через φ обозначена величина именно этого угла)? На этот вопрос можно ответить следующим образом. Согласно определению угла между плоскостями, его величина может быть в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$, т.е. косинус такого угла должен быть положительным. Поэтому, если $3a^2-4b^2>0$, то $\cos\varphi=\cos\angle C_1NC=\frac{3a^2-4b^2}{3a^2+4b^2}$, если же $3a^2-4b^2\le 0$, то

$$\cos\varphi=\cos\angle C_1NM=\frac{4b^2-3a^2}{3a^2+4b^2}$$

(поскольку косинусы смежных углов равны по абсолютной величине и противоположны по знаку). Таким образом, окончательно: $\cos\varphi=\frac{|3a^2-4b^2|}{3a^2+4b^2}$.

Ответ: $\frac{|3a^2-4b^2|}{3a^2+4b^2}$.

Метод параллельных прямых

В некоторых задачах построение линейного угла затруднительно. И тогда вместо линейного угла можно рассмотреть угол с соответственно параллельными сторонами по отношению к линейному углу.

Пример 58. *В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным a, через точки M на ребре BB_1 и N на DD_1 такие, что $BM=\frac{3a}{4}$ и $DN=\frac{a}{4}$, параллельно AC проведена секущая плоскость. Определить угол между секущей плоскостью и плоскостью ABC.*

Решение. Построим сечение куба плоскостью, проходящей через точки M и N параллельно AC (см. рис. 68).

С этой целью рассмотрим диагональную плоскость AA_1C_1. Соединим точки M и N, тогда $AA_1C_1\cap MN=O$, где точка O – середина отрезка MN. Поскольку, согласно условию, секущая плоскость параллельна AC, то прямая l ее пересечения с плоскостью AA_1C_1 также будет параллельна AC. Поэтому проведем через точку O прямую QP ($QP\parallel AC$). Соединив последовательно отрезками точки Q, M, P и N, получим сечение QMPN. Так как секущая плоскость пересекает параллельные грани куба по параллельным прямым, то четырехугольник QMPN является параллелограммом.

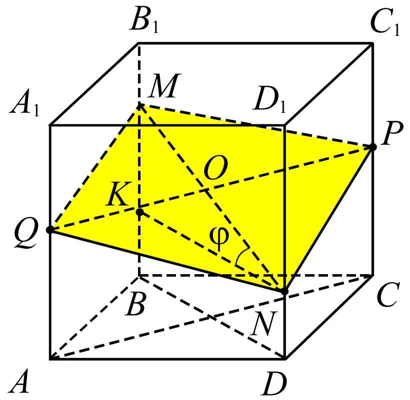


Рис. 68

В квадрате ABCD диагонали перпендикулярны ($BD\perp AC$), значит, $BD\perp l$. Проведем в плоскости BDD_1 прямую KN, параллельную BD. Тогда $KN\perp l$. Прямая BD является проекцией наклонной MN на плоскость ABC, поэтому по теореме о трех перпендикулярах $MN\perp l$. Прямая MN лежит в плоскости $MPNQ$, а прямая KN параллельна плоскости ABC. Следовательно, угол KNM равен линейному углу искомого двугранного угла (как углы с соответственно параллельными сторонами).

Пусть $\angle MNK=\varphi$, тогда

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{MB-ND}{BD}=\frac{a}{2}:a\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Метод параллельных плоскостей

В некоторых задачах является эффективным подход, при котором вместо угла между пересекающимися плоскостями α и β ищется угол между плоскостями, параллельными рассматриваемым (или между одной из данных плоскостей и плоскостью, параллельной другой из них).

Пример 59. *В кубе* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *найти угол между плоскостью грани* AA_1B_1B *и плоскостью* BC_1D.

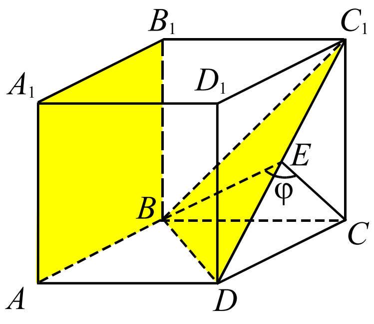


Рис. 69

Решение. Так как плоскость AA_1B_1 параллельна плоскости DD_1C_1, то искомый угол равен углу между плоскостями BC_1D и DD_1C_1 (см. рис. 69). Диагонали грани куба перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам. Поэтому $EC \perp DC_1$, где точка E – середина отрезка DC_1. Также $BE \perp DC_1$, как высота равностороннего треугольника BC_1D. Следовательно, угол BEC есть линейный угол φ двугранного угла BDC_1C.

Треугольник BEC – прямоугольный ($BC \perp DD_1C_1$) и $\angle BCE$ – прямой. Пусть ребро куба равно 1, тогда $BC = 1$, $EC = \frac{D_1C}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Следовательно,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{BC}{EC} = 1 : \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Отсюда $\varphi = \operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

Метод использования перпендикуляров к плоскостям

На рис. 70 прямые l_α и l_β лежат в плоскости γ и перпендикулярны плоскостям α и β соответственно. Тогда угол между ними равен углу между плоскостями α и β. В общем случае прямые l_α и l_β могут быть скрещивающимися.

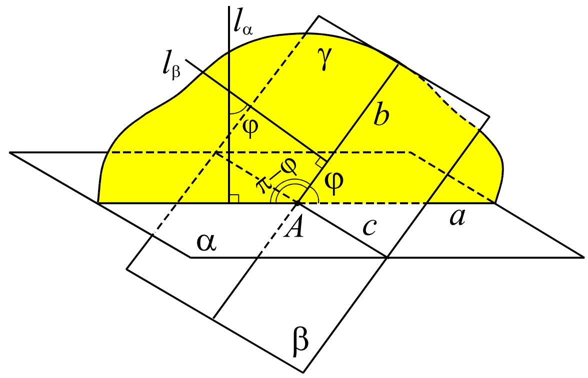


Рис. 70

Пример 60. *В кубе* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *найти угол между плоскостями* AB_1C *и* BC_1D.

Решение. Диагональ куба A_1C перпендикулярна плоскости BC_1D (см. рис. 71), так как $A_1C \perp BC_1$ и $A_1C \perp DC_1$ (по теореме о трех перпендикулярах). Аналогично диагональ куба BD_1 перпендикулярна плоскости AB_1C. Таким образом, задача сводится к нахождению острого угла между диагоналями A_1C и BD_1 прямоугольника BCD_1A_1.

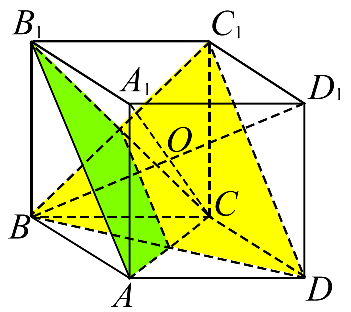


Рис. 71

Пусть O – точка пересечения диагоналей и ребро куба равно 1. Тогда $A_1C = BD_1 = \sqrt{3}$, $OC = OB = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Из треугольника OBC находим

$$\cos\angle BOC = \frac{OB^2 + OC^2 - BC^2}{2 \cdot OB \cdot OC} = \frac{1}{3},$$

т.е. $\angle BOC = \arccos\frac{1}{3}$.

Ответ: $\arccos\frac{1}{3}$.

Пример 61. *Дан куб* $ABCDA_1B_1C_1D_1$. *Найти угол между плоскостями* AB_1C_1 *и* A_1B_1C.

Решение. Каждая из прямых AD_1 и CD_1 (см. рис. 72) перпендикулярна плоскостям A_1B_1C и AB_1C_1 соответственно (докажите самостоятельно).

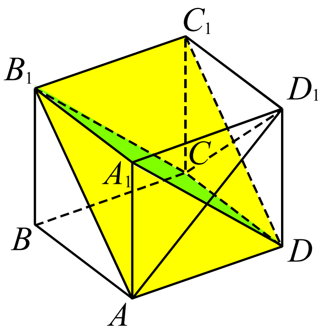


Рис. 72

Поэтому величина искомого угла равна величине угла между прямыми AD_1 и CD_1. Так как треугольник AD_1C – равносторонний, то получаем ответ: $\frac{\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

Пример 62. (МИОО, 2010). *Дана прямая четырехугольная призма* $ABCDA_1B_1C_1D_1$, *в основании которой лежит прямоугольник* $ABCD$, *в котором* $AB=5$, $AD=\sqrt{33}$. *Через середину ребра* CD *проведена плоскость перпендикулярно прямой* B_1D. *Найти тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью грани* AA_1D_1D, *если расстояние между прямыми* A_1C_1 *и* BD *равно* $\sqrt{3}$.

Решение. Так как прямая B_1D перпендикулярна проведенной плоскости (на рис. 73 эта плоскость изображена условно), а прямая $CD\perp AA_1D_1$ ($CD\perp D_1D$ так как призма и $CD\perp AD$ так как $ABCD$ – прямоугольник), то угол между рассматриваемыми плоскостями равен углу между прямыми B_1D и CD.

Тангенс этого угла найдем из прямоугольного треугольника CB_1D ($CD\perp AA_1D_1$, следовательно $CD\perp B_1C$). Так как скрещивающиеся прямые A_1C_1 и BD лежат в параллельных плоскостях, то расстояние между ними равно расстоянию между этими плоскостями. Значит высота и боковое ребро призмы равны $\sqrt{3}$. Тогда $B_1C=\sqrt{BC^2+BB_1^2}=6$ и искомый тангенс равен $\frac{B_1C}{CD}=\frac{6}{5}=1{,}2$.

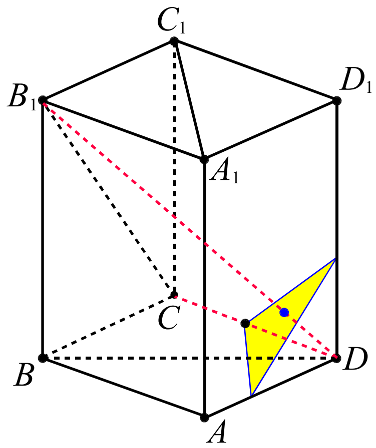


Рис. 73

Ответ: 1,2.

Метод опорных задач

При решении задач этого типа можно воспользоваться опорными задачами № 2, 4, 6 (глава 3 п. 3.4).

Применение «теоремы косинусов для трехгранного угла»

Пример 63. *В правильной треугольной призме* $ABCA_1B_1C_1$ *все рёбра равны* 1. *Найти косинус угла между плоскостями* AB_1C *и* A_1B_1C.

Решение. Рассмотрим трехгранный угол при вершине B_1 пирамиды AA_1CB_1. Обозначим через φ плоский угол двугранного угла AB_1CA_1 (см. рис. 74). Найдем значения синусов и косинусов плоских углов при вершине B_1.

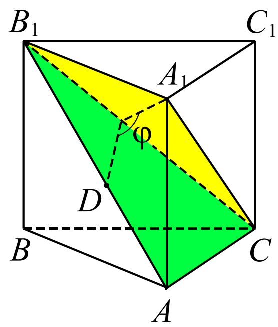


Рис. 74

Грань ABB_1A_1 – квадрат, поэтому $\cos\angle AB_1A_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$. В треугольнике AB_1C $AC=1$, $AB_1=B_1C=\sqrt{2}$. Тогда

$$\cos\angle AB_1C=\frac{AB_1^2+B_1C^2-AC^2}{2\cdot AB_1\cdot B_1C}=$$

$$=\frac{2+2-1}{2\cdot 2}=\frac{3}{4},$$

$$\sin\angle AB_1C=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

В треугольнике B_1A_1C $B_1A_1=1$, $A_1C=B_1C=\sqrt{2}$. Тогда $\cos\angle CB_1A_1=$

$$=\frac{B_1C+B_1A_1^2-A_1C^2}{2\cdot B_1C\cdot B_1A_1}=\frac{2+1-2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot 1}=\frac{1}{2\sqrt{2}},$$

$$\sin\angle CB_1A_1=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}.$$

Применяя теорему косинусов для трехгранного угла (опорная задача 2) при вершине B_1, получим

$$\cos\varphi=$$

$$=\frac{\cos\angle AB_1A_1-\cos\angle AB_1C\cdot\cos\angle CB_1A_1}{\sin AB_1C\cdot\sin\angle CB_1A_1}=\frac{5}{7}.$$

Ответ: 5/7.

Применение теоремы «о трех синусах»

Пусть в одной из граней двугранного угла, величина которого равна α, проведена прямая, составляющая с ребром двугранного угла угол β $(0<\beta<\pi/2)$, γ – величина угла между этой прямой и другой гранью. Тогда справедливо следующее соотношение:

$$\sin\gamma=\sin\alpha\sin\beta.$$

Доказательство этой формулы приведено в главе 3 п. 3.4, опорная задача №4.

Пример 64. *В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями AB_1C и ABC.*

Решение. Пусть α – искомый угол. Так как $\beta=\angle B_1AC=60°$, $\gamma=\angle B_1AB=45°$ (см. рис. 75), то по теореме «о трех синусах» имеем:

$$\sin 45°=\sin\alpha\sin 60°,$$

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Отсюда $\alpha=\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ответ: $\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$.

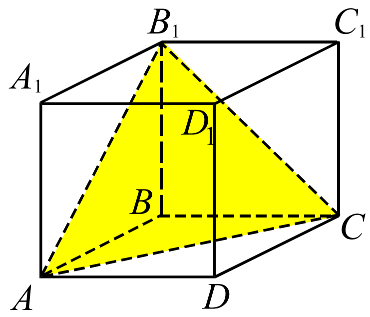


Рис. 75

Пример 65. *Диагональ A_1C куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит ребром двугранного угла, грани которого проходят через B_1 и D_1. Найти величину этого угла.*

Решение. Будем считать куб единичным. Пусть E – середина отрезка A_1D, тогда из треугольника A_1D_1E получаем

$$\sin\gamma=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(γ – угол между прямой A_1D_1 и плоскостью A_1B_1C) (см. рис. 76).

Из треугольника A_1D_1C находим

$$\sin\beta=\frac{CD_1}{CA_1}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}},$$

где β – угол между прямой A_1D_1 и ребром A_1C двугранного угла. Далее имеем

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\alpha\cdot\sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Так как точка E (проекция точки D_1 на плоскость A_1B_1C)

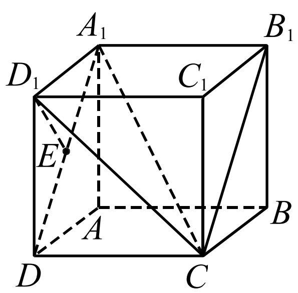


Рис. 76

расположена вне искомого двугранного угла, то $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{2\pi}{3}$.

Использование расстояний от точки до плоскости и до прямой

Решение задач этого пункта основано на применении таких понятий, как расстояние от точки до прямой и расстояние от точки до плоскости.

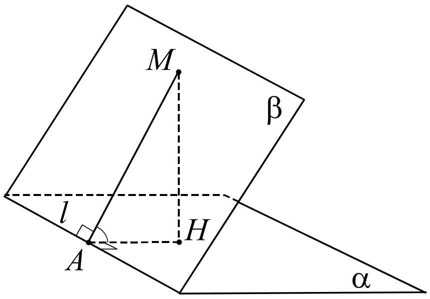


Рис. 77

Пусть даны две плоскости α и β (см. рис. 77), пересекающиеся по прямой l. Если известны расстояния от точки M, лежащей в плоскости β, до плоскости α и до прямой l, то угол между плоскостями α и β можно вычислить, используя формулу

$$\sin\angle(\alpha,\beta) = \frac{\rho(M,\alpha)}{\rho(M,l)}, \qquad (7)$$

где $\rho(M,\alpha)$ – расстояние от точки M до плоскости α, $\rho(M,l)$ – расстояние от точки M до прямой l.

Пример 66. *В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти угол между плоскостями AB_1C и A_1B_1C.*

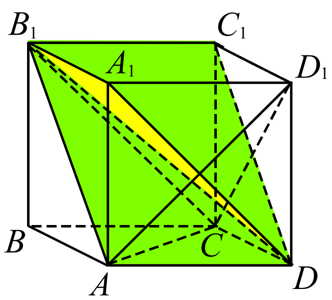


Рис. 78

Решение. Пусть сторона куба равна 1. Плоскости AB_1C и A_1B_1C пересекаются по прямой B_1C (см. рис. 78). Расстояние от точки A, принадлежащей плоскости AB_1C, до прямой B_1C равно длине высоты равностороннего треугольника AB_1C со стороной $\sqrt{2}$, т.е. $\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Расстояние от точки A до плоскости A_1B_1C равно половине диагонали квадрата, т.е. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. По формуле (7) имеем

$$\sin\angle(AB_1C, A_1B_1C) = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Отсюда искомый угол равен $\arcsin\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Ответ: $\arcsin\sqrt{1/3}$.

Замечание. В зависимости от способа решения ответ может быть записан в разной форме: $\arcsin\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$ или $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Использование теоремы о площади ортогональной проекции многоугольника

При применении этого метода угол φ между плоскостями α и β можно вычислить, используя формулу

$$\cos\varphi = \frac{S_{\text{пр}}}{S}, \qquad (8)$$

где S – площадь многоугольника, лежащего в плоскости α, $S_{\text{пр}}$ – площадь его ортогональной проекции на плоскость β.

Пример 67. *В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти угол между плоскостью грани AA_1B_1B и плоскостью BC_1D.*

Решение. Пусть ребро куба равно 1. Ортогональной проекцией треугольника BC_1D на плоскость AA_1B_1 является треугольник AB_1B (см. рис. 79), площадь ко-

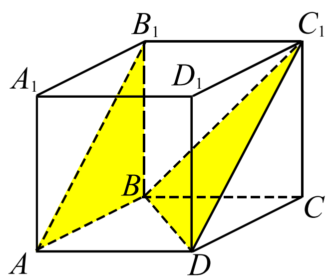


Рис. 79

торого равна $0{,}5$. Поскольку $BD = BC_1 = C_1D = \sqrt{2}$ (как диагонали граней куба), то $S_{BC_1D} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Из формулы (8) получим:

$$\cos\angle(AA_1B_1, BC_1D) = \frac{S_{AB_1B}}{S_{BC_1D}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Отсюда $\angle(AA_1B_1, BC_1D) = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Пример 68. *В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти угол между плоскостями AB_1C и ABC.*

Решение. Пусть α – искомый угол. Используем соотношение

$$S_{ABC} = S_{AB_1C}\cdot\cos\alpha,$$

где $S_{ABC} = \frac{1}{2}$, $S_{AB_1C} = \frac{(\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (треугольник AB_1C равносторонний) (см. рис. 80). Отсюда имеем

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно, $\alpha = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

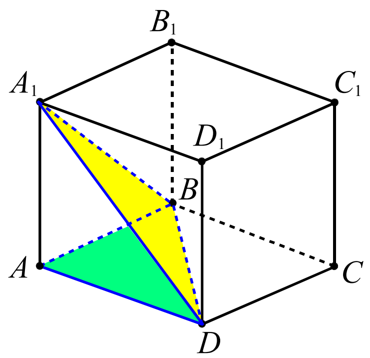


Рис. 80

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Обычно рассматриваемый в этом пункте метод применяют при вычислении угла между плоскостью сечения и плоскостью какой-либо грани многогранника (часто в качестве такой грани выступает основание пирамиды или призмы). Так поступают в случаях, когда нахождение $S_{\text{пр}}$ и $S_{\text{сечения}}$ является более простой задачей, чем непосредственное вычисление двугранного угла φ, сопряжённое с построением на чертеже его линейного угла.

Пример 69. *В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, стороны основания которой равны 1, а боковые рёбра равны 2, найти угол между плоскостями BA_1D_1 и AA_1E_1.*

Решение. Заметим, что четырехугольники BA_1D_1C и AA_1E_1E – сечения данной призмы плоскостями BA_1D_1 и AA_1E_1 (см. рис. 81). Так как BA, D_1E_1 и CF перпендикулярны плоскости AA_1E_1 (они перпендикулярны AA_1 и AE), то трапеция AA_1E_1G, где G – середина отрезка AE, есть ортогональная проекция трапеции BA_1D_1C на плоскость сечения AA_1E_1E.

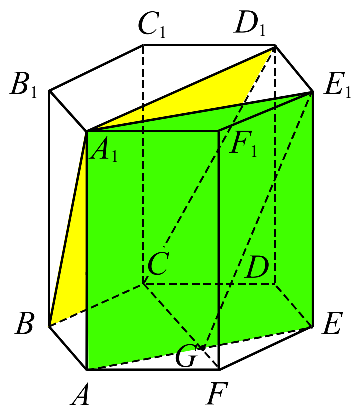


Рис. 81

Трапеция BA_1D_1C – равнобедренная, с основаниями $A_1D_1 = 2$, $BC = 1$ и боковыми сторонами $BA_1 = CD_1 = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$. Ее высота h равна

$$h = \sqrt{CD_1^2 - \left(\frac{A_1D_1 - BC}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{5 - \left(\frac{2-1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{19}}{2},$$

а площадь равна

$$S_{BA_1D_1C}=\frac{A_1D_1+BC}{2}\cdot h=\frac{3\sqrt{19}}{4}.$$

В прямоугольной трапеции AA_1E_1G основания равны $A_1E_1=\sqrt{3}$, $AG=\frac{\sqrt{3}}{2}$, а высота $AA_1=2$. Её площадь равна

$$S_{AA_1E_1G}=\frac{A_1E_1+AG}{2}\cdot AA_1=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

В соответствии с формулой (8) находим:

$$\cos\angle(BA_1D_1,\ AA_1E_1)=$$

$$=\frac{S_{AA_1E_1G}}{S_{BA_1D_1C}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}:\frac{3\sqrt{19}}{4}=\sqrt{\frac{12}{19}}.$$

Значит, искомый угол равен $\arccos\sqrt{\frac{12}{19}}$.

Ответ: $\arccos\sqrt{\frac{12}{19}}$.

Векторно-координатный метод

Применение данного метода позволяет свести решение исходной задачи к задаче о нахождении угла:

а) между векторами нормалей данных плоскостей;

б) между направляющими векторами скрещивающихся прямых *a* и *b*, лежащих в рассматриваемых плоскостях и перпендикулярных к их линии пересечения.

Метод использования векторов нормалей пересекающихся плоскостей

Любой ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости – ее вектор *нормали*.

Известно, что каждое уравнение первой степени $px+qy+rz+d=0$ при условии $p^2+q^2+r^2\neq 0$ задает в прямоугольной системе координат единственную плоскость, для которой вектор $\vec{n}=\{p,q,r\}$ является вектором нормали.

Задачу о нахождении угла между плоскостями α и β, заданными в прямоугольной декартовой системе координат уравнениями $p_1x+q_1y+r_1z+d_1=0$ и $p_2x+q_2y+r_2z+d_2=0$ соответственно, удобнее свести к задаче о нахождении угла между векторами их нормалей $\vec{n}_\alpha=\{p_1,q_1,r_1\}$ и $\vec{n}_\beta=\{p_2,q_2,r_2\}$, используя формулу

$$\cos\angle(\alpha,\beta)=\frac{|\vec{n}_\alpha\cdot\vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha|\cdot|\vec{n}_\beta|}=$$
$$=\frac{|p_1p_2+q_1q_2+r_1r_2|}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}\cdot\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}}. \qquad (9)$$

Пример 70. *Найти угол между плоскостями* $2x+3y+6z-5=0$ *и* $4x+4y+2z-7=0$.

Решение. Векторы $\vec{n}_1=\{2;3;6\}$ и $\vec{n}_2=\{4;4;2\}$ – векторы нормалей плоскостей $2x+3y+6z-5=0$ и $4x+4y+2z-7=0$ соответственно.

Тогда по формуле (9) косинус угла φ между данными плоскостями равен:

$$\cos\varphi=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=$$
$$=\frac{|2\cdot4+3\cdot4+6\cdot2|}{\sqrt{4+9+36}\cdot\sqrt{16+16+4}}=\frac{16}{21}.$$

Отсюда $\varphi=\arccos\frac{16}{21}$.

Ответ: $\arccos\frac{16}{21}$.

Пример 71. (ЕГЭ, 2012). *В правильной четырехугольной призме* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *стороны основания равны* 1, *а боковые рёбра равны* 4. *На ребре* AA_1 *отмечена точка* E *так, что* $AE:EA_1=3:1$. *Найти угол между плоскостями* ABC *и* BED_1.

Решение. Введем прямоугольную систему координат, как показано на рисунке 82. Найдем координаты точек $B(0;0;0)$, $E(1;0;3)$, $D_1(1;1;4)$.

Составим уравнение плоскости BED_1. Для этого подставим поочередно координаты точек B, E, D_1 в общее уравнение плоскости $ax+by+cz+d=0$. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} d=0, \\ a+3c+d=0, \\ a+b+4c+d=0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} d=0, \\ a=-3c, \\ b=-c \end{cases}$$

Отсюда находим уравнение плоскости $-3cx-cy+cz=0$, или (после сокращения на $c\neq 0$):

$$-3x-y+z=0.$$

Из составленного уравнения плоскости находим координаты нормального вектора $\vec{n_1}=\{-3;-1;1\}$ плоскости BED_1.

Так как ось Bz перпендикулярна плоскости основания, то нормальный вектор плоскости ABC имеет координаты $\vec{n_2}=\{0;0;1\}$.

Используя формулу (9), вычислим косинус искомого угла:

$$\cos\angle(BED_1, ABC)=\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}=$$

$$=\frac{|-3\cdot 0-1\cdot 0+1\cdot 1|}{\sqrt{9+1+1}\cdot\sqrt{0+0+1}}=\frac{1}{\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{11}}{11}.$$

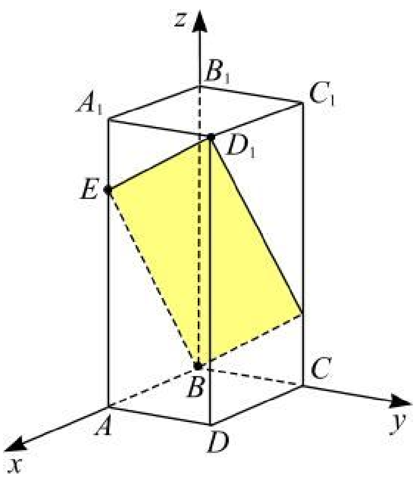


Рис. 82

Откуда искомый угол равен $\arccos\frac{\sqrt{11}}{11}$.

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{11}}{11}$.

Пример 72. *В кубе* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *найти угол между плоскостями* AB_1C *и* BC_1D.

Решение. Пусть $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$ (см. рис. 83), где $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=0$.

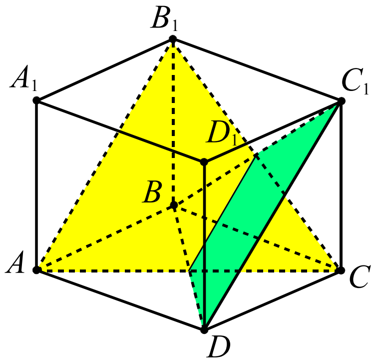


Рис. 83

Векторы $\overrightarrow{BD_1}$ и $\overrightarrow{CA_1}$ являются векторами нормали плоскостей AB_1C и BC_1D соответственно, так как $BD_1\perp AB_1C$ и $CA_1\perp BC_1D$. Тогда

$$\overrightarrow{BD_1}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c},\ \overrightarrow{CA_1}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c},$$

$$\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{CA_1}=(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})(-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})=$$
$$=-\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2=1,$$

$$\left|\overrightarrow{BD_1}\right|=\sqrt{(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})^2}=\sqrt{\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2}=\sqrt{3},$$

$$\left|\overrightarrow{CA_1}\right|=\sqrt{(-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})^2}=\sqrt{\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2}=\sqrt{3},$$

$\cos\varphi=\dfrac{\left|\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{CA_1}\right|}{\left|\overrightarrow{BD_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CA_1}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$. Откуда

$\varphi=\arccos\frac{1}{3}$, где $\varphi-$ искомый угол.

Ответ: $\arccos\frac{1}{3}$.

Пример 73. *В правильной пирамиде* $MABCD$ *(*$M-$ *вершина) высота и сторона основания равны* 4. *Точка* $F-$ *середина ребра* MC. *Плоскость* α *проходит через середину ребра* AM *перпендикулярно прямой* BF. *Найти угол между*:

а) плоскостью α *и плоскостью основания;*

б) плоскостью α *и прямой* DM.

Решение. Так как прямая $BF\perp\alpha$, то ее направляющий вектор $\overrightarrow{BF}$ является вектором нормали плоскости α (см. рис.

84). Точка O – основание высоты MO, следовательно, вектор $\overrightarrow{OM}$ является вектором нормали плоскости ABC. Тогда получим

$$\cos\angle(\alpha,\ ABC)=\frac{|\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{OM}|}{|\overrightarrow{BF}|\cdot|\overrightarrow{OM}|}. \qquad (*)$$

Соответственно, для нахождения угла между прямой DM и плоскостью α воспользуемся формулой:

$$\sin\angle(\alpha,\ DM)=\frac{|\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{DM}|}{|\overrightarrow{BF}|\cdot|\overrightarrow{DM}|}. \qquad (**)$$

Введем систему координат $Oxyz$ следующим образом. Пусть начало координат находится в центре основания в точке O, ось x проходит через точку O параллельно ребру AD, ось y проходит через точку O параллельно ребру AB, ось z проходит через точку O перпендикулярно плоскости основания (см. рис. 84). Найдем координаты точек и векторов:

$$O(0;\ 0;\ 0),\ \ B(-2;\ 2;\ 0),\ \ C(2;\ 2;\ 0),$$
$$M(0;\ 0;\ 4),\ \ F(1;1;\ 2),\ D(2;\ -2;\ 0).$$

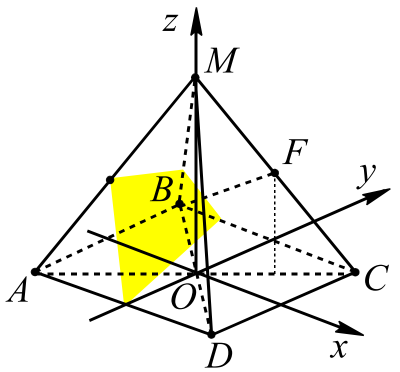


Рис. 84

Тогда

$$\overrightarrow{BF}=\{3;\ -1;\ 2\},\ |\overrightarrow{BF}|=\sqrt{9+1+4}=\sqrt{14},$$
$$\overrightarrow{OM}=\{0;\ 0;\ 4\},\ |\overrightarrow{OM}|=4,$$
$$\overrightarrow{DM}=\{-2;\ 2;\ 4\},\ |\overrightarrow{DM}|=\sqrt{4+4+16}=2\sqrt{6}.$$

Используя формулы (*) и (**), получим

$$\cos\angle(\alpha,\ ABC)=\frac{|3\cdot 0+(-1)\cdot 0+2\cdot 4|}{\sqrt{14}\cdot 4}=$$
$$=\frac{2}{\sqrt{14}},$$

$$\sin\angle(\alpha,DM)=\frac{|3\cdot(-2)+(-1)\cdot 2+2\cdot 4|}{\sqrt{14}\cdot 2\sqrt{6}}=0.$$

Ответ: $\angle(\alpha,\ ABC)=\arccos\frac{2}{\sqrt{14}}$,

$\angle(\alpha,DM)=0$.

Пример 74. *В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти угол между плоскостями AD_1E и D_1FC, где точки E и F – середины рёбер A_1B_1 и B_1C_1 соответственно.*

Решение. Введем прямоугольную систему координат, как указано на рисунке 85.

Тогда $A(0;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D_1(1;0;1)$, $E\left(0;\frac{1}{2};1\right)$, $F\left(\frac{1}{2};1;1\right)$, $\overrightarrow{AE}=\left\{0;\frac{1}{2};1\right\}$,

$\overrightarrow{AD_1}=\{1;0;1\}$, $\overrightarrow{CD_1}=\{0;-1;1\}$, $\overrightarrow{CF}=\left\{-\frac{1}{2};0;1\right\}$.

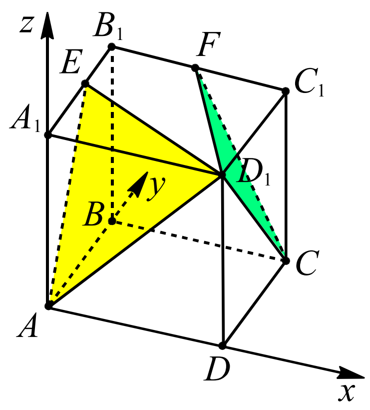


Рис. 85

Найдем вектор $\vec{n}_1=\{p,q,r\}$, перпендикулярный плоскости AD_1E. Этот вектор должен быть перпендикулярным векторам $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{AD_1}$, поэтому

$$\begin{cases}\vec{n}_1\cdot\overrightarrow{AE}=0\\ \vec{n}_1\cdot\overrightarrow{AD_1}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{q}{2}+r=0\\ p+r=0\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}q=-2r\\ p=-r.\end{cases}$$

Пусть $r=-1$, тогда $p=1$, $q=2$ и $\vec{n}_1=\{1;\ 2;\ -1\}$.

Найдем вектор $\vec{n}_2=\{a,b,c\}$, перпендикулярный плоскости D_1FC. Этот вектор должен быть перпендикулярным векторам $\overrightarrow{CD_1}$ и $\overrightarrow{CF}$, поэтому

$$\begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{CD_1} = 0, \\ \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{CF} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b + c = 0, \\ -\dfrac{a}{2} + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = c, \\ a = 2c. \end{cases}$$

Пусть $c = 1$, тогда $a = 2$, $b = 1$ и $\vec{n}_2 = \{2; 1; 1\}$. Для нахождения искомого угла φ используем формулу (9) $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$. Так как

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 3$, $|\vec{n}_1| = \sqrt{6}$, $|\vec{n}_2| = \sqrt{6}$, то $\cos\varphi = 0,5$, откуда $\varphi = 60°$.

Ответ: $60°$.

Пример 75. *Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти угол между плоскостями MNP и AKD, где точки M – центр грани AA_1B_1B, N – середина ребра B_1C_1, K – середина ребра CC_1, P – делит ребро DD_1 в отношении $DP : PD_1 = 1 : 2$.*

Решение. Введем систему координат следующим образом. Точку A примем за начало координат. Оси Ax, Ay и Az направим вдоль ребер куба AD, AB и AA_1 соответственно (см. рис. 86). Пусть ребро куба равно 1. Выразим координаты точек:

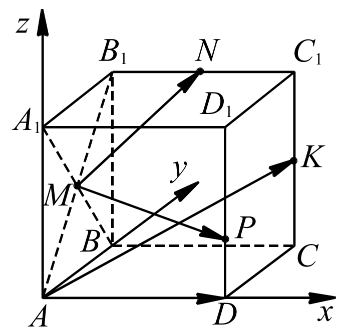


Рис. 86

$$A(0; 0; 0),\ D(1; 0; 0),\ K(1; 1; 0,5),$$
$$M\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right),\ M\left(\frac{1}{2}; 1; 1\right),\ P\left(1; 0; \frac{1}{3}\right).$$

Найдем координаты векторов:

$$\overrightarrow{MN} = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\},\ \overrightarrow{MP} = \left\{1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{6}\right\}$$
$$\overrightarrow{AD} = \{1; 0; 0\},\ \overrightarrow{AK} = \{1; 1; 0,5\}.$$

Теперь найдем координаты векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, перпендикулярных плоскостям MNP и AKD соответственно. Начнем с вектора $\vec{n}_1 = \{p_1, q_1, r_1\}$. Его координаты ищутся из условий равенства нулю скалярных произведений $\vec{n}_1$ с векторами $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{MP}$. Получаем систему

$$\begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{MN} = 0, \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{MP} = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,5p_1 + 0,5q_1 + 0,5r_1 = 0, \\ p_1 - 0,5q_1 - \dfrac{1}{6}r_1 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p_1 = -\frac{2}{9}r_1,\ q_1 = -\frac{7}{9}r_1.$$

Эта система имеет бесконечное множество решений, так как векторов, перпендикулярных плоскости MNP, бесконечно много. Выберем из данного множества ненулевой вектор $\vec{n}_1$, положив $r_1 = 9$. Тогда $\vec{n}_1 = \{-2; -7; 9\}$.

Найдем теперь координаты вектора $\vec{n}_2 = \{p_2, q_2, r_2\}$, перпендикулярного плоскости AKD. Его координаты ищутся из условий равенства нулю скалярных произведений $\vec{n}_2$ с векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AK}$.

Получаем систему

$$\begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{AD} = 0, \\ \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{AK} = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_2 + 0 \cdot q_2 + 0 \cdot r_2 = 0, \\ p_2 + q_2 + 0,5r_2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p_2 = 0,\ q_2 = -0,5r_2.$$

Возьмем $r_2 = 2$. Тогда $\vec{n}_2 = \{0; -1; 2\}$.

Для нахождения угла между плоскостями MNP и AKD воспользуемся формулой (9):

$$\cos\angle(MNP, AKD) = |\cos\angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| =$$

$$= \frac{|0 + 7 + 18|}{\sqrt{4 + 49 + 81} \cdot \sqrt{0 + 1 + 4}} = \sqrt{\frac{125}{134}}.$$

Отсюда $\angle(MNP, AKD) = \arccos\sqrt{\dfrac{125}{134}}$.

Ответ: $\arccos\sqrt{\dfrac{125}{134}}$.

Метод использования направляющих векторов скрещивающихся прямых, перпендикулярных данным плоскостям

Ненулевой вектор $\vec{q}$ называется *направляющим* вектором прямой l, если он лежит либо на самой прямой l, либо на прямой, параллельной ей.

Пусть $\vec{p}=\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{q}=\{x_2, y_2, z_2\}$ – направляющие векторы прямых a и b, тогда угол φ между этими прямыми (пересекающимися или скрещивающимися) находят по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{|x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}. \qquad (10)$$

Пример 76. *В основании пирамиды $MABCD$ лежит прямоугольник с отношением сторон* $AB:AD=1:2$ (см. рис. 87). *Каждое боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом, равным* $60°$. *Точка R – середина ребра MC. Найти угол между плоскостями MAC и ADR.*

Решение. Если считать, что $AB=a$, тогда $AD=2a$, и все линейные элементы в пирамиде будут зависеть от одного параметра a. Поэтому, не теряя общности, с точностью до подобия можно принять $AB=4$. Тогда $AD=8$, $OM=2\sqrt{15}$, где O – точка пересечения диагоналей прямоугольника, лежащего в основании.

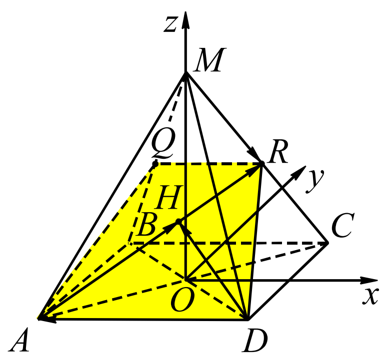


Рис. 87

Вершина M пирамиды $MABCD$ проектируется в точку O. Введем систему координат следующим образом. Точку O примем за начало координат. Оси Ox и Oy направим параллельно сторонам основания, а ось Oz – вдоль высоты пирамиды OM.

Выразим координаты точек:

$A(-4;\ -2;\ 0)$, $B(-4;\ 2;\ 0)$, $C(4;\ 2;\ 0)$, $D(4;\ -2;\ 0)$, $M(0;\ 0;\ 2\sqrt{15})$, $R(2;\ 1;\ \sqrt{15})$.

Отрезок AR является высотой в равностороннем треугольнике AMC, поэтому прямая MR перпендикулярна ребру AR искомого двугранного угла. Проведем в треугольнике ADR высоту DH. Тогда задача сведется к нахождению угла между прямыми MR и DH.

Найдем координаты векторов:

$$\overrightarrow{MR}=\{2; 1; -\sqrt{15}\},\ \overrightarrow{AR}=\{6; 3; \sqrt{15}\},$$
$$\overrightarrow{DA}=\{-8; 0; 0\}.$$

Так как векторы $\overrightarrow{AH}$ и $\overrightarrow{AR}$ коллинеарные, то

$$\overrightarrow{AH}=k\cdot\overrightarrow{AR}=\{6k, 3k, \sqrt{15}k\}.$$

Далее из равенства $\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AH}$ получаем $\overrightarrow{DH}=\{6k-8; 3k; \sqrt{15}k\}$. Теперь, используя условие $\overrightarrow{DH}\perp\overrightarrow{AR}$, имеем уравнение

$$6(6k-8)+9k+15k=0.$$

Отсюда $k=0{,}8$ и $\overrightarrow{DH}=\{-3{,}2;\ 2{,}4;\ 0{,}8\sqrt{15}\}$.

Так как $\overrightarrow{MR}$ и $\overrightarrow{DH}$ – направляющие векторы прямых MR и DH соответственно, то для нахождения угла между этими прямыми воспользуемся формулой (10):

$$\cos\varphi=\frac{|-6{,}4+2{,}4-12|}{\sqrt{4+1+15}\cdot\sqrt{10{,}24+5{,}76+9{,}6}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Значит, угол между прямыми MR и DH, и угол между данными плоскостями равен $\frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

Решение одной задачи разными методами

Пример 77. *В основании прямой призмы* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *лежит ромб* $ABCD$ *со стороной* $\sqrt{21}$ *и углом A, равным* $60°$. *На рёбрах* AB, B_1C_1 *и* DC *взяты соответственно точки E, F и G так, что* $AE = EB$, $B_1F = FC_1$ *и* $DG = 3GC$. *Найти косинус угла между плоскостями* EFG *и* ABC, *если высота призмы равна* 4,5.

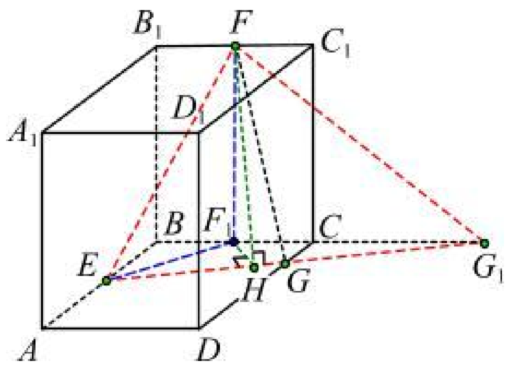


Рис. 88

Решение. 1-*й способ* (***построение линейного угла двугранного угла***). Опустим из точки F перпендикуляр FF_1 на плоскость ABC ($BF_1 = F_1C$, $FF_1 \parallel BB_1$) и перпендикуляр FH на прямую EG (см. рис. 88). Тогда угол FHF_1 – плоский угол двугранного угла $BEGF$, образованного плоскостями EFG и ABC.

Пусть G_1 – точка пересечения прямых EG и BC. Из подобия треугольников EBG_1 и GCG_1 получаем ($EB \parallel GC$), что $CG_1 = BC$, так как $GC = \frac{1}{4}DC = \frac{1}{2}EB$.

Используя теорему косинусов для треугольника EBG_1 получаем

$$EG_1^{\ 2} = EB^2 + BG_1^{\ 2} - 2\cdot EB\cdot BG_1\cdot\cos 120° =$$

$$= \frac{21}{4} + 84 + 2\cdot\frac{\sqrt{21}}{2}\cdot 2\sqrt{21}\cdot\frac{1}{2} = \frac{441}{4},$$

$$EG_1 = \frac{21}{2}.$$

Аналогично из треугольника EBF_1 находим $EF_1 = \frac{3\sqrt{7}}{2}$.

Находим площадь треугольника EF_1G_1

$$S_{EF_1G_1} = \frac{1}{2}\cdot EF_1\cdot F_1G_1\cdot\sin 150° =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{21}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{63\sqrt{3}}{16}.$$

Высота F_1H треугольника EF_1G_1 находится по формуле

$$F_1H = \frac{2S_{EF_1G_1}}{EG_1} = \frac{63\sqrt{3}}{8} : \frac{21}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Из прямоугольного треугольника F_1FH получаем

$$FH^2 = F_1H^2 + F_1F^2 = \frac{27}{16} + \frac{81}{4} = \frac{27\cdot 13}{16},$$

$$FH = \frac{3\sqrt{39}}{4}.$$

Окончательно находим косинус угла FHF_1 между плоскостями EFG и ABC по формуле

$$\cos\angle FHF_1 = \frac{F_1H}{FH} = \frac{3\sqrt{3}}{4} : \frac{3\sqrt{39}}{4} = \frac{1}{\sqrt{13}}.$$

Ответ. $\frac{1}{\sqrt{13}}$.

Решение. 2-*й способ* (***использование опорной задачи***). Для нахождения угла между плоскостями EFG и ABC воспользуемся теоремой о площади ортогональной проекции (см. например, зад. 212 на стр. 58 учебника «Геометрия, 10-11» (учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / [Л.М. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.В. Кадомцев и др.] – 16 изд. – М.: Просвещение, 2007, 256 стр.).

Опустим из точки F перпендикуляр на плоскость ABC (см. рис. 89). Точка F_1 – ортогональная проекция точки F на плоскость основания и $BF_1 = F_1C$, $FF_1 \parallel BB_1$.

Пусть G_1 – точка пересечения прямых EG и BC. Треугольник EF_1G_1, лежащий в плоскости ABC – ортогональная треугольника EFG_1, лежащего в плоскости EFG.

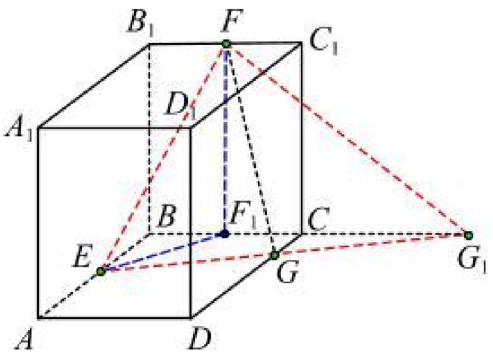


Рис. 89

Из подобия треугольников EBG_1 и GCG_1 получаем ($EB \parallel GC$), что $CG_1 = BC$, так как $GC = \frac{1}{4}DC = \frac{1}{2}EB$.

Из теоремы косинусов для треугольника EBF_1 получаем

$$EF_1^2 = EB^2 + BF_1^2 - 2\cdot EB\cdot BF_1\cdot\cos 120^\circ =$$
$$= \frac{21}{4} + \frac{21}{4} + 2\cdot\frac{\sqrt{21}}{2}\cdot\frac{\sqrt{21}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{63}{4},$$
$$EF_1 = \frac{3\sqrt{7}}{2}.$$

Тогда из прямоугольных треугольников EFF_1 и F_1FG_1 получаем

$$EF^2 = EF_1^2 + F_1F^2 = \frac{63}{4} + \frac{81}{4} = 36,$$
$$EF = 6;$$
$$FG_1^2 = F_1G_1^2 + F_1F^2 = \frac{189}{4} + \frac{81}{4} = \frac{270}{4},$$
$$FG_1 = \frac{3\sqrt{30}}{2}.$$

Из теоремы косинусов для треугольника EBG_1 получаем

$$EG_1^2 = EB^2 + BG_1^2 - 2\cdot EB\cdot BG_1\cdot\cos 120^\circ =$$
$$= \frac{21}{4} + 84 + 2\cdot\frac{\sqrt{21}}{2}\cdot 2\sqrt{21}\cdot\frac{1}{2} = \frac{441}{4},$$
$$EG_1 = \frac{21}{2}.$$

Тогда, используя теорему косинусов для треугольника EFG_1, получаем

$$\cos\angle EFG_1 = \frac{EF^2 + FG_1^2 - EG_1^2}{2\cdot EF\cdot FG_1} =$$
$$= \frac{36 + \frac{270}{4} - \frac{441}{4}}{2\cdot 6\cdot\frac{3\sqrt{30}}{2}} = -\frac{3}{8\sqrt{30}},$$
$$\sin\angle EFG_1 = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{8\sqrt{30}}\right)^2} = \frac{\sqrt{637}}{8\sqrt{10}}.$$

Находим площадь треугольника EFG_1

$$S_{EFG_1} = \frac{1}{2}\cdot EF\cdot FG_1\cdot\sin\angle EFG_1 =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 6\cdot\frac{3\sqrt{30}}{2}\cdot\frac{\sqrt{637}}{8\sqrt{10}} = \frac{9\sqrt{3}}{16}\sqrt{637}.$$

Находим площадь треугольника EF_1G_1

$$S_{EF_1G_1} = \frac{1}{2}\cdot EF_1\cdot F_1G_1\cdot\sin 150^\circ =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{21}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{63\sqrt{3}}{16}.$$

Окончательно находим косинус угла φ между плоскостями EFG и ABC по формуле

$$\cos\varphi = \frac{S_{EF_1G_1}}{S_{EFG_1}} = \frac{63\sqrt{3}}{16} : \frac{9\sqrt{3}}{16}\sqrt{637} = \frac{1}{\sqrt{13}}.$$

Решение. 3-*й способ* (***координатно-векторный***). Так как диагонали ромба перпендикулярны, то введем прямоугольную систему координат $Oxyz$ следующим образом (см. рис. 90).

Пусть точка пересечения диагоналей ромба $ABCD$ O – начало системы координат, оси направлены так, как указано на рисунке 90.

Используя то, что диагонали ромба являются биссектрисами углов при вершинах, получаем

$$AO = AB\cdot\cos 30^\circ = \sqrt{21}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{7}}{2},$$
$$BO = AB\cdot\sin 30^\circ = \frac{\sqrt{21}}{2}.$$

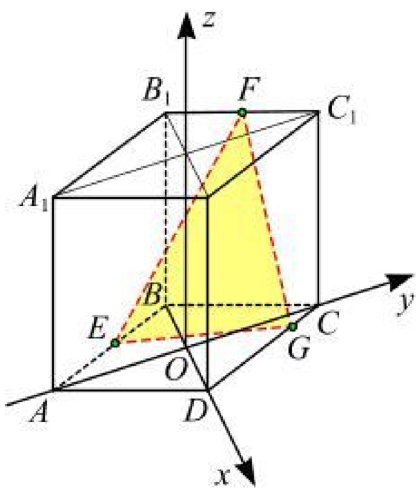


Рис. 90

Учитывая, что $AE = EB$, $B_1F = FC_1$ и $DG = 3GC$, получаем в построенной системе координат координаты точек E, F и G:

$$E\left(-\frac{\sqrt{21}}{4}; -\frac{3\sqrt{7}}{4}; 0\right),\ F\left(-\frac{\sqrt{21}}{4}; \frac{3\sqrt{7}}{4}; \frac{9}{2}\right),$$
$$G\left(\frac{\sqrt{21}}{8}; \frac{9\sqrt{7}}{8}; 0\right).$$

Найдем координаты вектора нормали $\vec{n_1} = \{a; b; c\}$ плоскости EFG из системы уравнений:

$$\begin{cases} \vec{n_1} \cdot \overrightarrow{FE} = 0, \\ \vec{n_1} \cdot \overrightarrow{FG} = 0, \end{cases} \text{где } \overrightarrow{FE} = \left\{0; -\frac{3\sqrt{7}}{2}; -\frac{9}{2}\right\},$$
$$\overrightarrow{FG} = \left\{\frac{3\sqrt{21}}{8}; \frac{3\sqrt{7}}{8}; -\frac{9}{2}\right\}.$$

Подставляя координаты векторов, получаем

$$\begin{cases} a \cdot 0 - b \cdot \dfrac{3\sqrt{7}}{2} - c \cdot \dfrac{9}{2} = 0, \\ a \cdot \dfrac{3\sqrt{21}}{8} + b \cdot \dfrac{3\sqrt{7}}{8} - c \cdot \dfrac{9}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{3}{\sqrt{7}} \cdot c, \\ a = \dfrac{15}{\sqrt{21}} \cdot c. \end{cases}$$

Поскольку в качестве c можно взять любое, отличное от 0 число, то пусть $c = \sqrt{21}$. Тогда $\vec{n_1} = \{15; -3\sqrt{3}; \sqrt{21}\}$.

Так как ось Oz перпендикулярна плоскости ABC, то ее вектор нормали $\vec{n_2} = \{0; 0; 1\}$.

Находим косинус угла между плоскостями по формуле (9)

$$\cos\angle(EFG, ABC) = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|} =$$
$$= \frac{|15 \cdot 0 - 3\sqrt{3} \cdot 0 + \sqrt{21} \cdot 1|}{\sqrt{225 + 27 + 21} \cdot \sqrt{0 + 0 + 1}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{273}} = \frac{1}{\sqrt{13}}.$$

Тренировочные упражнения

116. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между плоскостями AB_1C_1 и A_1B_1C.

117. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E, F – середины рёбер соответственно A_1B_1 и A_1D_1. Найдите тангенс угла между плоскостями AEF и BCC_1.

118. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E, F – середины рёбер соответственно A_1B_1 и A_1D_1. Найдите тангенс угла между плоскостями AEF и BDD_1.

119. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональ A_1C является ребром двугранного угла, грани которого проходят через B и D. Найдите величину этого угла.

120. Диагональ A_1C куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит ребром двугранного угла, грани которого проходят через середины ребер AB и DD_1. Найдите величину этого угла.

121. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, длины рёбер которого равны $AB = 2$, $AD = AA_1 = 1$. Найдите угол меду плоскостями CD_1B_1 и CDA_1.

122. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 4$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$ найдите тангенс угла между плоскостями CDD_1 и BDA_1.

123. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 6$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$ найдите тангенс угла между плоскостями ACD_1 и $A_1B_1C_1$.

124. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер: $AA_1 = 5$, $AB = 12$, $AD = 8$. Найдите тангенс угла между плоскостью ABC и плоскостью, проходящей через точку B перпендикулярно прямой AK, если K – середина ребра C_1D_1.

125. (ЕГЭ, 2010). В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра $AB = 8$, $AD = 6$, $CC_1 = 5$. Найдите угол между плоскостями BDD_1 и AD_1B_1.

126. Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = \sqrt{28}$, $AD = 6$. Найдите тангенс угла между плоскостью грани AA_1B_1B призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра CD перпендикулярно прямой AC_1, если расстояние между прямыми A_1C_1 и BD равно $\sqrt{8}$.

127. Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 12$, $AD = \sqrt{31}$. Найдите косинус угла между плоскостью основания призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра AD перпендикулярно прямой BD_1, если расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно 5.

128. (ЕГЭ, 2012). В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 2, а боковые рёбра равны 3. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 1 : 2$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

129. (аналог ЕГЭ, 2012). В правильной 4-хугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 3, а боковое ребро 4. На ребре A_1A дана точка E такая, что $A_1E = 3AE$. Найти угол между плоскостями ABC и BED_1.

130. (Репетиционный ЕГЭ, 2012). В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 3, а боковое ребро равно 5. На ребре AA_1 взята точка M так, что $AM = 2$. На ребре BB_1 взята точка K так, что $B_1K = 2$. Найдите угол между плоскостями CC_1D_1 и D_1MK.

131. (Репетиционный ЕГЭ, 2012). В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной основания 4 и высотой 7 на ребре AA_1 взята точка M так, что $AM = 2$. На ребре BB_1 взята точка K так, что $B_1K = 2$. Найдите угол между плоскостью D_1MK и плоскостью CC_1D_1.

132. (ЕГЭ, 2012). В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 2, а боковые рёбра равны 3. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 3 : 2$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

133. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$ со стороной $\sqrt{21}$ и углом A, равным $60°$. На ребрах AB, B_1C_1 и DC взяты соответственно точки E, F и G так, что $AE = EB$, $B_1F = FC_1$ и $DG = 3GC$. Найдите косинус угла между плоскостями EFG и ABC, если высота призмы равна 4,5.

134. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 1. Найдите косинус угла между плоскостями AB_1C и A_1B_1C.

135. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ACB_1 и A_1C_1B.

136. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$.

Найдите угол между плоскостью A_1BC и плоскостью основания призмы.

137. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, точки D, E – середины рёбер соответственно A_1B_1 и A_1C_1. Найдите тангенс угла между плоскостями ADE и BCC_1.

138. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC = 10$, $AC = 16$. Боковое ребро призмы равно 24. Точка P – середина ребра BB_1. Найдите тангенс угла между плоскостями $A_1B_1C_1$ и ACP.

139. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC = 20$, $AC = 32$. Боковое ребро призмы равно 24. Точка P принадлежит ребру BB_1, причем $BP : PB_1 = 1:3$. Найдите тангенс угла между плоскостями $A_1B_1C_1$ и ACP.

140. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является треугольник ABC, в котором $AB = AC = 8$, а один из углов равен $60°$. На ребре AA_1 отмечена точка P так, что $AP : PA_1 = 2:1$. Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и CBP, если расстояние между прямыми AB и C_1B_1 равно $18\sqrt{3}$.

141. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является треугольник ABC, в котором $AC = BC = 6$, а один из углов равен $60°$. На ребре CC_1 отмечена точка P так, что $CP : PC_1 = 2:1$. Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и ABP, если расстояние между прямыми AC и A_1B_1 равно $18\sqrt{3}$.

142. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC. Найдите тангенс угла между плоскостью $A_1B_1C_1$ и плоскостью, проходящей через середину ребра AA_1 и прямую BC, если $AB = 4$, $BB_1 = 12$.

143. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, стороны основания которой равны 1, а боковые рёбра равны 2, найдите угол между плоскостями BA_1D_1 и AA_1E_1.

144. Все рёбра треугольной пирамиды $SABC$ равны между собой. Точки K и L – середины ребер AB и BC соответственно. Найдите угол между плоскостями ABS и KSL.

145. Основание пирамиды $DABC$ – равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC = 13$, $AC = 24$. Ребро DB перпендикулярно плоскости основания и равно 20. Найдите тангенс двугранного угла при ребре AC.

146. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все рёбра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями ABC и BCS.

147. (МИОО). В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ сторона основания равна $6\sqrt{2}$, а боковое ребро равно 10. Найдите угол между плоскостями ABC и ACM, где точка M делит ребро BS так, что $BM : MS = 2:1$.

148. В основании пирамиды $SABCD$, все боковые рёбра которой равны 17, лежит прямоугольник $ABCD$. Точка M – середина ребра SA. Через прямую BM параллельно диагонали AC проведена плоскость. Найдите величину угла между этой плоскостью и плоскостью SAC, если известно, что $AB = 24$, а $BC = 10$.

149. Диаметр окружности основания цилиндра равен 20, образующая цилиндра равна 28. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 12 и 16. Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

150. Диаметр окружности основания цилиндра равен 26, образующая цилиндра равна 21. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 24 и 10. Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

Глава 2. Площади и объёмы

В данном разделе требуется не только знание формул для вычисления площадей поверхностей и объёмов многогранников, но и знание свойств пространственных фигур (призма и пирамида), признаки и свойства, которые относятся к взаимному расположению прямых и плоскостей

2.1. Площадь поверхности многогранника

Формулы для вычисления площади поверхности призматических тел

Боковая и полная поверхность прямой призмы

$$S_{\text{бок}} = l \cdot P,$$

где l – длина бокового ребра, P – периметр основания, $S_{\text{осн}}$ – площадь основания,

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}.$$

Боковая и полная поверхность наклонной призмы

$$S_{\text{бок}} = l \cdot P_{\perp},$$

где l – длина бокового ребра, $P_{\perp}$ – периметр перпендикулярного ему сечения.

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$$

Полная поверхность прямоугольного параллелепипеда

$$S_{\text{полн}} = 2(ab + bc + ac),$$

где a, b, c – длины ребер, выходящих из одной вершины.

Формулы для вычисления площади поверхности n-угольной пирамиды

Боковая поверхность правильной пирамиды

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} \cdot P \cdot a,$$

где P – периметр основания правильной пирамиды, a – апофема боковой грани;

$$S_{\text{бок}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos\alpha},$$

где $S_{\text{осн}}$ – площадь основания, α – мера двугранного угла при ребре основания.

Боковая и полная поверхность правильной усеченной пирамиды

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} \cdot (P_1 + P_2) \cdot a,$$

где P_1 и P_2 – периметры верхнего и нижнего оснований, a – апофема боковой грани;

$$S_{\text{бок}} = \frac{S_1 - S_2}{\cos\alpha},$$

где S_1 и S_2 – площади верхнего и нижнего оснований, α – мера двугранного угла при ребре нижнего основания;

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_1 + S_2.$$

Полная поверхность правильного тетраэдра

$S_{\text{полн}} = a^2\sqrt{3}$, где a – сторона.

Рассмотрим следующие задачи данного раздела: вычисление площади поверхности многогранника и его частей, нахождение линейных и нелинейных величин многогранника с известной площадью поверхности (части поверхности), сравнение площадей, сравнение отрезков.

Поэтапно-вычислительный метод

Пример 78. *В правильной четырехугольной призме диагональ равна d и наклонена к плоскости боковой грани под углом α. Найти площадь боковой поверхности призмы.*

Решение. Рассмотрим призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$, для которой диагональ $AC_1 = d$ (см. рис. 91).

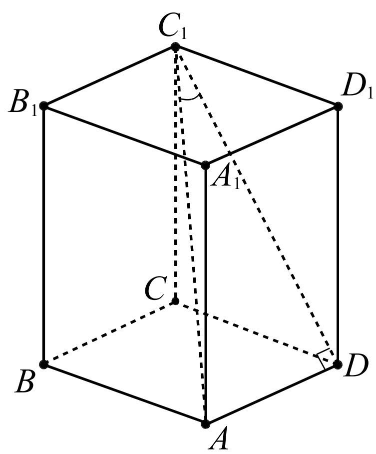


Рис. 91

Так как $AD \perp CDD_1$, то $\angle AC_1D$ является углом между диагональю AC_1 и плоскостью CDD_1, величина которого равна α.

Из прямоугольного треугольника AC_1D находим $AD = d\sin\alpha$ и $DC_1 = d\cos\alpha$. Далее из прямоугольного треугольника DCC_1 получаем

$$CC_1 = \sqrt{C_1D^2 - CD^2} =$$
$$= d\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = d\sqrt{\cos 2\alpha}.$$

Площадь боковой поверхности призмы равна

$$S_{\text{бок}} = 4\cdot CD\cdot CC_1 = 4d^2\sin\alpha\sqrt{\cos 2\alpha}.$$

Ответ: $4d^2\sin\alpha\sqrt{\cos 2\alpha}$.

Пример 79. *В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны* a *и* a_1, *а диагональ пирамиды –* d. *Определить боковую поверхность пирамиды.*

Решение. Пусть в усеченной пирамиде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны нижнего основания равны a, верхнего – a_1, а диагональ пирамиды – $B_1D = d$ (см. рис. 92).

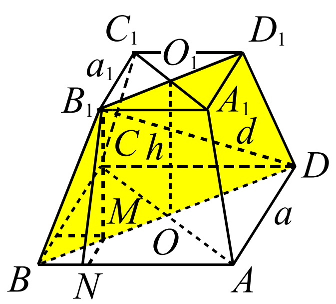


Рис. 92

Из вершины B_1 проведем $B_1N \perp AB$ и $B_1M \perp BD$. Так как B_1N – апофема данной пирамиды, то боковая поверхность пирамиды может быть вычислена по формуле

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}(P + P_1)\cdot B_1N,$$

где $P = 4AB = 4a$, а $P_1 = 4A_1B_1 = 4a_1$.

Отрезок B_1N найдем из прямоугольного треугольника B_1NM $(\angle B_1MN = 90°)$. Диагонали квадратов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, лежащих в основаниях, равны: $BD = a\sqrt{2}$, $B_1D_1 = a_1\sqrt{2}$.

Диагональное сечение пирамиды – равнобочная трапеция BB_1D_1D. Найдем ее высоту B_1M $(B_1M = O_1O)$ из прямоугольного треугольника B_1MD, т.е. $B_1M = \sqrt{B_1D^2 - MD^2}$, а $MD = BD - BM =$

$$= BD - \frac{BD - B_1D_1}{2} = \frac{BD + B_1D_1}{2} = \frac{(a+a_1)\sqrt{2}}{2}.$$

Отсюда $B_1M = \sqrt{d^2 - \dfrac{(a+a_1)^2}{2}}$.

Треугольник BMN – равнобедренный и прямоугольный ($\angle BNM = 90°$)

$$BM = \frac{(a-a_1)\sqrt{2}}{2}, \text{ а } MN = \frac{BM}{\sqrt{2}} = \frac{a-a_1}{2}.$$

Теперь из треугольника B_1NM находим:

$$B_1N = \sqrt{B_1M^2 + MN^2} = \sqrt{d^2 - \frac{(a+a_1)^2}{2} + \frac{(a-a_1)^2}{4}}.$$

Подставляя найденные значения P, P_1 и B_1N в формулу боковой поверхности пирамиды, получим ответ.

Ответ: $2(a+a_1)\cdot\sqrt{d^2 - \dfrac{a^2}{4} - \dfrac{a_1^2}{4} - \dfrac{3aa_1}{2}}$.

Метод опорных задач

Имеет место формула $\cos\varphi = \dfrac{S_{\text{пр}}}{S}$, где S – площадь многоугольника, лежащего в плоскости α, $S_{\text{пр}}$ – площадь его ортогональной проекции на плоскость β.

Доказательство этой формулы приведено в главе 3 п. 3.4, опорная задача №6.

Пример 80. *Найти площадь полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды, если ее высота равна* H, *а площадь боковой грани равна площади основания.*

Решение. Пусть EO – высота данной пирамиды $ABCDE$ (см. рис. 93). Опустим из точки O перпендикуляр OM на сторону BC квадрата $ABCD$ и точку M соединим с вершиной E. Так как OM – проекция EM на плоскость ABC и

$OM \perp BC$, то $EM \perp BC$. Значит, $\angle OME$ является линейным углом двугранного угла при ребре BC, величину которого обозначим через φ.

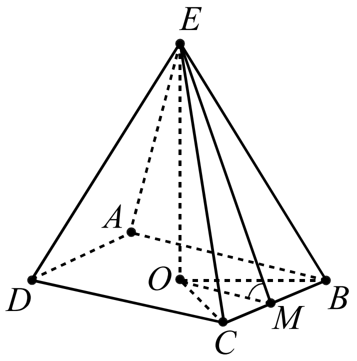


Рис. 93

Так как треугольник BOC является проекцией боковой грани BEC на плоскость ABC, то согласно условию имеем

$$\cos\varphi = \frac{S_{BOC}}{S_{BEC}} = \frac{1}{4}.$$

Тогда $\sin\varphi = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ и $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{15}}$.

Из треугольника EOM находим

$$OM = H \cdot \operatorname{ctg}\varphi = \frac{H}{\sqrt{15}} \text{ и } CD = \frac{2H}{\sqrt{15}}.$$

Площадь основания пирамиды равна $\frac{4H^2}{15}$, боковой поверхности – $\frac{16H^2}{15}$, а полной поверхности – $\frac{4H^2}{3}$.

Ответ: $\frac{4H^2}{3}$.

Пример 81. *Стороны основания треугольной пирамиды равны 6 см, 10 см и 14 см. Каждый двугранный угол при ее основании равен 30°. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.*

Решение. Для нахождения площади сечения воспользуемся формулой

$$S_{\text{бок}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos\varphi}.$$

Найдем площадь основания треугольной пирамиды, применив формулу Герона. Поскольку полупериметр треугольника в основании равен 15 *см*, то

$$S_{\text{осн}} = \sqrt{15\cdot(15-6)\cdot(15-10)\cdot(15-14)} = $$
$$= 15\sqrt{3}\ (\text{см}^2).$$

Тогда

$$S_{\text{бок}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos 30^\circ} = 15\sqrt{3} : \frac{\sqrt{3}}{2} = 30\ (\text{см}^2).$$

Ответ: 30 *см*^{2}.

Пример 82. *В правильной усеченной четырехугольной пирамиде стороны нижнего и верхнего оснований равны соответственно* a *и* b ($a > b$). *Найти площадь полной поверхности усеченной пирамиды, если ее боковые грани наклонены к плоскости основания под углом* α.

Решение. Поскольку основаниями правильной усечённой четырехугольной пирамиды являются квадраты со сторонами a и b, то сумма их площадей равна $a^2 + b^2$. Очевидно, что ортогональная проекция боковой поверхности усеченной пирамиды на плоскость нижнего основания представляет собой квадрат со стороной a, из которого «вырезан» квадрат со стороной b. При этом стороны «вырезанного» квадрата параллельны сторонам нижнего основания пирамиды (см. рис. 94).

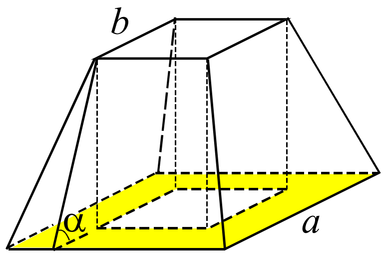


Рис. 94

Так как боковые грани усеченной пирамиды наклонены к плоскости основания под одинаковым углом α, то площадь её боковой поверхности равна:

$$S_{\text{бок}} = \frac{S_{\text{пр}}}{\cos\alpha} = \frac{a^2 - b^2}{\cos\alpha},$$

где $S_{\text{пр}}$ – площадь проекции боковой поверхности на основание. Таким образом,

$$S_{\text{полн}} = a^2 + b^2 + \frac{a^2 - b^2}{\cos\alpha}.$$

Ответ: $a^2 + b^2 + \frac{a^2 - b^2}{\cos\alpha}$.

2.2. Площадь сечения многогранника

Свойства сечений пирамиды плоскостью, параллельной основанию.

Теорема 1. *Если пересечь пирамиду плоскостью, параллельной основанию, то:*

а) *боковые ребра и высота пирамиды разделяются этой плоскостью на пропорциональные отрезки;*

б) *в сечении получится многоугольник, подобный многоугольнику, лежащему в основании;*

в) *площади сечения и основания будут относиться друг к другу как квадраты их расстояний от вершины пирамиды.*

Теорема 2. *Если две пирамиды с равными высотами пересечь плоскостями, параллельными основаниям, на одинаковом расстоянии от вершины, то площади сечений будут пропорциональны площадям оснований.*

При вычислении площади сечения можно определить вид фигуры, полученной в сечении, и затем воспользоваться формулой. При этом сложную фигуру иногда разбивают на несколько простейших фигур или дополняют до простейшей.

Поэтапно-вычислительный метод

Пример 83. *Найти площадь сечения правильной четырехугольной пирамиды $ABCDE$, проходящей через AB и точку K – середину ребра EC, если все рёбра пирамиды равны* 4.

Решение. Пусть $ABK \cap ECD = KM$ (см. рис. 95). Тогда из $AB \| CD$ следует $AB \| ECD$ и $KM \| AB$. В сечении получаем равнобедренную трапецию $ABKM$ с основаниями $AB = 4$, $KM = 2$ и высотой FL (F и H – середины отрезков AB и CD соответственно, $KM \cap EH = L$).

Из треугольника EHF найдем медиану FL, используя формулу

$$FL = \sqrt{\frac{2EF^2 + 2FH^2 - EH^2}{4}}.$$

$$FL = \sqrt{\frac{2(2\sqrt{3})^2 + 2\cdot 4^2 - (2\sqrt{3})^2}{4}} = \sqrt{11}.$$

Площадь сечения равна

$$S_{ABKM} = \frac{4+2}{2}\cdot\sqrt{11} = 3\sqrt{11}.$$

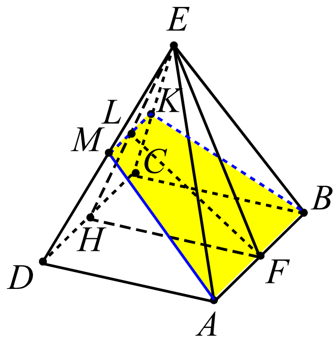


Рис. 95

Ответ: $3\sqrt{11}$.

Пример 84. *В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным a, через точки M, P и N на ребрах BB_1, CC_1 и DD_1 соответственно, такие, что $BM = \frac{3a}{4}$, $CP = \frac{2a}{3}$ и $DN = \frac{a}{4}$, проведена секущая плоскость. Найти площадь сечения.*

Решение. Построим сечение куба плоскостью, проходящей через точки M, P и N. Соединим вначале точки M и P, поскольку они лежат в одной плоскости BB_1C_1. Затем соединим точки P и N, так как они лежат в одной плоскости DD_1C_1 (см. рис. 96).

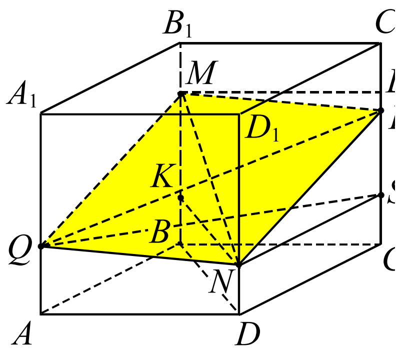


Рис. 96

Противоположные боковые грани AA_1D_1 и BB_1C_1 в кубе параллельны. Поэтому секущая плоскость, согласно свойству параллельных плоскостей (если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии пересечения параллельны) будет пересекать грань AA_1D_1 по прямой NQ так, что $NQ \parallel MP$.

Соединим точки M и Q, так как они лежат в одной плоскости AA_1B_1. Тогда $MQ \parallel NP$ по тому же свойству параллельных плоскостей AA_1B_1 и CC_1D_1. Таким образом, сечение представляет собой параллелограмм $MPNQ$. Вычислим его площадь. Для этого найдем стороны треугольника MNP. Используя теорему Пифагора для прямоугольных треугольников MLP ($ML \perp CC_1$), NPS ($NS \perp CC_1$), MNK ($KN \perp BB_1$), получим:

$$MP = \sqrt{(LC - PC)^2 + ML^2} = \sqrt{\frac{a^2}{144} + a^2} = \frac{a\sqrt{145}}{12},$$

$$NP = \sqrt{(PC - SC)^2 + NS^2} = \sqrt{\frac{25a^2}{144} + a^2} = \frac{13a}{12},$$

$$MN = \sqrt{(BM - BK)^2 + KN^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + 2a^2} = \frac{3a}{2}.$$

Найдем площадь треугольника MNP, используя модифицированную формулу Герона $S = \frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2 - (c^2 - a^2 - b^2)^2}$, $S_{MNP} = \frac{a^2\sqrt{170}}{24}$. Следовательно,

$$S_{MPNQ} = 2S_{MNP} = \frac{a^2\sqrt{170}}{12}.$$

Ответ: $\frac{a^2\sqrt{170}}{12}$.

Пример 85. *В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M – середина ребра B_1C_1, точка N лежит на диагонали B_1D, причем $B_1N = 2ND$. Найти площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точки M, N и параллельной прямой A_1C_1.*

Решение. Опишем схематически процесс построения сечения куба плоскостью, проходящей через точки M, N и параллельной прямой A_1C_1. Для этого проведем через точку M прямую ME, $ME \parallel A_1C_1$ (см. рис. 97).

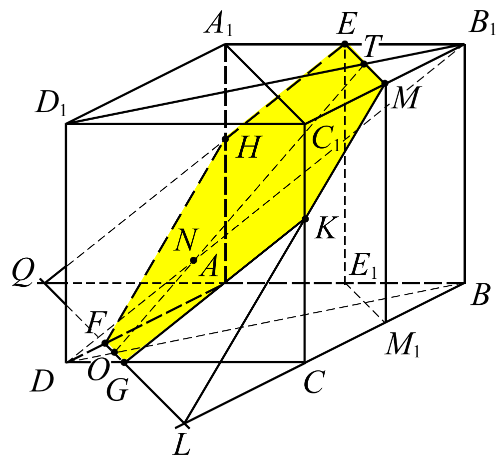


Рис. 97

Рассмотрим диагональную плоскость B_1BD, в которой на диагонали B_1D лежит точка N. Тогда принадлежащая сечению точка T – точка пересечения прямых ME и B_1D_1. В плоскости B_1BD проведем прямую TN. Точка O, принадлежащая и сечению, и плоскости нижнего основания куба, – точка пересечения прямых TN и BD.

Проведем через точку O прямую GF, параллельную A_1C_1. Далее, используя метод следов, построим точки H и K, принадлежащие сечению куба (шестиугольник $HEMKGF$). При этом шестиугольник AE_1M_1CGF является проекцией многоугольника $HEMKGF$ на плоскость ABC.

Поскольку $FG \parallel A_1C_1$ и $A_1C_1 \perp BD$, то $FG \perp OB$. Тогда OT – наклонная к плоскости ABC, прямая OB – проекция наклонной OT и $OB \perp FG$. Следовательно, по теореме о трех перпендикулярах, $OT \perp FG$. Значит, $\angle TOB = \varphi$ – линейный угол двугранного угла $TFGB$.

Вычислим теперь косинус угла φ между секущей плоскостью и нижним основанием куба. Очевидно, что

$$BD = B_1D_1 = \sqrt{2},\ B_1T = \frac{B_1D_1}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Далее, треугольники B_1TN и DON подобны с коэффициентом подобия $k = 2$.

Следовательно,

$$OD = \frac{B_1T}{2} = \frac{B_1D_1}{8} = \frac{\sqrt{2}}{8},$$

$$OB = BD - OD = \frac{7\sqrt{2}}{8},$$

$$OT = \sqrt{(OB - B_1T)^2 + BB_1^2} = \frac{\sqrt{114}}{8}.$$

Откуда

$$\cos\varphi = \frac{OB - B_1T}{OT} = \frac{5}{\sqrt{57}}.$$

Вычислим, площадь шестиугольника AE_1M_1CGF. Площади треугольников BM_1E_1 и DFG находятся довольно просто (вычислите самостоятельно!): $S_{BM_1E_1} = \frac{1}{8}$, $S_{DFG} = \frac{1}{32}$.

Тогда

$$S_{AE_1M_1CGF} = S_{ABCD} - S_{BM_1E_1} - S_{DFG} = \frac{27}{32}.$$

Таким образом,

$$S_{HEMKGF} = \frac{S_{AE_1M_1CGF}}{\cos\varphi} = \frac{27\sqrt{57}}{160}.$$

Ответ: $\frac{27\sqrt{57}}{160}$.

Принцип разбиения и дополнения

Пример 86. *Площадь боковой грани правильной шестиугольной пирамиды равна* q. *Найти площадь сечения, плоскость которого параллельна боковой грани пирамиды и проходит через середину ее высоты.*

Решение. Обозначим плоскость сечения через α, середину высоты OP пирамиды $ABCDEFP$ через T, середины отрезков BC, OK и EF через K, K_1 и L соответственно (см. рис. 98).

Пусть плоскость α параллельна грани PBC, $OPK \cap \alpha = P_1K_1$, $ABC \cap \alpha = QR$. Тогда $P_1K_1 \parallel PK$, $QR \parallel BC$, при этом $T \in P_1K_1$, $K_1 \in QR$, $P_1 \in PL$.

Так как $QR \parallel AD \parallel EF$, то пересечениями плоскости α с треугольниками ADP и PEF служат соответственно отрезки $A_1D_1 \parallel AD$ и $MN \parallel EF$ ($T \in A_1D_1$, $M \in PF$, $N \in PE$, $P_1 \in MN$).

Имеем $A_1D_1 = 0{,}5AD = BC$, $QR = 1{,}5BC$, значит, сечением данной пирамиды плоскостью α является шестиугольник QA_1MND_1R, составленный из двух трапеций A_1D_1RQ и MND_1A_1 с общим основанием A_1D_1.

Пусть $BC = a$, $PK = h$, тогда $S_{PBC} = \frac{1}{2}ah = q$.

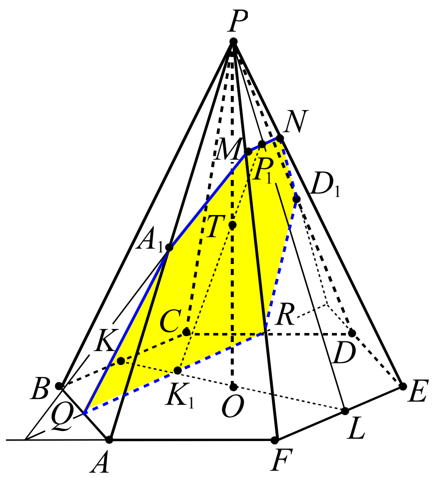


Рис. 98

Найдем площадь сечения QA_1MND_1R.

Так как $K_1K = \frac{1}{2}OK = \frac{1}{4}KL$ и $P_1K_1 \parallel PK$, то

$$MN = \frac{1}{4}EF = \frac{a}{4}; \quad P_1K_1 = \frac{3}{4}PK = \frac{3}{4}h,$$

$$TK_1 = \frac{1}{2}PK = \frac{1}{2}h, \quad P_1T = \frac{1}{4}h,$$

$$QR = \frac{3}{2}a, \quad A_1D_1 = \frac{1}{2}AD = a.$$

Теперь

$$S_{\text{сеч}} = \frac{A_1D_1 + MN}{2}\cdot P_1T + \frac{A_1D_1 + RQ}{2}\cdot K_1T =$$

$$= \frac{a + \frac{a}{4}}{2}\cdot\frac{h}{4} + \frac{a + \frac{3a}{2}}{2}\cdot\frac{h}{2} = \frac{25}{32}ah = \frac{25}{16}q.$$

Ответ: $\frac{25}{16}q$.

Пример 87. *В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC, у которого основание BC равно 3. Боковая поверхность призмы равна 32. Найти площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через CB_1 параллельно высоте основания AD, если известно, что расстояние от точки A до плоскости сечения равно $\frac{6}{5}$.*

Решение. Построим сечение призмы заданной в условии плоскостью. Для этого через вершину C в плоскости ABC основания призмы проведем прямую, параллельную AD до пересечения в точке M с продолжением ребра AB за точку A (см. рис. 99). Точки M и B_1 лежат в плоскости грани AA_1B_1, поэтому, проведя через них прямую, получим след E секущей плоскости на ребре AA_1. Тогда треугольник CEB_1 – искомое сечение.

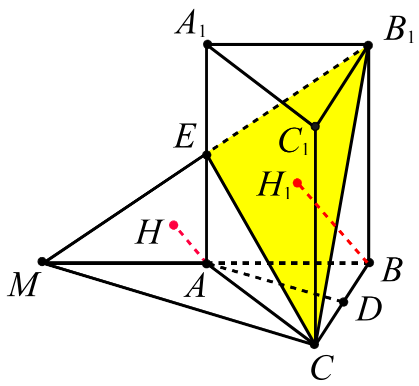


Рис. 99

В треугольнике MBC отрезок AD – средняя линия, поскольку высота AD в равнобедренном треугольнике ABC является и медианой. Следовательно, $MB = 2AB$. Аналогично в треугольнике MB_1B отрезок AE – средняя линия и $MB_1 = 2ME$.

Пусть сторона основания $AB = x$, а высота призмы равна h. Тогда периметр основания $P = 2x + 3$, боковое ребро призмы равно h и площадь боковой поверхности

$$S_{\text{бок}} = h \cdot P = h \cdot (2x + 3).$$

Отсюда $h = \frac{32}{2x+3}$.

Выразим объем пирамиды BMB_1C двумя способами.

1. По формуле

$$V = \frac{1}{3} \cdot BB_1 \cdot S_{MBC} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot MC \cdot BC\right).$$

Тут учтено, что треугольник MCB прямоугольный ($MC \parallel AD$).

2. По формуле

$$V = \frac{1}{3} \cdot BH_1 \cdot S_{MB_1C} = \frac{1}{3} \cdot BH_1 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot MC \cdot CB_1\right),$$

где BH_1 – перпендикуляр, опущенный из точки B на плоскость MB_1C. Так как расстояние от точки A до этой плоскости по условию равно $\frac{6}{5}$, а $MB = 2AB$, то $BH_1 = \frac{12}{5}$. В этом случае также учтено, что $MC \perp CC_1B_1$ ($MC \perp CB$ и $MC \perp CB_1$) и треугольник MCB_1 – прямоугольный.

Приравнивая полученные выражения для объема и учитывая, что $CB_1 = \sqrt{BB_1^2 + CB^2} = \sqrt{h^2 + 9}$, имеем

$$\frac{1}{3} \cdot h \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot MC \cdot BC\right) = \frac{1}{3} \cdot BH_1 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot MC \cdot CB_1\right)$$

или $h = \frac{4}{5}\sqrt{h^2 + 9}$. Отсюда $\frac{25}{16}h^2 = h^2 + 9$ и $h = 4$, а $CB_1 = 5$.

Тогда из равенства $h = \frac{32}{2x+3}$ находим $x = \frac{5}{2}$, а из треугольника ABD

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{9}{4}} = 2.$$

Так как точка E делит MB_1 пополам, то для искомой площади сечения получаем

$$S_{CEB_1} = \frac{S_{MB_1C}}{2} = \frac{1}{4} \cdot MC \cdot CB_1 = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot 5 = 5.$$

Ответ: 5.

2.3. Объём многогранника

Формулы для вычисления объёма призматических тел

Объём прямой призмы

$$V = l \cdot S_{\text{осн}},$$

где l – длина бокового ребра, $S_{\text{осн}}$ – площадь основания.

Объём наклонной призмы

$$V = h \cdot S_{\text{осн}},$$

где h – высота призмы, $S_{\text{осн}}$ – площадь основания;

$$V = l \cdot S_{\perp},$$

где l – длина бокового ребра, $S_{\perp}$ – площадь перпендикулярного ему сечения.

Объём прямоугольного параллелепипеда

$$V = a \cdot b \cdot c,$$

где a, b, c – длины ребер, выходящих из одной вершины.

Формулы для вычисления объёма n-угольной пирамиды

Объём произвольной пирамиды

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{\text{осн}},$$

где h – высота пирамиды, $S_{\text{осн}}$ – площадь основания.

Объём произвольной усеченной пирамиды

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2),$$

где h – высота пирамиды, S_1, S_2 – площади верхнего и нижнего оснований.

Объём правильного тетраэдра

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{\text{осн}} \text{ или } V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12},$$

где h – высота пирамиды, $S_{\text{осн}}$ – площадь основания, a – сторона тетраэдра.

Объём произвольного тетраэдра

$$V = \frac{1}{6} \cdot a \cdot b \cdot d \cdot \sin \varphi,$$

где a и b – длины двух противоположных ребер тетраэдра, d и φ – расстояние и угол между ними соответственно.

Выделим следующие задачи данного раздела: вычисление объема многогранника и его частей, нахождение линейных и нелинейных величин многогранника по его известному объёму, сравнение объемов многогранников.

Поэтапно-вычислительный метод

Отметим задачи, в которых часто встречаются конфигурации с предварительным определением положения основания высоты пирамиды.

● Если все боковые ребра пирамиды равны или образуют с плоскостью основания или с высотой одинаковые углы, то основание высоты пирамиды является центром окружности, описанной около основания пирамиды.

В частности, если основанием пирамиды является прямоугольный треугольник, то высота принадлежит одной из боковых граней, содержащей гипотенузу прямоугольного треугольника, и вершина пирамиды проецируется в середину этой гипотенузы.

Если основанием пирамиды служит тупоугольный треугольник, то вершина пирамиды проецируется в точку, лежащую вне этого треугольника.

● Если все боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, то основание высоты пирамиды является центром окружности, вписанной в основание пирамиды.

Пример 88. *Основание пирамиды $ABCD$ – равнобедренный треугольник ABC с основанием $AB = 12$ и боковой стороной 10. Найти объём пирамиды, если все боковые грани образуют с плоскостью основания двугранные углы в $45°$.*

Решение. Пусть CK – высота треугольника ABC (см. рис. 100), тогда из прямоугольного треугольника ACK имеем

$$CK = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8.$$

Площадь основания равна

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48.$$

Так как все боковые грани образуют с плоскостью основания двугранные углы в $45°$, то основание O высоты DO пирамиды совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC, то есть $OK = r$, где r – радиус этой окружности.

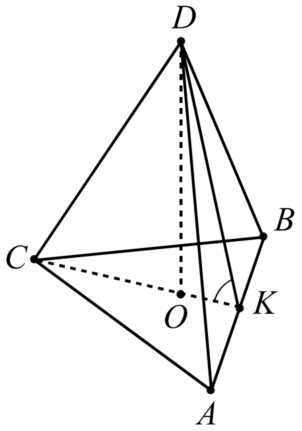


Рис. 100

Радиус найдём по формуле

$$r = \frac{S_{ABC}}{p},$$

$$r = \frac{48}{16} = 3.$$

Так как $\angle OKD$ является линейным углом данного двугранного угла (докажите) и $\angle OKD = 45°$, то из треугольника OKD имеем $OD = r = 3$.

Объём пирамиды равен

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 48 \cdot 3 = 48.$$

Ответ: 48.

Пример 89. *Основание пирамиды – треугольник, две стороны которого равны* 1 *и* 2, *а угол между ними равен* $60°$. *Каждое боковое ребро равно* $\sqrt{13}$. *Найти объём пирамиды.*

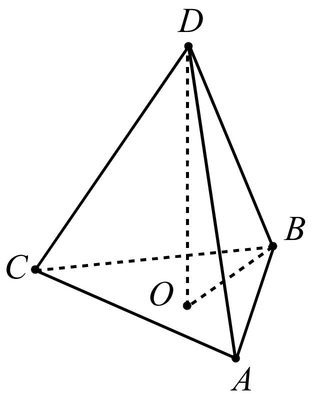


Рис. 101

Решение. Пусть в пирамиде $ABCD$ основанием служит треугольник ABC, причем $AB = 1$, $BC = 2$, $\angle ABC = 60°$ (см. рис. 101).

Так как все боковые ребра равны, то основание O высоты DO пирамиды совпадает с центром окружности, описанной около треугольника ABC, то есть $OB = R$, где R – радиус этой окружности. Радиус найдем по формуле $R = \dfrac{AC}{2\sin\angle ABC}$. Длину стороны AC вычислим по теореме косинусов из треугольника ABC:

$$AC^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 0{,}5 = 3,$$

$$AC = \sqrt{3}.$$

Радиус окружности $R = \sqrt{3} : \left(2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1$.

Из прямоугольного треугольника BOD найдем высоту пирамиды $DO = \sqrt{(\sqrt{13})^2 - 1^2} = 2\sqrt{3}$. Площадь основания пирамиды равна $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и объём пирамиды равен $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 1$.

Ответ: 1.

Пример 90. *Найти объём правильной треугольной пирамиды, у которой боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом* α $(\alpha > 45°)$ *и удалено от противоположной стороны основания на расстояние* d.

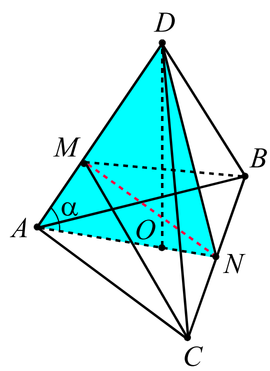


Рис. 102

Решение. Пусть $DABC$ (см. рис. 102) – данная пирамида. Так как она правильная, то основание O высоты DO – центр треугольника ABC. Пусть точка N – середина стороны BC. Тогда $DN \perp BC$ и $AN \perp BC$, а значит $BC \perp ADN$. Проведем высоту MN в треугольнике ADN. Так как пирамида правильная ($O \in AN$) и $AO > ON$, то $\angle AND > \alpha$. Следовательно, треугольник ADN остроугольный и точка $M \in AD$. Соответственно MN – общий перпендикуляр к прямым AD и BC, $MN = d$.

Из прямоугольного треугольника AMN получаем $AN = \dfrac{MN}{\sin\alpha} = \dfrac{d}{\sin\alpha}$. Тогда сторона основания данной пирамиды равна

$$\frac{AN}{\sin 60^\circ}=\frac{2d}{\sqrt{3}\sin\alpha}.$$

В прямоугольном треугольнике ADO $AO=\frac{2}{3}AN=\frac{2d}{3\sin\alpha}$ (так как $O\in AN$), $DO=AO\cdot\operatorname{tg}\alpha=\frac{2d}{3\cos\alpha}$.

Находим объём пирамиды

$$V=\frac{1}{3}\cdot DO\cdot S_{ABC}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{2d}{3\cos\alpha}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2d}{\sqrt{3}\sin\alpha}\right)^2=$$

$$=\frac{2d^3}{9\sqrt{3}\sin^2\alpha\cos\alpha}.$$

Ответ: $\frac{2d^3}{9\sqrt{3}\sin^2\alpha\cos\alpha}$.

Пример 91. *Боковые рёбра наклонной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны 6 см. Сечение плоскостью, пересекающей все боковые ребра призмы и перпендикулярной им, представляет собой треугольник, стороны которого относятся как $9:10:17$. Найти площадь боковой поверхности этой призмы, если известно, что объём пирамиды A_1ABC равен 288* $см^3$.

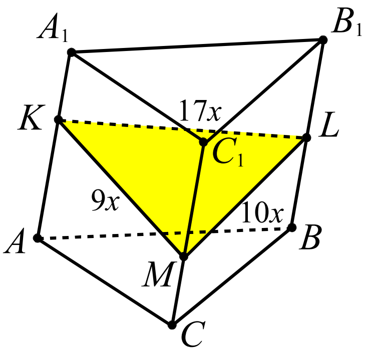


Рис. 103

Решение. Так как объём $V_{A_1ABC}=288$ $см^3$, то $V_{ABCA_1B_1C_1}=3V_{A_1ABC}=864$ $см^3$. Пусть треугольник KLM – указанное в условии сечение, перпендикулярное ребрам призмы (см. рис. 103). Используя формулы

$$V_{ABCA_1B_1C_1}=l\cdot S_\perp,\ S_{бок}=l\cdot P_\perp,$$

где l – длина бокового ребра, $S_\perp$ и $P_\perp$ – площадь и периметр перпендикулярного ему сечения соответственно, $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности, получим

$$V_{ABCA_1B_1C_1}=AA_1\cdot S_{KLM}\ \text{или}\ 864=6S_{KLM}.$$

Отсюда $S_{KLM}=144$ $см^2$.

Найдем периметр треугольника KLM. Пусть его стороны равны $9x, 10x, 17x$. Тогда $P_{KLM}=36x$, а полупериметр $p=18x$. По формуле Герона, получим

$$S_{KLM}=\sqrt{p(p-9x)(p-10x)(p-17x)}=36x^2.$$

Из уравнения $36x^2=144$ получаем $x=2$ *см*. Следовательно, $P_{KLM}=72$ *см*. Тогда $S_{бок}=l\cdot P_\perp=6\cdot 72=432$ $см^2$.

Ответ: 432 $см^2$.

Метод введения вспомогательного отрезка

Пример 92. *Все боковые грани четырехугольной пирамиды – правильные треугольники. Расстояние от центра боковой грани до плоскости основания пирамиды равно b. Определить объём пирамиды.*

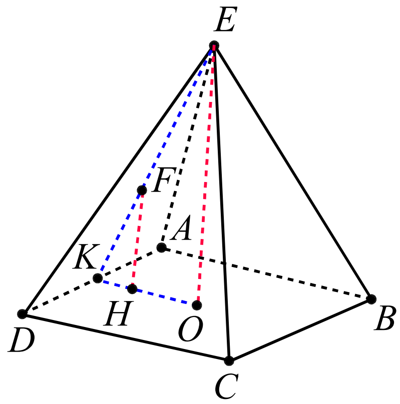


Рис. 104

Решение. Пусть сторона основания данной пирамиды $ABCDE$ равна x, основание высоты пирамиды обозначим через O, основание апофемы к стороне AD – через K (см. рис. 104). Тогда $OK=\frac{x}{2}$, высота EK в равностороннем треугольнике равна $\frac{x\sqrt{3}}{2}$. Из прямоугольного треугольника EOK находим

$$OE = \sqrt{\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{x\sqrt{2}}{2}.$$

Если F – центр боковой грани, H – основание перпендикуляра, опущенного из точки F на основание пирамиды, то $FH = b$. Из подобия треугольников EOK и FHK получаем

$$\frac{EO}{FH} = \frac{EK}{FK} = \frac{3}{1} \text{ и } EO = 3 \cdot FH.$$

Отсюда $\frac{x\sqrt{2}}{2} = 3b$, $x = 3\sqrt{2}b$. Значит, площадь основания пирамиды равна $18b^2$, высота пирамиды – $3b$, объём данной пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3} \cdot 18b^2 \cdot 3b = 18b^3.$$

Ответ: $18b^3$.

Метод введения вспомогательного угла

Пример 93. *В правильной четырехугольной пирамиде ABCDE (E – вершина) через середины сторон AB и AD проведено сечение, плоскость которого параллельна ребру EA. Найти объём пирамиды, если сторона основания равна a и площадь сечения S.*

Решение. Плоскость сечения пересекает плоскости AED и ABE по прямым GH и FJ соответственно, параллельным AE. $FG \parallel BD$, так как FG – средняя линия в треугольнике ABD (см. рис. 105).

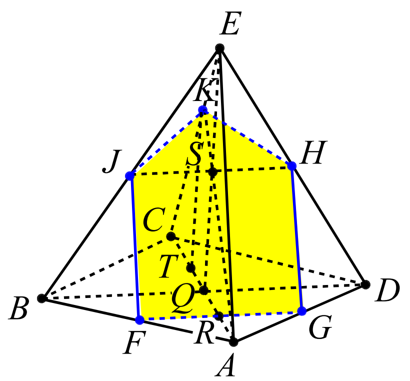


Рис. 105

В квадрате $ABCD$ $AC \perp BD$. Так как AQ – проекция AE на основание пирамиды и $AQ \perp FG$, то $FGHJ$ – прямоугольник. Плоскости FGH и BDE пересекаются по прямой JH.

Пусть $AC \cap FG = R$, $EQ \cap HJ = S$, $RS \cap CE = K$, $\angle EAC = \alpha$. Так как $RQ = \frac{1}{2}AQ = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, то из треугольника RQS получаем $RS = \frac{RQ}{\cos\alpha} = \frac{a\sqrt{2}}{4\cos\alpha}$.

Далее в треугольнике AEC по теореме Фалеса $\frac{EK}{ED} = \frac{AR}{AC} = \frac{1}{4}$, а в треугольнике EQC по теореме Фалеса имеем $\frac{QT}{QC} = \frac{EK}{EC} = \frac{1}{4}$ (T – проекция точки K на плоскость основания пирамиды), то есть $QT = \frac{1}{4}QC = \frac{a\sqrt{2}}{8}$. Значит,

$$SK = \frac{TQ}{\cos\alpha} = \frac{a\sqrt{2}}{8\cos\alpha}.$$

Площадь сечения равна

$$S = S_{FGHJ} + S_{JKH} =$$

$$= \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4\cos\alpha} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{8\cos\alpha} = \frac{5a^2}{16\cos\alpha}.$$

Отсюда $\cos\alpha = \frac{5a^2}{16S}$. Тогда

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{256S^2 - 25a^4}}{16S}$$

и

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{256S^2 - 25a^4}}{5a^2}.$$

Высота пирамиды

$$EQ = AQ\operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\alpha$$

и объём пирамиды

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{256S^2 - 25a^4}}{5a^2} =$$

$$= \frac{a\sqrt{512S^2 - 50a^4}}{30}.$$

Ответ: $\frac{a\sqrt{512S^2 - 50a^4}}{30}$.

Метод введения нескольких вспомогательных элементов

Пример 94. *Найти объём прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого равна* 14, *периметр основания* – 20 *и периметр меньшей боковой грани* – 32.

Решение. Пусть в параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $D_1B=14$, $AB=a$, $BC=b$, $B_1B=c$ с условием $a\ge b$ (сделайте рисунок самостоятельно).

Из условия задачи имеем

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=196, \\ a+b=10, \\ b+c=16. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+c^2=196, \\ a=10-b, \\ c=16-b. \end{cases}$$

Получаем квадратное уравнение

$$3b^2-52b+160=0,$$

имеющее корни 4 и $\frac{40}{3}$ (не удовлетворяет условию $a+b=10$). Тогда $b=4$, $a=6$, $c=12$ и $V=288$.

Ответ: 288.

Метод опорных задач

• *Объёмы пирамид с общей высотой пропорциональны площадям их оснований.*

Пример 95. *В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка F делит ребро BC в отношении* 1:3 (*считая от точки C*). *Найти, в каком отношении делит объём пирамиды плоскость DSF?*

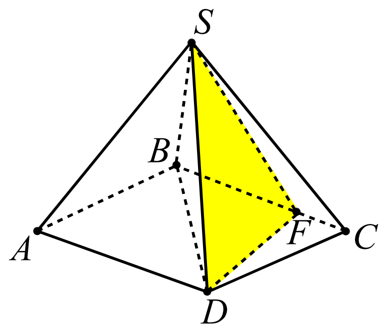


Рис. 106

Решение. Так как данная пирамида и части, на которые она разбивается плоскостью сечения (см. рис. 106), имеют одинаковую высоту, то отношение объёмов частей равно отношению площадей оснований:

$$\frac{V_{SABFD}}{V_{SFCD}}=\frac{S_{ABFD}}{S_{FCD}}.$$

Площади треугольников ABD и BDC равны. Для треугольников с общей высотой имеем

$$\frac{S_{DCF}}{S_{DBF}}=\frac{CF}{BF}=\frac{1}{3}.$$

Поэтому $\frac{S_{ABFD}}{S_{FCD}}=\frac{7}{1}$.

Ответ: 7:1.

• *Объёмы пирамид с равновеликими основаниями пропорциональны проведенным к нему высотам.*

Например, в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 107) объемы пирамид A_1ABD и $MBDC$ относятся как 2:1, где M – середина ребра C_1C.

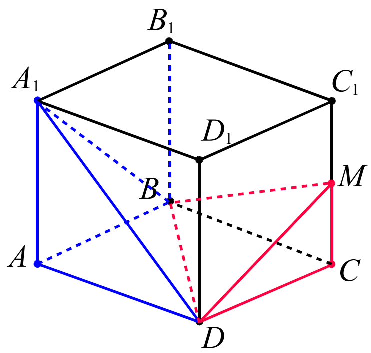


Рис. 107

• *Пирамиды с равновеликими основаниями и равными высотами – равновелики.*

Например, в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 108) пирамиды A_1ABD, D_1ABD и D_1ACD равновелики.

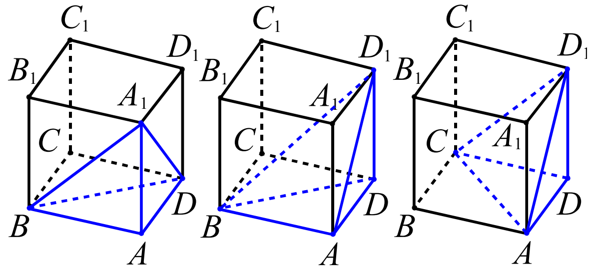


Рис. 108

● *Отношение объёмов подобных многогранников равно кубу коэффициента подобия.*

Пример 96. *Площадь основания пирамиды равна* 3, *объём пирамиды также равен* 3. *Проведены две плоскости, параллельные основанию пирамиды. Площади получившихся сечений равны* 1 *и* 2. *Найти объём части пирамиды, расположенной между плоскостями.*

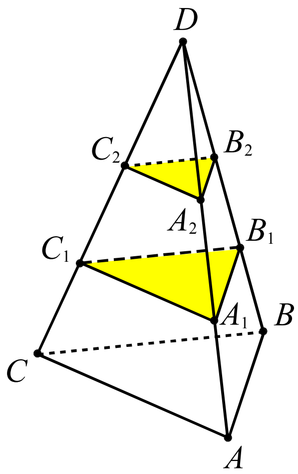


Рис. 109

Решение. Обозначим сечения через $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ (см. рис. 109), причем

$$S_{A_1B_1C_1} = S_1 = 2,$$
$$S_{A_2B_2C_2} = S_2 = 1,$$
$$S_{ABC} = S = 3,$$

объемы пирамид

$$V_{ABCD} = V,$$
$$V_{A_1B_1C_1D} = V_1,$$
$$V_{A_2B_2C_2D} = V_2.$$

Имеем

$$\frac{V_1}{V} = \left(\sqrt{\frac{S_1}{S}}\right)^3 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3 = \sqrt{\frac{8}{27}},$$

$$\frac{V_2}{V} = \left(\sqrt{\frac{S_2}{S}}\right)^3 = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3 = \sqrt{\frac{1}{27}}.$$

Отсюда искомый объем равен

$$V_1 - V_2 = 3\left(\sqrt{\frac{8}{27}} - \sqrt{\frac{1}{27}}\right) = \frac{\sqrt{8}-1}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{8}-1}{\sqrt{3}}$.

Отношение отрезков можно заменить отношением объёмов пирамид с общим основанием (см. рис. 110)

$$\frac{DH}{OH} = \frac{DF}{OG} = \frac{V_{DABC}}{V_{OABC}},$$

где DF и OG – высоты пирамид.

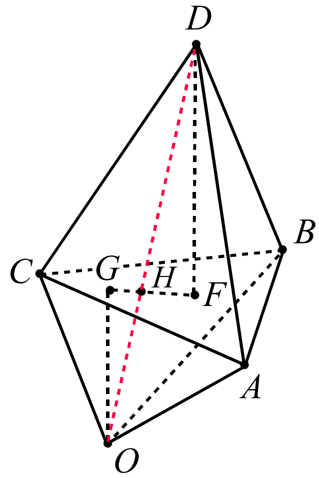


Рис. 110

Пример 97. *На рёбрах* AB, BD *и* DC *пирамиды* $ABCD$ *взяты точки* M, L *и* K *так, что* $AM = \frac{1}{3}AB$, $BL = \frac{1}{4}BD$, $DK = \frac{2}{5}DC$. *В каком отношении плоскость* KLM *делит отрезок, соединяющий середины ребер* AD *и* BC?

Решение. Обозначим середины AD и BC через P и Q соответственно (см. рис. 111). В сечении получится четырехугольник, но для решения задачи достаточно рассмотреть отношение объемов пирамид $PMLK$ и $QMLK$ с общим основанием MLK.

Если $S_{ABD} = a$, то

$$S_{DPL} = \frac{DP}{DA}\cdot\frac{DL}{DB}\cdot S_{ABD} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot a = \frac{3a}{8},$$

$$S_{BML} = \frac{BM}{BA}\cdot\frac{BL}{BD}\cdot S_{ABD} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot a = \frac{a}{6},$$

$$S_{AMP} = \frac{AP}{AD}\cdot\frac{AM}{AB}\cdot S_{ABD} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot a = \frac{a}{6},$$

$$S_{PML} = \left(1 - \frac{3}{8} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right)S_{ABD} = \frac{7a}{24},$$

$$V_{KABD} = \frac{KD}{CD}\cdot V_{ABCD} = \frac{2}{5}\cdot V = \frac{2V}{5},$$

$$V_{PKLM} = \frac{S_{MPL}}{S_{ABD}}\cdot V_{KABD} = \frac{7}{24}\cdot\frac{2V}{5} = \frac{7V}{60},$$

где $V_{ABCD} = V$.

Аналогично получаем $V_{QKLM}=\dfrac{11V}{60}$ (докажите самостоятельно!). Отношение

$$\frac{PN}{QN}=\frac{V_{PKLM}}{V_{QKLM}}=\frac{7V}{60}:\frac{11V}{60}=\frac{7}{11}.$$

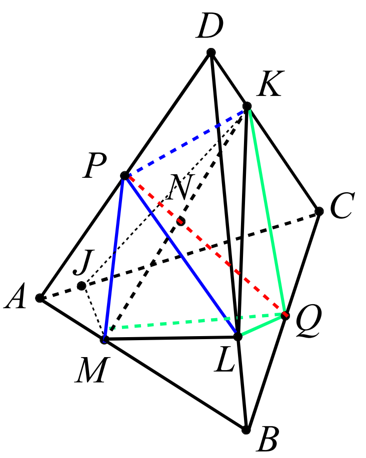


Рис. 111

Ответ: $\dfrac{7}{11}$.

● *Пусть в пирамиде* $MABC$ *на рёбрах* MA, MB *и* MC *или на их продолжениях взяты соответственно точки* A_1, B_1, C_1 *так, что* $MA_1:MA=k$, $MB_1:MB=m$ $MC_1:MC=n$. *Тогда объёмы пирамид* $MA_1B_1C_1$ *и* $MABC$ *связаны формулой*

$$V_{MA_1B_1C_1}=k\cdot m\cdot n\cdot V_{MABC}. \quad (*)$$

(См. опорную задачу 12 глава 3 п. 3.4).

Пример 98. *В основании пирамиды* $DABC$ *лежит треугольник* ABC, *в котором* $\angle C=30°$, $AC=14$, $BC=\dfrac{8}{\sqrt{3}}$, *точка* T *– середина* AC. *Боковое ребро* AD *равно* $6\sqrt{3}$ *и перпендикулярно плоскости* ABC. *На ребрах* AD, BD *и отрезке* DT *взяты соответственно точки* M, N, P *так, что* $AM:MD=2:5$, $DN:NB=2:5$ *и* $TP:PD=7:5$. *Найти объём пирамиды* $DMNP$.

Решение. Так как ребро AD перпендикулярно плоскости основания, то объем V пирамиды $DABC$ равен

$$V=\frac{1}{3}\cdot AD\cdot S_{ABC}=\frac{1}{6}\cdot AD\cdot AC\cdot BC\cdot\sin\angle C=$$
$$=\frac{1}{6}\cdot 6\sqrt{3}\cdot 14\cdot\frac{8}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}=56.$$

Так как медиана BT делит площадь треугольника ABC пополам, то объём пирамиды $DATB$ будет равен $\dfrac{V}{2}=28$.

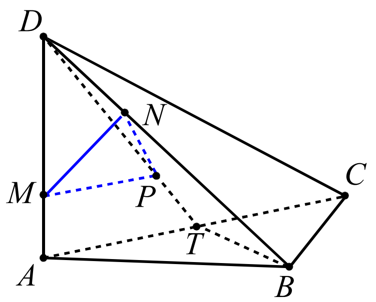


Рис. 112

Точки M, N, P лежат на ребрах пирамиды $DATB$ (см. рис. 112), поэтому по формуле (*) получаем

$$V_{DMNP}=\frac{DM}{DA}\cdot\frac{DP}{DT}\cdot\frac{DN}{DB}\cdot V_{DATB}=$$
$$=\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{2}{7}\cdot 28=\frac{10}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{10}{3}$.

Пример 99. *В правильной четырехугольной пирамиде* $MABCD$ *все рёбра равны. Точки* P *и* N *– середины рёбер* BM *и* DM. *В каком отношении делит объём пирамиды сечение, проходящее через прямую* AP *параллельно диагонали основания* BD?

Решение. Так как точки P и N – середины ребер BM и DM, то PN – средняя линия треугольника BMD и $PN\parallel BD$. Так как через точку P можно провести единственную прямую, параллельную BD и секущая плоскость также параллельна BD, то PN лежит в плоскости сечения (см. рис. 113*а*).

Так как пирамида правильная, то MO – высота пирамиды (O – точка пересечения диагоналей основания), $MO=BMD\cap CMA$.

Пусть точка $E=PN\cap MO$, тогда E – середина MO. Тогда прямая AE также

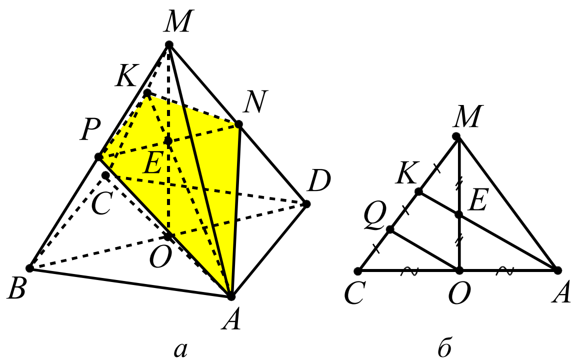


Рис. 113

лежит в плоскости сечения и пусть $K = AE \cap CM$, и четырехугольник $APKN$ – описанное в условие сечение пирамиды.

На выносном чертеже (см. рис. 113*б*) проведем отрезок $OQ \parallel AK$. Тогда, используя теорему Фалеса, получаем KE – средняя линия треугольника OQM и $QK = KM$, а OQ – средняя линия треугольника CKA и $CQ = QK$. Следовательно, точка K делит ребро CM так, что $MK : MC = 1:3$.

Плоскость CMA разбивает каждую из пирамид $MABCD$ и $MAPKN$ на две равные треугольные пирамиды. Используя соотношение (∗), получаем

$$V_{MPKA} = \frac{MK}{MC} \cdot \frac{MP}{MB} \cdot \frac{MA}{MA} \cdot V_{MBCA} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot V_{MBCA} = \frac{1}{6} \cdot V_{MBCA}.$$

Аналогично, $V_{MKNA} = \frac{1}{6} \cdot V_{MCDA}$.

Соответственно, объём пирамиды $MAPKN$ будет составлять шестую часть объема данной пирамиды, а секущая плоскость будет делить объём в отношении $1:5$.

Ответ: $1:5$.

● *Пусть a и b – длины двух противоположных ребер тетраэдра, d – расстояние, а φ – угол между ними. Тогда объём тетраэдра можно вычислить по формуле* $V = \frac{1}{6} abd \sin \varphi$.

(См. опорную задачу 9 глава 3 п. 3.4).

Пример 100. *Дан единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти объём пирамиды AB_1CD_1.*

Решение. Имеем $AB_1 = CD_1 = \sqrt{2}$ (см. рис. 114). Расстояние между скрещивающимися прямыми AB_1 и CD_1, лежащими в параллельных плоскостях, равно 1. Угол между ними равен $90°$, так как $AB_1 \parallel DC_1$ и $CD_1 \perp DC_1$. Следовательно,

$$V_{AB_1CD_1} = \frac{1}{6} AB_1 \cdot CD_1 \cdot AD \cdot \sin \angle(AB_1; CD_1) =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

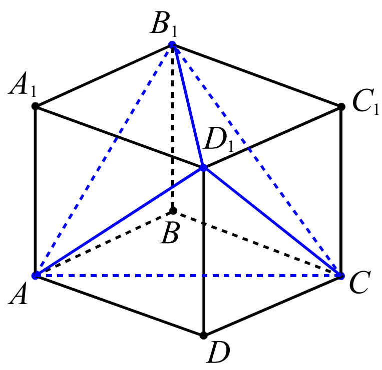


Рис. 114

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Пример 101. *На диагонали грани единичного куба взяты точки M и N, а на скрещивающейся с ней диагонали соседней грани взяты точки P и Q. Известно, что* $MN = \frac{1}{2}$, $PQ = \frac{1}{3}$. *Найти объём тетраэдра MNPQ.*

Решение. Пусть дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 115). Отрезки MN и PQ лежат на прямых AB_1 и A_1C_1 соответственно. Так как $DC_1 \parallel AB_1$, то $\angle(AB_1, A_1C_1) = \angle A_1C_1D = 60°$. Так как прямые AB_1 и A_1C_1 лежат в параллельных плоскостях AB_1C и A_1C_1D, то

$$\rho(AB_1;\ A_1C_1) = \rho(AB_1C;\ A_1C_1D) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Получаем

$$V_{MNPQ}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{72}.$$

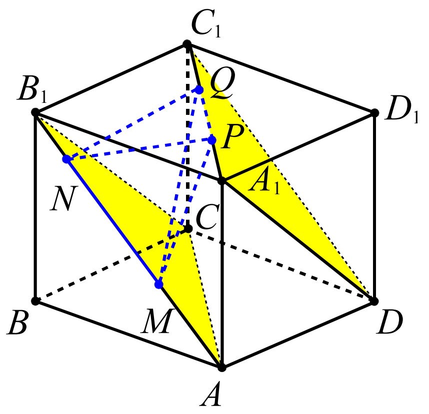


Рис. 115

Ответ: $\frac{1}{72}$.

● *Пусть p и q – площади двух граней тетраэдра, a – длина общего ребра, α – величина двугранного угла между этими гранями. Тогда объем тетраэдра может быть вычислен по формуле*

$$V=\frac{2pq\sin\alpha}{3a}.$$

(См. опорную задачу 11).

Пример 102. *Найти объём пирамиды* $ABCD$, *в которой* $AB=4$, $BC=5$, $AD=6$, $BD=7$, $CA=8$, *а двугранный угол с ребром* AB *равен* $60°$.

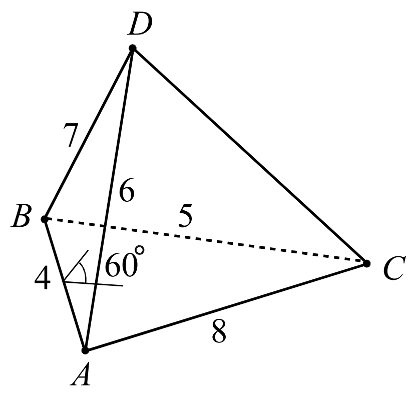


Рис. 116

Решение. Используя формулу Герона, находим площади треугольников (см. рис. 116) ABD и ABC:

$$S_{ABD}=\frac{\sqrt{17\cdot 9\cdot 3\cdot 5}}{4} \text{ и } S_{ABC}=\frac{\sqrt{17\cdot 9\cdot 1\cdot 7}}{4}.$$

Тогда искомый объем пирамиды равен

$$V=\frac{2\cdot\sqrt{17^2\cdot 9^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}}{16}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}:12=\frac{153\sqrt{35}}{64}.$$

Ответ: $\frac{153\sqrt{35}}{64}$.

Принцип разбиения и дополнения

Иногда при вычислении объема многогранника используют дополнение этого многогранника до пирамиды (призмы) или разбиение на эти фигуры.

Пример 103. *В треугольной призме* $ABCA_1B_1C_1$ *с объёмом* 180 *см*^{3} *проведено сечение через вершину* A *и середины рёбер* BB_1 *и* B_1C_1. *Найти объём отсеченной части призмы, содержащей ребро* CC_1.

Решение. Обозначим через M и N середины рёбер BB_1 и B_1C_1 соответственно (см. рис. 117). Далее находим точки $S=MN\cap CC_1$ и $P=SA\cap A_1C_1$, и в сечении получим четырехугольник $APNM$.

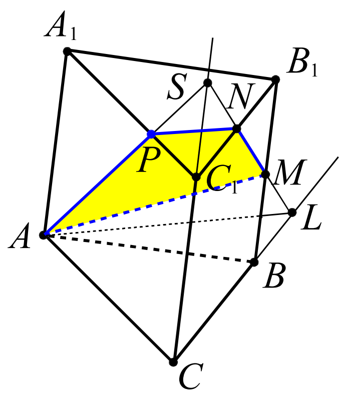


Рис. 117

Построим точку $L=MN\cap BC$. Пусть H – высота призмы, Q – площадь основания. Объёмы пирамид $SALC$, $SPNC_1$ и $MALB$ обозначим через V_2, V_3, V_4.

Точки M и N – середины ребер, поэтому $BL=\frac{1}{2}BC$, $CL=\frac{3}{2}BC$. Значит, $S_{ALC}=\frac{3}{2}Q$.

Также $SC_1=\frac{1}{2}CC_1$, $SC=\frac{3}{2}CC_1$ и высота пирамиды $SALC$ равна $\frac{3}{2}H$.

Объём

$$V_2=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}H\cdot S_{ALC}=\frac{3}{4}HQ=\frac{3}{4}\cdot 180=135.$$

Пирамида $SPNC_1$ подобна пирамиде $SALC$ с коэффициентом $k=\frac{1}{3}$ $(SC_1:SC==1:3)$. Поэтому

$$V_3=k^3V_2=\frac{135}{27}=5.$$

Так как M – середина ребра BB_1, то высота пирамиды $MALB$ равна $\frac{1}{2}H$. Кроме того $BL=\frac{1}{2}BC$, поэтому $S_{ALB}=\frac{1}{2}Q$. Значит,

$$V_4=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}H\cdot S_{ALB}=\frac{1}{12}HQ=\frac{1}{12}\cdot 180=15.$$

Объём отсеченной части призмы, содержащей ребро CC_1 равен

$$V_2-V_3-V_4=135-5-15=115\ (см^3).$$

Ответ: 115 $см^3$.

Пример 104. (ЕГЭ, 2008). *Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На его боковых рёбрах AA_1 и BB_1 лежат точки M и P соответственно так, что $AM:MA_1=8:11$, $B_1P:PB=2:1$. Во сколько раз объём данного параллелепипеда больше объёма пирамиды с вершиной в точке P, основанием которой является сечение данного параллелепипеда плоскостью BMD_1?*

Решение. Объём V данного параллелепипеда равен $V=CB\cdot BA\cdot BB_1$ (см. рис. 118). Сечение параллелепипеда плоскостью BMD_1 – параллелограмм BND_1M, который делит его объём пополам и $\frac{C_1N}{NC}=\frac{8}{11}$ (см. опорную задачу 21 в главе 3 п. 3.4).

Так как $V_{PBND_1M}=\frac{V}{2}-V_{NC_1D_1A_1MPB_1}$, то найдем сначала объём многогранника $NC_1D_1A_1MPB_1$. Для этого разобьем его на две пирамиды $D_1NC_1B_1P$ и $D_1PB_1A_1M$ и найдем объём каждой из них, учитывая, что противоположные ребра параллелепипеда равны.

$$S_{NC_1B_1P}=\frac{\frac{8}{19}CC_1+\frac{2}{3}BB_1}{2}\cdot C_1B_1==\frac{31}{57}CB\cdot BB_1.$$

$$S_{PB_1A_1M}=\frac{\frac{11}{19}AA_1+\frac{2}{3}BB_1}{2}\cdot A_1B_1==\frac{71}{114}AB\cdot BB_1.$$

$$V_{D_1NC_1B_1P}=\frac{1}{3}\cdot D_1C_1\cdot S_{NC_1B_1P}=\frac{1}{3}\cdot\frac{31}{57}\cdot V.$$

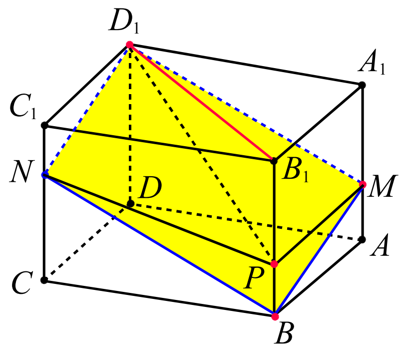


Рис. 118

$$V_{D_1PB_1A_1M}=\frac{1}{3}\cdot D_1A_1\cdot S_{PB_1A_1M}=\frac{1}{3}\cdot\frac{71}{114}\cdot V.$$

Тогда

$$V_{PBND_1M}=\frac{V}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{31}{57}\cdot V-\frac{1}{3}\cdot\frac{71}{114}\cdot V=\frac{V}{9}.$$

Ответ: 9.

Треугольную пирамиду можно достроить до параллелепипеда двумя способами.

1-*й способ*. Треугольник ABC достраиваем до параллелограмма $ABEC$, затем до параллелепипеда $ABECA_1B_1E_1C_1$ (см. рис. 119). В этом случае

$$V_{ABCA_1}=\frac{1}{6}V_{ABECA_1B_1E_1C_1}.$$

(См. опорную задачу 7 глава 3 п.3.4).

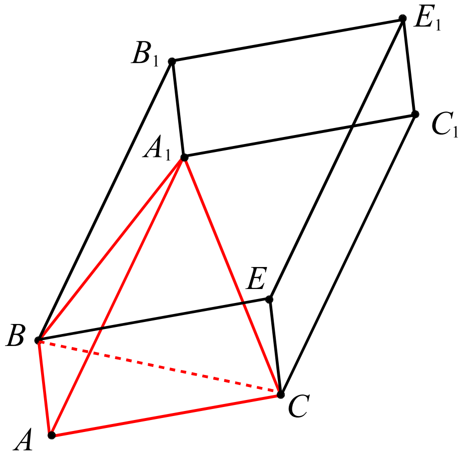


Рис. 119

2-*й способ*. Проводим через каждое ребро тетраэдра плоскость, параллельную противоположному ребру (см. рис. 120). В этом случае рёбра исходного тетраэдра являются диагоналями граней получившегося параллелепипеда и

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}V_{DECFHAGB}.$$

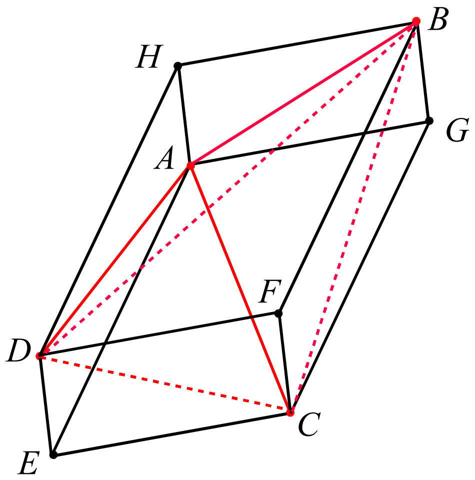


Рис. 120

Пример 105. *В треугольной пирамиде боковые рёбра взаимно перпендикулярны и имеют длины* $\sqrt{70}$, $\sqrt{99}$ *и* $\sqrt{126}$. *Найти объём пирамиды.*

Решение. Данную пирамиду достраиваем до прямоугольного параллелепипеда. Тогда искомый объём равен

$$V=\frac{1}{6}\cdot\sqrt{70}\cdot\sqrt{99}\cdot\sqrt{126}=21\sqrt{55}.$$

Ответ: $21\sqrt{55}$.

Пример 106. *Два противоположных ребра треугольной пирамиды равны a, два других равны b, два оставшихся – c. Найти объём пирамиды.*

Решение. Достраиваем данный тетраэдр до параллелепипеда, проводя через каждое ребро плоскость, параллельную противоположному ребру. Согласно условию задачи получаем прямоугольный параллелепипед (диагонали в каждой грани равны). Пусть линейные размеры параллелепипеда соответственно равны $AB=x$, $AD=y$, $AA_1=z$ (сделайте рисунок самостоятельно). Исходя из условия, составим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ y^2+z^2=b^2, \\ z^2+x^2=a^2. \end{cases}$$

При сложении уравнений получаем

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2).$$

Затем, вычитая из последнего равенства каждое равенство системы, находим

$$x^2=\frac{1}{2}(a^2-b^2+c^2),$$

$$y^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2),$$

$$z^2=\frac{1}{2}(-a^2+b^2+c^2).$$

Тогда искомый объём равен

$$V=\frac{xyz}{3}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)(-a^2+b^2+c^2)}.$$

Ответ:

$$\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)(-a^2+b^2+c^2)}.$$

• *Объём треугольного призматического тела $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$, ограниченного треугольниками $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, можно вычислить по формуле*

$$V_{A_1B_1C_1A_2B_2C_2}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{3}\cdot S_{ABC},$$

где плоскость ABC перпендикулярна ребрам призматической поверхности (см. рис. 121).

В частности,

$$V_{ABCA_2B_2C_2}=\frac{AA_2+BB_2+CC_2}{3}\cdot S_{ABC}.$$

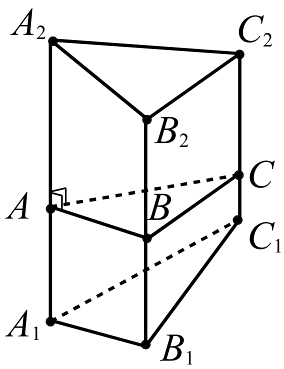


Рис. 121

(См. опорную задачу 13 глава 3 п.3.4).

Пример 107. *Площадь основания ABC прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна* 30. *Точки F, E, D лежат на рёбрах AA_1, BB_1, CC_1 соответственно, причем $AF=4$. Найти объём треугольной пирамиды $DAFE$.*

Решение. Данную пирамиду $DAFE$ можно представить как треугольное призматическое тело, ограниченное снизу и сверху треугольниками ADE и FDE соответственно, причем эти треугольники имеют две общие вершины (см. рис. 122).

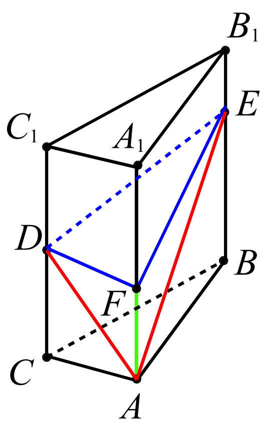


Рис. 122

Находим искомый объём

$$V_{DAFE}=\frac{4+0+0}{3}\cdot 30=40.$$

Ответ: 40.

Пример 108. (ЕГЭ, 2007). *Стороны AB и AD основания прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны* 7 *и* 5 *соответственно, боковое ребро AA_1 равно* 3. *Точки L, K, M лежат на ребрах AD, A_1B_1, B_1C_1 так, что $AL:AD=3:5$, $A_1K:A_1B_1=4:7$, $B_1M:B_1C_1=2:5$. Найти объём пирамиды с вершиной K и основанием AMC_1L.*

Решение. Треугольник AKB_1 является ортогональной проекцией пирамиды $KAMC_1L$ на плоскость ABB_1 (см. рис. 123). Найдём необходимые величины:

$$KB_1=\frac{3}{7}\cdot 7=3,\ MC_1=\frac{3}{5}\cdot 5=3,$$

$$AL=\frac{3}{5}\cdot 5=3,\ S_{AKB_1}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3=\frac{9}{2}.$$

Пирамиду $KAMC_1L$ можно представить как призматическое тело, ограниченное треугольниками AKM и KLC_1, причем эти треугольники имеют одну

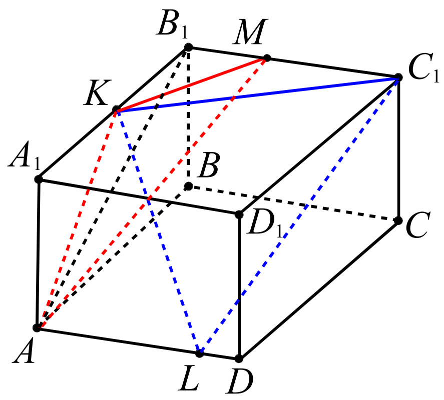


Рис. 123

общую точку. Тогда искомый объём равен

$$V=\frac{AL+MC_1+0}{3}\cdot S_{AKB_1}=\frac{3+3+0}{3}\cdot\frac{9}{2}=9.$$

Ответ: 9.

Тренировочные упражнения

151. (ЕГЭ, 2012). Точка E – середина ребра AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите площадь сечения куба плоскостью C_1DE, если рёбра куба равны 2.

152. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через точки A, B_1 и середину ребра CC_1 проведена секущая плоскость. Найдите площадь полной поверхности куба, если площадь сечения равна 36.

153. Куб, ребро которого равно a, пересекается плоскостью, проходящей через его диагональ. Какую наименьшую площадь может иметь сечение и при каком угле наклона плоскости сечения к плоскости основания это достигается?

154. Прямоугольный параллелепипед, измерения которого равны a, b, c, пересекается плоскостью, проходящей через его диагональ. Какую наименьшую площадь может иметь сечение, если $a \le b \le c$?

155. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = BC = a$, $BB_1 = b$ $(b > a)$. Через вершину A перпендикулярно диагонали BD_1 проведена плоскость. Найдите площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью.

156. Сечение плоскостью прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием есть ромб с острым углом α. Определите, под каким углом пересекает эта плоскость боковые ребра параллелепипеда?

157. Определите объём прямоугольного параллелепипеда, площади граней которого равны Q_1, Q_2 и Q_3.

158. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На его боковых рёбрах AA_1 и BB_1 лежат точки M и P соответственно так, что $AM : MA_1 = 8:11$, $B_1P : PB = 2:1$. Во сколько раз объём данного параллелепипеда больше объёма пирамиды с вершиной в точке P, основанием которой является сечение данного параллелепипеда плоскостью BMD_1?

159. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На его боковых рёбрах AA_1 и BB_1 лежат точки M и P соответственно так, что $AM : MA_1 = 7:5$, $B_1P : PB = 4:3$. Во сколько раз объём данного параллелепипеда больше объёма пирамиды с вершиной в точке P, основанием которой является сечение данного параллелепипеда плоскостью BMD_1?

160. Ребра AB и AD основания $ABCD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны соответственно 9 и 4. На боковых ребрах AA_1 и BB_1, равных 11, лежат точки M и P соответственно так, что $AM : MA_1 = 3:4$, $B_1P : PB = 8:3$. Найдите объём пирамиды с вершиной в точке P, основанием которой является сечение данного параллелепипеда плоскостью BMD_1.

161. Каждое ребро правильной треугольной призмы равно a. Через сторону основания и середину оси (ось – отрезок, соединяющий центры оснований) проведена плоскость. Найдите площадь сечения призмы этой плоскостью.

162. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ – треугольник ABC, в котором $\angle C = 90°$, $BC = 6$, $AC = 8$. Угол между плоскостями ABC и ABC_1 равен $45°$. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

163. Основанием прямой четырехугольной призмы является ромб с диагоналями 6 и 8. Найдите площадь полной поверхности призмы, если известно, что диагональ ее боковой грани равна 13.

164. Наклонная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет своими основаниями трапеции $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Сумма площадей параллельных боковых граней призмы равна S, а расстояние между этими гранями равно d. Найдите объём многогранника $A_1B_1C_1D_1AC$.

165. Основание пирамиды $ABCD$ – прямоугольный треугольник с гипотенузой AB, равной $2\sqrt{30}$. CD – высота пирамиды, боковые ребра AD и BD наклонены к плоскости основания под углами

$30°$ и $60°$ соответственно. Найдите объём пирамиды.

166. В основании первой пирамиды $DABC$ лежит треугольник ABC, в котором $\angle C = 45°$, $BC = 6\sqrt{2}$, $AC = 18$. Боковое ребро AD перпендикулярно плоскости основания пирамиды. Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра DB параллельно прямым BC и AD, является основанием второй пирамиды. Ее вершина T – основание высоты BT треугольника ABC. Во сколько раз объём первой пирамиды больше объема второй пирамиды?

167. В основании пирамиды $DABC$ лежит треугольник ABC, в котором $\angle C = 30°$, $AC = 20$, $BC = \dfrac{8}{\sqrt{3}}$. Боковое ребро AD равно $6\sqrt{3}$ и перпендикулярно плоскости ABC. Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра DB параллельно прямым BC и AD, является основанием второй пирамиды. Ее вершина T – основание высоты BT треугольника ABC. Найдите объём второй пирамиды.

168. В основании пирамиды $DABC$ лежит треугольник ABC, в котором $\angle C = 60°$, $BC = 8$, $AC = 14$. Боковые грани DAC и DAB перпендикулярны плоскости основания пирамиды, а ребро AD равно $4\sqrt{3}$. Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра DB параллельно прямым BC и AD, является основанием второй пирамиды, вершина которой в точке C. Найдите объём второй пирамиды.

169. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом $45°$, а угол между одним из них и гипотенузой основания равен $60°$. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через гипотенузу основания, если гипотенуза основания пирамиды равна d?

170. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$. Точка F делит ребро SC в отношении $1:2$ (считая от точки S), точка E – середина ребра BC. Найдите, в каком отношении делит объём пирамиды плоскость DEF.

171. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 12. Через вершины A и C_1 призмы проведена плоскость, пересекающая боковое ребро BB_1 в точке K, а боковое ребро DD_1 в точке L. Найдите объём пирамиды A_1AKC_1L.

172. Основание пирамиды $MABCD$ – квадрат, диагональ которого равна $\sqrt{6}$. Ребро MB перпендикулярно плоскости основания, а угол между плоскостями ABC и AMD равен $60°$. Найдите объём пирамиды.

173. В основании пирамиды $SABCD$ лежит ромб $ABCD$, сторона которого равна 12, а диагональ $DB = 6$. Высота пирамиды SO проходит через точку пересечения диагоналей ромба и равна $3\sqrt{13}$. Точки E и F лежат на рёбрах AD и AB соответственно, причем $AE = 4$, $FB = 8$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E, F и параллельной ребру SC.

174. (МИОО, 2012). В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ проведено сечение через середины рёбер AB и BC и вершину S. Найдите площадь этого сечения, если все ребра пирамиды равны 8.

175. (МИОО, 2012). В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ проведено сечение через середины рёбер AB и BC и вершину S. Найдите площадь этого сечения, если боковое ребро пирамиды равно 6, а сторона основания равна 4.

176. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, боковое ребро b. Через середины двух смежных сторон основания проведено сечение параллельно пересекающему их боковому ребру. Найдите площадь сечения.

Глава 3. Дополнения

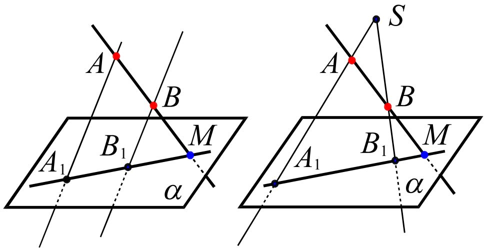
3.1. Методы построения сечения многогранника плоскостью

Следом плоскости α *на плоскости* β называют прямую, по которой плоскость α пересекает плоскость β.

Следом прямой l *на плоскости* α называют точку пересечения прямой с плоскостью α.

Опорная задача. *Найти точку пересечения данной прямой* AB *с плоскостью* α *(* AB *не параллельна* α*).*

Решение. Задача имеет решение в случае, если возможно построить параллельную или центральную проекцию данной прямой AB на плоскость α. В первом (см. рис. 124*а*) и во втором (см. рис. 124*б*) случае строятся проекции прямой на плоскость. Так как прямая AB и ее проекции лежат в одной плоскости (образованной: в первом случае параллельными прямыми AA_1 и BB_1, во втором – пересекающимися прямыми SA и SB), то точка их пересечения M и есть искомая.



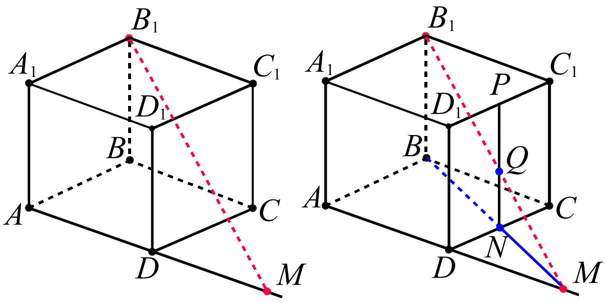
а *б*

Рис. 124

Пример 109. *Построить след прямой* B_1M *на грани куба* DD_1C_1C (см. рис. 125*а*).

Решение. Прямая BM – параллельная проекция (параллельно боковому ребру куба) прямой B_1M на плоскость основания (см. рис. 125*б*). Точка N – точка пересечения прямых BM и DC. Эта точка является проекцией точки пересечения прямой B_1M с гранью DD_1C_1C. Через точку N проводим прямую NP, параллельную боковому ребру. Она принадлежит плоскости грани DD_1C_1 и пересечет прямую B_1M в точке Q, поскольку они лежат в одной плоскости BB_1M. Следовательно, точка Q – искомая.

Сечение многогранника плоскостью – многоугольник, представляющий собой множество всех точек пространства, принадлежащих одновременно данному многограннику и плоскости, плоскость при этом называется *секущей плоскостью*.



а *б*

Рис. 125

Секущая плоскость может быть задана различными способами, например:

а) тремя точками, которые не лежат на одной прямой;

б) прямой и точкой, не лежащей на ней;

в) двумя пересекающимися прямыми;

г) некоторыми из указанных выше геометрических элементов в совокупности с различными зависимостями между ними и элементами (гранями, ребрами, диагоналями и т. д.) многогранника.

Построение плоских сечений многогранников выполняется на основе соответствующих пространственных аксиом и теорем.

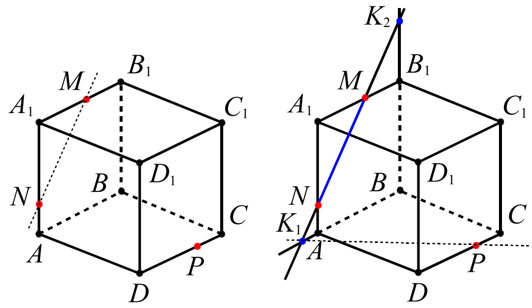
Построить сечение многогранника плоскостью – это значит построить многоугольник все вершины и стороны, которого – соответственно следы секущей плоскости на ребрах и гранях многогранника.

Наиболее часто применяемыми методами построения сечений многогранников плоскостью являются: метод следов и метод переноса секущей плоскости.

Метод «следов»

При использовании этого метода сначала строится след секущей плоскости на плоскости одной из граней многогранника (либо на диагональной плоскости или плоскости симметрии), а также следы на прямых, содержащих стороны этой грани. Далее при наличии двух следов на прямых, содержащих стороны соответствующей грани, строятся следы секущей плоскости на других гранях.

Пример 110. *Построить сечение куба* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *плоскостью, проходящей через три заданные на его ребрах точки* M, N, P, *две из которых лежат на смежных ребрах* (см. рис. 126*а*).



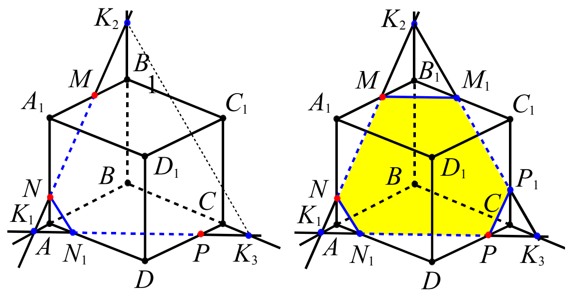
а *б*

Рис. 126

Решение. Точки M и N лежат в плоскости сечения и в плоскости AA_1B_1, поэтому отрезок MN – след секущей плоскости на грани AA_1B_1B. Для построения следов на других гранях поступаем следующим образом.

Проводим прямую MN (см. рис. 126*б*) до пересечения с прямыми AB и BB_1, лежащими с ней в одной плоскости и не параллельными ей. Точки K_1 и K_2 – следы секущей плоскости на указанных прямых.

Точки K_1 и P лежат в плоскости



в *г*

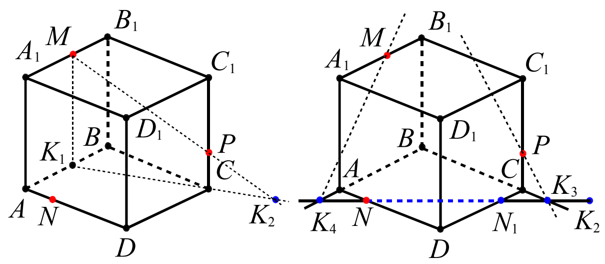
Рис. 126

ABC (см. рис. 126*в*), следовательно, прямая K_1P и точки N_1 и K_3 – следы секущей плоскости на плоскости ABC, на ребре AD и прямой BC соответственно.

Точки K_2 и K_3 лежат в плоскости BB_1C_1 (см. рис. 126*г*), следовательно, прямая K_2K_3 – след секущей плоскости на плоскости BB_1C_1, точки P_1 и M_1 – ее следы на ребрах CC_1 и B_1C_1 соответственно. Соединяя в указанном порядке точки M, N, N_1, P, P_1, M_1, получаем искомое сечение – шестиугольник $MNN_1PP_1M_1$.

Пример 111. *Построить сечение куба* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *плоскостью, проходящей через три заданные точки* M, N, P, *лежащие на непересекающихся ребрах* (см. рис. 127*а*) *при условии, что никакие две из них не лежат в одной грани.*

Решение. Найдем точку пересечения прямой MP с плоскостью ABC. Для этого проведем через точку M прямую, параллельную ребру AA_1 (см. рис. 127*а*). Она пересечет ребро AB в точке K_1. Так как точка P лежит на ребре CC_1, то она соответственно проектируется в точку C. Точка $K_2 = MP \cap K_1C$ принадлежит плоскостям сечения и основания.



а *б*

Рис. 127

Тогда прямая NK_2 – след секущей плоскости на плоскости основания (см. рис. 127*б*), а точки K_3, N_1, K_4 – следы на прямой BC, ребре CD и прямой AB соответственно.

Далее проводим прямые K_4M и K_3P (см. рис. 127*в*). Искомое сечение – шестиугольник $MM_1NN_1PP_1$.

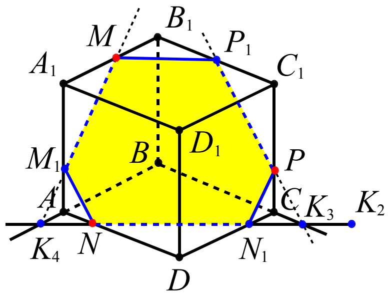
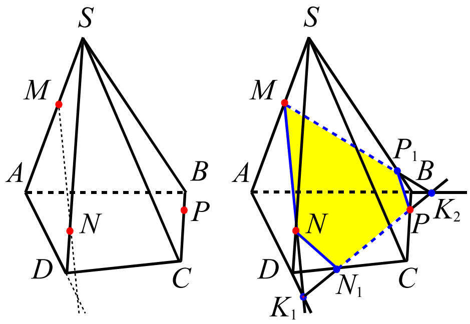


Рис. 127*в*

Пример 112. *Построить сечение четырехугольной пирамиды $SABCD$ плоскостью, проходящей через три заданные точки M, N, P, лежащие на ее ребрах* (см. рис. 128*а*).

Решение. Прямые MN и AD лежат в плоскости SAD и не параллельны, Следовательно, они пересекаются в некоторой точке K_1 (см. рис. 128*б*). Точки K_1 и P принадлежат плоскости основания пирамиды и плоскости сечения, следовательно, прямая K_1P – след секущей



а *б*

Рис. 128

плоскости на плоскости основания.

Аналогично, прямые K_1P и AB пересекаются в некоторой точке K_2. Точки N_1 и P_1 – следы секущей плоскости на ребрах DC и SB соответственно.

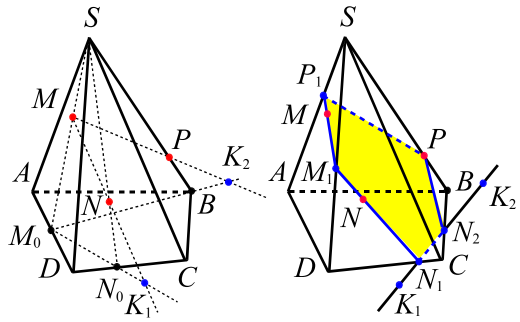
Соединяя последовательно точки M, N, N_1, P, P_1, M, получаем сечение – пятиугольник MNN_1PP_1.

Пример 113. *Даны точки M и N, лежащие на боковых гранях четырехугольной пирамиды, и точка P – на ее боковом ребре* (см. рис. 129*а*). *Построить сечение пирамиды плоскостью MNP*.

Решение. Находим на плоскости основания пирамиды следы прямых MN и MP – точки K_1 и K_2, как точки пересечения указанных прямых и их центральных проекций M_0N_0 и M_0B из центра S на плоскость основания (см. рис. 129*а*).

Прямая K_1K_2, являющаяся следом секущей плоскости на плоскости основания, пересекает ребра DC и BC в точках N_1 и N_2 соответственно (см. рис. 129*б*). Точки P и N_2 лежат в плоскости грани SBC, N_1 и N – в плоскости грани SDC и $M_1 = SD \cap N_1N$, M_1 и M – в плоскости грани SAD и $P_1 = SA \cap M_1M$.

Соединяя последовательно полученные точки, получаем искомое сечение $M_1N_1N_2PP_1$.



а *б*

Рис. 129

Метод вспомогательных плоскостей, метод переноса секущей плоскости

При использовании этого метода вместо секущей плоскости строится параллельная ей вспомогательная плоскость, которая пересекает все грани некоторого трехгранного (или многогранного в общем случае) угла данного многогранника. Далее путем параллельного переноса строятся некоторые линейные элементы искомого сечения, соответствующие легко строящимся элементам вспомогательной плоскости.

Свойства параллельных плоскостей.

- *Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то линии их пересечения параллельны.*
- *Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.*

Пример 114. *Даны точки* M, N *и* P, *лежащие соответственно на боковых ребрах* SA, SD *и* SB *четырехугольной пирамиды* $SABCD$. *Построить сечение пирамиды плоскостью* MNP (см. рис. 130).

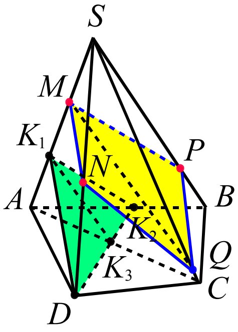


Рис. 130

Решение. Проводим через вершину D прямую, параллельную MN, до пересечения с ребром SA. Через полученную точку K_1 параллельно MP проводим прямую до пересечения с ребром AB в точке K_2.

Плоскость треугольника DK_1K_2 параллельна плоскости MNP. Плоскость ASC пересекает их по параллельным прямым. Прямая пересечения плоскостей ASC и DK_1K_2 – K_1K_3, где K_3 – точка пересечения диагонали AC четырехугольника $ABCD$ и отрезка DK_2. Через точку M проводим прямую, параллельную K_1K_3, до пересечения с ребром SC. Получаем точку Q. Сечение $MPQN$ является искомым.

Пример 115. *В основании пирамиды* $SABCD$ *лежит ромб* $ABCD$, *сторона которого равна* 12, *а диагональ* $BD = 6$. *Высота пирамиды* SO *проходит через точку пересечения диагоналей ромба и равна* $3\sqrt{13}$. *Точки* E *и* F *лежат на ребрах* AD *и* AB *соответственно, причем* $AE = 4$, $FB = 8$. *Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, параллельной ребру* SC *и проходящей через точки* E *и* F.

Решение. Так как $AF = AB - FB = 4$ и $AE = 4$, то треугольник AFE – равнобедренный и подобен треугольнику ABD с коэффициентом подобия $\frac{AF}{AB} = \frac{1}{3}$ (см. рис. 131). Значит $FE = \frac{1}{3}BD = 2$.

Пусть L – точка пересечения FE с диагональю ромба AC. Так как секущая плоскость параллельна SC, то через точку L в этой плоскости будет проходить прямая, параллельная SC, которая пересечет ребро SA в точке K ($KL \parallel SC$, KL лежит в плоскости ASC). Треугольник KFE – искомое сечение.

$BD \perp ASC$, поскольку $BD \perp SO$ и $BD \perp AC$. Следовательно, $FE \perp ASC$, а значит $FE \perp KL$, то есть KL – высота треугольника KFE. Тогда, зная KL, найдем площадь сечения.

Треугольники AKL и ASC подобны с коэффициентом подобия $\frac{AL}{AC} = \frac{AL}{2AO} = \frac{1}{6}$.

Из прямоугольных треугольников BOC и SOC по теореме Пифагора получаем

$$OC = \sqrt{BC^2 - BO^2} = \sqrt{12^2 - 3^2} = 3\sqrt{15},$$
$$SC = \sqrt{SO^2 + OC^2} = \sqrt{117 + 135} = 6\sqrt{7}.$$

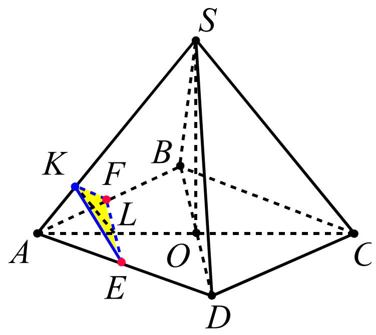


Рис. 131

Так как $\frac{KL}{SC} = \frac{AL}{AC} = \frac{1}{6}$, то $KL = \sqrt{7}$.

Следовательно, $S_{KFE} = \frac{1}{2} \cdot KL \cdot FE = \sqrt{7}$.

Ответ: $\sqrt{7}$.

Метод дополнения n-угольной призмы (пирамиды) до треугольной призмы (пирамиды)

Если данную призму (пирамиду) достроить до треугольной призмы (пирамиды), затем построить сечение полученной треугольной призмы (пирамиды), то искомое сечение получается как часть сечения треугольной призмы (пирамиды).

Пример 116. *Построить сечение пирамиды* $DAEGHF$ *плоскостью* AMN, *где точки* M *и* N *лежат на ребрах* DE *и* DF *соответственно.*

Решение. 1. Достраиваем данную пятиугольную пирамиду до треугольной.

Для этого получим точки $AE \cap HG = C$ и $AF \cap GH = B$, и затем проведем отрезки DC и DB (см. рис. 132).

2. Строим сечение полученной треугольной пирамиды $ABCD$ плоскостью AMN. Для этого последовательно получаем точки $AM \cap DC = P$ и $AN \cap DB = Q$, и соединяем точки P и Q. Треугольник APQ – есть сечение пирамиды $ABCD$ плоскостью AMN.

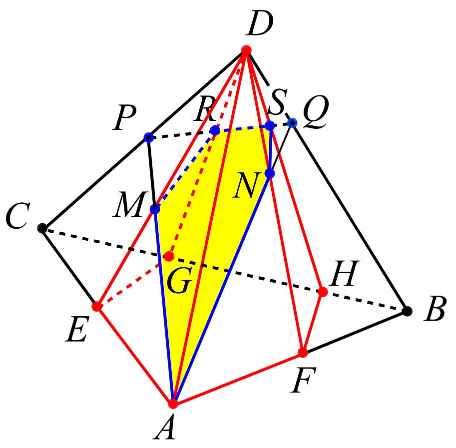


Рис. 132

3. Осталось получить точки $PQ \cap DG = R$ и $PQ \cap DH = S$. Тогда пятиугольник $AMRSN$ – искомое сечение данной пятиугольной пирамиды.

Метод разбиения n-угольной призмы (пирамиды) на треугольные призмы (пирамиды)

При использовании данного метода порядок действий следующий:

– из данной *n*-угольной призмы (пирамиды) выделяют основную треугольную призму (пирамиду), на боковых ребрах которой лежат точки, определяющие искомое сечение;

– строят сечение этой треугольной призмы (пирамиды);

– строят сечения тех треугольных призм (пирамид), которые имеют общие части с основной.

Пример 117. *Построить сечение четырехугольной призмы* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *плоскостью PQR, где точки P и Q лежат на ребрах* AA_1 *и* DD_1 *соответственно, точка R принадлежит плоскости* AA_1B_1B.

Решение. 1. Точка R лежит на отрезке EE_1, где $E \in AB$, $E_1 \in A_1B_1$, $EE_1 \in AA_1$ (см. рис. 133). Треугольник PQR является сечением треугольной призмы $ADEA_1D_1E_1$. Призмы $ADCA_1D_1C_1$ и $ABCA_1B_1C_1$ имеют общую часть с призмой $ADEA_1D_1E_1$.

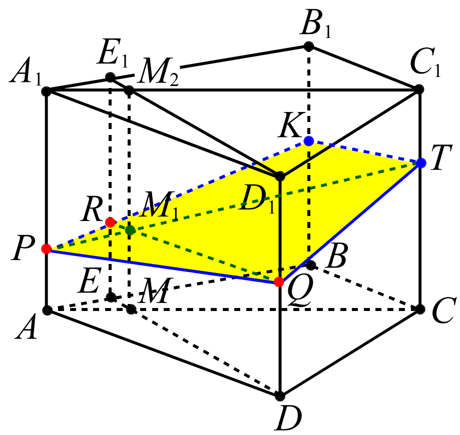


Рис. 133

2. Получим точки $AC \cap DE = M$, $A_1C_1 \cap D_1E_1 = M_2$. Плоскости ACC_1 и EDD_1 пересекаются по прямой MM_2. Прямые MM_2 и QR пересекаются в точке M_1.

3. Точки P и M_1 принадлежат плоскости ACC_1, поэтому прямые PM_1 и CC_1 пересекаются в точке T, принадлежащей секущей плоскости PQR.

4. Имеем точку $PR \cap BB_1 = K$. Прямые PR и PQ лежат в одной плоскости PQR, поэтому точка K принадлежит плоскости PQR.

5. Точки Q и T лежат в плоскости сечения, значит, прямая QT принадлежит секущей плоскости. Четырехугольник $PKTQ$ – искомое сечение.

Среди методов построения сечений многогранников выделяют также метод внутреннего проектирования, который используется на практике крайне редко.

3.2. Векторный метод

Векторный метод может быть использован при решении широкого класса геометрических задач. Для решения задач, касающихся: взаимного расположения двух прямых, принадлежности трех точек одной прямой, вычисления отношения отрезков параллельных прямых, требуются лишь операции сложения и вычитания векторов, умножения вектора на число. Операция скалярного умножения двух векторов (в сочетании с предыдущими операциями) позволяет вычислять длины отрезков и величины углов, а значит, находить расстояния, площади и объемы геометрических фигур.

Если необходимо найти длину отрезка, то в качестве базисных векторов выбирают такие векторы, для которых известны их длины и углы между ними. Если в задаче требуется найти величину угла между прямыми, то в качестве базисных выбирают векторы с известными отношениями их длин и известными углами между ними.

Базис и координаты вектора

Упорядоченная тройка некомпланарных, векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется *базисом.*

Всякий вектор $\vec{d}$ может быть представлен единственным образом в виде

$$\vec{d} = x\cdot\vec{a} + y\cdot\vec{b} + z\cdot\vec{c} \qquad (1)$$

где числа x, y, z называются координатами вектора $\vec{d}$ в базисе векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Формулу (1) называют *разложением вектора* $\vec{d}$ *по базису* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и используют также следующую форму записи $\vec{d} = \{x, y, z\}$.

Базис $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называют *прямоугольным* (или *ортогональным*), если скалярные произведения $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}$, и $\vec{b}\cdot\vec{c}$ равны нулю, т.е. векторы попарно *перпендикулярны*.

Базис $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называют *декартовым* (или *ортонормированным*), если векторы попарно *перпендикулярны* и $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$.

Для векторов декартова базиса обычно используют обозначения $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Если два вектора $\vec{n}$ и заданы своими координатами в некоторой декартовой системе координат $\vec{n} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{m} = \{x_2, y_2, z_2\}$, то их скалярное произведение в этой системе координат выражается следующим образом:

$$\vec{n}\cdot\vec{m} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \qquad (2)$$

Обычно при решении задач, в которых рассматриваются призма или пирамида, в качестве базисных векторов выбирают какую либо тройку векторов, выходящих из одной вершины и направленных вдоль ребер многогранника.

Пример 118. *В параллелепипеде* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *точка* M *– центр грани* CC_1D_1D. *Найти координаты вектора* $\overrightarrow{B_1M}$ *в базисе* $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{AD}$.

Решение. Для треугольника B_1C_1M запишем равенство (см. рис. 134)

$$\overrightarrow{B_1M} = \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{C_1M}.$$

Воспользуемся тем, что $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AD}$, а $\overrightarrow{C_1M} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{C_1C})$. Так как $\overrightarrow{C_1D_1} = -\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{C_1C} = -\overrightarrow{A_1A}$, то отсюда получаем $\overrightarrow{C_1M} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB})$. Следовательно,

$$\overrightarrow{B_1M} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$

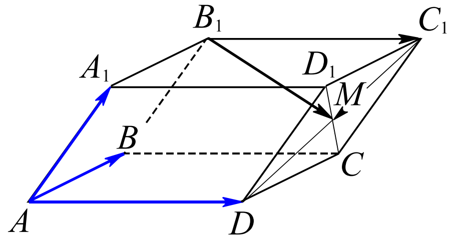


Рис. 134

Ответ: $\overrightarrow{B_1M} = \left\{-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1\right\}$.

Пример 119. *В основании четырехугольной пирамиды MABCD лежит параллелограмм ABCD. Точки N и P – середины ребер BM и DC соответственно. Найти координаты вектора $\overrightarrow{NP}$ в базисе $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AM}$.*

Решение. Заметим из треугольника ANP, что $\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AN}$ (см. рис. 135).

Так как точка N – середина ребра BM, то $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.

Соответственно, $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}$ или $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Следовательно

$$\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AN}=$$
$$=\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)-\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}\right)=$$
$$=\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}.$$

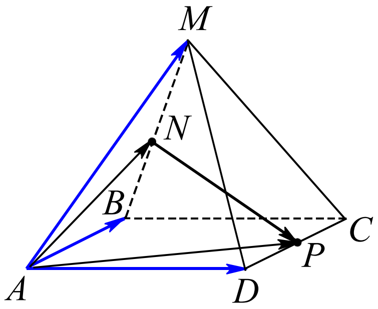


Рис. 135

Ответ: $\overrightarrow{NP}=\left\{1;\, 0;\, -\frac{1}{2}\right\}$.

Пример 120. *Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ Точки M, N, P – центры граней $A_1B_1C_1D_1$, CC_1D_1D, BB_1C_1C соответственно. Пусть $\vec{a}=\overrightarrow{AM}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AN}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AP}$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AC_1}$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.*

Решение. Введем векторы $\vec{p}=\overrightarrow{AA_1}$, $\vec{q}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{r}=\overrightarrow{AD}$ (см. рис. 136). Тогда

$$\vec{a}=\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1M}=\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{q}+\frac{1}{2}\vec{r}.$$

Аналогично находим:

$$\vec{b}=\frac{1}{2}\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{q}+\vec{r},$$

$$\vec{c}=\frac{1}{2}\vec{p}+\vec{q}+\frac{1}{2}\vec{r}.$$

Заметим, что

$$\overrightarrow{AC_1}=\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}.$$

Получим:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=$$
$$=\left(\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{q}+\frac{1}{2}\vec{r}\right)+\left(\frac{1}{2}\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{q}+\vec{r}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{2}\vec{p}+\vec{q}+\frac{1}{2}\vec{r}\right)=2(\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}).$$

Отсюда $\overrightarrow{AC_1}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$.

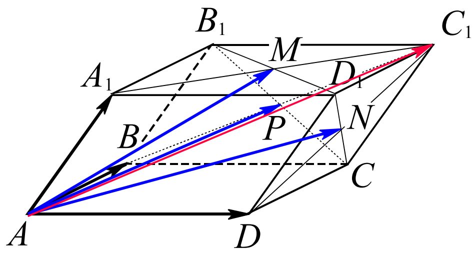


Рис. 136

Ответ: $\overrightarrow{AC_1}=\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$.

3.3. Координатный метод

Координатный метод является естественным продолжением векторного метода, то есть вектор пространства есть упорядоченная тройка действительных чисел (декартовых прямоугольных координат вектора в ортонормированном базисе).

Рациональное расположение фигуры относительно системы координат (некоторые вершины многогранника находятся на координатных осях), позволяет при решении задач упростить вычисления.

Координаты вершин многогранников в декартовой системе координат

В данном пункте представлены в общем виде координаты вершин некоторых видов многогранников, наиболее часто используемых в задачах.

1. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Пусть начало координат находится в точке A, направление координатных осей показано на рис. 137. Тогда вершины куба имеют координаты:

$$A(0;0;0),\ B(0;a;0),\ C(a;a;0),$$
$$D(a;0;0),\ A_1(0;0;a),\ B_1(0;a;a),$$
$$C_1(a;a;a),\ D_1(a;0;a).$$

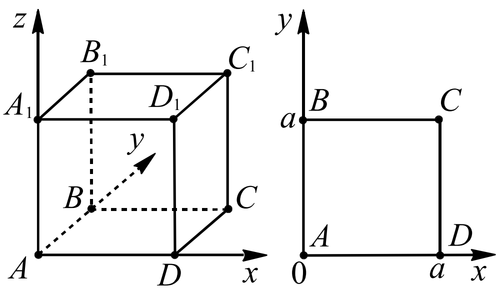


Рис. 137

Такое же расположение системы координат удобно использовать для прямоугольного параллелепипеда. Еще один вариант расположения прямоугольного параллелепипеда (куба) относительно декартовой системы координат связан с размещением начала координат в точке пересечения диагоналей основания.

2. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, сторона основания которой равна a, а боковое ребро b. Пусть начало координат находится в точке A, ось x направлена вдоль ребра AC, ось y проходит через точку A перпендикулярно AC, ось z направлена вдоль бокового ребра AA_1 (см. рис. 138). Тогда вершины призмы имеют координаты:

$$A(0;0;0),\ B\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right),\ C(a;0;0),$$
$$A_1(0;0;b),\ B_1\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};b\right),\ C_1(a;0;b).$$

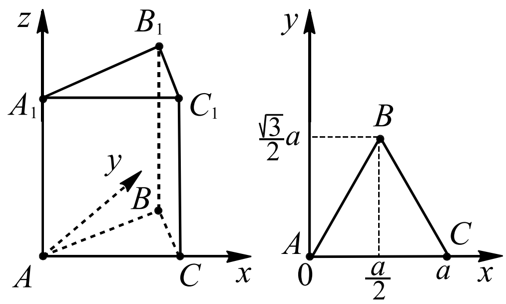


Рис. 138

Другой вариант расположения правильной треугольной призмы относительно прямоугольной декартовой системы координат показан на рисунке 139.

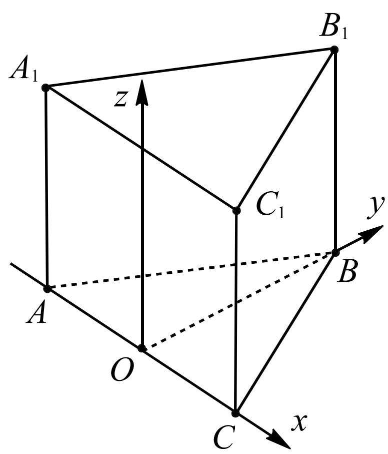


Рис. 139

3. Правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, сторона основания которой равна a, а боковое ребро b. Пусть начало координат находится в точке A, ось x направлена вдоль ребра AF, ось y проходит через точку A перпендикулярно AF, ось z направлена вдоль бокового ребра AA_1 (см. рис. 140). Тогда вершины призмы имеют координаты:

$$A(0;0;0),\ B\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right),\ C\left(0;a\sqrt{3};0\right),$$

$D(a; a\sqrt{3}; 0)$, $E\left(\frac{3a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$, $F(a; 0; 0)$,

$A_1(0; 0; b)$, $B_1\left(-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; b\right)$, $C_1(0; a\sqrt{3}; b)$,

$D_1(a; a\sqrt{3}; b)$, $E_1\left(\frac{3a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; b\right)$, $F_1(a; 0; b)$.

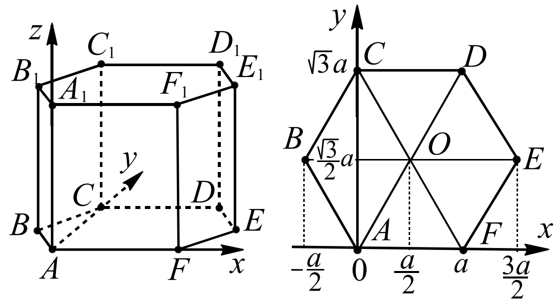


Рис. 140

На выносном чертеже основания $AD = BE = CF = 2a$, $AC = \sqrt{CF^2 - AF^2} = a\sqrt{3}$.

Другой вариант расположения правильной шестиугольной призмы относительно прямоугольной декартовой системы координат представлен на рисунке 141.

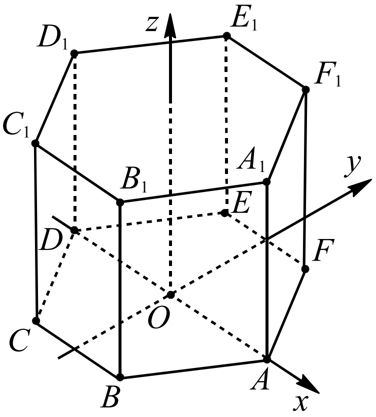


Рис. 141

4. Правильная треугольная пирамида $MABC$, сторона основания которой равна a, а высота h.

Обычно используют один из двух вариантов расположения системы координат.

4.1. Пусть начало координат находится в точке A, ось x направлена вдоль ребра AC, ось y проходит через точку A перпендикулярно AC, ось z проходит через точку A перпендикулярно плоскости ABC (см. рис. 142). Тогда вершины пирамиды имеют координаты:

$A(0; 0; 0)$, $B\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$, $C(a; 0; 0)$,

$M\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{6}; h\right)$.

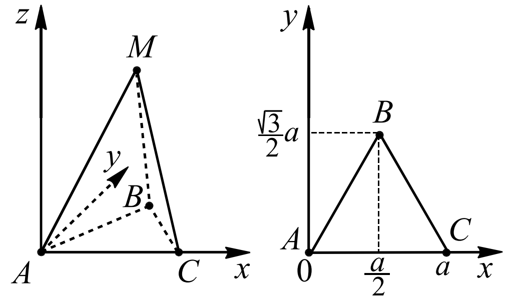


Рис. 142

4.2. Пусть начало координат находится в центре треугольника ABC в точке O, ось x проходит через точку O параллельно ребру AC, ось y проходит через точку O перпендикулярно AC, ось z проходит через точку O перпендикулярно плоскости ABC (см. рис. 143). Тогда вершины пирамиды имеют координаты:

$$A\left(-\frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0\right),\ B\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{3}; 0\right),$$

$$C\left(\frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0\right),\ M(0; 0; h).$$

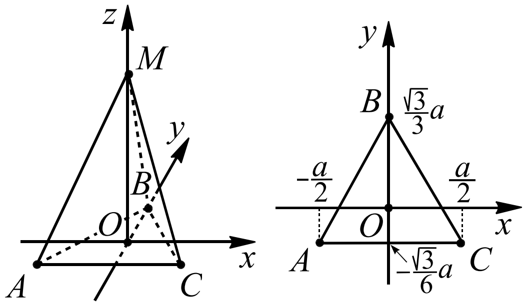


Рис. 143

Еще один вариант расположения правильной треугольной пирамиды относительно прямоугольной декартовой системы координат представлен на рисунке 144.

5. Правильная четырехугольная пирамида $MABC$, сторона основания которой равна a, а высота h.

Обычно используют один из двух вариантов расположения системы координат.

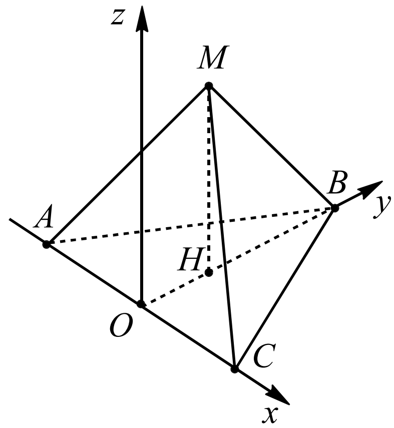


Рис. 144

5.1. Пусть начало координат находится в точке A, ось x направлена вдоль ребра AD, ось y – вдоль ребра AB, ось z проходит через точку A перпендикулярно плоскости ABC (см. рис. 145). Тогда вершины пирамиды имеют координаты:

$$A(0;0;0),\ B(0;a;0),\ C(a;a;0),$$

$$D(a;0;0),\ M\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};h\right).$$

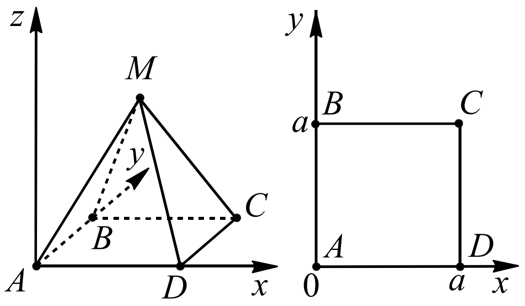


Рис. 145

5.2. Пусть начало координат находится в центре основания в точке O, ось x проходит через точку O параллельно ребру AD, ось y проходит через точку O параллельно ребру AB, ось z проходит через точку O перпендикулярно

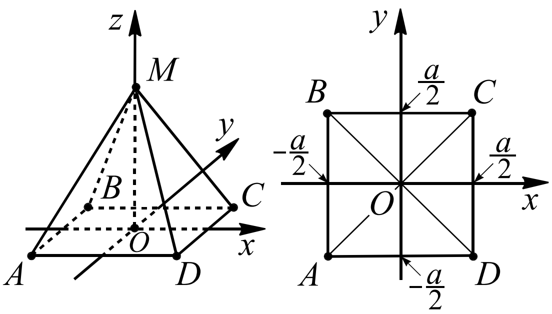


Рис. 146

плоскости основания (см. рис. 146). Тогда вершины пирамиды имеют координаты:

$$A\left(-\frac{a}{2};-\frac{a}{2};0\right),\ B\left(-\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right),\ C\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right),$$

$$D\left(\frac{a}{2};-\frac{a}{2};0\right),\ M(0;0;h).$$

6. Правильная шестиугольная пирамида $MABCDEF$, сторона основания которой равна a, а высота h. Пусть начало координат находится в точке A, ось x направлена вдоль ребра AC, ось y проходит через точку A перпендикулярно AC, ось z проходит через точку A перпендикулярно плоскости ABC (см. рис. 147). Тогда вершины пирамиды имеют координаты: $A(0;0;0)$, $B\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$,

$$C\left(0;a\sqrt{3};0\right),\ D(a;a\sqrt{3};0),$$

$$E\left(\frac{3a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right),\ F(a;0;0),\ M\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};h\right).$$

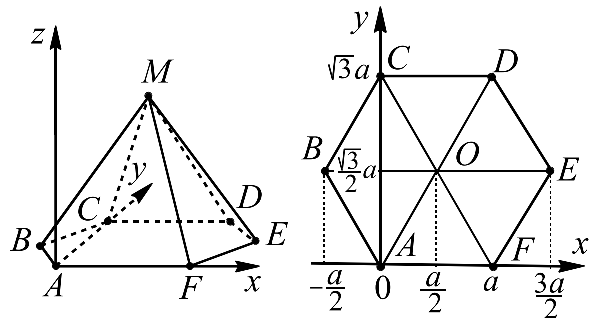


Рис. 147

Еще один вариант расположения правильной шестиугольной пирамиды относительно прямоугольной декартовой системы координат показан на рисунке 148.

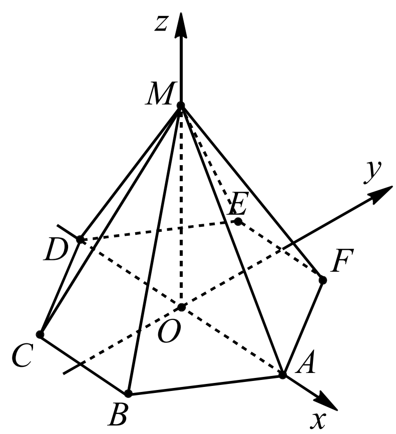


Рис. 148

3.4. Опорные задачи

1. *Координаты точки $M(x, y, z)$, делящей отрезок M_1M_2 между точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ в отношении $M_1M : MM_2 = \lambda$, определяются формулами*

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Доказательство. Рассмотрим векторы

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\},$$
$$\overrightarrow{MM_2} = \{x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z\}.$$

Из равенства $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_1}$ получаем систему для координат векторов

$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda(x - x_2), \\ y - y_1 = \lambda(y - y_2), \\ z - z_1 = \lambda(z - z_2) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \\ z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \end{cases}$$

2. ***Трехгранным углом*** называется фигура, состоящая из нескольких лучей OA, OB, OC, выходящих из одной точки O и не лежащих в одной плоскости, и из плоских углов AOB, BOC, AOC между этими лучами (см. рис. 149). Точка O называется *вершиной* трехгранного угла, лучи OA, OB, OC – *ребрами*, части плоскостей, заключенные между ребрами, называются *гранями*, а углы AOB, BOC, AOC, образованные ребрами, лежащими в одной грани, называются *плоскими углами* трехгранного угла.

Теорема. *Во всяком трехгранном угле, плоские углы которого равны α, β и γ, а двугранные углы, противолежащие им, соответственно равны φ_A, φ_B и φ_C, имеют место следующие равенства:*

$$\cos\varphi_C = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta},$$
$$\cos\varphi_B = \frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma},$$
$$\cos\varphi_A = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

Доказательство. Докажем, например, первое равенство. Пусть в трехгранном угле $OABC$ плоские углы при вершине O равны $\angle BOC = \alpha$, $\angle AOC = \beta$, $\angle AOB = \gamma$ (см. рис. 149). Через произвольную точку C_1 ребра OC проведем

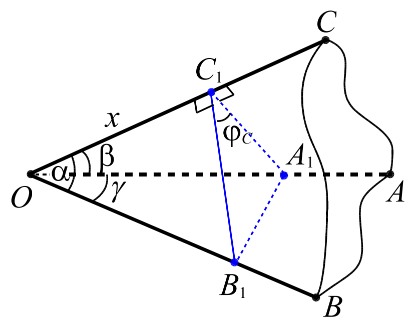


Рис. 149

плоскость перпендикулярную этому ребру. Пусть B_1 и A_1 – точки пересечения этой плоскостью ребер OB и OA, соответственно. По условию линейный угол $B_1C_1A_1$ двугранного угла с ребром OC равен φ_C. Пусть $OC_1 = x$. В треугольнике OB_1C_1 $C_1B_1 = x\cdot\operatorname{tg}\alpha$, $OB_1 = \dfrac{x}{\cos\alpha}$. В треугольнике OA_1C_1 $C_1A_1 = x\cdot\operatorname{tg}\beta$, $OA_1 = \dfrac{x}{\cos\beta}$. Из теоремы косинусов для треугольников OB_1C_1 и $B_1C_1A_1$ получаем:

$$B_1A_1^{\ 2} = OB_1^{\ 2} + OA_1^{\ 2} - 2\cdot OB_1\cdot OA_1\cos\gamma;$$
$$B_1A_1^{\ 2} = C_1B_1^{\ 2} + C_1A_1^{\ 2} - 2\cdot C_1B_1\cdot C_1A_1\cos\varphi_C.$$

Приравняем правые части равенств и подставим выражения OB_1, OA_1, C_1B_1, C_1A_1:

$$\left(\frac{x}{\cos\alpha}\right)^2 + \left(\frac{x}{\cos\beta}\right)^2 - 2\cdot\frac{x}{\cos\alpha}\cdot\frac{x}{\cos\beta}\cdot\cos\gamma =$$
$$= (x\operatorname{tg}\alpha)^2 + (x\operatorname{tg}\beta)^2 - 2\cdot x^2\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\cos\varphi_C.$$

После преобразований получаем доказываемую формулу:

$$\cos\varphi_C = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Аналогично доказываются два других равенства. Данную теорему называют «*теоремой косинусов для трехгранного угла*».

3. Теорема («*о трех косинусах*»). *Пусть* α – *величина угла между наклонной l и ее проекцией на некоторую плоскость,* β – *величина угла между проекцией наклонной l и прямой, проведенной через основание той же наклонной в плоскости проекции, и* γ – *величина угла между наклонной l и прямой, проведенной через ее основание в плоскости проекции. Тогда справедливо следующее соотношение*:

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta.$$

Доказательство. Выберем точку A на прямой l, пересекающей плоскость δ в точке B (см. рис. 150), и спроектируем ее на плоскость δ ($AO \perp \delta$). Пусть точка D – основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую BC. Тогда в соответствии с условием $\angle ABO = \alpha$, $\angle OBC = \beta$, $\angle ABC = \gamma$. Треугольники AOB, BOD, ABD – прямоугольные. Тогда из треугольника AOB $BO = AB\cos\alpha$, из треугольника BOD $BD = BO\cos\beta = AB\cos\alpha\cos\beta$, из треугольника ABD $BD = AB\cos\gamma$. Из последних двух равенств следует:

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta.$$

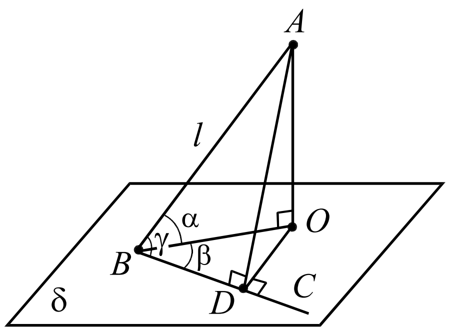


Рис. 150

Замечание. Теорема «о трех косинусах» является следствием «теоремы косинусов для трехгранного угла» в случае, если $\varphi_C = 90°$.

4. Теорема («*о трех синусах*»). *Пусть в одной из граней двугранного угла, величина которого равна* α, *проведена прямая, составляющая с ребром двугранного угла угол* β ($0 < \beta < \pi/2$), γ – *величина угла между этой прямой и другой гранью* (см. рис. 151). *Тогда справедливо следующее соотношение:*

$$\sin\gamma = \sin\alpha\sin\beta.$$

Доказательство. Пусть $AD \subset \tau$ – данная в условии прямая; точка C – основание перпендикуляра, опущенного из точки A на плоскость δ, и $\angle ABC$ – линейный угол двугранного угла $\tau BD\delta$ (см. рис. 151). Тогда в соответствии с условием

$$\angle ABC = \alpha,\ \angle ADB = \beta \text{ и } \angle ADC = \gamma.$$

Пусть $AD = x$. Тогда для прямоугольных треугольников справедливо: для треугольника ADB $AB = x\sin\beta$, для треугольника ABC $AC = x\sin\beta\sin\alpha$ и для треугольника ADC

$$\sin\gamma = AC : AD = \sin\alpha\sin\beta.$$

Следовательно, $\sin\gamma = \sin\alpha\sin\beta$.

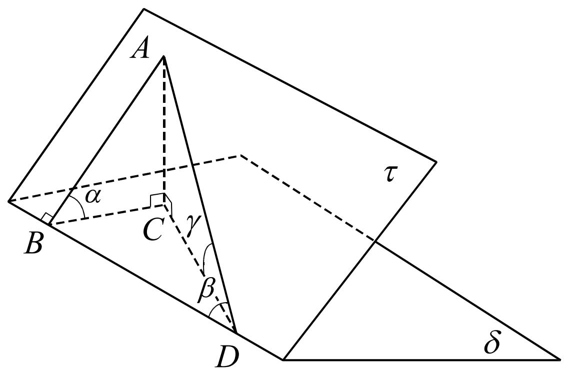


Рис. 151

5. *Если прямая образует с тремя попарно перпендикулярными прямыми углы* α, β *и* γ, *то выполняется равенство*

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с диагональю $DB_1 = 1$.

Пусть $\angle CDB_1 = \alpha$, $\angle ADB_1 = \beta$, $\angle B_1DD_1 = \gamma$ (см. рис. 152). Тогда в соответствующих прямоугольных треугольниках $CD = \cos\alpha$, $AD = \cos\beta$, $DD_1 = \cos\gamma$.

Так как $DB_1^2 = CD^2 + AD^2 + DD_1^2$, то имеем

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

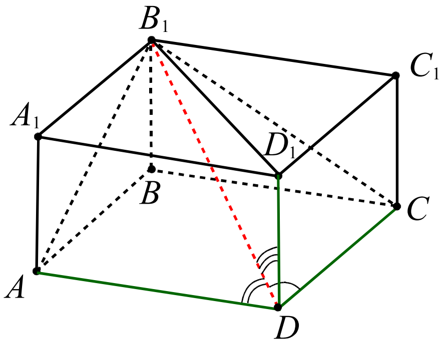


Рис. 152

В качестве следствия получим

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2.$$

6. *Площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна произведению его площади на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции:*

$$S_{\text{пр}} = S \cdot \cos\varphi,$$

где S – площадь многоугольника, лежащего в плоскости α, $S_{\text{пр}}$ – площадь его ортогональной проекции на плоскость β.

Доказательство. Так как многоугольник можно разбить на конечное число треугольников, и фигуру можно параллельно перенести в равную ей фигуру, то достаточно рассмотреть треугольник, через одну сторон которого проходит плоскость β (например, через сторону AB) (см. рис. 153).

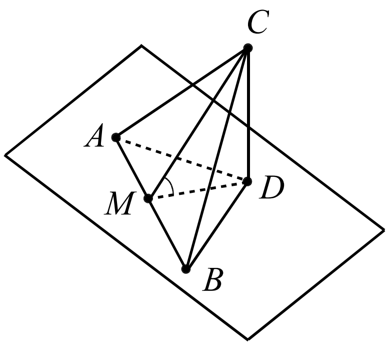


Рис. 153

Если D – проекция точки C на плоскость β, то ABD – проекция треугольника ABC на эту плоскость. Пусть CM – высота в треугольнике ABC, тогда по теореме о трех перпендикулярах $DM \perp AB$.

Обозначим $\angle CMD = \varphi$. Имеем последовательно площади треугольников

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CM$, $\quad S_{ABD} = \frac{1}{2}AB \cdot DM$,

$DM = CM \cdot \cos\varphi$, $S_{ABD} = S_{ABC} \cdot \cos\varphi$.

7. *Если вершины A, B, D и A_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ являются вершинами тетраэдра, то имеет место равенство*

$$V_{ABDA_1} = \frac{1}{6}V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}.$$

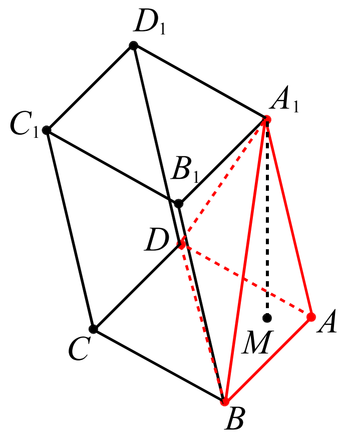


Рис. 154

Доказательство. Тетраэдр и параллелепипед имеют одну высоту $A_1M = h$ (см. рис. 154). Для площадей оснований имеем соотношение $S_{ABD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$. Тогда

$$V_{ABDA_1} = \frac{1}{3}h \cdot \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{6}V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}.$$

8. *Если вершины A, B, C и D параллелепипеда $AKBMQCLD$ являются вершинами тетраэдра, то имеет место равенство*

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}V_{AKBMQCLD}.$$

Доказательство. Так как объёмы угловых тетраэдров равны и составляют шестую часть от объёма параллелепипеда V, то имеем

$$V_{ABCD} = V - 4 \cdot \frac{1}{6}V = \frac{1}{3}V.$$

9. *Пусть a и b – длины двух противоположных ребер тетраэдра, d – расстояние, φ – угол между ними. Тогда объём тетраэдра может быть вычислен по формуле*

$$V = \frac{1}{6}abd\sin\varphi.$$

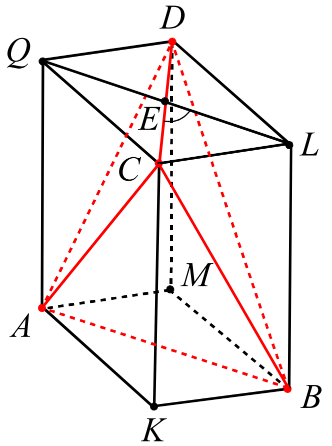


Рис. 155

Доказательство. Достроим данный тетраэдр $ABCD$ до параллелепипеда $AKBMQCLD$ (см. рис. 155), проводя через каждое ребро плоскость, параллельную противоположному ребру. Пусть $AB = a$, $CD = b$, тогда площади граней $AKBM$ и $LCQD$ равны $\frac{1}{2}ab\sin\varphi$, расстояние между ними d. Тогда объем параллелепипеда равен $\frac{1}{2}abd\sin\varphi$. Объем пирамиды $ABCD$ составляет $\frac{1}{3}$ от объёма параллелепипеда, то есть равен $\frac{1}{6}abd\sin\varphi$.

10. *Пусть q – площадь одной из боковых граней треугольной призмы, d – расстояние от противоположного ребра до этой грани. Тогда объём этой призмы может быть найден по формуле*

$$V = \frac{1}{2}qd.$$

Доказательство. Пусть площадь грани AA_1D_1D равна q, а расстояние от прямой CC_1 до этой грани равно d (см. рис. 156). Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен qd. Так как объем этого параллелепипеда в два раза больше объема призмы $ACDA_1C_1D_1$, то объём этой призмы равен $\frac{1}{2}qd$.

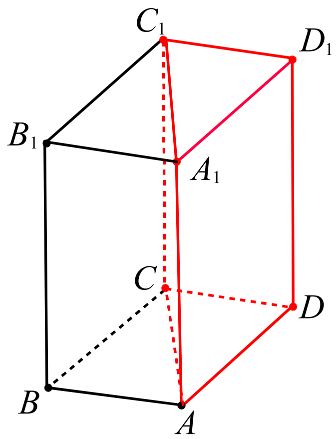


Рис. 156

11. *Пусть p и q – площади двух граней тетраэдра, a – длина общего ребра, α – величина двугранного угла между этими гранями. Тогда объём тетраэдра может быть вычислен по формуле*

$$V = \frac{2pq\sin\alpha}{3a}.$$

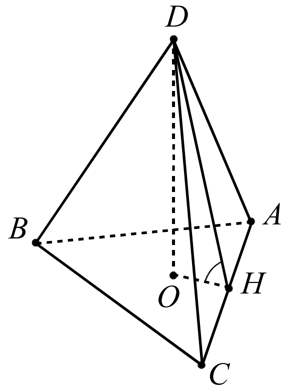


Рис. 157

Доказательство. Пусть площади граней ABC и ACD тетраэдра $ABCD$ равны p и q соответственно, α – угол между этими гранями, $AC = a$ (см. рис. 157). Высота DH треугольника ACD равна $\frac{2q}{a}$. Для высоты пирамиды имеем

$$DO = DH\sin\alpha = \frac{2q\sin\alpha}{a}.$$

Тогда объем пирамиды $ABCD$ равен

$$V = \frac{1}{3}p \cdot DO = \frac{2pq\sin\alpha}{3a}.$$

12. *Пусть в пирамиде $MABC$ на ребрах MA, MB и MC или на их продолжениях взяты соответственно точки A_1, B_1, C_1 так, что $MA_1 : MA = k$, $MB_1 : MB = m$, $MC_1 : MC = n$. Тогда объёмы пирамид $MA_1B_1C_1$ и $MABC$ связаны формулой*

$$V_{MA_1B_1C_1} = k \cdot m \cdot n \cdot V_{MABC}.$$

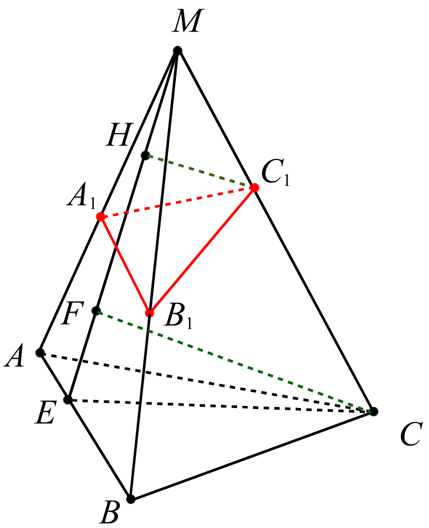


Рис. 158

Доказательство. Из точек C_1 и C проведем к плоскости ABM перпендикуляры C_1H и CF соответственно (см. рис. 158). Тогда $C_1H \parallel CF$ и из подобия треугольников C_1HM и CFM получаем $C_1H = \dfrac{MC_1}{MC} \cdot CF = n \cdot CF$. Из сравнения площадей треугольников с общим углом имеем $S_{MA_1B_1} = k \cdot m \cdot S_{MAB}$. Для тетраэдров $MA_1B_1C_1$ и $MABC$ с основаниями MA_1B_1 и MAB получаем

$$V_{MA_1B_1C_1} = \frac{1}{3} C_1H \cdot S_{MA_1B_1} =$$
$$= \frac{1}{3} n \cdot CF \cdot k \cdot m \cdot S_{MAB} = k \cdot m \cdot n \cdot V_{MABC}.$$

13. *Объём треугольного призматического тела $ABCA_1B_1C_1$, ограниченного треугольниками ABC и $A_1B_1C_1$, можно вычислить по формуле*

$$V_{ABCA_1B_1C_1} = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{3} \cdot S_{ABC},$$

где плоскость ABC перпендикулярна ребрам призматической поверхности, $AA_1 \le BB_1 \le CC_1$.

Доказательство. 1. Разделим призматическое тело $ABCA_1B_1C_1$ на три части плоскостями $A_1B_0C_1$ и $A_1B_0C_0$ (параллельно ABC): треугольную призму $ABCA_1B_0C_0$, две треугольные пирамиды $A_1B_0C_0C_1$ и $A_1B_0B_1C_1$ (см. рис. 159).

2. Пусть $S_{ABC} = S$, $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$. Тогда объём прямой призмы $ABCA_1B_0C_0$ равен aS.

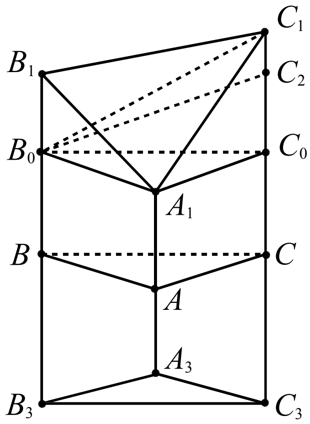


Рис. 159

3. Для пирамиды $A_1B_0C_0C_1$, принимая треугольник $A_1B_0C_0$ за основание, объём равен $\dfrac{1}{3}(c-a)S$.

4. Пусть $C_0C_2 = B_0B_1$. Тогда для пирамид $A_1B_0B_1C_1$ и $A_1B_0C_2C_0$ с общей вершиной A_1 и равновеликими основаниями $B_0B_1C_1$ и $B_0C_2C_0$ объёмы равны.

Значит, объём пирамиды $A_1B_0B_1C_1$ равен $\dfrac{1}{3}(b-a)S$.

5. Окончательно объём призматического тела $ABCA_1B_1C_1$ равен

$$aS + \frac{1}{3}(c-a)S + \frac{1}{3}(b-a)S =$$
$$= \frac{a+b+c}{3} \cdot S$$

14. *Объём треугольного призматического тела $A_1B_1C_1A_3B_3C_3$, ограниченного треугольниками $A_1B_1C_1$ и $A_3B_3C_3$, можно вычислить по формуле*

$$V_{A_1B_1C_1A_3B_3C_3} = \frac{A_1A_3 + B_1B_3 + C_1C_3}{3} \cdot S_{ABC},$$

где плоскость ABC перпендикулярна ребрам призматической поверхности (докажите самостоятельно!).

15. *Если в двух пирамидах, имеющих по равному двугранному углу при основании, равны также и ребра этих углов, то отношение объёмов этих пирамид равно отношению произведений площадей граней, образующих равные двугранные углы.*

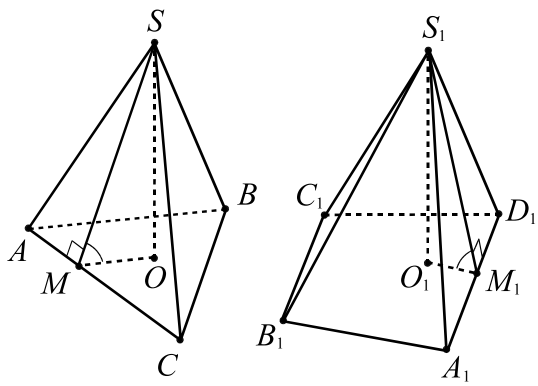


Рис. 160

Доказательство. Пусть пирамиды $SABC$ и $SA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 160), имеют равные двугранные углы $SACB$ и $S_1A_1D_1C_1$, также $AC = A_1D_1$. Построим линейные углы SMO и $S_1M_1O_1$ данных равных двугранных углов. По условию $\angle SMO = \angle S_1M_1O_1$. Тогда прямоугольные треугольники MSO и $M_1S_1O_1$ подобны и

$$\frac{SM}{S_1M_1} = \frac{SO}{S_1O_1}.$$

Площади боковых граней SAC и $S_1A_1D_1$ относятся как их высоты, поскольку $AC = A_1D_1$, т.е.

$$\frac{S_{SAC}}{S_{A_1S_1D_1}} = \frac{SM}{S_1M_1} = \frac{SO}{S_1O_1}.$$

Найдем отношение объемов данных пирамид

$$\frac{V_{SABC}}{V_{S_1A_1B_1C_1D_1}} = \frac{\frac{1}{3}SO \cdot S_{ABC}}{\frac{1}{3}S_1O_1 \cdot S_{A_1B_1C_1D_1}} = \frac{S_{SAC} \cdot S_{ABC}}{S_{A_1S_1D_1} \cdot S_{A_1B_1C_1D_1}}.$$

Таким образом,

$$\frac{V_{SABC}}{V_{S_1A_1B_1C_1D_1}} = \frac{S_{SAC} \cdot S_{ABC}}{S_{A_1S_1D_1} \cdot S_{A_1B_1C_1D_1}},$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Приведенное доказательство не зависит от того, какие многоугольники лежат в основании пирамид. Если же ребра равных двугранных углов в рассматриваемых пирамидах не равны между собой, то отношение объёмов этих пирамид прямо пропорционально произведениям площадей граней, образующих эти углы, и обратно пропорционально длинам их ребер, т. е.

$$\frac{V_{SABC}}{V_{S_1A_1C_1D_1}} = \frac{S_{ASB} \cdot S_{ABC}}{S_{A_1S_1D_1} \cdot S_{A_1B_1C_1D_1}} \cdot \frac{A_1D_1}{AC}.$$

Кроме того, справедливы следующие теоремы.

16. *Если в пирамиде провести секущую плоскость параллельно основанию, то она отсечет от нее другую пирамиду, подобную данной* (докажите самостоятельно).

17. *Поверхности подобных многогранников относятся как квадраты сходственных линейных элементов многогранников* (докажите самостоятельно).

18. *Объёмы подобных многогранников относятся как кубы сходственных линейных элементов этих многогранников* (докажите самостоятельно).

19. *Квадраты объемов подобных многогранников относятся как кубы площадей сходственных граней* (докажите самостоятельно).

20. *Плоскости BDC_1 и B_1D_1A перпендикулярны диагонали A_1C куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и делят ее на три равные части.*

Доказательство. 1. Так как $AB_1 \parallel DC_1$ и $AD_1 \parallel BC_1$, то плоскости BDC_1 и B_1D_1A (см. рис. 161).

2. Достаточно доказать перпендикулярность прямой A_1C, содержащей диагональ куба, к одной плоскости BDC_1.

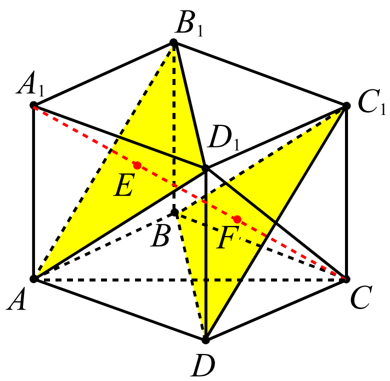


Рис. 161

Так как диагонали BD и AC в квадрате $ABCD$ взаимно перпендикулярны и AC является проекцией A_1C на плоскость ABC, то по теореме о трех перпендикулярах $A_1C \perp BD$. Аналогично $A_1C \perp DC_1$. Следовательно, $A_1C \perp BDC_1$.

3. Для куба с ребром a диагональ $A_1C = a\sqrt{3}$, а расстояние от точки C до плоскости BDC_1 равно $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ (см. пример 16). Аналогично расстояние от точки A_1 до плоскости B_1D_1A равно $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Значит, диагональ куба делится указанными плоскостями на три равные части.

21. *Сечение, проходящее через диагональ параллелепипеда, делит его противоположные ребра, пересекаемые плоскостью сечения, в обратном отношении, считая от любой грани, из которой выходят эти ребра, а сам параллелепипед – на два равновеликих многогранника.*

Доказательство. Рассмотрим общий случай наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 162). Пусть сечение проходит через диагональ AC_1 и пересекает ребра BB_1 и CC_1 в точках N и M соответственно. Сечение, содержащее AC_1, всегда будет являться параллелограммом, поскольку в сечении получается четырехугольник, противоположные пары сторон которого параллельны (по свойству параллельных плоскостей, пересекаемых плоскостью). При этом точка пересечения диагоналей параллелограмма совпадает с центром параллелепипеда.

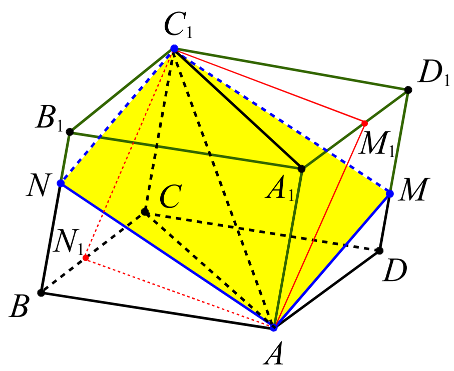


Рис. 162

Если точка N совпадает с одной из точек B или B_1 (следовательно, точка M с одной из точек D_1 или D соответственно), то получается диагональное сечение, разбивающее параллелепипед на две равные призмы.

Пусть, точка N не совпадает ни с одной из точек B или B_1. Так как $C_1M \parallel AN$, то из равенства треугольников C_1D_1M и ABN следует, что $D_1M = BN$. Отсюда $MD = NB_1$. Тогда $\frac{DM}{MD_1} = \frac{B_1N}{NB}$.

Заметим, что секущая плоскость разбивает параллелепипед на два многогранника $C_1MDCNAB$ и $ANB_1A_1MC_1D_1$, которые симметричны относительно центра параллелепипеда. Из следующего соответствия вершин первого и второго многогранников $D \to B_1$, $M \to N$, $A \to C_1$, $C \to A_1$, $B \to D_1$, $N \to M$, $C_1 \to A$ следует, что они равны. Следовательно, они имеют равные объёмы.

В случае пересечения секущей плоскостью ребер A_1D_1 или B_1A_1 доказательство проводится аналогично.

Ответы и указания

1. 3. **2.** $\frac{\sqrt{78}}{10}$. **3.** 5. **4. а)** 4; **б)** $2\sqrt{5}$; **в)** $\sqrt{14}$. **5.** 2. **6.** $\frac{\sqrt{307}}{3}$. **7. а)** $\frac{\sqrt{6}}{2}$; **б)** $\frac{\sqrt{6}}{3}$; **в)** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **8.** $\frac{\sqrt{14}}{4}$. **9.** $\frac{4\sqrt{5}}{5}$. **10.** $\frac{\sqrt{95}}{10}$. **11. а)** $\sqrt{3}$; **б)** 2; **в)** $\frac{\sqrt{7}}{2}$; **г)** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; **д)** $\frac{\sqrt{14}}{4}$; **е)** $\frac{\sqrt{39}}{4}$; **ж)** $\frac{\sqrt{30}}{5}$; **з)** $\frac{\sqrt{30}}{4}$. **12.** 14. **13.** $\sqrt{31}$. **14.** $\sqrt{21}$. **15.** $\frac{\sqrt{30}}{4}$. **16.** 8. **17.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **18.** $\frac{\sqrt{46}}{4}$. **19.** $\sqrt{\frac{2}{3}}$. **20.** $\sqrt{3}$. **21.** $\frac{\sqrt{39}}{4}$. **22.** $\frac{\sqrt{42}}{4}$. **23.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **24.** 1. **25.** $\frac{12\sqrt{93}}{31}$. **26.** $\frac{1}{3}$. **27.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **28.** $\frac{6\sqrt{7}}{7}$. **29.** $\frac{3\sqrt{13}}{13}$. **30.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **31.** 2. **32.** $\frac{\sqrt{23}}{2}$. **33.** $\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}$. *Указание.* Использовать уравнение плоскости в отрезках. **34.** 2. **35.** 2,4. **36.** $\sqrt{2}$. **37.** $3\sqrt{41}$. **38.** $\frac{5\sqrt{39}}{\sqrt{139}}$. **39.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **40.** $\frac{1}{\sqrt{6}}$. **41.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **42.** $\frac{3\sqrt{37}}{37}$. **43.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **44.** $\frac{3}{\sqrt{5}}$. **45.** $\frac{36\sqrt{259}}{259}$. **46.** $2\sqrt{7}$. **47.** $3\sqrt{11}$. *Указание.* Рассмотреть отрезок, концами которого являются середины рёбер AC и BD. **48.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **49.** $\frac{3\sqrt{46}}{\sqrt{239}}$. **50.** $\frac{60\sqrt{3}}{\sqrt{4963}}$. **51.** $\frac{\sqrt{15}}{15}$. **52.** $\arccos\sqrt{\frac{2}{5}}$. **53.** $\arccos\frac{\sqrt{15}}{15}$. **54.** $\arccos\frac{2\sqrt{30}}{15}$. **55.** 0,8. **56.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **57.** $60°$. **58.** На три части в отношении 1:1:1. **59.** $60°$. **60.** $60°$. **61.** $\arccos(\sin\varphi\cdot\sin\psi)$.

62. $\arccos\frac{6\sqrt{2}}{13}$. **63. а)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$; **б)** $\frac{1}{4}$. **64.** $2\arcsin\frac{2\sqrt{3}}{5}$ или $\arccos\frac{1}{25}$. **65.** $\frac{3\sqrt{10}}{20}$. **66.** 0,7. **67.** $2\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{5}$ или $\arccos\frac{9}{25}$. **68.** 0,75. **69.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **70.** $90°$. **71.** $\frac{\sqrt{10}}{4}$. **72.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **73.** 0,9. **74.** $\arccos\frac{1}{6}$; $\arccos\frac{2}{3}$. **75.** $\arccos\frac{1}{6}$. **76.** $\arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$. **77.** $90°$. **78.** $\arcsin\frac{3\sqrt{5}}{7}$. **79.** $\frac{1}{6}$. **80.** $\arccos\frac{1}{4}$. **81.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **82.** $\frac{1}{4}$. **83.** $\arccos\frac{\sqrt{10}}{4}$. **84.** $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$. **85.** $30°$. **86.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **87.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **88.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **89.** $\frac{\sqrt{15}}{15}$. **90.** $\arcsin\frac{\sqrt{10}}{10}$. **91.** $\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{5}$. **92.** $\arcsin\frac{24}{85}$. **93.** $\frac{3}{5}$. **94.** $\frac{1}{\sqrt{10}}$. **95.** $\arcsin\frac{5\sqrt{37}}{74}$. **96.** $\arcsin\sqrt{\frac{3}{7}}$. **97.** $\frac{\sqrt{15}}{10}$. **98.** $6\sqrt{6}$. **99.** $10\sqrt{2}$. **100.** $\arcsin\frac{\sqrt{31}}{31}$. **101.** $\arcsin\frac{2\sqrt{26}}{13}$. **102.** $\frac{\sqrt{15}}{10}$. **103.** $\frac{\sqrt{51}}{34}$. **104.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **105.** $\arcsin\frac{1}{\sqrt{151}}$. **106.** $\mathrm{arctg}\frac{21}{40}$. **107.** $\mathrm{arctg}\frac{5}{48}$. **108.** $\arcsin\frac{\sqrt{69}}{16}$. **109.** $\arcsin\frac{2\sqrt{67}}{67}$. **110.** $\mathrm{arctg}\frac{16}{15}$. **111.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **112.** $\mathrm{arctg}\frac{3\sqrt{2}}{7}$. **113.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **114.** $\sqrt{\frac{5}{7}}$. **115.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **116.** $\frac{\pi}{3}$. **117.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **118.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **119.** $120°$. **120.** $120°$. **121.** $\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **122.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **123.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

124. 2. **125.** $\operatorname{arctg}\frac{24}{25}$. **126.** 1. **127.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **128.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2}$. **129.** $\arccos\frac{3\sqrt{19}}{19}$. **130.** $\arccos\frac{3\sqrt{19}}{19}$. **131.** $\frac{\pi}{4}$. **132.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{13}}{2}$. **133.** $\frac{1}{\sqrt{13}}$. **134.** $\frac{5}{7}$. **135.** $\arccos\frac{1}{7}$. **136.** $30°$. **137.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **138.** 2. **139.** 0,5. **140.** 3. **141.** 4. **142.** 1,5. **143.** $\arccos\sqrt{\frac{12}{19}}$. **144.** $\arccos\sqrt{\frac{3}{11}}$. **145.** 4. **146.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **147.** $\operatorname{arctg}\frac{8}{3}$. **148.** $\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt{30}}{13}$. **149.** 2 или 14. **150.** 3 или $\frac{21}{17}$. **151.** 4,5. **152.** 192. **153.** $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$, $\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$. **154.** $\frac{ab\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **155.** $\frac{a^2}{2b}\sqrt{2a^2+b^2}$. **156.** $\arccos\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$. **157.** $\sqrt{Q_1\cdot Q_2\cdot Q_3}$. **158.** 9. **159.** 7. **160.** 36. **161.** $\frac{4a^2\sqrt{3}}{9}$. **162.** 115,2. **163.** 288. **164.** $\frac{Sd}{3}$. **165.** 36. **166.** 12. **167.** 12. **168.** 28. **169.** $\frac{d\sqrt{3}}{12}$. **170.** $5:1$. **171.** 144. **172.** 3. **173.** $\sqrt{7}$. **174.** $8\sqrt{5}$. **175.** $2\sqrt{15}$. **176.** $\frac{5\sqrt{2}}{16}ab$.

Список и источники литературы

1. Василевский А.Б. Параллельные проекции и решение задач по стереометрии. – Мн.: Нар. асвета, 1978.

2. Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / [Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.]. – 18-е изд. – М.: Просвещение, 2009. – 255 с.

3. Геометрия. 10 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений с углубл. и профильным изучением математики / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. – 3-е изд. – М.: Дрофа, 2005. – 223 с.

4. Геометрия. 11 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений с углубл. и профильным изучением математики / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. – 3-е изд. – М.: Дрофа, 2003. – 368 с.

5. Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. заведений. / И.Ф. Шарыгин. – М.: Дрофа, 1999. – 208 с.

6. Геометрия. Расстояния и углы в пространстве / И.М. Смирнов, В.А. Смирнов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство «Экзамен», 2011. – 158 с. (Серия «ЕГЭ. 100 баллов»).

7. Гусев В.А., Кожухов И.Б., Прокофьев А.А. Геометрия. Полный справочник. – М.: Махаон, 2006. – 320 с. – (Для школьников и абитуриентов).

8. Денищева Л.О., Глазков Ю.А., Краснянская К.А., Рязановский А.Р., Семенов П.В. Единый государственный экзамен 2008. Математика. Учебно-тренировочные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ – М.: Интеллект – Центр, 2007. – 240 с.

9. Единый государственный экзамен: математика: методика подгот.: кн. для учителя / [Л.О. Денищева, Ю.А. Глазков, К.А. Краснянская и др.]. – М.: Просвещение, 2005. – 256 с.

10. Единый государственный экзамен 2011. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2011. – 144 с.

11. ЕГЭ – 2013: Математика: самое полное издание типовых вариантов /авт.-сост. И.В. Ященко, И.Р. Высоцкий; под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.:

АСТ: Астрель, 2013. – 111 с. – (Федеральный институт педагогических измерений).

12. ЕГЭ 2010. Математика: Сборник тренировочных работ / Высоцкий И.Р., Захаров П.И., Панфёров В.С., Семёнов А.В., Сергеев И.Н., Смирнов В.А., Шестаков С.А., Ященко И.В. – М.: МЦНМО, 2009. – 72 с.

13. ЕГЭ 2013. Математика. Типовые тестовые задания /под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2013. – 55 с.

14. ЕГЭ 2013. Математика. 30 вариантов типовых тестовых заданий и 800 заданий части 2(с) /под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2013. – 215 с.

15. ЕГЭ-2013. Математика: типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов /под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Издательство «Национальное образование», 2012. – 192 с. – (ЕГЭ-2013. ФИПИ – школе).

16. Задание С2: Решаем методом координат / И. Беликова. – Математика, приложение «Первое сентября», №20, 2010.

17. Панферов В.С., Сергеев И.Н. Отличник ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач; ФИПИ – М.: Ителлект-Центр, 2010. – 80 с.

18. Прокофьев А.А. Пособие по геометрии для подготовительных курсов (стереометрия). – 4-е изд. перераб. и доп. – М.: МИЭТ, 2007. – 240 с.

19. Смирнов В.А. ЕГЭ 2012. Математика. Задача С2 / Под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2010. – 64 с.

20. Математика для поступающих в вузы: пособие / Шабунин М. И. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003. – 695 с.

21. Ященко И.В., Шестаков С.А., Захаров П.И. Подготовка к ЕГЭ по математике в 2011 году. Методические указания. – М.: МЦНМО, 2011. – 144 с.

.