МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2013

Планиметрические задачи с неоднозначностью в условии (многовариантные задачи) (типовые задания С4)

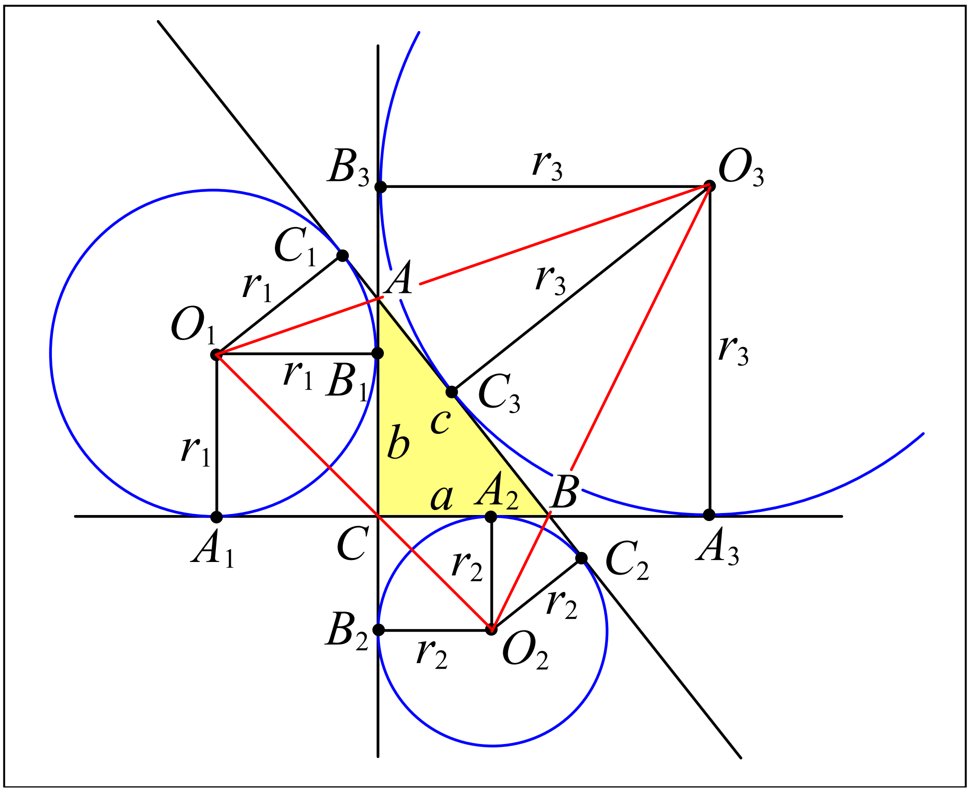
ЧАСТЬ II. РЕШЕБНИК

Прокофьев А.А.

Корянов А.Г.

Прокофьев А.А. – доктор педагогических наук, заведующий кафедрой высшей математики №1 НИУ МИЭТ, учитель математики ГОУ лицей №1557 г. Зеленограда; e-mail: aaprokof@yandex.ru

Корянов А.Г. – методист по математике городского информационно-методического Центра (ГИМЦ) г. Брянска, учитель математики МОУ лицей №27 г. Брянска; e-mail: akoryanov@mail.ru



МОСКВА
БРЯНСК
2013

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Во второй части пособия «Планиметрические задачи с неоднозначностью в условии (многовариантные задачи). Типовые задания С4» представлены решения и указания по решению всех задач для самостоятельного решения из глав 1, 2, 3, 4 и раздела «Упражнения» первой части пособия, т.е. всех задач, в которых возникает многовариантность. Методические вопросы подготовки и причины возникновения многовариантности в планиметрических задачах обсуждались авторами в первой части пособия и лекциях (см. список литературы [9]).

Поскольку однотипные задачи обычно включены в одну группу, то подробно разбирается одна задача или один из случаев в задаче. Решение остальных проводится аналогично. Если подобная задача была разобрана в качестве примера в соответствующем разделе первой части пособия, то указывается номер примера (например, см. «Пособие», пример 31).

Если же подобная задача решена в какой-либо другой группе задач, то дается ссылка с указанием номера задачи (например, см. упражнение 199 или см. «Решебник», глава 2, задача 12).

Перед предлагаемым решением обычно дается указание и читатель может сначала попробовать свои силы в решении задачи с использованием предложенной подсказки. Часто перед решением указывается известный факт, рассмотренный в главе 1 первой части пособия, или опорная задача, разобранная в первой части. В дальнейшем в решении просто используется отмеченный результат.

На многих чертежах искомый элемент выделен красным цветом, либо цветом выделена конфигурация, на которую следует обратить внимание.

Предложенное оформление решения задач не является эталонным, но оно, как правило, содержит все необходимые этапы решения.

Желаем успеха!
Авторы.

Глава 2. Многовариантность задачи как результат неоднозначности в задании взаимного расположения элементов фигуры

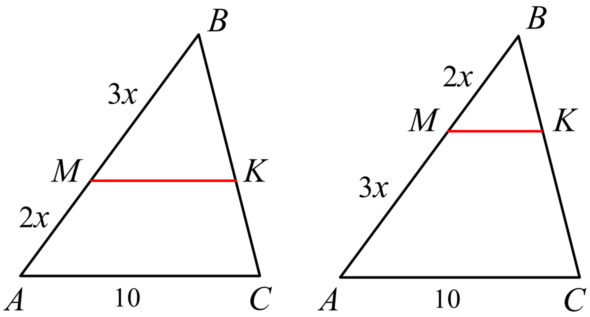
Расположение точек на прямой

1. В треугольнике ABC отрезок MK с концами на сторонах AB и BC параллелен AC. Найдите длину отрезка MK, если известно, что $AC = 10$, а точка M делит сторону AB в отношении 2:3.

Решение. 1-*й случай*: пусть точка M расположена на стороне AB так, что $AM : MB = 2 : 3$ (рис. 1*а*). Для подобных треугольников ABC и MBK составляем пропорцию

$$\frac{AC}{MK} = \frac{AB}{MB} \text{ или } \frac{10}{MK} = \frac{5x}{3x},$$

затем находим $MK = 6$.



а *б*

Рис. 1

2-*й случай*: точка M расположена на стороне AB так, что $BM : MA = 2 : 3$ (рис. 1*б*). Для подобных треугольников ABC и MBK составляем пропорцию

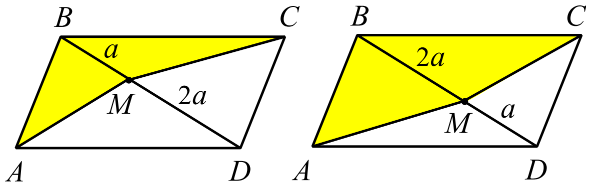
$$\frac{AC}{MK} = \frac{AB}{MB} \text{ или } \frac{10}{MK} = \frac{5x}{2x},$$

затем находим $MK = 4$.

Ответ: 4 или 6.

2. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка M лежит на диагонали BD и делит ее в отношении $1:2$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если площадь четырехугольника $ABCM$ равна 60.

Решение. 1-*й случай*: пусть точка M лежит на диагонали BD так, что $BM : MD = 1 : 2$ (рис. 2*а*). Так как треугольники ABM и ABD имеют общую высоту, опущенную из вершины A, то отношение их площадей равно $\frac{S_{ABM}}{S_{ABD}} = \frac{BM}{BD} = \frac{1}{3}$. Аналогично имеем $\frac{S_{BCM}}{S_{BCD}} = \frac{BM}{BD} = \frac{1}{3}$. Значит, $S_{ABCM} = \frac{1}{3} S_{ABCD}$, отсюда $S_{ABCD} = 60 \cdot 3 = 180$.



а *б*

Рис. 2

2-*й случай*: пусть точка M лежит на диагонали BD так, что $DM : MB = 1 : 2$ (рис. 2*б*). Из равенства $S_{ABCM} = \frac{2}{3} S_{ABCD}$, получаем

$$S_{ABCD} = 60 \cdot \frac{3}{2} = 90.$$

Ответ: 90 или 180.

3. **(МИОО, 2010).** Через середину стороны AB квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образующая с прямой AB угол α, $\operatorname{tg} \alpha = 3$. Найдите площадь треугольника BMT, если сторона квадрата $ABCD$ равна 4.

Решение. 1-*й случай*: пусть прямая, проходящая через середину E стороны AB, пересекает *отрезок* CD и продолжение отрезка AD за точку D (рис. 3*а*). Тогда

$$S_{BMT} = S_{BTE} - S_{BME} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AT - \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AD =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot BE(AE \cdot \operatorname{tg} \alpha - AD) = \frac{1}{2} \cdot 2(2 \cdot 3 - 4) = 2.$$

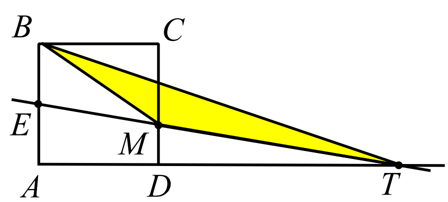


Рис. 3*а*

2-*й случай*: пусть прямая, проходящая через середину E стороны AB, пересекает *отрезок* CD и продолжение отрезка AD за точку A (рис. 3*б*). Тогда

$$S_{BMT} = S_{BTE} + S_{BME} = \frac{1}{2}\cdot BE\cdot AT + \frac{1}{2}\cdot BE\cdot AD =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot BE(AE\cdot \operatorname{tg}\alpha + AD) = \frac{1}{2}\cdot 2(2\cdot 3+4) = 10.$$

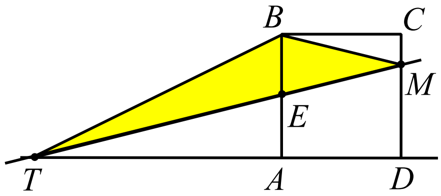


Рис. 3*б*

Почему следующие случаи невозможны?

3-*й случай.* Прямая, проходящая через середину *E* стороны *AB*, пересекает продолжение *отрезка CD* за точку *D* и *отрезок AD*.

4-*й случай.* Прямая, проходящая через середину *E* стороны *AB*, пересекает продолжение *отрезка CD* за точку *C* и *отрезок BC*.

Ответ: 2 или 10.

4. (ЕГЭ, 2012). В треугольнике ABC известны стороны $AB = 5$, $BC = 6$, $AC = 7$. Окружность, проходящая через точки A и C, пересекает прямые AB и BC соответственно в точках K и L, отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите длину отрезка KL.

Решение. Заметим, что обе точки K и L не могут лежать вне треугольника ABC, поскольку в этом случае отрезок KL не будет касаться вписанной окружности.

Соответственно, существует два рисунка, удовлетворяющих условию задачи.

1-й способ. 1-*й случай*: пусть обе точки K и L лежат на сторонах треугольника (рис. 4*а*).

Окружность, вписанная в треугольник ABC, будет также вписана и в четырехугольник $AKLC$. По свойству описанного четырехугольника $AK + LC = KL + AC$ или $AK + LC = KL + 7$.

Покажем, что треугольники KBL и ABC подобны Угол ABC у них общий. Четырехугольник $AKLC$ вписан в окружность, следовательно, $\angle KAC = \pi - \angle KLC$. Также $\angle BLK = \pi - \angle KLC$ (как смежные).
Отсюда $\angle KAC = \angle BLK$ и треугольники подобны по двум углам.

Запишем отношения сторон лежащих в треугольниках KBL и ABC против равных углов

$$\frac{BL}{AB} = \frac{BK}{BC} = \frac{KL}{AC} \text{ или } \frac{6-LC}{5} = \frac{5-AK}{6} = \frac{KL}{7}.$$

Отсюда, $LC = 6 - \frac{5KL}{7}$ и $AK = 5 - \frac{6KL}{7}$. Используя равенство $AK + LC = KL + 7$ или $5 - \frac{6KL}{7} + 6 - \frac{5KL}{7} = KL + 7$, получаем $KL = \frac{14}{9}$.

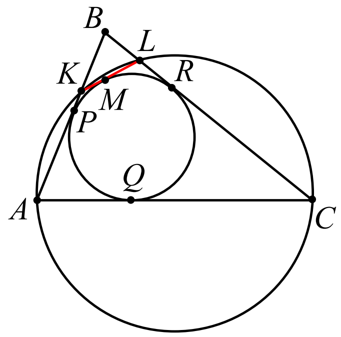


Рис. 4*а*

2-*й случай*: пусть точка K лежит на продолжении стороны AB треугольника ABC (рис. 4*б*).

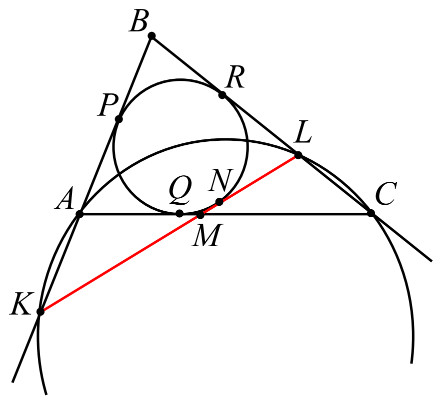


Рис. 4*б*

Треугольники KBL и ABC подобны по двум углам, так как угол B у них общий, а углы AKL и ACL равны, как вписанные и опирающиеся на одну и ту же дугу. Коэффициент подобия у этих треугольников равен 1, так как у них общая вписанная окружность (см. теорему Т7, стр. 6 из нашего пособия). Отсюда $KL = AC = 7$.

Замечание. Случай, когда точка L лежит на продолжении стороны BC треугольника ABC невозможен, так как тогда $6 = BK = AB - AK < 5$.

2-й способ. 1-*й случай*: пусть обе точки K и L лежат на сторонах треугольника (рис. 4*а*).

Аналогично предыдущему способу показываем, что треугольники KBL и ABC подобны по двум углам.

Пусть P, Q, R – точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника ABC. Тогда $AP = BR = p - AC = 2$, где $p-$ полупериметр треугольника ABC, равный 9.

Так как $KP = KM$ и $ML = LR$ (как касательные, проведенные к окружности из одной точки), то периметр треугольника KBL равен

$$KB + BL + KL = KB + BL + KM + ML =$$
$$= KB + BL + KP + LR = PB + BR = 4.$$

Коэффициент подобия треугольников равен $k = \frac{p_{KBL}}{p_{ABC}} = \frac{2}{9}$. Тогда, $KL = k \cdot AC = \frac{14}{9}$.

Аналогично для второго случая (рис. 4*б*) из подобия по двум углам треугольников KBL и ABC и равенств

$$AP + RC = AQ + QC = AC$$

и

$$KP + RL = KN + NL = KL,$$

где $N-$ точка касания окружности и KL, получаем $k = \frac{KL}{AC} = \frac{KL}{7}$ и $k = \frac{P_{KBL}}{P_{ABC}} = \frac{PB + BR + 2KL}{PB + BR + 2AC} = \frac{2 + KL}{9}$. Из равенства $\frac{KL}{7} = \frac{2 + KL}{9}$ получаем $KL = 7$.

Ответ: $\frac{14}{9}$ или 7.

5. (ЕГЭ, 2012). В треугольнике угол C равен $60°$. На сторонах AB и AC как на диаметрах построены окружности. Они пересекаются кроме точки A в точке D. $DB : DC = 1 : 3$. Найдите угол A в этом треугольнике.

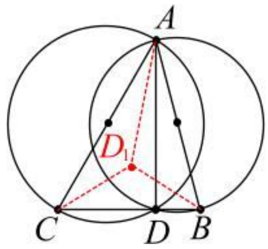


Рис. 5*а*

Решение. Обоснуем то, что точка D должна лежать на прямой CB, причем $AD \perp CB$ (рис. 5*а*). Действительно, так как углы CDA и ADB – прямые, как вписанные, опирающиеся на диаметры, то $CD \perp AD$ и $BD \perp AD$.

В прямоугольном треугольнике CAD по условию $\angle ACD = 60°$. Тогда

$$CD = \frac{CA}{2} \text{ и } DB = \frac{DC}{3} = \frac{CA}{6}.$$

Существует два рисунка, удовлетворяющих условию задачи.

1-*й случай*. Пусть точка D расположена между точками C и B. Тогда $CB = \frac{2}{3}CA$.

Используя теорему косинусов для треугольника CAB, получаем

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2 \cdot CA \cdot CB \cdot \cos 60° =$$
$$= CA^2 + \frac{4}{9} \cdot CA^2 - \frac{2}{3} \cdot CA^2 = \frac{7}{9} \cdot CA^2.$$

Соответственно

$$\cos\angle CAB = \frac{CA^2 + AB^2 - CB^2}{2 \cdot CA \cdot AB} = \frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

Отсюда $\angle CAB = \arccos\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

2-*й случай*. Пусть точка D расположена на продолжении CB за точку B (рис. 5*б*). Тогда $CB = \frac{1}{3}CA$.

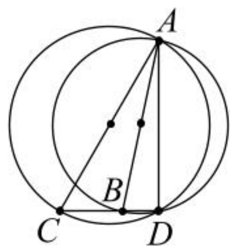


Рис. 5*б*

Используя теорему косинусов для треугольника CAB, получаем

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2 \cdot CA \cdot CB \cdot \cos 60° =$$
$$= CA^2 + \frac{1}{9} \cdot CA^2 - \frac{1}{3} \cdot CA^2 = \frac{7}{9} \cdot CA^2.$$

Соответственно

$$\cos\angle CAB = \frac{CA^2 + AB^2 - CB^2}{2 \cdot CA \cdot AB} = \frac{5\sqrt{7}}{14}.$$

Отсюда $\angle CAB = \arccos\frac{5\sqrt{7}}{14}$.

Ответ: $\arccos\frac{2\sqrt{7}}{7}$ или $\arccos\frac{5\sqrt{7}}{14}$.

Расположение точек вне прямой

6. В окружность радиуса $2\sqrt{5}$ вписана трапеция с основаниями 8 и $2\sqrt{11}$. Найдите длину диагонали трапеции.

Решение. Трапеция, вписанная в окружность, является равнобедренной.

1-*й случай*: пусть центр окружности лежит вне трапеции (рис. 6*а*). Так как прямая, проходящая через центр окружности и перпендикулярная хорде, делит эту хорду пополам, то $BE = EC = \sqrt{11}$ и $AF = FD = 4$. Из прямоугольных треугольников OEC и OFD находим $OE = \sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{11}\right)^2} = 3$ и $OF = \sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2 - 4^2} = 2$ соответственно.

Высота трапеции $ABCD$ равна длине отрезка $EF = OE - OF = 3 - 2 = 1$. Длина отрезка

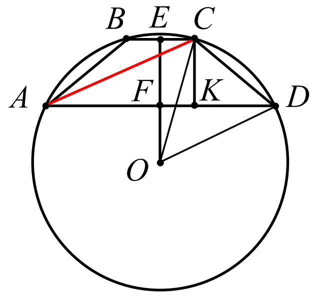


Рис. 6*а*

AK равна длине средней линии $AK = 4 + \sqrt{11}$.

Находим диагональ AC из прямоугольного треугольника ACK

$$AC = \sqrt{\left(4 + \sqrt{11}\right)^2 + 1^2} = 2\sqrt{7 + 2\sqrt{11}}.$$

2-*й случай*: пусть центр окружности лежит внутри трапеции (рис. 6*б*). Высота трапеции $ABCD$ равна длине отрезка $EF = OE + OF = 3 + 2 = 5$. Находим диагональ AC из прямоугольного треугольника ACK

$$AC = \sqrt{\left(4 + \sqrt{11}\right)^2 + 5^2} = 2\sqrt{13 + 2\sqrt{11}}.$$

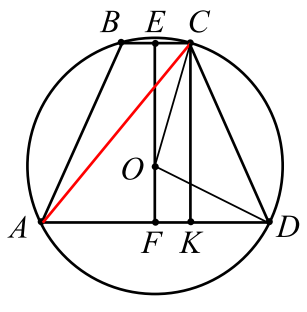


Рис. 6*б*

Случай, когда центр окружности лежит на основании, невозможен (объясните самостоятельно).

Ответ: $2\sqrt{7 + 2\sqrt{11}}$ или $2\sqrt{13 + 2\sqrt{11}}$.

7. Окружность с диаметром, равным $\sqrt{10}$, проходит через соседние вершины A и B прямоугольника $ABCD$. Длина касательной, проведенной к окружности из точки C, равна 3. Найдите длину стороны BC, если известно, что $AB = 1$.

Решение. 1-*й случай*: пусть окружность пересекает стороны BC и AD прямоугольника $ABCD$ в точках G и F соответственно, и проведена касательная CH к окружности (рис. 7*а*). Из прямоугольного треугольника ABG, используя теорему Пифагора, найдем $BG = \sqrt{\left(\sqrt{10}\right)^2 - 1^2} = 3$.

Пусть $CG = x$, тогда по теореме о секущей и касательной имеем $CG \cdot CB = CH^2$ или $x(x+3) = 3^2$. Уравнение $x^2 + 3x - 9 = 0$ имеет один положительный корень $\frac{-3 + 3\sqrt{5}}{2}$. Итак, $BC = \frac{-3 + 3\sqrt{5}}{2} + 3 = \frac{3(\sqrt{5} + 1)}{2}$.

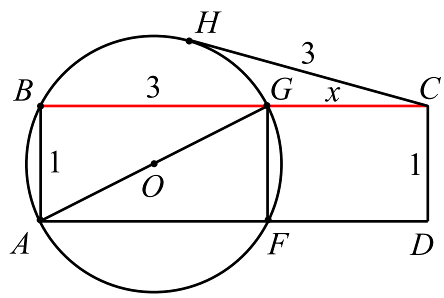


Рис. 7*а*

2-*й случай*: пусть окружность пересекает продолжения сторон BC и AD прямоугольника $ABCD$ в точках G и F соответственно, и проведена касательная к окружности CH (рис. 7*б*).

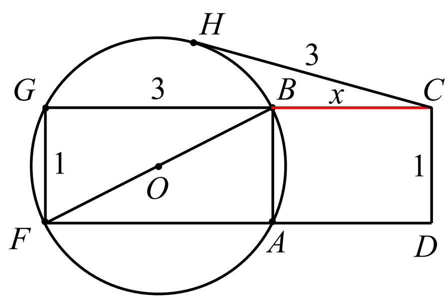


Рис. 7*б*

Тогда сторона $BC = \frac{-3 + 3\sqrt{5}}{2} = \frac{3(\sqrt{5} - 1)}{2}$ (см. рассуждения в 1 случае).

Ответ: $\frac{3(\sqrt{5} + 1)}{2}$ или $\frac{3(\sqrt{5} - 1)}{2}$.

8. Дан параллелограмм *ABCD*, $AB=3$, $BC=5$, $\angle A=60°$. Окружность с центром в точке *O* касается биссектрисы угла *D* и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырехугольника *ABOD*.

Ответ: $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ или $\frac{11\sqrt{3}}{2}$. *Указание.* См. решение примера 7, глава 1.

9. В трапеции длины боковых сторон равны 16 и 12, а длины оснований 30 и 10. Найдите радиус окружности, касающейся меньшего основания трапеции и прямых, содержащих ее боковые стороны.

Решение. Продолжим боковые стороны *AB* и *CD* трапеции *ABCD* до пересечения в точке *E* (рис. 8). Получим два подобных треугольника *BCE* и *ADE* с коэффициентом подобия $k=\frac{BC}{AD}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$. Используя соотношение $\frac{BE}{AE}=k$ или $\frac{BE}{BE+12}=\frac{1}{3}$, находим $BE=6$. Аналогично получаем $CE=8$. Так как выполняется равенство $10^2=6^2+8^2$, то по обратной теореме Пифагора $\angle BEC=90°$.

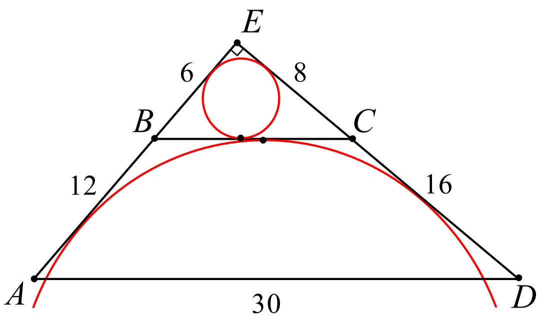


Рис. 8

1-*й случай*: пусть окружность вписана в треугольник *BCE*. Радиус этой окружности равен $\frac{6+8-10}{2}=2$.

2-*й случай*: пусть окружность является вневписанной для треугольника *BCE*, касающейся стороны *BC*. Радиус этой окружности найдем по формуле $\frac{S}{p-BC}=\frac{0,5\cdot 6\cdot 8}{12-10}=12$.

Замечание. См. в примере 15 приведены другие способы нахождения радиусов вписанной и вневписанной окружностей для прямоугольного треугольника.

Ответ: 2 или 12.

10. **(МИОО, 2011).** Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит вершина *C*, на другой – основание *AB* равнобедренного треугольника *ABC*. Известно, что $AB=10$. Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник *ABC*, а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника *ABC*.

Решение. Пусть *CH* – высота треугольника *ABC*, *r* – радиус окружности, вписанной в треугольник *ABC*, *Q* – центр этой окружности. Так как $AH=10:2=5$, то $AC=\sqrt{5^2+12^2}=13$. Полупериметр треугольника *ABC* равен $p=18$, а его площадь $S=60$. Отсюда $r=\frac{S}{p}=\frac{60}{18}=\frac{10}{3}$.

Пусть $\angle QAH=\alpha$, тогда $\operatorname{tg}\alpha=\frac{QH}{AH}=\frac{10}{3}:5=\frac{2}{3}$, $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{3}{\sqrt{13}}$, $AQ=\frac{AH}{\cos\alpha}=\frac{5\sqrt{13}}{3}$.

1-*й случай*: пусть окружность с центром *O* касается данных параллельных прямых и боковой стороны *AC* равнобедренного треугольника *ABC*, причем прямой *AB* – в точке *M*, и не имеет общих точек с боковой стороной *BC* (рис. 9*а*). Радиус этой окружности равен 6, так как расстояние между параллельными прямыми равно 12.

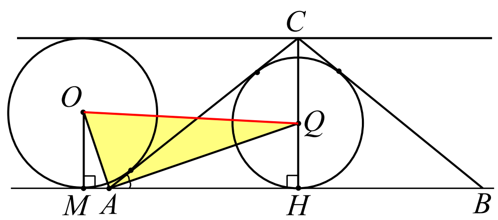


Рис. 9*а*

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе, поэтому *AO* – биссектриса угла *MAC*. Тогда

$$\angle OAQ=\frac{1}{2}(\angle CAB+\angle CAM)=90°,$$

$$\angle OAM=90°-\angle QAH=90°-\alpha,$$

$$\angle AOM = \alpha,\ AO = \frac{OM}{\cos\alpha} = 2\sqrt{13}.$$

В прямоугольном треугольнике OAQ находим, что

$$OQ = \sqrt{AQ^2 + AO^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{13}}{3}\right)^2 + \left(2\sqrt{13}\right)^2} = \frac{\sqrt{793}}{3}.$$

2-*й случай*: пусть окружность с центром O касается данных параллельных прямых и боковой стороны AC равнобедренного треугольника ABC, причем прямой AB – в точке M, и пересекает боковую сторону BC (рис. 9*б*).

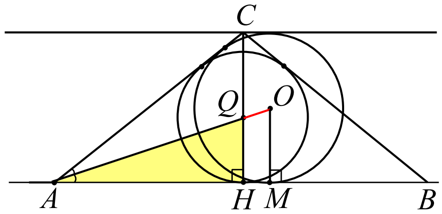


Рис. 9*б*

Тогда точки O и Q лежат на биссектрисе угла BAC. Треугольник AOM подобен треугольнику AQH с коэффициентом подобия $\frac{OM}{QH} = 6 : \frac{10}{3} = \frac{9}{5}$ поэтому

$$AO = \frac{9}{5}AQ = \frac{9}{5}\cdot\frac{5\sqrt{13}}{3} = 3\sqrt{13}.$$

Следовательно,

$$OQ = AO - AQ = 3\sqrt{13} - \frac{5\sqrt{13}}{3} = \frac{4\sqrt{13}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{793}}{3}$ или $\frac{4\sqrt{13}}{3}$.

Выбор обозначений вершин многоугольника

11. Высота CK параллелограмма $ABCD$ равна 12. Найдите диагональ AC, если известно, что $AD = 15$, $CD = 14$, а точка K лежит на прямой AB.

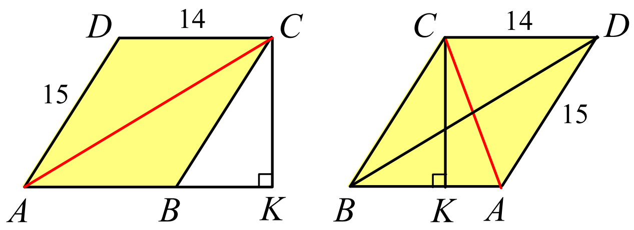
Решение. 1-*й случай*: пусть угол C – острый (рис. 10*а*). Из прямоугольного треугольника CBK, используя теорему Пифагора, находим $BK = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$.
Тогда $AK = 14 + 9 = 23$. Из прямоугольного треугольника ACK находим

$$AC = \sqrt{23^2 + 12^2} = \sqrt{673}.$$

2-*й случай*: пусть угол C – тупой (рис. 10*б*). Из прямоугольного треугольника CBK, используя теорему Пифагора, находим $BK = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$.

Тогда $AK = 14 - 9 = 5$. Из прямоугольного треугольника ACK находим

$$AC = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13.$$



а *б*

Рис. 10

Ответ: $\sqrt{673}$ или 13.

12. **(ЕГЭ, 2012).** Боковые стороны KL и MN трапеции $KLMN$ равны 10 и 26 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 12, средняя линия трапеции равна 24. Прямые KL и MN пересекаются в точке A. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ALM.

Решение. Найдем основания данной трапеции. Пусть BC – средняя линия трапеции $KLMN$, точки P и Q – середины диагоналей (рис. 11*а*). Так как средняя линия трапеции делит пополам и ее диагонали, то точки P и Q принадлежат BC. Отрезки точки BP и QC являются средними линиями в треугольниках KLM и LMN. Следовательно, $BP = QC = \frac{1}{2}LM$. Поскольку по условию $BC = 24$, $PQ = 12$, то $BP = QC = \frac{1}{2}(BC - PQ) = 6$ и $LM = 12$. Прямые KL и MN пересекаются в точке A. Так как треугольники LAM и KAN подобны, то из равенства отношений сторон, лежащих против равных углов,

$$\frac{LA}{KA} = \frac{MA}{NA} = \frac{LM}{KN}$$

или

$$\frac{LA}{KL + LA} = \frac{MA}{MN + MA} = \frac{LM}{KN},$$

подставляя значения $KL = 10$, $LM = 12$, $MN = 26$ и $KN = 36$, получим $LA = 5$, $AM = 13$.

Заметим, что стороны треугольника LAM равны 5, 12, 13, т.е. этот треугольник прямоугольный. Следовательно, $\angle ALM = 90°$, а значит трапеция $KLMN$ – прямоугольная.

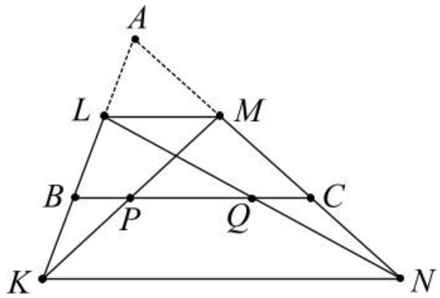


Рис. 11*а*

Все линейные размеры и углы данной трапеции определяются однозначно, однако существует два рисунка, удовлетворяющих условию задачи.

1-*й случай*. На рис. 11*б* представлена первая конфигурация. В этом случае задача сводится к нахождению радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник LAM со сторонами 5, 12, 13.

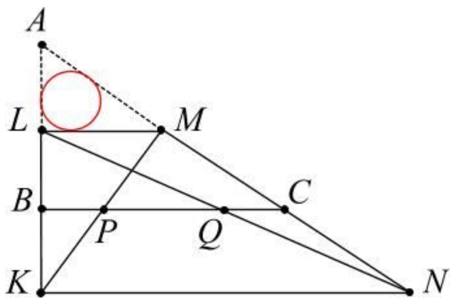


Рис. 11*б*

Так как площадь $S_{LAM} = \dfrac{LA \cdot LM}{2} = 30$ и полупериметр $p = \dfrac{LA + AM + LM}{2} = 15$ треугольника LAM, то по формуле $r = \dfrac{S_{LAM}}{p}$ получаем $r = 2$.

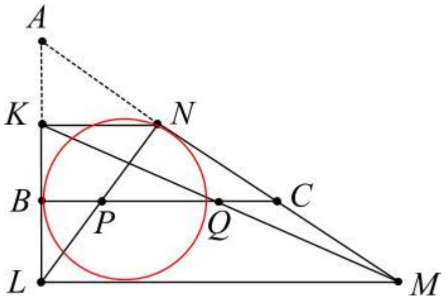


Рис. 11*в*

2-*й случай*. На рис. 11*в* представлена вторая возможная конфигурация. В этом случае задача сводится к нахождению радиуса вписанной окружности в прямоугольный треугольник LAM со сторонами 15, 36, 39. Радиус r вписанной окружности находим по формуле $r = \dfrac{S_{LAM}}{p} = 6$.

Ответ: 2 или 6.

Выбор некоторого элемента фигуры

13. (МИОО, 2011). Высота равнобедренного треугольника, опущенная на основание, равна 24. Точка касания вписанной окружности с боковой стороной делит эту сторону в отношении 5:8, считая от основания. Найдите радиус окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух других его сторон.

Решение. Пусть AD высота равнобедренного треугольника ABC, опущенная на его основание BC, O – центр вписанной окружности, P – точка ее касания с боковой стороной AB (рис. 12*а*). Считаем, что $AP = 8x$, $BP = 5x$. Тогда $AB = AP + BP = 13x$, $BD = BP = 5x$.

Из прямоугольного треугольника ABD, используя теорему Пифагора, имеем $AB^2 = BD^2 + AD^2$ или $(13x)^2 = (5x)^2 + 24^2$, откуда $x = 2$. Значит, $AP = 8 \cdot 2 = 16$,

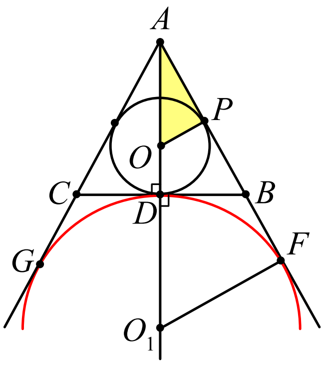


Рис. 12*а*

$BD = 5 \cdot 2 = 10$, $AB = 13 \cdot 2 = 26$.

Пусть $\angle BAD = \alpha$. Из прямоугольного треугольника ABD находим, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BD}{AD} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}.$$

1-*й случай*: пусть окружность с центром O_1 и радиусом r_1 касается продолжений боковых сторон AB и AC в точках F и G соответственно (рис. 12*а*), а также основания *BC*. Тогда *D* – точка касания, поэтому

$$BF = BD = 10,$$
$$AF = AB + BF = AB + BD = 26 + 10 = 36.$$

Следовательно,

$$r_1 = O_1F = AF \cdot \operatorname{tg}\alpha = 36 \cdot \frac{5}{12} = 15.$$

2-*й случай*: пусть окружность с центром O_2 и радиуса r_2 касается боковой стороны *AB*, продолжения основания *BC* в точке *Q* и продолжения боковой стороны *AC* в точке *K* (рис. 12*б*).

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, AO_2 и *AD* – биссектрисы смежных углов *BAK* и *CAB*, значит, $\angle DAO_2 = 90°$. Тогда $ADQO_2$ – прямоугольник. Следовательно, $r_2 = O_2Q = AD = 24$.

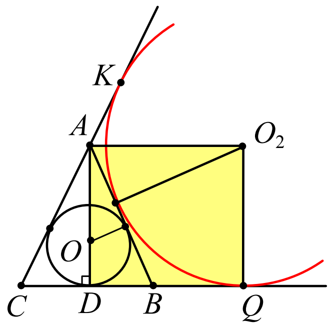


Рис. 12*б*

Радиус окружности, касающейся боковой стороны *AC* и продолжений основания *BC* и боковой стороны *AB*, также равен 24.

Ответ: 15 или 24.

14. В равнобедренный треугольник с основанием 12 и боковой стороной 10 вписана окружность. Вторая окружность касается двух сторон треугольника и первой окружности. Найдите радиус второй окружности.

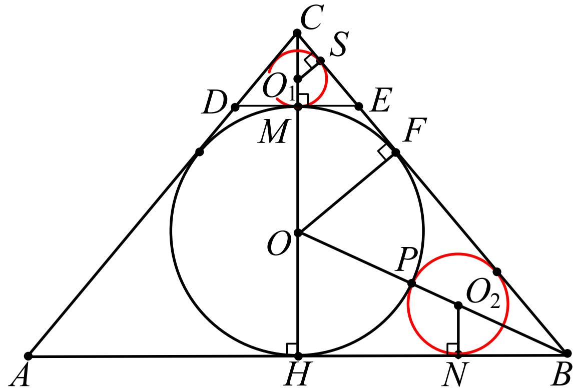


Рис. 13

Решение. Пусть *CH* высота равнобедренного треугольника *ABC*, опущенная на его основание *AB*, *O* – центр вписанной окружности, *F* – точка ее касания с боковой стороной *BC* (рис. 13). Из прямоугольного треугольника *CHB*, используя теорему Пифагора, найдем высоту $CH = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$. Площадь треугольника *ABC* равна $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$. Вычисляем радиус вписанной окружности по формуле $r = \frac{S}{p} = \frac{48}{16} = 3$.

1-*й случай*: пусть вторая окружность с центром O_1 и радиусом r_1 касается боковых сторон равнобедренного треугольника *ABC* и вписанной окружности в точке *M*. Проведем отрезок *DE* через точку *M* параллельно основанию *AB* треугольника *ABC*.

Высота треугольника *DEC* равна $CM = CH - 2r = 8 - 6 = 2$. Из подобия треугольников *ABC* и *DEC* получаем пропорцию $\frac{CM}{CH} = \frac{r_1}{r}$ или $\frac{2}{8} = \frac{r_1}{3}$. Отсюда $r_1 = 0{,}75$.

2-*й случай*: пусть вторая окружность с центром O_2 и радиуса r_2 касается основания *AB* в точке *N*, боковой стороны *BC* равнобедренного треугольника *ABC* и вписанной окружности в точке *P*.

Из прямоугольного треугольника *BOH* найдем $OB = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$. Для подобных треугольников *BOH* и BO_2N составим пропорцию $\frac{O_2B}{OB} = \frac{r_2}{r}$ или $\frac{3\sqrt{5} - 3 - r_2}{3\sqrt{5}} = \frac{r_2}{3}$. Отсюда $r_2 = \frac{3(3 - \sqrt{5})}{2}$.

Ответ: 0,75 или $\frac{3(3 - \sqrt{5})}{2}$.

15. В ромбе *ABCD* со стороной 2 и углом 60° проведены высоты *CM* и *DK*. Найдите длину отрезка *MK*.

Решение. Так как из каждой вершины ромба можно провести две высоты, то в задаче возникает 4 возможных случая.

1-*й случай*: пусть в прямоугольном треугольнике *CDM* (рис. 14) $\angle D = 60°$. Тогда $\angle DCM = 30°$ и $DM = 1$ (как катет, лежащий против угла в 30°). Отсюда $MA = 1$. Следовательно, *M* – середина *DA*, *KM* – медиана в прямоугольном треугольнике *AKD* с гипотенузой $AD = 2$. Значит, $KM = \frac{DA}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

2-*й случай* (рис. 14). Отрезок *KM* является диагональю в прямоугольнике *DKCM*, поэтому $KM = CD = 2$.

3-*й случай* (рис. 14). Отрезок *KM* равен отрезку *CD*, как противоположные стороны прямоугольника *DKMC*. Значит, $KM = 2$.

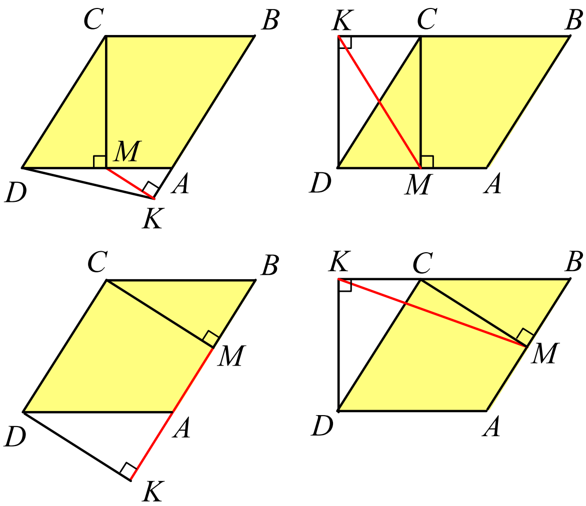


Рис. 14

4-*й случай* (рис. 14). В прямоугольном треугольнике *CDK* $\angle CDK = 30°$ и $KC = 1$ (как катет, лежащий против угла в 30°). Отсюда $KB = 3$. В прямоугольном треугольнике *CBM* $BM = 1$. Для треугольника *KBM* используем теорему косинусов

$$KM^2 = 3^2 + 1^2 - 2\cdot 3\cdot 1\cdot \cos 60° = 7.$$

Отсюда $KM = \sqrt{7}$.

Ответ: 1 или 2 или $\sqrt{7}$.

16. (ЕГЭ, 2012). Дан равнобедренный треугольник с боковой стороной равной 4 и углом $120°$. Внутрь треугольника вписаны две равные окружности таким образом, что окружности касаются друг друга и каждая окружность касается двух сторон треугольника. Найдите радиус окружностей.

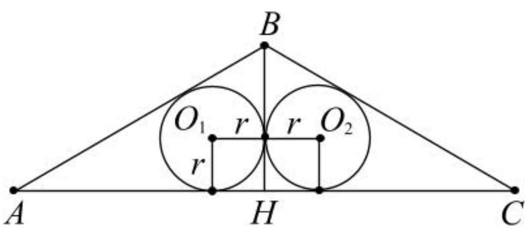


Рис. 15*а*

Решение. В данном треугольнике углы при основании, основание и высота, опущенная на основание, соответственно равны $30°$, $4\sqrt{3}$ и 2.

Существует два рисунка, удовлетворяющих условию задачи.

1-*й случай*: пусть каждая из окружностей касается основания и боковой стороны (рис. 15*а*). В этом случае каждая из этих окружностей вписывается в прямоугольный треугольник со сторонами 2, $2\sqrt{3}$ и 4. Рассмотрим, например, прямоугольный треугольник ABH. Радиус r вписанной в него окружности находим по формуле

$$r = \frac{AH + BH - AB}{2} = \frac{2\sqrt{3} + 2 - 4}{2} = \sqrt{3} - 1.$$

2-*й случай*: пусть обе окружности касаются одной из боковых сторон (рис. 15*б*). Так как центры окружностей лежат на биссектрисах, радиусы, проведенные в точку касания, перпендикулярны стороне *AB* и $KL = O_1O_2 = 2r$, то получаем

$$AB = AK + KL + LB = r\cdot \mathrm{ctg}15° + 2r + r\cdot \mathrm{ctg}60°.$$

Найдем $\mathrm{ctg}15°$ по формуле

$$\mathrm{ctg}15° = \frac{1+\cos 30°}{\sin 30°} = 2 + \sqrt{3}.$$

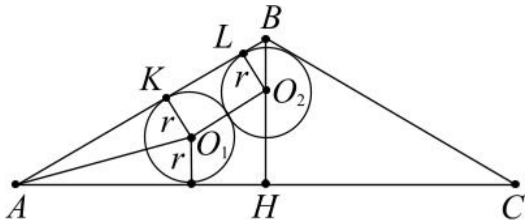


Рис. 15*б*

Тогда получаем $4 = r\cdot\left(2 + \sqrt{3} + 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Отсюда $r = \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\sqrt{3} - 1$ или $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

17. (ЕГЭ, 2012). В каком отношении точка касания вписанной в равнобедренный треугольник окружности делит его боковую сторону, если известно, что радиус окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух других сторон, в 7 раз больше радиуса вписанной окружности.

Решение. Пусть треугольник *ABC* – равнобедренный с основанием *AC*. Центр вписанной окружности лежит на высоте, проведенной к основанию. Пусть радиус вписанной окружности равен r, а точка касания окружности, например, с боковой стороной AB треугольника делит ее на отрезки AK и KB (рис. 16*а*). Полупериметр p треугольника ABC равен $p = 2AK + KB$. По условию требуется найти отношение $\frac{KB}{AK}$.

Вторая окружность – вневписанная с радиусом $7r$.

Существует две различные конфигурации, удовлетворяющие условию задачи.

1-*й случай*: пусть вневписанная окружность касается основания треугольника и продолжения его боковых сторон AB и BC (рис. 16*а*), L – точка касания. По свойству касательных $AL = AH$ и $AK = AH$. Тогда $LB = 2AK + KB$.

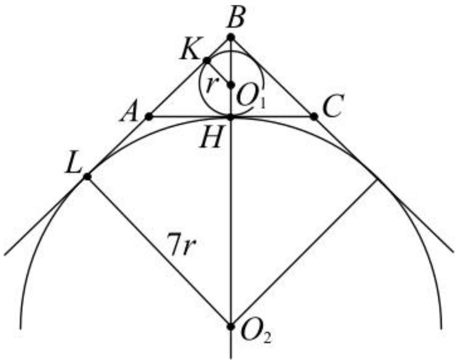


Рис. 16*а*

Радиусы, проведенные в точку касания, перпендикулярны касательной, поэтому прямоугольные треугольники KBO_1 и LBO_2, имеющие общий угол, подобны с коэффициентом подобия 7. Значит, $\frac{LB}{KB} = \frac{2AK + KB}{KB} = 7$. Отсюда, $\frac{KB}{AK} = \frac{1}{3}$.

2-*й случай*: пусть вневписанная окружность касается боковой стороны BC треугольника ABC и продолжения другой боковой стороны AB и основания AC (рис. 16*б*).

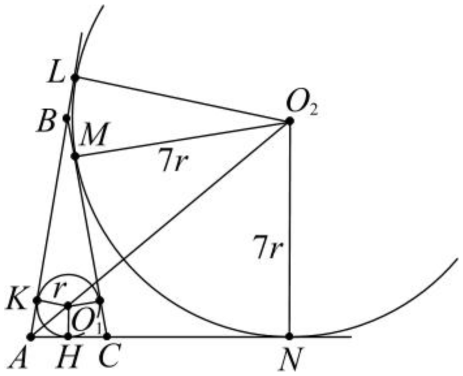


Рис. 16*б*

По свойству вневписанной окружности расстояние от вершины A треугольника до точки касания с продолжением стороны равно полупериметру треугольника ABC.

Докажем это. По свойству касательных $AL = AN$, $BL = BM$ и $CM = CN$. Так как $AL = AB + BL$, а $AN = AC + CN$, то получаем $AL + AN = AB + BL + AC + CN =$ $= AB + BM + AC + CM = AB + BC + AC$, т.е. $AL = p = 2AK + KB$.

Прямоугольные треугольники AKO_1 и ALO_2 подобны (имеют общий угол) с коэффициентом подобия 7. Значит, $\frac{AL}{AK} = \frac{2AK + KB}{AK} = 7$. Отсюда, $\frac{KB}{AK} = 5$.

Ответ: $1:3$ или $5:1$.

Выбор плоской фигуры

18. (ЕГЭ, 2011). Через вершину B правильного шестиугольника $ABCDEF$ проведена прямая, пересекающая диагональ CF в точке K. Известно, что эта прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как 2:3. Найдите отношение $CK : KF$.

Решение. Пусть O – центр правильного шестиугольника $ABCDEF$, S – его площадь (рис. 17*а*). Тогда

$$S_{ABEF} = S_{BCDE} = \frac{1}{2}S, \quad S_{ABF} = S_{BCD} = S_{BOC} = \frac{1}{6}S,$$

$$S_{BEF} = S_{ABEF} - S_{ABF} = \frac{1}{2}S - \frac{1}{6}S = \frac{1}{3}S.$$

1-*й случай*: пусть точка K расположена между точками O и F (рис. 17*а*). Пусть прямая BK пересекает сторону EF в точке M. Тогда

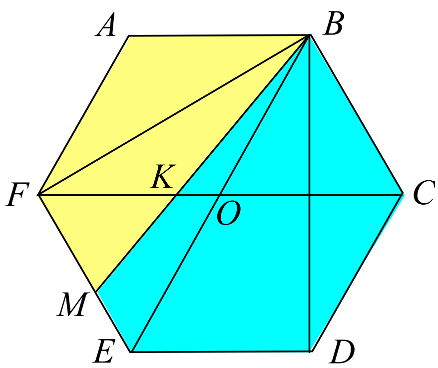


Рис. 17*а*

$$S_{ABMF} = \frac{2}{5}S,$$

$$S_{BMF}=S_{ABMF}-S_{ABF}=\frac{2}{5}S-\frac{1}{6}S=\frac{7}{30}S.$$

Треугольники BMF и BEF имеют общую высоту, опущенную из вершины B. Поэтому

$$\frac{FE}{FM}=\frac{S_{BEF}}{S_{BMF}}=\frac{S}{3}:\frac{7S}{30}=\frac{10}{7}.$$

Треугольник BKC подобен треугольнику MKF, поэтому

$$\frac{CK}{KF}=\frac{BC}{MF}=\frac{FE}{MF}=\frac{10}{7}.$$

2*-й случай*: пусть точка K расположена между точками C и O (рис. 17*б*). Пусть прямая BK пересекает сторону DE в точке N. Тогда

$$S_{BCDE}=\frac{1}{2}S,\ S_{BCDN}=\frac{2}{5}S,$$

$$S_{BDE}=S_{BCDE}-S_{BCD}=\frac{1}{2}S-\frac{1}{6}S=\frac{1}{3}S,$$

$$S_{BND}=S_{BCDN}-S_{BCD}=\frac{2}{5}S-\frac{1}{6}S=\frac{7}{30}S.$$

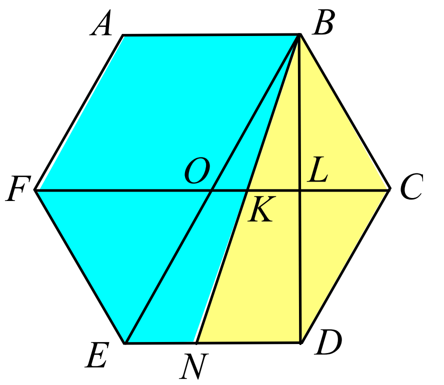


Рис. 17*б*

Пусть диагонали CF и BD пересекаются в точке L. Тогда L – середина OC.

Треугольники BDE и BDN имеют общую высоту, опущенную из вершины B. Поэтому

$$\frac{DE}{DN}=\frac{S_{BDE}}{S_{BDN}}=\frac{S}{3}:\frac{7S}{30}=\frac{10}{7}.$$

Значит, и $\frac{LO}{LK}=\frac{DE}{DN}=\frac{10}{7}$ (докажите самостоятельно).

Пусть $LO=10x$, $LK=7x$, тогда $KO=3x$, $LC=10x$, $FO=20x$, $CK=17x$, $KF=23x$.

Отсюда $\frac{CK}{KF}=\frac{17x}{23x}=\frac{17}{23}$.

Ответ: $\frac{17}{23}$ или $\frac{10}{7}$.

19. (ФИПИ, 2011). Точка H – основание высоты треугольника со сторонами 10, 12, 14, опущенной на сторону, равную 12. Через точку H проведена прямая, отсекающая от треугольника подобный ему треугольник и пересекающая сторону, равную 10, в точке M. Найдите HM.

Решение. В данной задаче через точку H можно провести прямую, отсекающую от треугольника подобный ему треугольник, двумя способами.

1*-й случай*: пусть треугольник ABC подобен треугольнику HMC ($\angle C$ – общий, $\angle BAC=\angle MHC$) (рис. 18*а*). Пусть $AB=14$, $AC=12$, $BC=10$, $HC=x$, тогда $AH=12-x$. Из прямоугольных треугольников ABH и BHC имеем соответственно

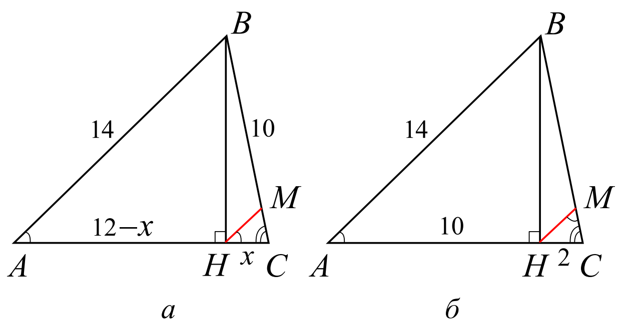


Рис. 18

$$BH^2=14^2-(12-x)^2 \text{ и } BH^2=10^2-x^2.$$

Получаем уравнение

$$14^2-(12-x)^2=10^2-x^2,$$

из которого находим $x=2$. Значит, $HC=2$ и из пропорции

$$\frac{HM}{AB}=\frac{HC}{AC} \text{ или } \frac{HM}{14}=\frac{2}{12}$$

находим $HM=\frac{7}{3}$.

2*-й случай*: пусть треугольник ABC подобен треугольнику MHC ($\angle C$ – общий, $\angle BAC=\angle HMC$) (рис. 18*б*). Из пропорции

$$\frac{MH}{AB}=\frac{HC}{BC} \text{ или } \frac{MH}{14}=\frac{2}{10}$$

находим $MH=\frac{14}{5}$.

Ответ: $\frac{7}{3}$ или $\frac{14}{5}$.

Глава 3. Многовариантность задачи как результат неоднозначности в задании взаимного расположения фигур

3.1. Взаимное расположение прямолинейных фигур

1. Ромб вписан в прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4 так, что одна из его вершин совпадает с вершиной острого угла треугольника, а три другие лежат на сторонах треугольника. Найдите площадь ромба.

Решение. Пусть дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 4$ и $BC = 3$. Найдем гипотенузу $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

1-*й случай*. Ромб $ADFE$ и треугольник ABC имеют общий угол A (рис. 19*а*). Обозначим сторону ромба $AD = DF = x$, тогда $CD = 4 - x$. Для подобных треугольников DFC и ABC составим пропорцию $\frac{DC}{AC} = \frac{DF}{AB}$ или $\frac{4-x}{4} = \frac{x}{5}$. Отсюда находим $x = \frac{20}{9}$. Значит, $AD = EF = \frac{20}{9}$, $CD = 4 - \frac{20}{9} = \frac{16}{9}$, коэффициент подобия $k = \frac{20}{9} : 5 = \frac{4}{9}$. Тогда $CF = \frac{4}{9} \cdot 3 = \frac{4}{3}$, $AF = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$.

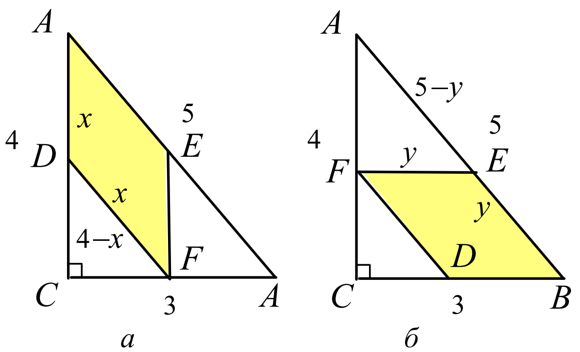


Рис. 19

Найдем площади прямоугольных треугольников ABC, CDF и BFE:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6,$$

$$S_{CDF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{9} \cdot \frac{4}{3} = \frac{32}{27},$$

$$S_{BFE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{9} \cdot \frac{5}{3} = \frac{50}{27}.$$

Площадь ромба равна

$$S_{ADFE} = S_{ABC} - S_{CDF} - S_{BFE} = = 6 - \frac{32}{27} - \frac{50}{27} = \frac{80}{27}.$$

2-*й случай*. Ромб $BDFE$ и треугольник ABC имеют общий угол B (рис. 19*б*). Обозначим сторону ромба $BE = FE = y$, тогда $AE = 5 - y$. Для подобных треугольников AEF и ABC составим пропорцию $\frac{FE}{CB} = \frac{AE}{AB}$ или $\frac{y}{3} = \frac{5-y}{5}$. Отсюда находим $y = \frac{15}{8}$. Значит, $DB = FE = \frac{15}{8}$, $CD = 3 - \frac{15}{8} = \frac{9}{8}$. Из прямоугольного треугольника CDF получаем $CF = \sqrt{\left(\frac{15}{8}\right)^2 - \left(\frac{9}{8}\right)^2} = \frac{3}{2}$, тогда $AF = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$.

Найдем площади прямоугольных треугольников CDF и AFE:

$$S_{CDF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{8} = \frac{27}{32}, \quad S_{AFE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{15}{8} = \frac{75}{32}.$$

Площадь ромба равна

$$S_{BDFE} = S_{ABC} - S_{CDF} - S_{AFE} = 6 - \frac{27}{32} - \frac{75}{32} = \frac{45}{16}.$$

Ответ: $\frac{45}{16}$ или $\frac{80}{27}$.

2. **(ФЦТ, 2010).** На стороне CD квадрата $ABCD$ построен равносторонний треугольник CPD. Найдите высоту треугольника ADP, проведенную из вершины D, если известно, что сторона равна 1.

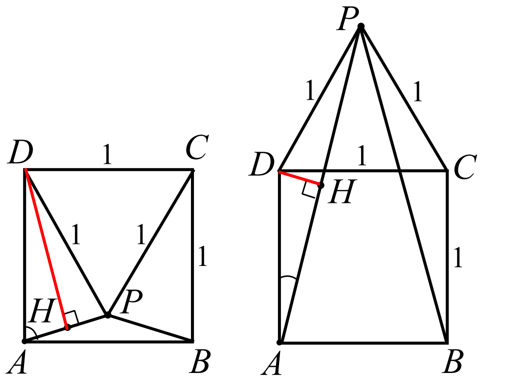
Решение. 1-*й случай*: пусть точки A и P лежат по одну сторону от прямой CD (рис. 20*а*). Так как $AD = DC = DP = 1$, то в треугольнике ADP углы

$$\angle DAP = \angle DPA = \frac{1}{2}(180° - \angle ADP) = = \frac{1}{2}(180° - (90° - 60°)) = 75°.$$

Пусть DH – высота треугольника ADP, тогда из прямоугольного треугольника ADH находим

$$DH = AD \sin \angle DAH = 1 \cdot \sin 75° = = \sin(30° + 45°) = = \sin 30° \cdot \cos 45° + \cos 30° \cdot \sin 45° =$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$



а *б*

Рис. 20

2-*й случай*: пусть точки A и P лежат по разные стороны от прямой CD (рис. 20*б*). Так как $AD=DC=DP=1$, то в треугольнике ADP углы

$$\angle DAP=\angle DPA=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle ADP)=$$

$$=\frac{1}{2}(180^\circ-(90^\circ+60^\circ))=15^\circ.$$

Пусть DH – высота треугольника ADP, тогда из прямоугольного треугольника ADH находим

$$DH=AD\sin\angle DAH=1\cdot\sin15^\circ=$$

$$=\sin(45^\circ-30^\circ)=$$

$$=\sin45^\circ\cdot\cos30^\circ-\cos45^\circ\cdot\sin30^\circ=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ или $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

3.2. Взаимное расположение окружностей

3. Найдите радиус окружности, вписанной в угол MKN равный $2\arcsin0{,}6$ и касающейся окружности, радиуса 4 также вписанной в угол MKN.

Решение. Пусть дана окружность с центром O и радиуса 4, вписанная в угол MKN, тогда $\angle OKN=\arcsin0{,}6$.

1-*й случай*: пусть окружность с центром O_1 и радиуса r_1, вписанная в угол MKN, касается данной окружности и расположена ближе к вершине данного угла (рис. 21).

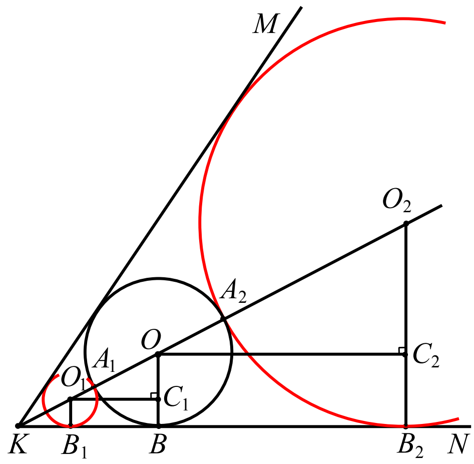


Рис. 21

Проведем радиусы OB и O_1B_1 в точки касания со стороной KN, опустим из точки O_1 перпендикуляр O_1C_1 на OB. В прямоугольном треугольнике O_1OC_1 имеем $OO_1=4+r_1$, $OC_1=4-r_1$ и соотношение $\sin\angle OO_1C_1=\frac{OC_1}{OO_1}=\frac{4-r_1}{4+r_1}$. Получаем уравнение

$$\frac{4-r_1}{4+r_1}=\sin(\arcsin0{,}6)\ \text{ или }\ \frac{4-r_1}{4+r_1}=\frac{3}{5},$$

откуда $r_1=1$.

2-*й случай*: пусть окружность с центром O_2 и радиуса r_2, вписанная в угол MKN, касается данной окружности и расположена дальше от вершины данного угла (рис. 21).

Проведем радиус O_2B_2 в точку касания со стороной KN, опустим из точки O перпендикуляр OC_2 на O_2B_2. В прямоугольном треугольнике O_2OC_2 имеем $OO_2=4+r_2$, $O_2C_2=r_2-4$ и соотношение $\sin\angle O_2OC_2=\frac{O_2C_2}{OO_2}=\frac{r_2-4}{4+r_2}$. Получаем уравнение $\frac{r_2-4}{4+r_2}=\frac{3}{5}$, откуда $r_2=16$.

Ответ: 1 или 16.

4. Вершина равнобедренного треугольника с боковой стороной 5 и основанием 8 служит центром данной окружности радиуса 2. Найдите радиус окружности, касающейся данной и проходящей через концы основания треугольника.

Решение. Пусть D – середина основания AC данного треугольника ABC. Обозначим через E и F точки пересечения прямой BD и окружности радиуса 2 с центром в точке B. Тогда (рис. 22): $AD=4$, $BD=3$, $ED=1$, $FD=5$.

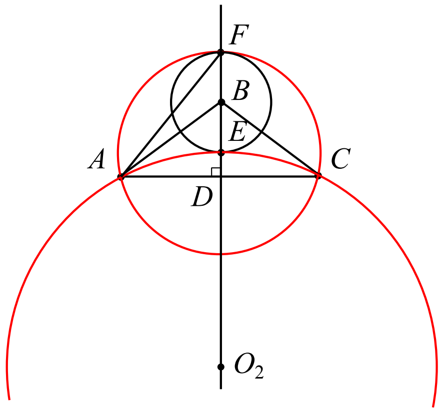


Рис. 22

Из теоремы Пифагора для прямоугольных треугольников AED и AFD соответственно имеем:

$$AE=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17},\ \ AF=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}.$$

Находим площади треугольников AEC и AFC:

$$S_{AEC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot ED=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 1=4,$$

$$S_{AFC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot FD=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 5=20.$$

Возможны два случая расположения указанной в условии окружности в зависимости от типа касания с данной окружностью. В обоих случаях центры O_1 и O_2 этих окружностей будут лежать на биссектрисе угла – прямой BD (рис. 22).

1-*й случай*: пусть окружности касаются внешним образом. Тогда искомая окружность описана около треугольника AEC. Найдем ее радиус по формуле

$$R=\frac{AE\cdot EC\cdot AC}{4S_{AEC}}=\frac{17\cdot 8}{4\cdot 4}=\frac{17}{2}.$$

2-*й случай*: пусть окружности касаются внутренним образом. Тогда искомая окружность описана вокруг треугольника AFC. Найдем ее радиус

$$R=\frac{AF\cdot FC\cdot AC}{4S_{AFC}}=\frac{41\cdot 8}{4\cdot 20}=\frac{41}{10}.$$

Ответ: $\frac{17}{2}$ или $\frac{41}{10}$.

5. Расстояние между центрами двух окружностей равно $10r$. Одна из окружностей имеет радиус $5r$, другая $6r$. Некоторая прямая пересекает меньшую окружность в точках A и B и касается большей в точке C. Найдите длину хорды AB, если $AB=2BC$.

Решение. Пусть даны окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами $5r$ и $6r$ соответственно. Из условия задачи следует, что окружности пересекаются $(5r+6r>10r)$.

1-*й случай*: пусть радиус O_2C перпендикулярен касательной AB (рис. 23*а*). Перпендикуляр O_1C_1, проведенный к хорде AB, делит ее пополам. Проведем $O_1A_1 \parallel C_1C$, получим прямоугольник $O_1C_1CA_1$.

Пусть $AC_1=C_1B=a$, тогда $BC=a$, $O_1A_1=2a$. Обозначим $O_1C_1=b$, тогда $O_2A_1=O_2C-A_1C=6r-b$.

Из прямоугольного треугольника O_1C_1B, используя теорему Пифагора, составим уравнение $(5r)^2=a^2+b^2$. Аналогично из прямоугольного треугольника $O_1A_1O_2$ составим уравнение $(10r)^2=(2a)^2+(6r-b)^2$.

Решим систему уравнений с двумя неизвестными a и b:

$$\begin{cases} a^2+b^2=25r^2 \\ 4a^2-12br+b^2=64r^2. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения системы $a^2=25r^2-b^2$ и подставим во второе уравнение:

$$4(25r^2-b^2)-12br+b^2=64r^2;$$

$$b^2+4br-12r^2=0.$$

Квадратное уравнение имеет один положительный корень $b=2r$, тогда $a^2=25r^2-4r^2=21r^2$, $a=r\sqrt{21}$ и $AB=2\sqrt{21}\cdot r$.

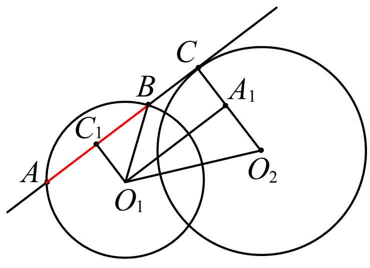


Рис. 23*а*

2-*й случай* (рис. 23*б*). Проведем касательную к большей окружности перпендикулярно отрезку O_1O_2, которой принадлежит точка *C*. В этом случае условие $AB = 2BC$ выполняется. Из прямоугольного треугольника O_1AC имеем $AC^2 = O_1A^2 - O_1C^2 = 25r^2 - 16r^2 = 9r^2$.

Значит, $AC = 3r$, $AB = 6r$.

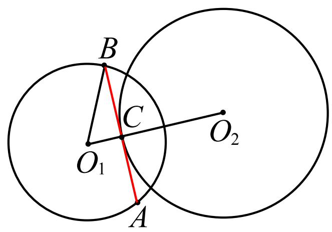


Рис. 23*б*

Ответ: $2\sqrt{21}\cdot r$ или $6r$.

6. Две окружности радиусов 1 и 5 касаются. Найдите радиус третьей окружности, касающейся первых двух окружностей и прямой, проходящей через центры данных.

Решение. Пусть даны окружности с центрами *A* и *B* и радиусами 5 и 1 соответственно.

1-*й случай*: пусть данные окружности касаются внешним образом (рис. 24*а*). Рассмотрим окружность с центром *O* и радиуса *a*, которая касается линии центров *AB* в точке *C*, окружности с центром *B* в точке *K* и окружности с центром *A* в точке *P*. Продолжим отрезки *BO* и *AO* за точку *O* до пересечения с искомой окружностью. Получим точки *M* и *Q* соответственно. Обозначим $BC = b$ и воспользуемся теоремой о касательной и секущей:

$$BC^2 = BK\cdot BM,\ AC^2 = AP\cdot AQ.$$

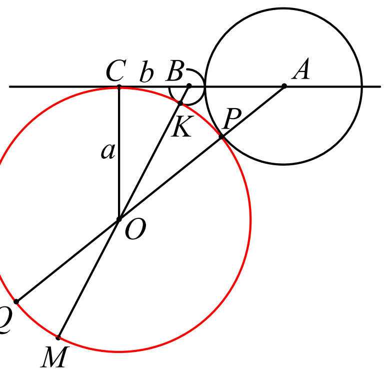


Рис. 24*а*

Получим систему двух уравнений с двумя неизвестными *a* и *b*: $\begin{cases} b^2 = 1\cdot(2a+1) \\ (b+6)^2 = 5\cdot(2a+5). \end{cases}$

Выразим из первого уравнения системы $2a = b^2 - 1$ и подставим во второе уравнение: $(b+6)^2 = 5\cdot(b^2 - 1 + 5)$. Полученное уравнение имеет один положительный корень $b = 4$. Тогда $2a = 4^2 - 1 = 15$ и $a = 7{,}5$.

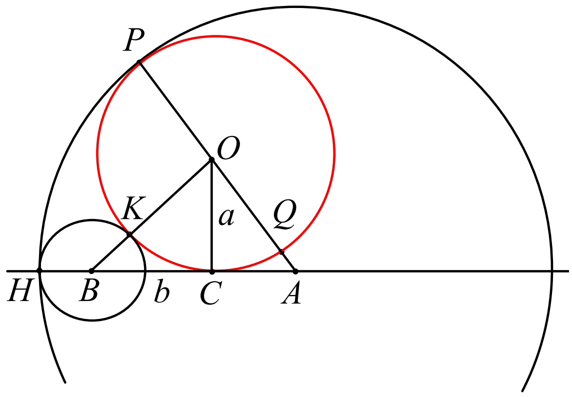


Рис. 24*б*

2-*й случай*: пусть данные окружности касаются внутренним образом (рис. 24*б*). Рассмотрим окружность с центром *O* и радиуса *a*, которая касается линии центров *AB* в точке *C*, окружности с центром *B* в точке *K* и окружности с центром *A* в точке *P*. Обозначим $BC = b$ и воспользуемся теоремой Пифагора для прямоугольных треугольников *BCO* и *ACO*: $OC^2 + BC^2 = OB^2$, $OC^2 + AC^2 = AO^2$.

Получим систему двух уравнений с двумя неизвестными *a* и *b*:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = (a+1)^2 \\ a^2 + (5-b-1)^2 = (5-a)^2. \end{cases}$$

Преобразуем систему уравнений

$$\begin{cases} b^2 = (a+1)^2 - a^2 \\ (4-b)^2 = (5-a)^2 - a^2; \end{cases} \quad \begin{cases} b^2 = 2a+1 \\ (b-4)^2 = 5(5-2a). \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения системы $2a = b^2 - 1$ и подставим во второе уравнение: $(b-4)^2 = 5\cdot(5 - b^2 + 1)$. Полученное уравнение имеет один положительный корень $b = \frac{7}{3}$. Тогда $2a = \left(\frac{7}{3}\right)^2 - 1 = \frac{40}{9}$ и $a = \frac{20}{9}$.

Ответ: $7{,}5$ или $\frac{20}{9}$.

7. **(ЕГЭ, 2012).** Точка O – центр правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 7. Найдите радиус окружности касающейся окружностей, описанных около треугольников BOD, DOF, BOF.

Решение. Пусть точка O – центр правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной a (рис. 25).

Радиус R окружностей, описанных около треугольников BOF, BOD, DOF равен a. Рассмотрим, например, треугольник DOF. Его сторона $FD = a\sqrt{3}$ (диагональ правильного шестиугольника со стороной a), $\angle FOD = 120°$. Из теоремы синусов для треугольника DOF получаем $\frac{FD}{\sin\angle FOD} = 2R$. Отсюда $R = a$.

Рассмотрим возможные положения окружностей удовлетворяющих условию задачи.

1-*й случай*: пусть искомая окружность, касается всех данных окружностей внутренним образом. В этом случае ее центр находится в точке O и радиус r равен $2a$ (рис. 25).

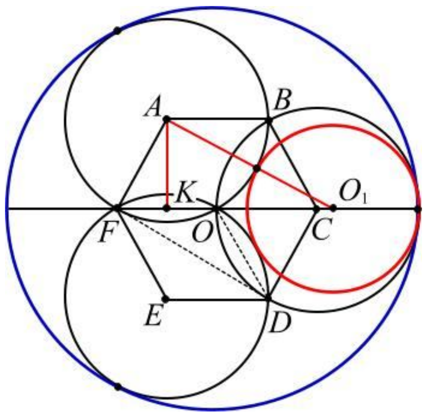


Рис. 25

2-*й случай*: пусть искомая окружность касается одной из окружностей (например, проходящей через точки B, O, D) внутренним образом, а двух других внешним образом (рис. 25). Пусть O_1 – центр этой окружности, а ее радиус равен r. Тогда, воспользуемся теоремой: *точки касания и центры касающихся окружностей лежат на одной прямой и расстояние между центрами равно сумме радиусов при внешнем касании и их разности при внутреннем.*

Тогда $AO_1 = a + r$, $OO_1 = 2a - r$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник KAO_1, где точка K – проекция точки A на диагональ FC. В этом треугольнике

$$AK = FA \cdot \sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ AO_1 = a + r$$

и

$$KO_1 = KO + OO_1 = FO - FK + OO_1 =$$
$$= a - a\cos 60° + 2a - r = \frac{5a}{2} - r.$$

Из теоремы Пифагора получаем

$$AO_1^2 = AK^2 + KO_1^2, (a+r)^2 = \frac{3a^2}{4} + \left(\frac{5a}{2} - r\right)^2.$$

Отсюда получаем $r = \frac{6a}{7}$.

Соответственно в данной задаче при $a = 7$ получаем два ответа $r = 14$ или $r = 6$.

Ответ: 14 или 6.

8. В окружности, радиус которой равен 15, проведена хорда $AB = 24$. Точка C лежит на хорде AB так, что $AC : BC = 1 : 2$. Найдите радиус окружности, касающейся данной окружности и касающейся хорды AB в точке C.

Решение. Возможны два случая расположения указанной окружности (рис. 26). Центры этих окружностей O_1 и O_2 будут лежать на перпендикуляре к хорде AB, проходящем через точку C.

1-*й случай*: пусть точки O и O_1, где O – центр данной окружности, а O_1 – центр окружности, указанной в условии, лежат по разные стороны относительно прямой AB.

Так как $AC : BC = 1 : 2$, то $AC = 8$. Пусть N – середина хорды AB. Тогда из прямоугольного треугольника ONB получаем

$$ON = \sqrt{OB^2 - NB^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9.$$

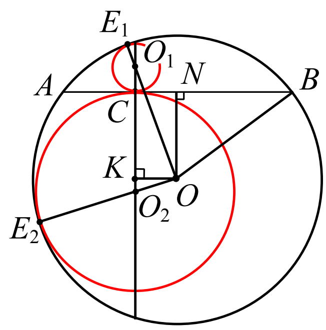


Рис. 26

Пусть K – середина хорды, перпендикулярной AB и проходящей через точку C. Четырехугольник $KCNO$ – прямоугольник,

$$OK = CN = AN - AC = 12 - 8 = 4.$$

Пусть искомый радиус равен r. Так как центры O, O_1 и точка касания E_2 лежат на одной прямой, то $OO_1 = OE_2 - O_1E_2 = 15 - r$.

Из теоремы Пифагора для прямоугольного треугольника KO_1O, в котором $OK = 4$, $OO_1 = 15 - r$ и $KO_1 = KC + CO_1 = 9 + r$, получаем $OO_1^2 = OK^2 + KO_1^2$ или

$$(15-r)^2 = 4^2 + (9+r)^2.$$

Отсюда $r = \frac{8}{3}$.

2-*й случай*: пусть точки O и O_2 лежат по одну сторону относительно прямой AB (рис. 26). Из теоремы Пифагора для прямоугольного треугольника KO_2O, в котором $OK = 4$, $OO_2 = 15 - r$ и $KO_2 = CO_2 - KC = r - 9$, получаем $r = \frac{32}{3}$.

Ответ: $\frac{8}{3}$ и $\frac{32}{3}$.

9. Окружности радиусов 4 и 9 касаются внешним образом, лежат по одну сторону от некоторой прямой и касаются этой прямой. Найдите радиус окружности, касающейся каждой из двух данных и той же прямой.

Решение. Используем опорную задачу: *отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов r и R равен* $2\sqrt{Rr}$.

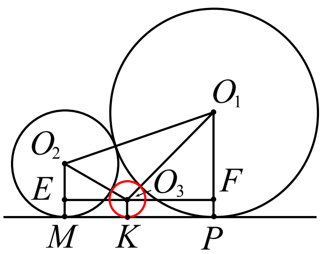


Рис. 27*а*

1-*й случай*: пусть искомая окружность с центром O_3 и радиусом R касается окружности с центром O_1 и радиусом 4, окружности с центром O_2 и радиусом 9, данной прямой в точке K (рис. 27*а*). Тогда $MP = MK + KP$ или $2\sqrt{4\cdot 9} = 2\sqrt{4R} + 2\sqrt{9R}$, откуда $R = 1{,}44$.

2-*й случай*: пусть искомая окружность с центром O_3 касается данных окружностей и данной прямой в точке P (рис. 27*б*). Имеем $MP = MK + KP$ или $2\sqrt{9R} = 2\sqrt{4\cdot 9} + 2\sqrt{4R}$, откуда $R = 36$.

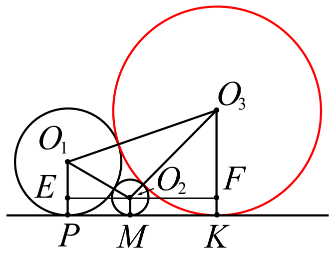


Рис. 27*б*

Ответ: 1,44 или 36.

3.3. Интерпретация аналитического способа решения задачи

10. (ЕГЭ, 2011). Диаметр окружности, вписанной в треугольник *PQR*, площадь которого равна 132, в три раза меньше высоты, проведенной из вершины *P*. Известно, что $QR = 11$. Найдите сторону *PQ*.

Решение. Используя формулу площади $S_{PQR} = \frac{1}{2}\cdot QR\cdot h$, где h – высота, проведенная из вершины *P*, найдем эту высоту

$$132 = \frac{1}{2}\cdot 11\cdot h,\quad h = 24.$$

Тогда радиус окружности, вписанной в треугольник *PQR*, равен $r = 24:6 = 4$. Используя формулу площади $S_{PQR} = p\cdot r$, найдем полупериметр $p = \frac{132}{4} = 33$.

Пусть вписанная окружность касается сторон *QR*, *PQ* и *PR* треугольника в точках *A*, *B* и *C* соответственно (рис. 28).

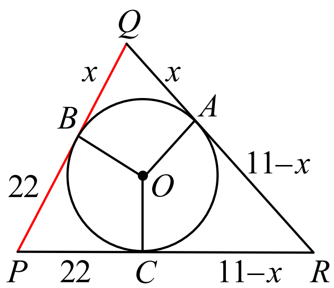


Рис. 28

Отрезки касательных $BQ = AQ = x$,

$AR = CR = 11 - x$,

$PB = PC = p - QR = 33 - 11 = 22$.

Тогда $PQ = 22 + x$, $PR = 33 - x$.

Используя формулу Герона, составим уравнение $132 = \sqrt{33 \cdot 22 \cdot x(11 - x)}$. Получаем уравнение $x^2 - 11x + 24 = 0$, корнями которого являются числа 3 и 8.

1) Если $x = 3$, то $PQ = 25$ и $PR = 30$.

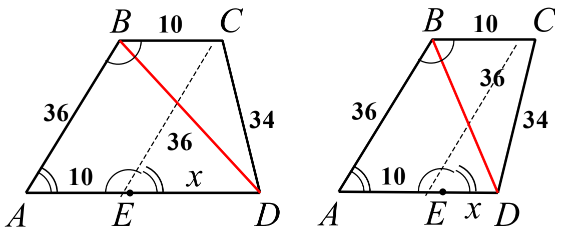
2) Если $x = 8$, то $PQ = 30$ и $PR = 25$.

Ответ: 25 или 30.

11. (ЕГЭ, 2011). Окружность, вписанная в треугольник *KLM*, площадь которого равна 66, касается средней линии, параллельной стороне *ML*. Известно, что $ML = 11$. Найдите *MK*.

Ответ: 13 или 20. *Указание.* См. «Пособие», пример 42.

12. (ЕГЭ, 2011). Дана трапеция *ABCD* с боковыми сторонами *AB* = 36, *CD* = 34 и верхним основанием *BC* = 10. Известно, что $\cos\angle ABC = -\frac{1}{3}$. Найдите *BD*.



а *б*

Рис. 29

Решение. Проведем *CE* параллельно *AB* (рис. 29). Тогда *ABCE* – параллелограмм. $\angle AEC = \angle ABC$, $\angle DEC = 180° - \angle AEC$,

$\cos\angle DEC = \frac{1}{3}$ и $\cos\angle DAB = \frac{1}{3}$.

Обозначим ED через x. Воспользуемся теоремой косинусов для угла DEC в треугольнике DEC:

$$34^2 = 36^2 + x^2 - 2 \cdot 36 \cdot x \cdot \frac{1}{3},$$

$$x^2 - 24x + 140 = 0.$$

Отсюда $x = 14$ или $x = 10$.

Получившиеся два значения x, означают, что условию задачи соответствуют два чертежа. В одном случае $\angle CDE$ острый, в другом – тупой.

Воспользуемся теоремой косинусов для угла *DAB* в треугольнике *ABD* и рассмотрим два случая.

1. Пусть $x = 14$, тогда $AD = 24$.

$$BD^2 = 36^2 + 24^2 - 2 \cdot 36 \cdot 24 \cdot \frac{1}{3} = 1296;$$

$$BD = 36.$$

В этом случае угол D – острый (рис. 29*а*), так как справедливо неравенство:

$$ED^2 + CD^2 - EC^2 = 14^2 + 34^2 - 36^2 = 56 > 0.$$

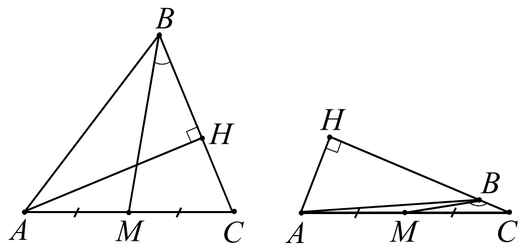
2. Пусть $x = 10$, тогда $AD = 20$,

$$BD^2 = 36^2 + 20^2 - 2 \cdot 36 \cdot 20 \cdot \frac{1}{3} = 1216;$$

$BD = 8\sqrt{19}$. Покажите, что в этом случае угол D – тупой (рис. 29*б*).

Ответ: 36 или $8\sqrt{19}$.

13. Медиана *BM* треугольника *ABC* равна его высоте *AH*. Найдите угол *MBC*.



а *б*

Рис. 30

Решение. Пусть $\angle MBC = \alpha$. Найдем площадь треугольника *ABC* двумя способами. Так как медиана *BM* треугольника *ABC* разбивает его на два равновеликих треугольника, то

$$S_{ABC} = 2S_{CBM} = 2 \cdot \frac{1}{2} BC \cdot BM \sin\alpha = BC \cdot BM \sin\alpha.$$

С другой стороны, $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH$. Учитывая, что $AH = BM$, приравняем площади $BC \cdot BM \sin\alpha = \frac{1}{2} BC \cdot BM$. Получаем, что $\sin\alpha = 0{,}5$. Отсюда $\alpha = 30°$ (рис. 30*а*) или $\alpha = 150°$ (рис. 30*б*).

Ответ: $30°$ или $150°$.

Глава 4. Дополнение

4.1. Многовариантная задача с однозначным ответом

1. Радиусы вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника равны 2 и 5 соответственно. Найдите больший катет треугольника.

Указание. Гипотенуза $AB = 2R = 2\cdot 5 = 10$, отрезки касательных $CF = CG = 2$, $AE = AG = x$, $BE = BF = 10 - x$ (рис. 31). Использовать теорему Пифагора. ***Ответ***: 8.

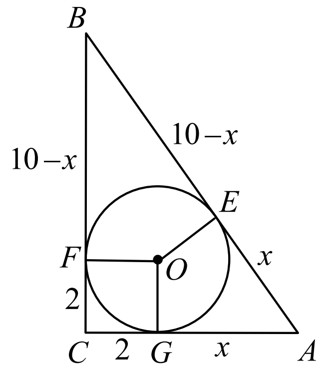


Рис. 31

2. Из середины катета прямоугольного треугольника на его гипотенузу опущен перпендикуляр, длина которого равна 1. Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, если длина одного из его катетов равна 4.

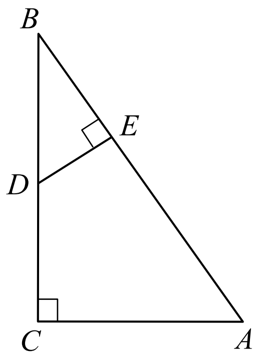


Рис. 32

Указание. Рассмотреть два случая (рис. 32): катет $BC = 4$ или катет $AC = 4$. Использовать подобие треугольников BED и BCA, применить формулу для вычисления радиуса вписанной окружности $r = \dfrac{BC + AC - AB}{2}$.

Ответ: $\dfrac{2(3-\sqrt{3})}{3}$.

3. Дан прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 9$, $BC = 12$ и окружность S радиуса 2 с центром O на стороне AB, проходящая через вершину A. Найдите радиус окружности, касающейся внешним образом окружности S, содержащейся внутри прямоугольника и касающейся двух его соседних сторон.

Указание. Пусть искомая окружность касается сторон AB и BC (рис. 33). Обозначим ее радиус через x. Использовать теорему Пифагора для треугольника OO_1M: $MO_1^2 + MO^2 = OO_1^2$, $x^2 + (7 - x)^2 = (x + 2)^2$. Отсюда $x = 3$ или $x = 15$. Второй корень не удовлетворяет условию задачи, так как радиус окружности больше стороны AB.

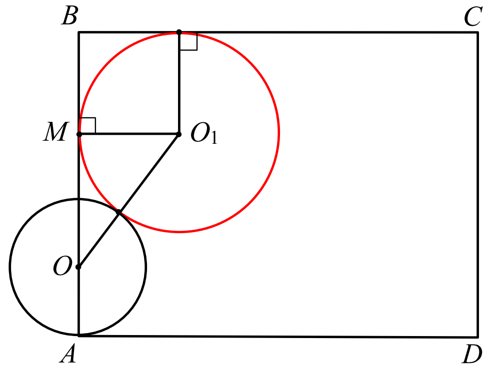


Рис. 33

Рассмотрите самостоятельно случаи: окружность касается сторон BC и CD; окружность касается сторон AD и CD; окружность касается сторон AB и AD. ***Ответ:*** 3.

4. Трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 6$, $BC = 4$ и диагональю $BD = 7$ вписана в окружность. На окружности взята точка K, отличная от точки D так, что $BK = 7$. Найдите длину отрезка AK.

Решение. В равнобедренной трапеции отрезки $AH = 1$ и $HD = 5$ (рис. 34). Из прямоугольных треугольников BHD и ABH последовательно найдем $BH^2 = 24$, $AB = 5$ соответственно.

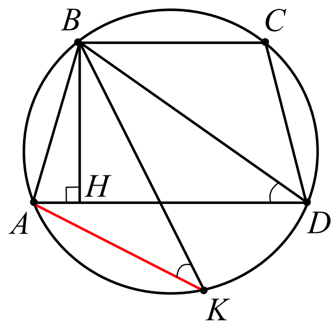


Рис. 34

Из треугольника BHD также определим $\cos\angle HDB = \dfrac{5}{7}$. Так как $\angle AKB = \angle ADB$ (как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу), то $\cos\angle AKB = \dfrac{5}{7}$. Пусть $AK = x$, тогда для составления уравнения используем теорему косинусов в треугольнике ABK $25 = x^2 + 49 - 2x \cdot 7 \cdot \dfrac{5}{7}$ или $x^2 - 10x + 24 = 0$. Отсюда $x = 6$ или $x = 4$. Если $AK = 6$, то треугольники ABK и ABD равны, значит, равны углы ABK и ABD, но точка K отлична от точки D.

Ответ: 4.

5. Точки A, B и C лежат на одной прямой. Отрезок AB является диаметром первой окружности, а отрезок BC – второй окружности. Прямая, проходящая через точку A, пересекает первую окружность в точке D и касается второй окружности в точке E, при этом $BD = 9$, $BE = 12$. Найдите радиусы окружностей.

Указание. Рассмотреть три случая.

1-*й случай:* если точка A лежит между точками B и C, то условие задачи не выполняется (рис. 35*а*).

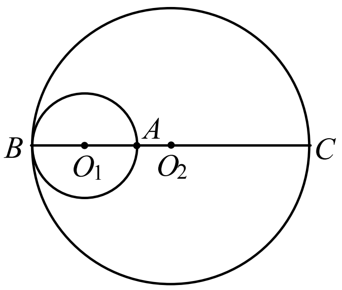


Рис. 35*а*

2-*й случай*: пусть точка B лежит между точками A и C (рис. 35*б*). Рассмотрите прямоугольные треугольники BFE и BFO_2, составьте уравнение $R_2^2 = 63 + (R_2 - 9)^2$, откуда $R_2 = 8$. Получаем противоречие с условием $R_2 = EO_2 < EF$.

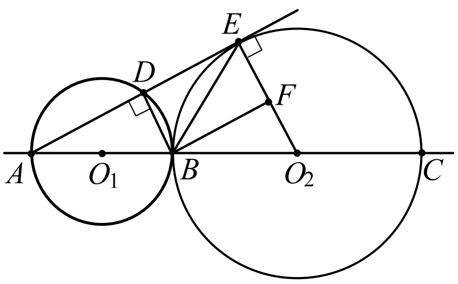


Рис. 35*б*

3-*й случай*: пусть точка C лежит между точками A и B (рис. 35*в*). Рассмотрите прямоугольные треугольники BDE и BFO_2, составьте уравнение $R_2^2 = 63 + (9 - R_2)^2$, откуда $R_2 = 8$. Из подобия треугольников ADB и AEO_2 имеем пропорцию

$$\frac{AB}{AO_2} = \frac{BD}{O_2E} \text{ или } \frac{2R_1}{2R_1 - 8} = \frac{9}{8}.$$

Отсюда $R_1 = 36$. ***Ответ***: 8 и 36.

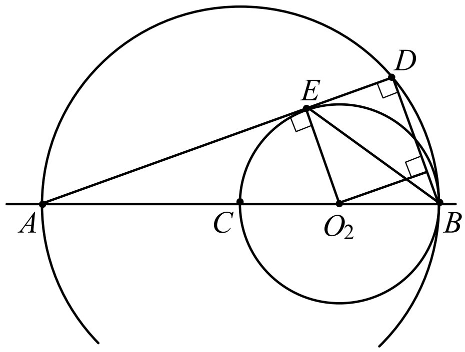


Рис. 35*в*

6. Окружность S проходит через вершину C прямого угла и пересекает его стороны в точках, удаленных от вершины C на расстояния 6 и 8. Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся окружности S.

Указание. Около треугольника ABC описана окружность с центром $O(3;4)$ и радиуса 5 (рис. 36).

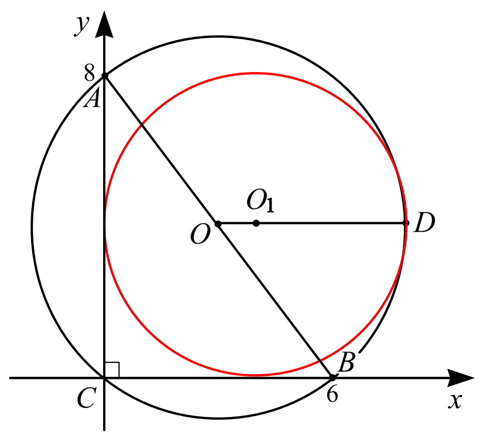


Рис. 36

Если искомая окружность с центром $O_1(x; x)$ и радиуса x касается данной окружности внутренним образом, то выполняется равенство $OO_1 = OD - O_1D = 5 - x$ или

$$OO_1^2 = (3-x)^2 + (4-x)^2 = (5-x)^2.$$

Отсюда $x = 4$.

Аналогично, если искомая окружность с центром $O_2(y; y)$ и радиуса y касается данной окружности внешним образом, то выполняется равенство $OO_2 = 5 + y$ или

$$OO_2^2=(3-y)^2+(4-y)^2=(5+y)^2.$$

Отсюда $y=24$.

Ответ: 4 или 24.

7. На стороне *BA* угла *ABC*, равного $30°$, взята такая точка *D*, что $AD=2$ и $BD=1$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки *A*, *D* и касающейся прямой *BC*.

Указание. Введем систему координат (рис. 37). Тогда координаты точек *D* и *A*, лежащих на прямой $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$: $D\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$, $A\left(\frac{3\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Если $O(a;b)$ – центр искомой окружности, то ее уравнение имеет вид

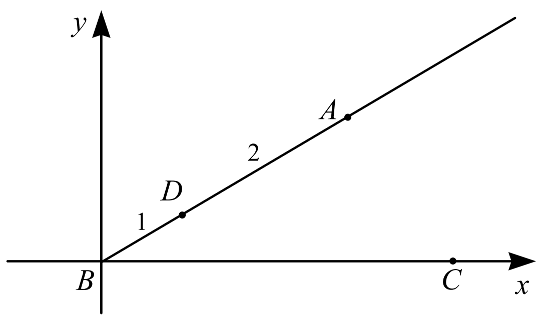


Рис. 37

$$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2.$$

Подставим в это уравнение координаты точек *D* и *A*. Получим систему уравнений с двумя неизвестными *a* и *b*:

$$\begin{cases}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-a\right)^2+\left(\frac{1}{2}-b\right)^2=b^2\\ \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-a\right)^2+\left(\frac{3}{2}-b\right)^2=b^2.\end{cases}$$

Отсюда получаем $a^2=3$. Если $a=\sqrt{3}$, то $b=1$. Если $a=-3$, то $b=7$. ***Ответ***: 1 или 7.

8. В прямоугольном секторе *AOB* из точки *B* как из центра проведена дуга *OC* (*C* – точка пересечения этой дуги с дугой *AB*) радиуса *BO*. Окружность S_1 касается дуги *AB*, дуги *OC* и прямой *OA*, причем точки касания различны, а окружность S_2 касается дуги *AB*, прямой *OA* и окружности S_1 (точки касания также попарно различны). Найдите отношение радиуса окружности S_1 к радиусу окружности S_2.

Указание. Примем точку *O* за начало координат, луч *OB* за положительную полуось абсцисс, луч *OA* за положительную полуось ординат (рис. 38). Будем считать радиус $OB=1$. Окружность S_1 с центром $O_1(x;y)$ и радиуса *x* касается дуги *AB* внутренним образом, а дуги *OC* внешним образом. Тогда выполняются равенства

$$\begin{cases}OO_1=1-x\\ BO_1=1+x\end{cases} \text{ или } \begin{cases}(x-0)^2+(y-0)^2=(1-x)^2\\ (1-x)^2+(y-0)^2=(1+x)^2.\end{cases}$$

Отсюда $x=\frac{1}{6}$, $y=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

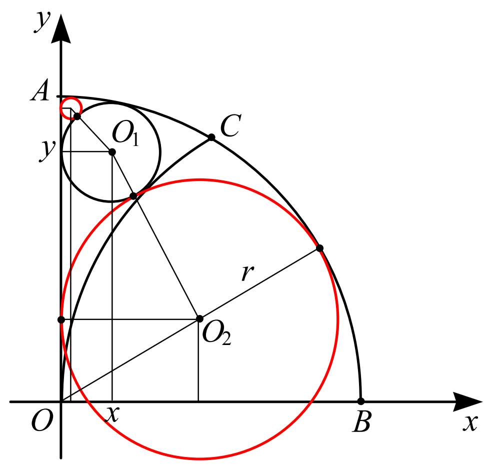


Рис. 38

Пусть окружность S_2 с центром $O_2(r;y)$ и радиуса *r* касается дуги *AB* (внутренним образом), прямой *OA* и окружности S_1 (внешним образом). Тогда выполняются равенства $\begin{cases}OO_1=1-r\\ O_1O_2=\frac{1}{6}+r\end{cases}$ или

$$\begin{cases}(r-0)^2+(y-0)^2=(1-r)^2\\ \left(\frac{1}{6}-r\right)^2+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}-y\right)^2=\left(\frac{1}{6}+r\right)^2.\end{cases}$$

Отсюда $r_1=\frac{2-\sqrt{3}}{8}$, $y_1=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ и $r_2=\frac{2+\sqrt{3}}{8}$, $y_2=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Для первого решения системы отношение радиусов $\frac{1}{6}:\frac{2-\sqrt{3}}{8}=\frac{4(2+\sqrt{3})}{3}$, для второго – $\frac{1}{6}:\frac{2+\sqrt{3}}{8}=\frac{4(2-\sqrt{3})}{3}$.

Ответ: $\frac{4(2\pm\sqrt{3})}{3}$.

4.3. Исследование планиметрической задачи с буквенными данными

9. В треугольнике ABC угол A равен $60°$, $AB=1$, $BC=a$. Найдите AC.

Указание. Использовать теорему косинусов.

Ответ: если $a<\frac{\sqrt{3}}{2}$, то решений нет; если $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$, то одно решение $AC=\frac{1}{2}$; если $\frac{\sqrt{3}}{2}<a<1$, то два решения $AC=\frac{1}{2}\pm\sqrt{a^2-\frac{3}{4}}$; если $a\geq 1$, то одно $AC=\frac{1}{2}+\sqrt{a^2-\frac{3}{4}}$.

10. Найдите высоту равнобедренного треугольника с основанием a и радиусом описанной окружности R.

Указание. Использовать теорему Пифагора.

Ответ: если $a=2R$, то одно решение R; если $0<a<2R$, то два $R\pm\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-a^2}$; если $a>2R$, то нет решений.

11. В параллелограмме $ABCD$ известны стороны $AB=a$, $BC=b$, и $\angle BAD=\alpha$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BCD и DAB.

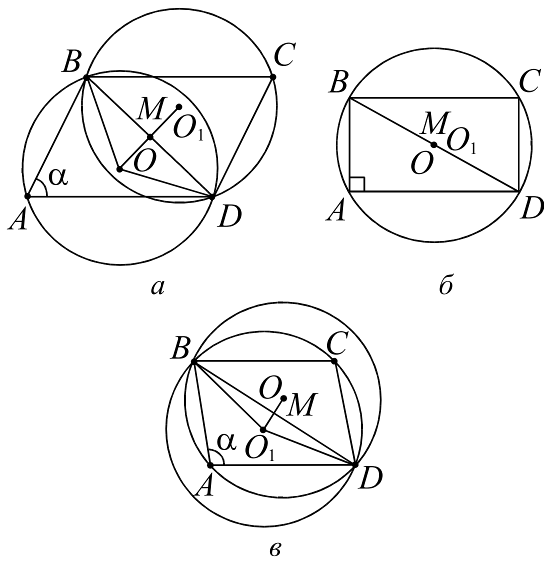


Рис. 39

Решение. Диагональ BD разбивает параллелограмм на два равных треугольника BCD и DAB. Поэтому по разные стороны от прямой BD расположены центры O и O_1 описанных около них окружностей, лежащие на серединном перпендикуляре OO_1 к их общей стороне BD. Следовательно, $OO_1=2OM$, где точка M – середина BD. Рассмотрим следующие случаи.

1. Если $\alpha<90°$, то центр O лежит внутри треугольника DAB (рис. 39*а*). Тогда получаем $\angle BOD=2\alpha$, $\angle BOM=\frac{1}{2}\angle BOD=\alpha$. Из треугольника BOM находим $OM=BM\cdot\operatorname{ctg}\alpha$. Тогда

$$OO_1=2OM=2BM\cdot\operatorname{ctg}\alpha=BD\cdot\operatorname{ctg}\alpha.$$

BD находим из треугольника DAB:

$$BD=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}.$$

Следовательно,

$$OO_1=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\alpha.$$

2. Пусть $\alpha=90°$, тогда точки O и O_1 совпадают и $OO_1=0$ (рис. 39*б*).

3. Пусть $\alpha>90°$ тогда центр O лежит вне треугольника DAB (рис. 39*в*). Получаем угол, опирающийся на большую дугу $\angle BOD=2\alpha$, а в треугольнике BOD

$\angle BOD=360°-2\alpha$, $\angle BOM=\frac{1}{2}\angle BOD=$ $=180°-\alpha$. Из треугольника BOM находим

$$OM=BM\cdot\operatorname{ctg}(180°-\alpha)=BM\cdot(-\operatorname{ctg}\alpha).$$

Тогда

$$OO_1=2OM=2BM\cdot(-\operatorname{ctg}\alpha)=BD\cdot(-\operatorname{ctg}\alpha).$$

BD находим из треугольника DAB:

$$BD=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}.$$

Следовательно,

$$OO_1=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}\cdot(-\operatorname{ctg}\alpha).$$

Ответ: $\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\alpha$, если $0<\alpha<90°$; 0, если $\alpha=90°$; $\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}\cdot(-\operatorname{ctg}\alpha)$, если $90°<\alpha<180°$; в общем виде $\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}\cdot|\operatorname{ctg}\alpha|$.

4.5. Серия задач на одну геометрическую конфигурацию

12. В трапеции с боковыми сторонами 13 и 20 и основаниями 6 и 27 проведена диагональ. Около каждого из образовавшихся треугольников описана окружность. Найдите их радиусы.

Указание. Из треугольника CED находим высоту $CH=12$, из треугольника CEH длину отрезка $EH=5$, из треугольника ACH диагональ трапеции $AC=\sqrt{265}$ (рис. 40). Теперь определяем искомые радиусы

$$R_{ACD}=\frac{AC\cdot CD\cdot AD}{4\cdot 0{,}5\cdot AD\cdot CH}=\frac{AC\cdot CD}{2\cdot CH}=\frac{5\sqrt{265}}{6},$$

$$R_{ABC}=\frac{AC\cdot AB\cdot BC}{4\cdot 0{,}5\cdot BC\cdot CH}=\frac{AC\cdot AB}{2\cdot CH}=\frac{13\sqrt{265}}{24}.$$

Отсюда видим, что искомые радиусы окружностей пропорциональны боковым сторонам трапеции.

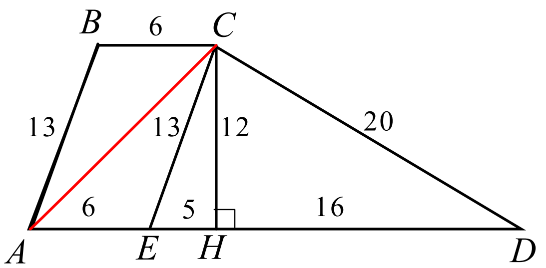


Рис. 40

Для второй диагонали BD проведите вычисления самостоятельно.

Ответ: $\frac{13\sqrt{265}}{24}$, $\frac{5\sqrt{265}}{6}$ или $\frac{5\sqrt{157}}{3}$, $\frac{13\sqrt{157}}{12}$.

13. В трапеции с боковыми сторонами 13 и 20 и основаниями 6 и 27 проведена диагональ. Около каждого из образовавшихся треугольников описана окружность. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

Указание. Рассмотрим случай для диагонали $AC=\sqrt{265}$ (рис. 41). Квадрат расстояния от центра O_2 окружности, описанной около треугольника ACD, до стороны AC равен

$$NO_2^2=O_2A^2-AN^2=\left(\frac{AC\cdot CD}{2\cdot CH}\right)^2-\left(\frac{AC}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{AC^2}{4\cdot CH^2}\cdot\left(CD^2-CH^2\right)=\frac{AC^2\cdot HD^2}{4\cdot CH^2}.$$

Отсюда расстояние $NO_2=\frac{AC\cdot HD}{2\cdot CH}$. Пусть BH_1 – вторая высота трапеции, тогда расстояние от центра O_1 окружности, описанной около треугольника ABC, до стороны AC равно $NO_1=\frac{AC\cdot AH_1}{2\cdot CH}$. Следовательно, искомое расстояние между центрами описанных окружностей равно

$$|NO_2-NO_1|=\frac{AC}{2\cdot CH}\cdot|DH-AH_1|=\frac{11\sqrt{265}}{24}.$$

Второй случай для диагонали $BD=2\sqrt{157}$ рассмотрите самостоятельно.

Ответ. $\frac{11\sqrt{265}}{24}$ или $\frac{11\sqrt{157}}{12}$.

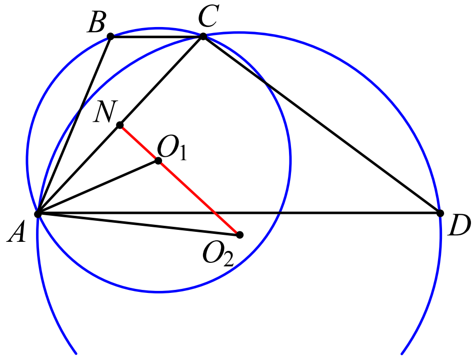


Рис. 41

14. В трапеции с боковыми сторонами 13 и 20 и основаниями 6 и 27 проведена диагональ. В образовавшиеся треугольники вписаны окружности. Найдите расстояние между точками касания вписанных окружностей с проведенной диагональю.

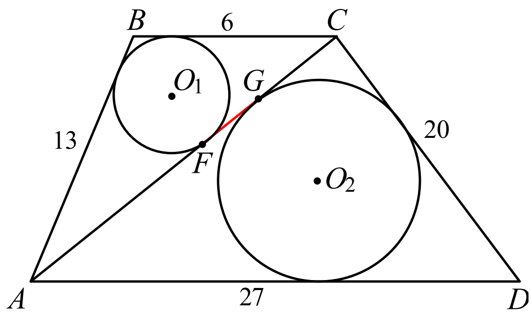


Рис. 42*а*

Решение. Проведем диагональ AC (рис. 42*а*) и пусть окружности, вписанные в образовавшиеся треугольники, касаются этой диагонали в точках F и G. Для треугольника ABC отрезок касательной

$$AF=p_{ABC}-BC=\frac{AB+AC-BC}{2}.$$

Для треугольника ACD отрезок касательной

$$AG=p_{ACD}-CD=\frac{AD+AC-CD}{2}.$$

Определяем длину искомого отрезка

$$FG=\left|\frac{AD+AC-CD}{2}-\frac{AB+AC-BC}{2}\right|=$$

$$=\left|\frac{AD+BC-CD-AB}{2}\right|=\left|\frac{27+6-20-13}{2}\right|=0.$$

Следовательно, вписанные окружности касаются диагонали AC в одной и той же точке.

Замечание. Так как в решении не исследовано расположение точек F и G на отрезке AC, то при вычислении длины отрезка FG использован знак модуля.

Пусть теперь проведена диагональ BD (рис. 42*б*). Для треугольника BCD отрезок касательной

$$DF = p_{BCD} - BC = \frac{CD + BD - BC}{2}.$$

Для треугольника ABD отрезок касательной $DG = p_{ABD} - AB = \dfrac{AD + BD - AB}{2}$.

Определяем длину искомого отрезка

$$FG = \left|\frac{AD + BD - AB}{2} - \frac{CD + BD - BC}{2}\right| =$$

$$= \left|\frac{AD + BC - CD - AB}{2}\right| = \left|\frac{27 + 6 - 20 - 13}{2}\right| = 0.$$

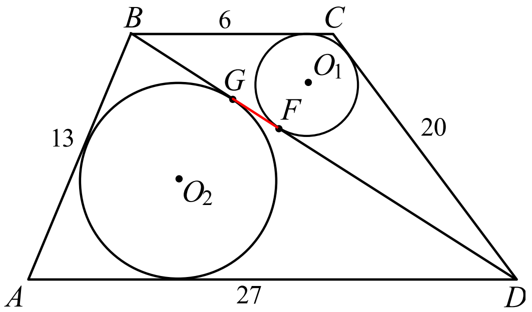


Рис. 42*б*

Значит, вписанные окружности касаются диагонали BD в одной и той же точке.

Ответ: 0.

15. В трапеции с боковыми сторонами 13 и 20 и основаниями 6 и 27 проведена диагональ. Найдите расстояние между точками пересечения медиан образовавшихся треугольников.

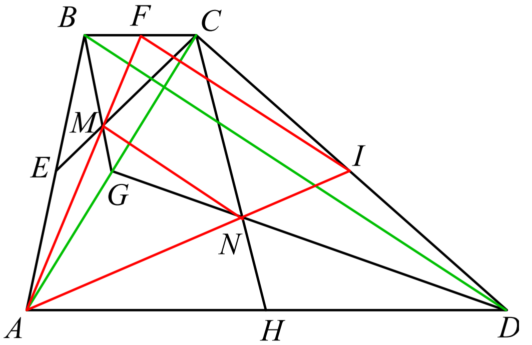


Рис. 43

Указание. Легко показать, что для треугольников ABC и ACD искомое расстояние $MN = \dfrac{2}{3}FI = \dfrac{1}{3}BD = \dfrac{2\sqrt{157}}{3}$ (рис. 43). Аналогично получаем ответ для двух других треугольников.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{265}}{3}$ или $\dfrac{2\sqrt{157}}{3}$.

16. В трапеции с боковыми сторонами 13 и 20 и основаниями 6 и 27 проведена диагональ. Найдите расстояние между точками пересечения высот образовавшихся треугольников.

Указание. Использовать следующий факт.

- *В любом треугольнике ABC расстояние от центра описанного круга до стороны треугольника BC вдвое меньше расстояния от точки пересечения высот до вершины A.*

Расстояние от центра окружности, описанной около треугольника ABC (рис. 44), до стороны BC равно

$$\sqrt{R_{ABC}^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{169 \cdot 265}{576} - 9} = \frac{199}{24}.$$

Тогда расстояние от вершины A до точки пересечения G высот треугольника ABC равно $AG = \dfrac{199}{12}$. Аналогично получаем $CK = \dfrac{8}{3}$. Тогда $KH = \dfrac{8}{3} + 12 = \dfrac{44}{3}$ и $GE = \dfrac{199}{12} - \dfrac{44}{3} = \dfrac{23}{12}$. Из прямоугольного треугольника GEK получаем $GK = \sqrt{\left(\dfrac{23}{12}\right)^2 + 11^2} = \dfrac{\sqrt{17953}}{12}$.

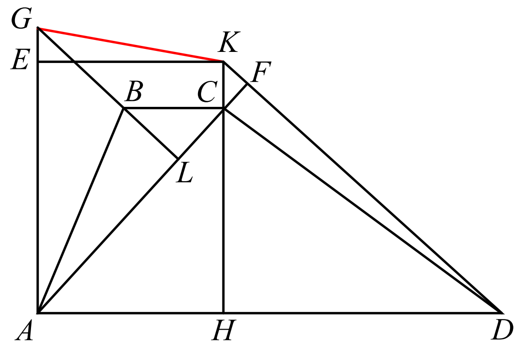


Рис. 44

Второй случай рассмотрите самостоятельно.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{17953}}{12}$ или $\dfrac{\sqrt{54673}}{6}$.

Упражнения

Произвольный треугольник

Линейные и угловые элементы треугольника

1. Дан треугольник *ABC*, в котором $AC=\sqrt{2}$, $BC=1$, $\angle ABC=45°$. Найдите угол *BAC*.

Ответ: $30°$ или $150°$. *Указание*. Из теоремы синусов для треугольника *ABC* следует $\sin\angle ABC=\frac{1}{2}$.

2. Дан треугольник *ABC*, в котором $AB=4$, $BC=3\sqrt{2}$, $\sin\angle ABC=\frac{1}{3}$. Найдите *AC*.

Ответ: $\sqrt{2}$ или $\sqrt{66}$. *Указание*. Применить теорему косинусов. Учесть, что $\cos\angle ABC=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ или $\cos\angle ABC=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

3. Боковые стороны треугольника равны 25 и 30, а высота, проведенная к основанию, равна 24. Найдите основание.

Ответ: 11 или 25. *Указание*. Рассмотрите случаи, когда основание высоты лежит на третьей стороне или на его продолжении.

4. Две боковые стороны треугольника равны 26 и 30, а высота, опущенная на третью сторону, – 24. Найдите медиану треугольника, проведенную к третьей стороне.

Ответ: $4\sqrt{37}$ или $2\sqrt{193}$. *Указание*. Рассмотрите случаи, когда основание высоты лежит на третьей стороне или на его продолжении.

5. Найдите длины сторон *AB* и *AC* треугольника *ABC*, если $BC=8$, а длины высот, проведенных к *AC* и *BC*, равны 6,4 и 4 соответственно.

Ответ: 5 и $\sqrt{41}$ или 5 и $\sqrt{137}$. *Указание*. Рассмотрите случаи, когда данный треугольник – остроугольный или тупоугольный.

6. Вычислите высоту *CH* тупоугольного треугольника *ABC*, если $\angle C=45°$, $AH=6$ и $BH=1$.

Ответ: 2 или 3. *Указание*. Пусть $HC=x$ (рис. 1). Тогда $BC=\sqrt{1+x^2}$, $AC=\sqrt{36+x^2}$. Из теоремы косинусов для угла *ACB* треугольника *ABC* следует:

$$25=1+x^2+36+x^2-2\cdot\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{36+x^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

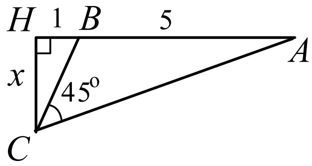


Рис. 1

7. В треугольнике *ABC* проведены высоты *AD* и *CE*. Найдите *AC*, если $BC=5$, $AB=7$, $DE:AC=1:2$.

Ответ: $\sqrt{39}$ или $\sqrt{109}$. См. указание к упражнению 8.

8. **(Санкт-Петербург, пробный экзамен, 2013).** Из вершин острых углов *B* и *C* треугольника *ABC* проведены две его высоты – *BM* и *CN*, причем прямые *BM* и *CN* пересекаются в точке *H*. Найдите угол *BHC*, если известно, что $MN=\frac{1}{3}BC$.

Ответ: $\arccos\frac{1}{3}$ или $\pi-\arccos\frac{1}{3}$. *Указание*. Рассмотреть случаи, когда угол *BAC* – острый или тупой. В первом случае треугольники *ABC* и *AMN* подобны, коэффициент подобия $k=\frac{MN}{BC}=\frac{1}{3}$. Во втором случае треугольники *HBC* и *HMN* подобны, коэффициент подобия $k=\frac{MN}{BC}=\frac{1}{3}$.

9*. Точки, симметричные вершинам треугольника относительно противоположных сторон, являются вершинами треугольника со сторонами $\sqrt{8}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{14}$. Определите стороны исходного треугольника, если известно, что длины их различны.

Ответ: 1, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$ или $\sqrt{\frac{21-\sqrt{217}}{2}}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{\frac{21+\sqrt{217}}{2}}$. *Указания и решение*. Пусть $a,b,c-$ стороны, а $S-$ площадь треугольника ABC. A_1, B_1, C_1 – точки, соответственно симметричные вершинам треугольника ABC. Тогда из треугольника C_1AB_1 (рис. 2)

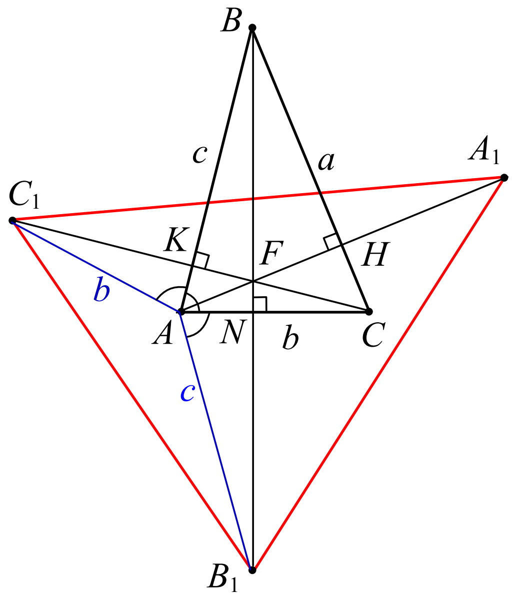


Рис. 2

$C_1B_1^{\,2} = C_1A^2 + AB_1^{\,2} - 2C_1A \cdot AB_1 \cdot \cos(2\pi - 3\angle A)$ или $C_1B_1^{\,2} = b^2 + c^2 - 2bc\cos(3\angle A)$. Так как из теоремы косинусов для треугольника ABC $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A$, то

$$C_1B_1^{\,2} = a^2 + 2bc\big(\cos\angle A - \cos(3\angle A)\big) =$$
$$= a^2 + 8bc\sin^2\angle A\cos\angle A.$$

Так как $\sin^2\angle A = \dfrac{4S^2}{b^2c^2}$, $\cos\angle A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, то $C_1B_1^{\,2} = a^2 + 16(b^2+c^2-a^2)\cdot\dfrac{S^2}{b^2c^2}$.

Пусть $C_1B_1 = \sqrt{8}$, $A_1B_1 = \sqrt{8}$ и $A_1C_1 = \sqrt{14}$. Тогда получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a^2b^2c^2 + 16S^2(b^2+c^2-a^2) = 8b^2c^2, \\ a^2b^2c^2 + 16S^2(a^2+b^2-c^2) = 8a^2b^2, \\ a^2b^2c^2 + 16S^2(c^2+a^2-b^2) = 14c^2a^2. \end{cases}$$

Вычитая второе уравнение системы из первого, и учитывая, что $a \ne c$, найдем $4S^2 = b^2$ или $S^2 = \dfrac{b^2}{4}$. Подставив в систему, получим:

$$\begin{cases} a^2c^2 + 4(b^2-c^2-a^2) = 0 \\ a^2b^2c^2 + 4b^2(c^2+a^2) - 4b^4 - 14a^2c^2 = 0, \\ b^2 = 4S^2. \end{cases}$$

Из первого уравнения $4(c^2+a^2) = a^2c^2 + 4b^2$. Подставив во второе уравнение, получим

$$2a^2b^2c^2 - 14a^2c^2 = 0 \text{ или } a^2c^2(b^2-7) = 0.$$

Отсюда $b = \sqrt{7}$. Подставляя значение b в систему, находим остальные стороны.

10. В треугольнике ABC отрезок MK с концами на сторонах AB и BC параллелен AC. Найдите длину отрезка MK, если известно, что $AC = 14$, а точка M делит сторону AB в отношении 3 : 4.

Ответ: 6 или 8. *Указание.* См. «Пособие», пример 1.

11. Точка H – основание высоты треугольника со сторонами 14, 16, 18, опущенной на сторону, равную 16. Через точку H проведена прямая, отсекающая от треугольника подобный ему треугольник и пересекающая сторону, равную 14, в точке M. Найдите HM.

Ответ: $\dfrac{9}{2}$ или $\dfrac{36}{7}$. *Указание.* См. «Решебник», Глава 2, задача 19.

12. В треугольнике ABC известно, что $AB = 18$, $BC = 16$, $\cos B = \dfrac{4}{9}$, AH – высота. Через точку H проведена прямая, отсекающая от треугольника ABC подобный ему треугольник и пересекающая сторону AB в точке M. Найдите HM.

Ответ: 8 или 9. *Указание.* См. «Решебник», Глава 2, задача 19.

13. В треугольнике ABC $\angle A = 75°$, $\angle B = 45°$. На стороне CA взята точка K так, что $\dfrac{CK}{KA} = 3$. На стороне CB взята точка M так, что прямая KM отсекает от треугольника ABC подобный ему треугольник. Найдите отношение $\dfrac{KM}{AB}$.

Ответ: $\dfrac{3}{4}$ или $\dfrac{3(\sqrt{3}-1)}{4}$. *Указание. 1-й случай*: пусть $KM_1 \parallel AB$ (рис. 3). Для подобных треугольников ABC и KM_1C имеем $\dfrac{KM_1}{AB} = \dfrac{CK}{AC} = \dfrac{3}{4}$.

2-*й случай*. Пусть $\angle M_2KC = 45°$ (рис. 3).

Для подобных треугольников ABC и M_2KC имеем $\frac{KM_2}{AB} = \frac{CK}{CB}$. По теореме синусов для треугольника ABC имеем $\frac{CA}{\sin 45°} = \frac{CB}{\sin 75°}$. Отсюда $CB = \frac{CA \cdot \sin 75°}{\sin 45°} = \frac{CA \cdot \sin(30° + 45°)}{\sin 45°} = CA \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

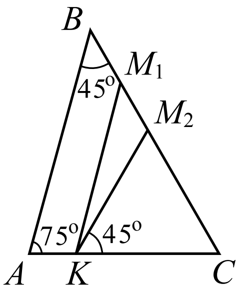


Рис. 3

Тогда

$$\frac{KM_2}{AB} = \frac{CK}{CA} \cdot (\sqrt{3} - 1) = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{4}.$$

14. В треугольнике ABC точка K лежит на стороне AC, причем $AK : KC = 3:5$. Точка M делит сторону AB на два отрезка, один из которых вдвое больше другого. Прямая, проходящая через точку M параллельно BC, пересекает прямую BK в точке P. Найдите отношение $BP : KP$.

Ответ: 16:1 или 8:7. *Указание*. См. «Пособие», пример 3.

15. Точки A_1, B_1, C_1 – основания высот треугольника ABC. Углы треугольника $A_1B_1C_1$ равны 80°, 70° и 30°. Найдите углы треугольника ABC.

Ответ: 50°, 55°, 75° или 35°, 40°, 105°, или 125°, 15°, 40°, или 130°, 15°, 35°. *Указание*. См. «Пособие», пример 21.

16. AA_1, BB_1, CC_1 – высоты треугольника ABC. Угол A_1 треугольника $A_1B_1C_1$ равен 36°, а угол B_1 треугольника $A_1B_1C_1$ равен 84°. Найдите угол С треугольника ABC.

Ответ: 60° или 120°. *Указание*. См. «Пособие», пример 21.

17. В треугольнике ABC проведены высоты AM и CN. Чему равен угол ABC, если $AC = 2MN$?

Ответ: 60° или 120°. *Указание*. Треугольники BMN, где точки M и N – основания высот AM и CN треугольника ABC, и ABC подобны с коэффициентом подобия $k = |\cos\angle ABC|$. Отсюда $|\cos\angle ABC| = \frac{MN}{AC} = \frac{1}{2}$.

18. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что $CH = \sqrt{3} \cdot AB$. Найдите угол ACB.

Ответ: 30° или 150°. *Указание*. См. «Пособие», пример 23.

19. В треугольнике ABC известно, что $AH = \sqrt{2} \cdot BM$, где AH – высота, BM – медиана. Найдите угол MBC.

Ответ: 45° или 135°. *Указание*. См. «Решебник», Глава 3, задача 13.

20. Отрезок H_1H_2, соединяющий основания H_1 и H_2 высот AH_1 и BH_2 треугольника ABC, виден из середины M стороны AB под прямым углом. Найдите угол C треугольника ABC.

Ответ: 45° или 135°. *Указание*. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

21. Биссектриса внешнего угла при вершине B треугольника ABC равна биссектрисе внешнего угла при вершине A и равна стороне AB. Найдите углы треугольника ABC.

Ответ. $\angle A = \angle B = 36°$, $\angle C = 108°$ или $\angle A = 12°$, $\angle B = 132°$, $\angle C = 36°$, или $\angle A = 132°$, $\angle B = 12°$, $\angle C = 36°$.

Указание. Биссектриса внешнего угла треугольника – отрезок биссектрисы этого угла от вершины до её пересечения с продолжением противолежащей стороны.

Сумма углов треугольника равна 180° и углы при основании равнобедренного треугольника равны.

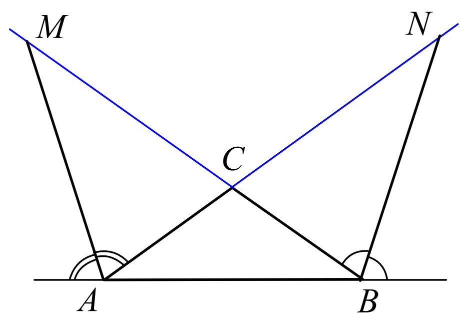


Рис. 4*а*

Первый ответ соответствует рис. 4*а*, второй и третий – рис. 4*б* (с учетом переобозначения вершин *A* и *B*).

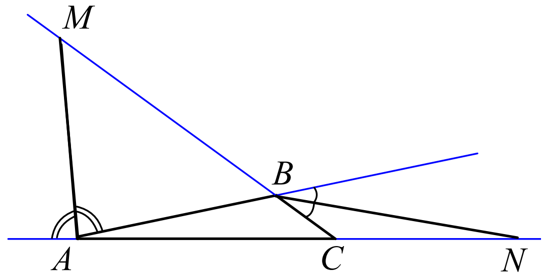


Рис. 4*б*

22. В треугольнике *ABC* перпендикуляр, проходящий через середину стороны *AC*, пересекает сторону *BC* в точке *M*, а перпендикуляр, проходящий через середину стороны *BC*, пересекает сторону *AC* в точке *N*. Прямая *MN* перпендикулярна *AB* и $MN=\frac{1}{\sqrt{3}}AB$. Найдите углы треугольника *ABC*.

Ответ: $\angle A=120°$, $\angle B=\angle C=30°$, или $\angle A=\angle C=30°$, $\angle B=120°$. *Указание*. Если в четырехугольнике сумма двух противоположных углов равна 180°, то около такого четырехугольника можно описать окружность.

Решение. Четырехугольник *ENFM* – вписанный, *MN* – диаметр (рис. 5). *EF* – средняя линия треугольника *ABC*, $EF=\frac{1}{2}AB$. Соответственно хорда

$$EF=2\cdot\frac{MN}{2}\cdot\sin\angle EMF.$$

Отсюда $\sin\angle EMF=\frac{EF}{MN}=\frac{2}{\sqrt{3}}$, т.е. $\angle EMF=60°$. Тогда $\angle C=30°$.

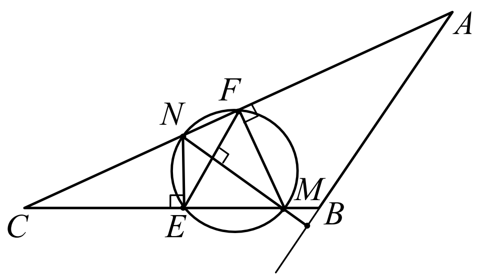


Рис. 5

$EF\parallel AB$, $EF\perp MN$ и делится диаметром пополам. $\angle ENF=120°$ и делится диаметром *MN* пополам. Тогда $\angle A=30°$ и $\angle B=120°$.

Второй случай получается, если поменять обозначения вершин *A* и *B*.

23. В треугольнике *ABC* перпендикуляр, проходящий через середину стороны *AB*, пересекает прямую *AC* в точке *M*, а перпендикуляр, проходящий через середину стороны *AC*, пересекает прямую *AB* в точке *N*. Известно, что $MN=BC$ и прямая *MN* перпендикулярна прямой *BC*. Определите углы треугольника *ABC*.

Ответ: $\angle A=60°$, $\angle B=15°$, $\angle C=105°$ или $\angle A=60°$, $\angle B=105°$, $\angle C=15°$. *Указание*. Смотри решение упражнение 22.

24. Точка C_1 – основание высоты CC_1 треугольника *ABC*. Найдите зависимость между углами *A* и *B*, если $C_1C^2=C_1A\cdot C_1B$.

Ответ: $\angle A+\angle B=90°$ или $|\angle A-\angle B|=90°$. *Указание*. Из условия $\frac{CC_1}{AC_1}=\frac{BC_1}{CC_1}$ следует подобие треугольников ACC_1 и BCC_1, и равенство углов $\angle CAC_1=\angle BCC_1$. Если $\angle A<90°, \angle B<90°$, то

$$\angle A=\angle CAC_1=\angle C_1CB=90°-\angle B,$$

т.е. $\angle A+\angle B=90°$.

Если $\angle A>90°$, то

$$180°-\angle A=\angle CAC_1=\angle C_1CB=90°-\angle B,$$

т.е. $\angle A-\angle B=90°$.

Аналогично, если $\angle B>90°$, то $\angle B-\angle A=90°$.

25. В треугольнике *ABC* угол между медианой и высотой, выходящими из угла *A* равен α, угол между медианой и высотой, выходящими из угла *B* равен β. Найдите угол между медианой и высотой, выходящими из угла *C*.

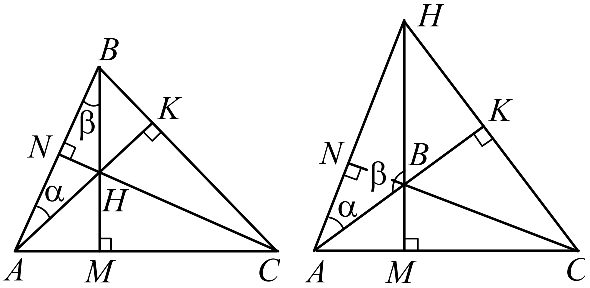
Ответ: $\operatorname{arctg}|\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta|$. *Указание*. Докажите, что $\operatorname{tg}\alpha=\frac{|b^2-c^2|}{2S}$, где *S* площадь треугольника (аналогично для других углов).

26. Пусть *H* – точка пересечения высот треугольника *ABC*. Найдите углы треугольника ABC, если $\angle BAH=\alpha$, $\angle ABH=\beta$.

Ответ: 1) $90°-\alpha$, $90°-\beta$, $\alpha+\beta$, если $\alpha<90°$, $\beta<90°$;

2) $\alpha-90°$, $90°+\beta$, $180°-\alpha-\beta$, если $\alpha>90°$, $\beta<90°$;

3) $90°+\alpha$, $\beta-90°$, $180°-\alpha-\beta$, если $\alpha<90°$, $\beta>90°$.



а *б*

Рис. 6

Указание. Сумма внутренних углов треугольника равна $180°$. Первый ответ соответствует рис. 6*а*, второй – рис. 6*б*, третий случай получается в результате переобозначения вершин A и B на рис. 6*б*.

27. В треугольнике ABC проведены высоты AD и CE. Найдите AC, если $BC=a$, $AB=b$, $DE:AC=k$.

Ответ: $\sqrt{a^2+b^2\pm 2abk}$. *Указание.* Во всех возможных случаях (рис. 7) треугольники BDE и ABC подобны с коэффициентом подобия $k=|\cos\angle ABC|$.

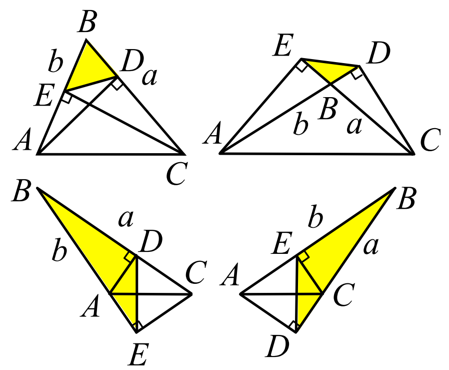


Рис. 7

28. В треугольнике ABC угол A равен $60°$, $AB=1$, $BC=a$. Найдите AC.

Ответ: если $a<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то решений нет;

если $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то одно решение $AC=0{,}5$;

при $\dfrac{\sqrt{3}}{2}<a<1$ два $AC=\dfrac{1\pm\sqrt{4a^2-3}}{2}$;

при $a\ge 1$ одно $AC=\dfrac{1+\sqrt{4a^2-3}}{2}$.

Указание. Найти BH (рис. 8) и применить теорему Пифагора.

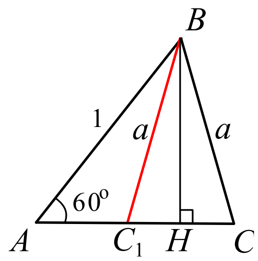


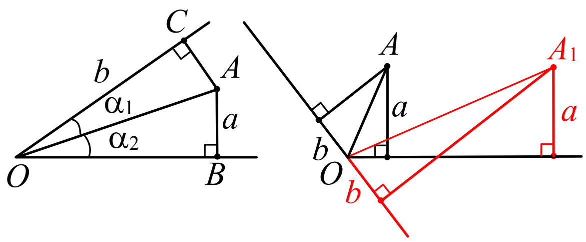
Рис. 8

29. Внутри угла величины α $(\alpha\ne 90°)$ с вершиной в точке O взята точка A. Расстояние от точки A до одной из сторон угла равно a, а проекция OA на другую его сторону равна b. Найдите OA.

Ответ: если $0°<\alpha<90°$, то $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\sin\alpha}}{\cos\alpha}$; если $90°<\alpha<180°$, то $-\dfrac{\sqrt{a^2+b^2\pm 2ab\sin\alpha}}{\cos\alpha}$.

Указание. Пусть $0°<\alpha<90°$, $OA=x$, тогда $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$, $\cos\alpha_1=\dfrac{b}{x}$, $\sin\alpha_2=\dfrac{a}{x}$ (рис. 9*а*). Тогда $\cos\alpha=\cos\alpha_1\cos\alpha_2-\sin\alpha_1\sin\alpha_2$ или $\cos\alpha=\dfrac{b}{x}\cdot\sqrt{1-\dfrac{a^2}{x^2}}-\dfrac{a}{x}\cdot\sqrt{1-\dfrac{b^2}{x^2}}$. Решая это уравнение относительно x получим $x=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\sin\alpha}}{\cos\alpha}$.

В случае $90°<\alpha<180°$ (рис. 9*б*) задача имеет два решения.



а *б*

Рис. 9

30. Дан угол величины α с вершиной в точке A и точка B на расстоянии a и b от сторон угла. Найдите AB.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}}{\sin\alpha}$, если точка B лежит внутри данного угла или вертикального к нему; $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}{\sin\alpha}$ в остальных случаях. *Указания*. Если точки M и N – основания перпендикуляров, опущенных из точки B на стороны угла, то четырехугольник $AMBN$ – вписанный, причем AB – диаметр окружности, описанной около треугольника MBN. $\angle MBN=\pi-\alpha$, если точка B лежит внутри данного угла или вертикального к нему, и $\angle MBN=\alpha$ в остальных случаях. Тогда $AB=\dfrac{MN}{\sin\alpha}$.

Площадь треугольника

31. Площадь треугольника равна $6\sqrt{3}$. Две его стороны равны 4 и 6. Найдите угол между этими сторонами.

Ответ: $60°$ или $120°$. *Указание*. Из формулы площади треугольника следует, что синус данного угла равен $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

32. Площадь треугольника ABC равна $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, AB = 2, $AC=\sqrt{3}$. Найдите сторону BC.

Ответ: 1 или $\sqrt{13}$. *Указание*. См. «Пособие», пример 2.

33. Вычислите площадь треугольника, если две его стороны равны 13 и 15, а высота, проведенная к третьей стороне, равна 12.

Ответ: 24 или 84. *Указание*. Рассмотреть случаи, когда основание высоты лежит на третьей стороне или на его продолжении.

34. Дан треугольник ABC со сторонами AB = 17, AC = 25 и BC = 28. На стороне BC взята точка M, причем $AM=\sqrt{241}$. Найдите площадь треугольника AMB.

Ответ: 30 или 90. *Указание*. Обозначить $BM=x$ и составить уравнение, используя теорему косинусов для треугольника ABM.

35. В треугольнике ABC $AB=8$, $BC=7$. Точка A_1 симметрична точке A относительно прямой BC. Найдите площадь треугольника AA_1C, если известно, что площадь треугольника ABC равна $14\sqrt{3}$.

Ответ: $12\sqrt{3}$ или $44\sqrt{3}$. *Указание*. Из формулы площади треугольника следует, что $\sin\angle ABC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

36. Медиана в треугольнике, выходящая из одной вершины, равна высоте, опущенной из другой вершины, и равна 1. Высота, опущенная из третьей вершины, равна $\sqrt{3}$. Найдите площадь треугольника.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ или $\sqrt{3}$. *Указание*. Пусть $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, $AM=BH=1$, $CK=\sqrt{3}$ (рис. 10). Из равенства выражений для площади треугольника $S=\dfrac{1}{2}BH\cdot AC=\dfrac{b}{2}$ и $S=\dfrac{1}{2}CK\cdot AB=\dfrac{c\sqrt{3}}{2}$ следует, что $b=c\sqrt{3}$.

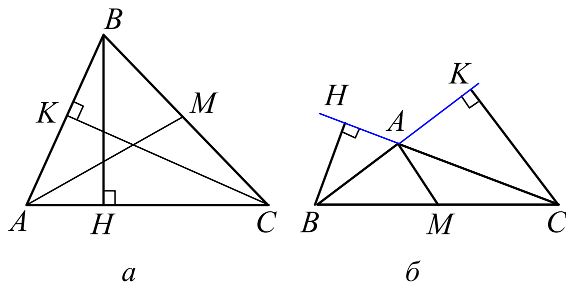


Рис. 10

Из формулы длины медианы AM следует: $1=\dfrac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{8c^2-a^2}$, т.е. $a^2=8c^2-4$.

Для рис. 10*а* из равенства $AC=AH+HC$ получаем $\sqrt{AB^2-BH^2}+\sqrt{BC^2-BH^2}=AC$ или $\sqrt{c^2-1}+\sqrt{8c^2-5}=c\sqrt{3}$. Отсюда $c=1$ или $c=2$.

Для рис. 10*б* из равенства $AC=HC-AH$ получаем $\sqrt{BC^2-BH^2}-\sqrt{AB^2-BH^2}=AC$.

37. Точка M удалена от сторон угла в $60°$ на расстояния $\sqrt{3}$ и $3\sqrt{3}$ (основания перпендикуляров, опущенных из M на стороны угла, лежат на сторонах, а не на их продолжениях). Прямая, проходящая через M, пересекает стороны угла и отсекает треугольник периметра 12. Найдите площадь этого треугольника.

Ответ: $4\sqrt{3}$. *Указания и решение*. 1-*й случай*: пусть точка M расположена внутри угла (рис. 11*а*), $MF=\sqrt{3}$, $MD=3\sqrt{3}$, $P_{ABC}=12$ и $\angle ABC=60°$.

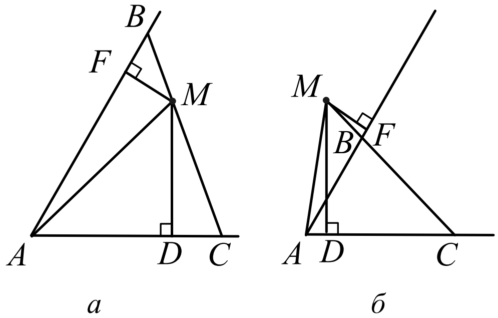


Рис. 11

Обозначим $AC=x$, $BC=y$. Тогда из теоремы косинусов для треугольника ABC получаем $BC=\sqrt{x^2+y^2-xy}$, а его периметр $x+y+\sqrt{x^2+y^2-xy}=12$.

Площадь треугольника ABC равна $S_{ABC}=\frac{1}{2}xy\frac{\sqrt{3}}{2}$ или $S_{ABC}=S_{ABM}+S_{MCA}=$ $=\frac{1}{2}\sqrt{3}x+\frac{1}{2}3\sqrt{3}y$. Приравняв эти два выражения, получим $xy=6x+y$. Составим систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+\sqrt{x^2+y^2-xy}=12, \\ xy=6x+y. \end{cases}$$

Эта система уравнений не имеет решений.

2-*й случай*. Пусть точка M расположена вне угла (рис. 11*б*). При сохранении принятых в первом случае обозначений система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} x+y+\sqrt{x^2+y^2-xy}=12, \\ xy=6x-y. \end{cases}$$

Полученная система имеет единственное решение $x=y=4$.

38. Точка M делит среднюю линию треугольника ABC, параллельную стороне BC, на отрезки, один из которых в три раза длиннее другого. Точка N также делит сторону BC на отрезки, один из которых в три раза длиннее другого. В каком отношении прямая MN делит площадь треугольника ABC?

Ответ: $\frac{1}{3}$ или $\frac{9}{11}$. *Указание*. Пусть точки M_1, M_2, N_1, N_2 удовлетворяют условию задачи (рис. 12). Достаточно найти отношение, в котором прямая M_1N_1 или M_1N_2 разбивают площадь треугольника. Два оставшихся случая аналогичны. В случае использования прямой M_1N_1 получаем $S_{CAM_1}=\frac{1}{3}S_{M_1AB}$.

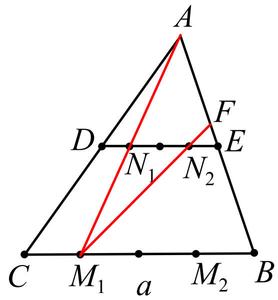


Рис. 12

В случае использования прямой M_1N_2 треугольники M_1FB и N_2FE подобны с коэффициентом подобия 6. Пусть $S-$ площадь треугольника ABC. Тогда

$$S_{M_1N_2EB}=\frac{7}{16}S,$$

$$S_{N_2FE}=\frac{S_{M_1FB}}{36}=\frac{S_{N_2FE}+S_{M_1N_2EB}}{36}.$$

Отсюда $S_{N_2FE}=\frac{S}{80}$ и $S_{M_1FB}=\frac{9}{20}S$.

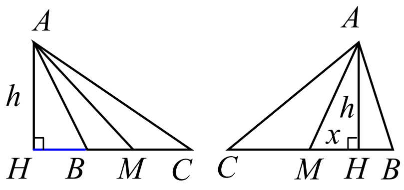
39. В треугольнике ABC проведена прямая, параллельная AC и пересекающая стороны AB и BC в точках E и F соответственно. Прямая EF делит треугольник ABC на две фигуры, площади которых относятся как 1 : 3. Найдите отношение длин отрезков AC и EF.

Ответ: 2 или $\frac{2}{\sqrt{3}}$. *Указание*. Использовать подобие треугольников BAC и BEF.

40. В треугольнике ABC проведены медиана AM и высота AH. Известно, что $\frac{MH}{BH}=\frac{3}{2}$, а площадь треугольника AMH равна 24. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: 80 или 16. *Указание.* Пусть $MH = x$, $AH = h$. Тогда $BH = \frac{2}{3}x$, $S_{AMN} = \frac{xh}{2}$, т.е. $xh = 24$.

$S_{ABC} = \frac{xh}{3}$ (рис. 13*а*) и $S_{ABC} = \frac{5}{3}xh$ (рис. 13*б*).



а *б*

Рис. 13

41. (МИОО, 2010). В треугольнике *KLM* проведены биссектриса *KP* и высота *KH*. Известно, что $\frac{KM}{KL} = \frac{1}{2}$, $\frac{PH}{MH} = \frac{3}{2}$, а площадь треугольника *KHP* равна 30. Найдите площадь треугольника *KLM*.

Ответ: 30 или 150. *Указание.* *1-й случай*: пусть точка *H* лежит на отрезке *LM* (рис. 14). Пусть $PH = 3x$ и $HM = 2x$, тогда $PM = 5x$. По свойству биссектрисы *KP* имеем $\frac{PM}{PL} = \frac{KM}{KL} = \frac{1}{2}$, значит $LP = 10x$. Для треугольников *KHP* и *KLM*, имеющих общую высоту, получаем

$$\frac{S_{KHP}}{S_{KLM}} = \frac{PH}{LM} = \frac{3x}{10x} = \frac{3}{15}.$$

Из равенства $\frac{30}{S_{KLM}} = \frac{3}{15}$ находим $S_{KLM} = 150$.

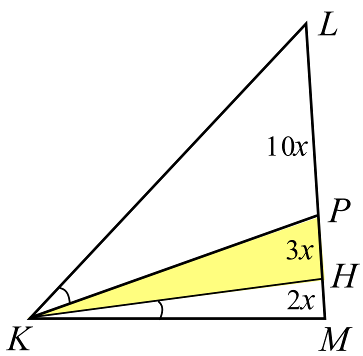


Рис. 14

2-й случай: точка *H* лежит на продолжении отрезка *LM* за точку *M* (рассмотрите самостоятельно).

42. В треугольнике *ABC* на прямой BC выбрана точка *K* так, что $BK : KC = 1 : 2$. Точка *E* – середина стороны *AB*. Прямая *CE* пересекает отрезок *AK* в точке *P*. Найдите площадь треугольника *AEP*, если площадь треугольника *ABC* равна 120.

Ответ: 12 или 20. *Указание.* См. указание к упражнению 13.

43. В треугольнике *ABC* на стороне *AB* расположена точка *K* так, что $AK : KB = 3 : 5$. На прямой *AC* взята точка *E* так, что $AE = 2CE$. Известно, что прямые *BE* и *CK* пересекаются в точке *O*. Найдите площадь треугольника *ABC*, если площадь треугольника *BOC* равна 20.

Ответ: 8 или 72.

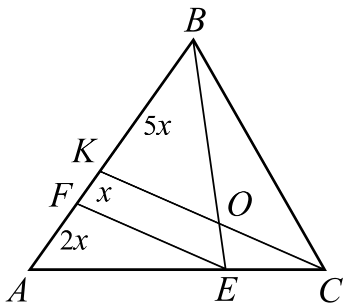


Рис. 15

1-й способ. *Указания.* *1-й случай*: пусть точка *E* лежит на стороне *AC* (рис. 15). Проведем *FE* параллельно *CK*. По теореме Фалеса в треугольнике *AKC* имеем $\frac{AF}{FK} = \frac{AE}{EC} = \frac{2}{1}$. Пусть $FK = x$, тогда $AF = 2x$ и $AK = 3x$. Из условия задачи получаем $KB = 5x$. По теореме Фалеса в треугольнике *FBE* имеем $\frac{BO}{OE} = \frac{KB}{FK} = \frac{5x}{x} = \frac{5}{1}$. Отсюда $\frac{BO}{BE} = \frac{5}{6}$.

Пусть площадь треугольника *ABC* равна S, тогда $S_{BEC} = \frac{1}{3}S$, $S_{BOC} = \frac{5}{6}S_{BEC} = \frac{5}{18}S$.

Из равенства $20 = \frac{5}{18}S$ находим $S = 72$.

2-й случай, когда точка *E* лежит на продолжении отрезка *AC* за точку *C* (рассмотрите самостоятельно).

2-й способ. *Указание.* Использовать факт: *отношение площадей треугольников, основания которых лежат на одной прямой, а вершины совпадают, равно от-*

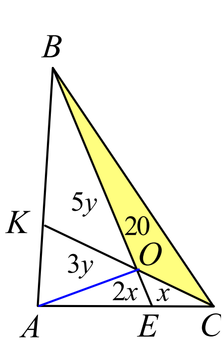


Рис. 16*а*

ношению их оснований.

1-*й случай*: пусть точка E лежит на стороне AC (рис. 16*а*). Обозначим площади треугольников $S_{EOC}=x$, $S_{AKO}=3y$. Тогда $S_{AOE}=2x$, $S_{KBO}=5y$, $S_{AKC}=3x+3y$, $S_{KBC}=20+5y$ и $\frac{S_{AKC}}{S_{KBC}}=\frac{3x+3y}{20+5y}=\frac{3}{5}$. Отсюда $15x=60$ или $x=4$. Тогда $S_{BEC}=24$ и $S_{ABC}=3S_{BEC}=72$.

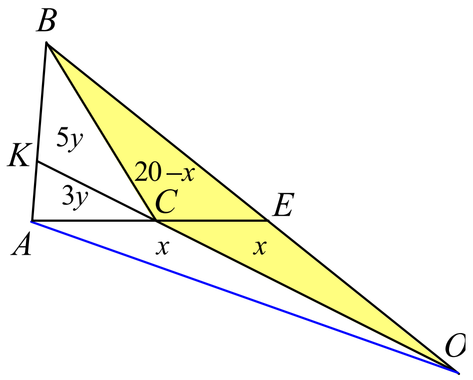


Рис. 16*б*

2-*й случай* (рис. 16*б*) рассмотрите самостоятельно.

44. Стороны AC, BC и CA треугольника ABC точками M, N и P разделены в одном и том же отношении так, что $AM:MB=BN:NC=CP:PA$. Найдите это отношение, если известно, что площадь треугольника MNP составляет 0,28 площади треугольника ABC.

Ответ: $\frac{3}{2}$ или $\frac{2}{3}$. *Решение*. Пусть (рис. 17) $\frac{AM}{MB}=\frac{BN}{NC}=\frac{CP}{PA}=k$, тогда

$$\frac{AM}{AB}=\frac{BN}{BC}=\frac{CP}{AC}=\frac{k}{k+1},$$
$$\frac{BM}{AB}=\frac{NC}{BC}=\frac{AP}{AC}=\frac{1}{k+1}.$$

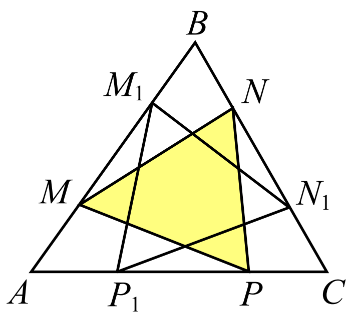


Рис. 17

Для треугольников MBN и ABC, имеющих общий угол, получаем

$$\frac{S_{MBN}}{S_{ABC}}=\frac{MB\cdot BN}{AB\cdot BC}=\frac{MB}{AB}\cdot\frac{BN}{BC}=$$
$$=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{k}{k+1}=\frac{k}{(k+1)^2}.$$

Аналогично $\frac{S_{PCN}}{S_{ABC}}=\frac{S_{AMP}}{S_{ABC}}=\frac{k}{(k+1)^2}$.

Согласно условию задачи составим уравнение

$$S-\frac{3k}{(k+1)^2}\cdot S=0{,}28\cdot S$$

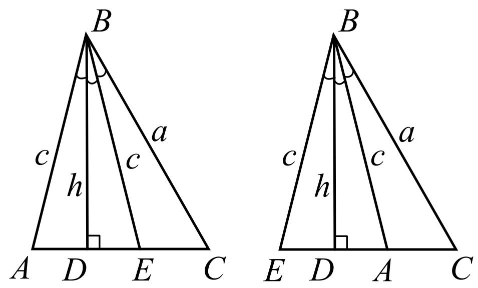
или

$$6k^2-13k+6=0,$$

из которого находим корни $\frac{3}{2}$ или $\frac{2}{3}$.

45. (Санкт-Петербург, репетиционный экзамен, 2012). Дан треугольник ABC. Точка E на прямой AC выбрана так, что треугольник ABE, площадь которого равна 14, – равнобедренный с основанием AE и высотой BD. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $\angle ABE=\angle CBD=\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha=\frac{24}{7}$.

Ответ: 25 или 39. *Указание*. 1-*й случай*: пусть $AB=BE=c$, $BC=a$, высота $BD=h$ (рис. 18). 1-*й случай*: пусть точка D лежит между точками A и E (рис. 18*а*).



а *б*

Рис. 18

Треугольник ABE – равнобедренный. Следовательно, $\angle ABD=\angle DBE$, $\angle CBE=\frac{\alpha}{2}$ и $S_{ABD}=S_{DBE}=\frac{S_{ABE}}{2}=7$. Так как $\angle ABD=\angle EBC$, то $\frac{S_{ABD}}{S_{EBC}}=\frac{hc}{ca}=\frac{h}{a}=\cos\alpha$.

Так как $\operatorname{tg}\alpha > 0$, то $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \dfrac{7}{25}$ и $S_{EBC} = \dfrac{S_{ABD}}{\cos\alpha} = 25$. Тогда $S_{ABC} = S_{ABE} + S_{EBC} = 39$.

2-*й случай* (рис. 18*б*) решается аналогично.

46. Две прямые, перпендикулярные стороне AC треугольника ABC, делят этот треугольник на три равновеликие части. Известно, что отрезки этих прямых, заключенные внутри треугольника, равны между собой и равны стороне AC. Найдите углы треугольника ABC.

Ответ: $\operatorname{arctg}\sqrt{6}$; $\operatorname{arctg}\sqrt{6}$; $\pi - 2\operatorname{arctg}\sqrt{6}$ или $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{6}}{2}$; $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{6}}{8}$; $\pi - \operatorname{arctg}\sqrt{6}$.

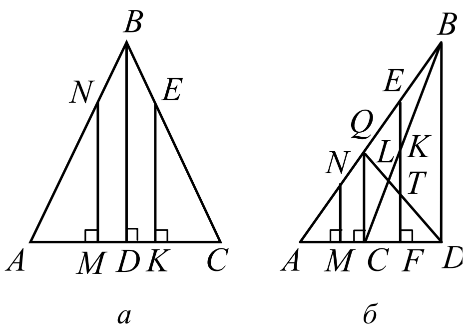


Рис. 19

Указание и решение. 1-*й случай*: пусть углы при основании треугольника – острые (рис. 19*а*). Тогда по условию $NM \perp AC$, $EK \perp AC$ и $NM = EK = AC$, а также $S_{ANM} = S_{EKC} = \dfrac{1}{3}S_{ABC}$.

Так как прямоугольные треугольники ANM и EKC равны по двум катетам, то $\angle BAC = \angle BCA$. Так как прямоугольные треугольники ABD и BDC равны $S_{ABD} = \dfrac{1}{2}S_{ABC}$, а $S_{ANM} = \dfrac{1}{3}S_{ABC}$, то $\dfrac{BD}{NM} = \sqrt{\dfrac{S_{ABD}}{S_{ANM}}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$. Тогда $\operatorname{tg}\angle BAD = \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{BD}{0,5\cdot NM} = \sqrt{6}$.

2-*й случай*: пусть угол ACB – тупой (рис. 19*б*). Тогда $NM = EK = AC$ и $S_{ANM} = S_{KEB} = \dfrac{1}{3}S_{ABC}$. Используя теорему Фалеса, доказать, что $EK = FT = NM$. Далее доказать, что треугольник AQD равнобедренный и найти отношение $\dfrac{QC}{AC}$ и $\dfrac{BD}{CD}$.

47. Площади двух треугольников с общим основанием равны S_1 и S_2, где $S_1 \neq S_2$. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в серединах их боковых сторон.

Ответ: $\dfrac{|S_1 - S_2|}{2}$ или $\dfrac{S_1 + S_2}{2}$. *Указание.* Использовать свойство средней линии треугольника.

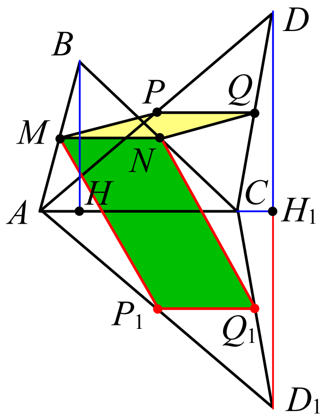


Рис. 20

Решение. Возможные два варианта расположения треугольников: их вершины расположены по одну сторону от прямой, содержащей основание, и – по разные (рис. 20). Пусть MN, PQ, P_1Q_1 – средние линии треугольников (рис. 20). Они все параллельны AC и равны $\dfrac{1}{2}AC$. BH, DH_1, D_1H_1 – высоты треугольников.

Пусть $DH_1 > BH$. Тогда

$$S_1 = S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot BH\cdot AC = BH\cdot\frac{AC}{2},$$

$$S_2 = S_{ADC} = S_{AD_1C} = \frac{1}{2}\cdot DH_1\cdot AC = DH_1\cdot\frac{AC}{2},$$

$$S_{MPQN} = \left(\frac{DH_1}{2} - \frac{BH}{2}\right)\cdot MN = \frac{DH_1 - BH}{2}\cdot\frac{AC}{2} = \frac{S_2 - S_1}{2}.$$

Если $BH > DH_1$, $S_{MPQN} = \dfrac{S_1 - S_2}{2}$.

Соответственно $S_{MNP_1Q_1} = \dfrac{S_1 + S_2}{2}$.

Прямоугольный треугольник

48. В прямоугольном треугольнике две стороны равны 5 и 4. Найдите третью сторону.

Ответ: 3 или $\sqrt{41}$. *Указание*. Использовать две стороны в качестве катета и гипотенузы или двух катетов.

49. Катеты прямоугольного треугольника равны 7 и 24. Найдите гипотенузу треугольника, подобного данному, если один из катетов равен 10.

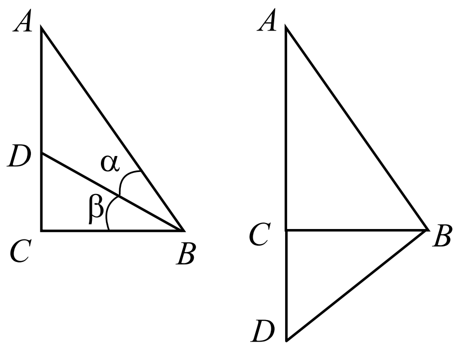
Ответ: $\frac{125}{12}$ или $\frac{250}{7}$. *Указание*. Гипотенуза треугольника с катетами 7 и 24 равна 25. Искомая гипотенуза находится из пропорций $\frac{x}{25}=\frac{10}{7}$ или $\frac{x}{25}=\frac{10}{24}$.

50. В прямоугольном треугольнике ABC катеты $BC = 4$ и $AC = 12$. На прямой AC взята точка D так, что $AD : DC = 3$. Найдите $\sin \angle ABD$.

Ответ: $\frac{9}{5\sqrt{10}}$ или $\frac{9}{\sqrt{130}}$.

Указание. *1-й случай*. Пусть точка D лежит на отрезке AC (рис 21*а*). *2-й случай*. Пусть точка D лежит на продолжении отрезка AC за точку C (рис. 21*б*). Найдите стороны прямоугольных треугольников ABC и BCD, и используйте формулы:

$$\sin \angle ABD = \sin(\angle ABC \pm \angle DBC).$$

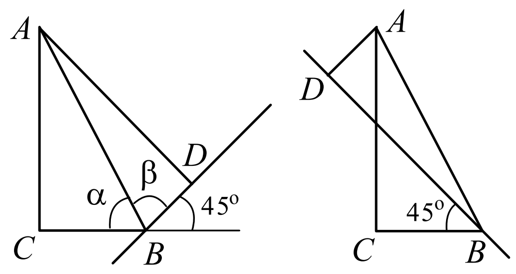


а *б*

Рис. 21

51. Площадь прямоугольного треугольника ABC $(\angle C = 90°)$ равна 8, длина катета BC равна 2. Прямая проходит через точку B и образует угол $45°$ с прямой BC. Найдите расстояние от точки A до указанной прямой.

Ответ: $3\sqrt{2}$ или $5\sqrt{2}$. *Указание*. Возможные случаи положения прямой, составляющей угол 45° с прямой BC изображены на рис. 22*а*,*б*. Тогда $AD = AB\cdot\sin(135° - \alpha)$ или $AD = AB\cdot\sin(\alpha - 45°)$.



а *б*

Рис. 22

52. В прямоугольном треугольнике ABC катеты равны 5 и 12. Прямая, перпендикулярная гипотенузе AB, делит площадь треугольника в отношении 1:8. Найдите длину отрезка этой прямой с концами на сторонах треугольника ABC.

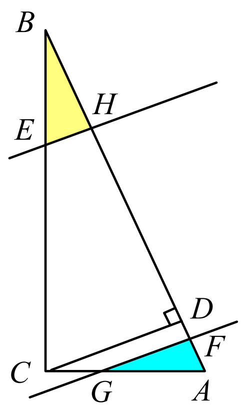


Рис. 23

Ответ: $\frac{5}{3}$ или 4. *Указание*. Треугольник BHE подобен треугольнику BCA с коэффициентом подобия $\frac{1}{3}$ (рис. 23). Аналогично для треугольников GFA и BCA.

53. Внутри прямого угла дана точка M, расстояния которой от сторон угла равны 4 и 8. Прямая, проходящая через точку M, отсекает от прямого угла треугольник площадью 100. Найдите катеты треугольника.

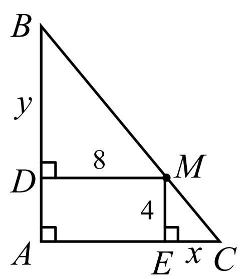


Рис. 24

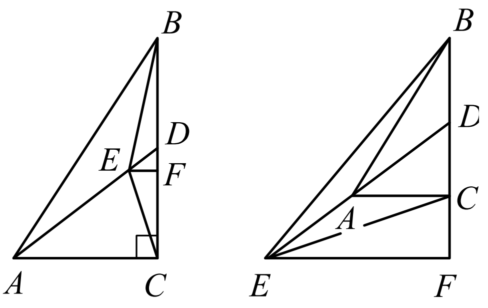
Ответ: 20 и 10 или 5 и 40. *Указание*. Рассмотреть подобие треугольников DBM и EMC (рис. 24).

54. (ЕГЭ, 2012). На прямой, содержащей медиану AD прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C, взята точка E, удаленная от вершины A на расстояние, равное 4. Найдите площадь треугольника BCE, если $BC=6$, $AC=4$.

Ответ: 2,4 или 21,6. *Указание.* Рассмотреть два случая расположения точки E относительно треугольника ABC и использовать подобие треугольников DAC и DEF (рис. 25).

1-*й случай*: пусть точка E расположена внутри треугольника ABC (рис. 25*а*).

2-*й случай*: пусть точка E расположена вне треугольника ABC (рис. 25*б*).



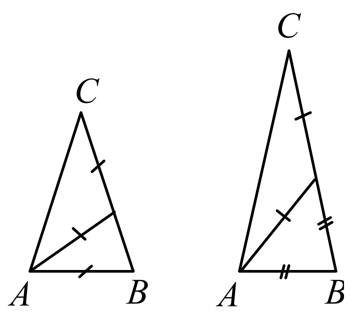
а *б*

Рис. 25

Равнобедренный треугольник

55. Найдите углы равнобедренного треугольника, если известно, что угол образованный биссектрисой, проведенной к основанию, и биссектрисой, проведенной к боковой стороне, равен углу при вершине.

Ответ: $36°$, $36°$, $108°$ или $60°$, $60°$, $60°$. *Указание.* Если угол при вершине равнобедренного треугольника равен α, то углы при основании равны $90°-\frac{\alpha}{2}$ (рис. 26).



а *б*

Рис. 26

56. Найдите углы равнобедренного треугольника, если известно, что прямая, проходящая через вершину угла при основании, делит его на два треугольника, каждый из которых также является равнобедренным.

Ответ: $\frac{\pi}{5};\frac{2\pi}{5};\frac{2\pi}{5}$ или $\frac{\pi}{7};\frac{3\pi}{7};\frac{3\pi}{7}$.

Указание. Рассмотреть два случая, изображенных на рисунке 26.

57. В равнобедренном треугольнике ABC на прямой BC отмечена точка D так, что угол CAD равен углу ABD. Найдите длину отрезка AD, если боковая сторона треугольника ABC равна 5, а его основание равно 6.

Ответ: $\frac{150}{11}$ или $\frac{25}{6}$. *Указание.* 1-*й случай*: пусть $AB=BC=5$ и точка D расположена на отрезке BC (рис. 27*а*), причем $D\neq C$ и $D\neq B$ (покажите, что случаи $D=C$ или $D=B$ невозможны). В данном случае треугольники ADC и BAC подобны (по двум углам). Тогда $\frac{AC}{BC}=\frac{DC}{AC}$ или $\frac{6}{5}=\frac{DC}{6}$. Отсюда $DC=\frac{36}{5}>5$ (противоречие).

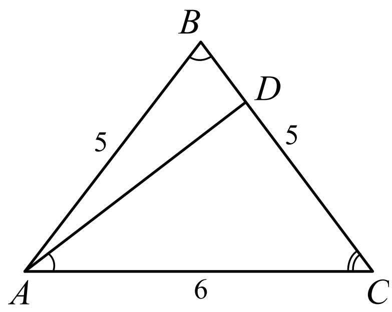
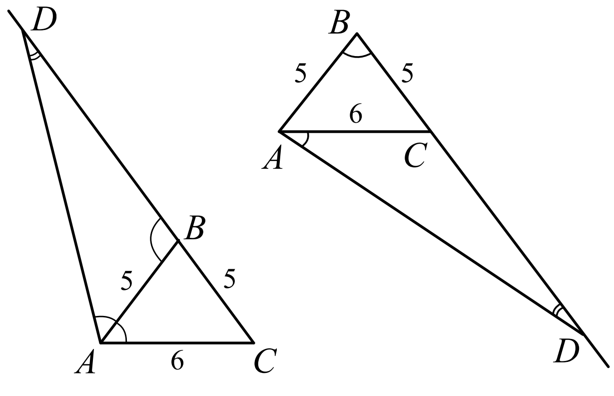


Рис. 27*а*

2-*й случай*: пусть $AB=BC=5$ и точка D расположена вне отрезка BC за точку B (рис. 27*б*). В этом случае треугольники ABD и CAD подобны (по двум углам). Тогда $\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{AD}=\frac{AD}{DC}$ или $\frac{5}{6}=\frac{x}{AD}=\frac{AD}{x+5}$. Из пропорции $\frac{5}{6}=\frac{x}{AD}$ выразим $AD=\frac{6x}{5}$ и подставим в пропорцию $\frac{5}{6}=\frac{AD}{x+5}$. Получаем уравнение $\frac{5}{6}=\frac{6x}{5(x+5)}$, из которого находим $x=\frac{125}{11}$ и $AD=\frac{150}{11}$.



б *в*

Рис. 27

3-*й случай*: пусть $AB=BC=5$ и точка D расположена вне отрезка BC за точку C (рис. 27*в*). В этом случае треугольники ABD и CAD подобны (по двум углам). Тогда $\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{AD}=\frac{AD}{DC}$ или $\frac{5}{6}=\frac{x+5}{AD}=\frac{AD}{x}$. Из пропорции $\frac{5}{6}=\frac{AD}{x}$ выразим $AD=\frac{5x}{6}$ и подставим в пропорцию $\frac{5}{6}=\frac{x+5}{AD}$. Получаем уравнение $\frac{5}{6}=\frac{6(x+5)}{5x}$, из которого находим $x=-\frac{180}{11}$ (не соответствует геометрическому смыслу задачи).

Случаи, когда $AB=AC=5$ и точка D расположена относительно отрезка BC (на отрезке или вне отрезка), рассмотрите самостоятельно.

58. Найдите боковую сторону равнобедренного треугольника с основанием 6, если синус одного его угла равен косинусу другого.

Ответ: $3\sqrt{2}$ или $2\sqrt{3}$. *Указание*. Рассмотреть три случая: 1) синус угла при основании равен косинусу угла при основании; 2) синус угла при вершине равен косинусу угла при основании; 3) синус угла при основании равен косинусу угла при вершине.

1-*й случай*: пусть данный треугольник – прямоугольный с острым углом в $45°$.

2-*й случай*: пусть данный треугольник – равнобедренный треугольник с углом в $120°$.

Третий случай невозможен.

59. Найдите высоту равнобедренного треугольника, проведенную к боковой стороне, равной 2, если синус одного его угла равен косинусу другого.

Ответ: 2 или $\sqrt{3}$. *Указание*. См. упражнение 58.

60. В равнобедренном треугольнике ABC известно, что его боковые стороны $AC=BC=4$ и его площадь равна $2\sqrt{7}$. Найдите синус угла B при основании.

Ответ: $\sqrt{\frac{1}{8}}$ или $\sqrt{\frac{7}{8}}$. *Указание*. $\sin\angle B=\sin\left(90°-\frac{\angle C}{2}\right)=\cos\frac{\angle C}{2}$.

61. Тангенс угла между медианой и высотой, проведенными к боковой стороне равнобедренного треугольника, равен $\frac{1}{2}$. Найдите синус угла при вершине.

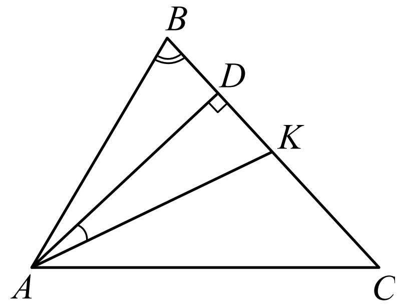
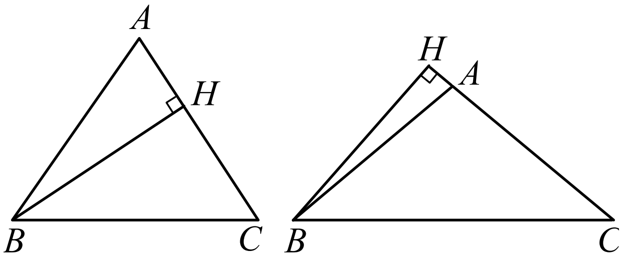


Рис. 28

Ответ: 1 или 0,6. *Указание*. Если AK и AD – медиана и высота треугольника ABC ($AB=BC$) (рис. 28), то $\sin\angle B=\frac{AD}{AB}$, $AB^2=AD^2+BD^2$, $BD=|BK\pm DK|$. Тогда $DK=AD\cdot\mathrm{tg}\angle ADK=\frac{AD}{2}$, $BK=\frac{AB}{2}$. Следовательно, $AB^2=AD^2+\left(\frac{AB}{2}\pm\frac{AD}{2}\right)^2$. Получаем уравнение $5\left(\frac{AD}{AB}\right)^2\pm\left(\frac{AD}{AB}\right)-3=0$ или $5\sin^2\angle B\pm\sin\angle B-3=0$. Отсюда $\sin\angle B=1$ или $\sin\angle B=\frac{3}{5}$.

62. В равнобедренном треугольнике ABC проведена высота BH. Найдите длину отрезка CH, если известно, что $AB = AC = 5$, $\sin A = \frac{24}{25}$.



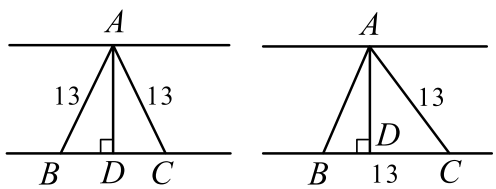
а *б*

Рис. 29

Ответ: 3,6 или 6,4. *Указание*. Возможны два случая: $\cos A = \frac{7}{25}$ или $\cos A = -\frac{7}{25}$ (рис. 29).

63. Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит точка *A*, а на другой – точки *B* и *C*, причем треугольник *ABC* равнобедренный и его боковая сторона равна 13. Найдите третью сторону треугольника *ABC*.

Ответ: 10 или $4\sqrt{13}$. *Указание. 1-й случай*: пусть $AB = AC = 13$ (рис. 30*а*).



а *б*

Рис. 30

2-*й случай*: пусть $AC = BC = 13$ (рис. 30*б*).

64. Найдите площадь равнобедренного треугольника, боковые стороны которого равны 8, а один из углов равен $45°$.

Ответ: 32 или $16\sqrt{2}$. *Указание*. Угол, противолежащий основанию, равен $45°$ или $90°$.

65. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если углы при основании равны $15°$, и одна из его сторон равна 8.

Ответ: 16 или $16(2-\sqrt{3})$. *Указание*. 1-*й случай*: пусть боковая сторона треугольника равна 8. Используйте формулу для нахождения площади треугольника через две стороны и угол между ними. 2-*й случай*: основание треугольника равно 8. Используйте теорему косинусов для нахождения неизвестной боковой стороны.

66. Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит точка *C*, а на другой – точки *A* и *B*, причем треугольник *ABC* равнобедренный и его боковая сторона равна 13. Найдите площадь треугольника *ABC*.

Ответ: 60 или 78. *Указание*. См. «Пособие», пример 13.

67. Отрезок *MK* с концами на двух сторонах равнобедренного треугольника параллелен третьей стороне и делит площадь треугольника пополам. Найдите длину отрезка *MK*, если боковые стороны треугольника равны 5, а основание равно 6.

Ответ: $3\sqrt{2}$ или $\frac{5\sqrt{2}}{2}$. *Указание*. Рассмотреть отношение площадей для подобных треугольников.

68. Площадь равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) равна 36. Найдите длину стороны *AC*, если $BC = \sqrt{97}$.

Ответ: 8 или 18. *Указание*. Пусть $AC = 2x$. Тогда высота, опущенная из вершины *B*, $BH = \sqrt{97 - x^2}$ и $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH$. Получается уравнение $\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \sqrt{97 - x^2} = 36$.

69. Через середину боковой стороны равнобедренного треугольника со сторонами 12, 18, 18 проведена прямая, разбивающая треугольник на части, площади которых относятся как 1:2. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного внутри треугольника.

Ответ: $\sqrt{97}$ или $\sqrt{57}$. *Указание*. Пусть точка D – середина AB (рис. 31). Согласно условию прямые DM_1 и DM_2 отсекают третью часть площади треугольника угла ABC. Тогда

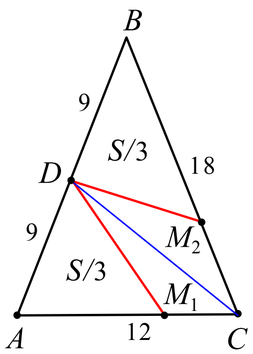


Рис. 31

$AM_1 = \frac{2}{3}AC = 8$, $BM_2 = \frac{2}{3}BC = 12$. Далее применить теорему косинусов для угла A в треугольнике ADM_1 и для угла B в треугольнике DBM_2.

70. **(МИЭТ, 2000).** Два равнобедренных треугольника *ABC* и *AMH*, расположены так, что стороны *AB* и *AM* образуют угол в $45°$. Угол при вершине A в каждом треугольнике – прямой. Известно, что площадь пересечения треугольников равна 49, а площадь их объединения равна 213. Найдите площадь каждого из треугольников.

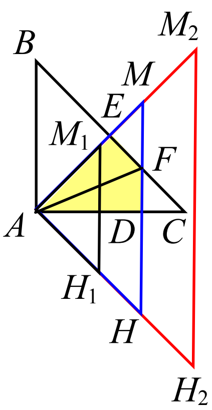


Рис. 32

Ответ: $S_{ABC} = 100$; $S_{AMH} = 162$ (рис. 32) или $S_{ABC} = 162$; $S_{AMH} = 100$.

Указание. См. упражнение 92.

71. Дан равнобедренный треугольник *ABC*, $AB = BC = 13$ и $AC = 10$. Параллельно боковым сторонам треугольника на одинаковом расстоянии от них проведены прямые. Найдите это расстояние, если площадь треугольника, образованного этими прямыми и основанием, лежащим на прямой *AC*, равна 15.

Ответ: $\frac{30}{13}$ или $\frac{90}{13}$. *Указание*. См. «Пособие», пример 27.

72. Дан правильный треугольник *ABC* площади 25. Параллельно его сторонам на равном расстоянии от них проведены три прямые, пересекающиеся внутри треугольника и образующие в пересечении треугольник $A_1B_1C_1$ площади 4. Найдите расстояние между параллельными сторонами треугольников *ABC* и $A_1B_1C_1$.

Ответ: $\sqrt[4]{3}$ или $\frac{7\sqrt[4]{3}}{3}$. *Указание*. *1-й случай* (рис. 33*а*): обозначим искомое расстояние $HG = A_1D = x$. Так как площадь треугольника *ABC* равна 25, то его высота $AG = 5\sqrt[4]{3}$. Аналогично для треугольника $A_1B_1C_1$ высота $A_1H = 2\sqrt[4]{3}$. Используя равенство $AG = AA_1 + A_1H + HG$, составим уравнение $5\sqrt[4]{3} = 2x + 2\sqrt[4]{3} + x$. Отсюда $x = \sqrt[4]{3}$.

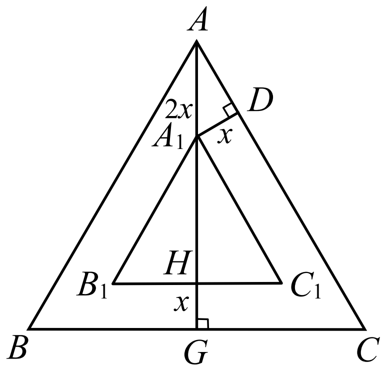


Рис. 33*а*

2-й случай (рис. 33*б*). Обозначим искомое расстояние $HG = A_1D = y$. Используя равенство $AG = AA_1 + HG - A_1H$, составим уравнение $5\sqrt[4]{3} = 2y + y - 2\sqrt[4]{3}$. Отсюда $y = \frac{7\sqrt[4]{3}}{3}$.

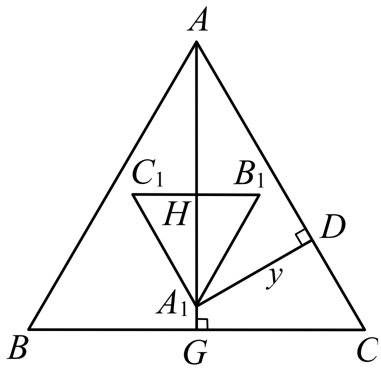


Рис. 33*б*

Произвольный четырехугольник

73. Продолжения сторон *AD* и *BC* выпуклого четырехугольника *ABCD* пересекаются в точке *M*, а продолжения сторон *AB* и *CD* – в точке *O*. Отрезок *MO* перпендикулярен биссектрисе угла *AOD*. Найдите отношение площадей треугольника *AOD* и четырехугольника *ABCD*, если $AO = 12$, $DO = 8$, $CD = 2$.

Ответ: 2:1 или 14:11. *Указание*. Из условия задачи следует, что *OM* является биссектрисой внешнего угла треугольника *ADO* (рис. 34*а*). Поэтому по свойству биссектрисы имеем $\frac{MA}{MD}=\frac{AO}{DO}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$. Значит, $\frac{MD}{AD}=\frac{2}{1}$. В треугольнике *ADO* проведем отрезок $DH \parallel MB$. Из треугольника *ABM*, используя теорему Фалеса, находим $\frac{BH}{AH}=\frac{MD}{AD}=\frac{2}{1}$. Пусть $AH=x$, тогда $BH=2x$. Из треугольника *HDO*, используя теорему Фалеса, находим $\frac{BH}{BO}=\frac{DC}{CO}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. Отсюда $BO=6x$.

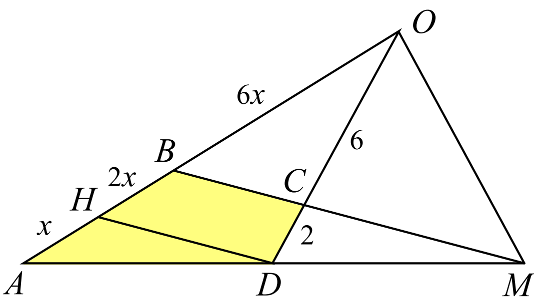


Рис. 34*а*

Для треугольников *BOC* и *ADO* с общим углом получаем

$$\frac{S_{BOC}}{S_{AOD}}=\frac{BO\cdot OC}{AO\cdot DO}=\frac{BO}{AO}\cdot\frac{CO}{DO}=\frac{6x}{9x}\cdot\frac{6}{8}=\frac{1}{2}.$$

Значит, $\frac{S_{AOD}}{S_{ABCD}}=\frac{2}{1}$.

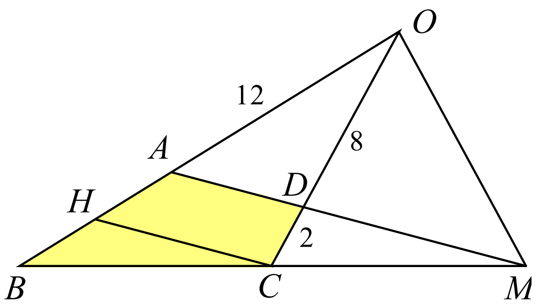


Рис. 34*б*

Второй случай (рис. 34*б*) рассмотрите самостоятельно.

Параллелограмм

74. Высота *CK* параллелограмма *ABCD* равна 12. Найдите диагональ *AC*, если известно, что $AD=13$, $CD=10$, а точка *K* лежит на прямой *AB*.

Ответ: $\sqrt{369}$ или 13. *Указание*. См., «Решебник», Глава 2, задача 11.

75. В параллелограмме *ABCD* проведена биссектриса угла *A*, которая пересекает прямую *BC* в точке *K*. Найдите периметр параллелограмма, если $BK=5$, $KC=2$.

Ответ: 16 или 24. *Указание*. Показать, что треугольник *ABK* – равнобедренный. Рассмотреть два случая.

1-*й случай*: пусть биссектриса пересекает отрезок *BC*.

2-*й случай*: пусть биссектриса пересекает продолжение отрезка *BC* за точку *C*.

76. Биссектрисы углов *A* и *B* параллелограмма *ABCD* делят сторону *DC* на три равных отрезка. Найдите стороны *AB* и *BC* параллелограмма, если его периметр равен 80.

Ответ: 16 и 24 или 10 и 30. *Указание*. См. «Пособие», пример 14.

77. (ЕГЭ, 2010). В параллелограмме *ABCD* биссектрисы углов при стороне *AD* делят сторону *BC* точками *M* и *N* так, что $BM:MN=1:5$. Найдите *BC* если $AB=3$.

Ответ: 3,5; 21. *Указание*. См. указания к предыдущему упражнению.

78. (МФТИ). Биссектрисы углов *B* и *C* параллелограмма *ABCD* пересекаются в точке *O*. Найдите площадь параллелограмма, если $\angle A=2\arcsin\frac{2}{\sqrt{13}}$, $OA=2\sqrt{10}$, $OD=5$.

Ответ: 24 или 72. *Указание*. Применить теорему косинусов для треугольников *ABO* и *OCD*.

79. На стороне *BC* параллелограмма *ABCD* выбрана точка *E*, делящая эту сторону в отношении $3:4$. Отрезок *DE* пересекает диагональ *AC* в точке *F*. Какую часть площади параллелограмма *ABCD* составляет площадь треугольника *AFD*?

Ответ: $\frac{7}{20}$ или $\frac{7}{22}$. *Указание*. См. «Пособие», пример 10.

80. Дан параллелограмм *ABCD*. Точка *M* лежит на диагонали *BD* и делит ее в отношении $2:3$. Найдите площадь параллелограмма *ABCD*, если площадь четырехугольника *ABCM* равна 60.

Ответ: 150 или 100. *Указание. 1-й случай*: пусть $\frac{BM}{MD}=\frac{2}{3}$ (рис. 35*а*), тогда $BM=\frac{2}{5}BD$ и $S_{ABM}=\frac{2}{5}S_{ABD}=\frac{1}{5}S_{ABCD}$ (треугольники *ABM* и *ABD* имеют общую высоту).

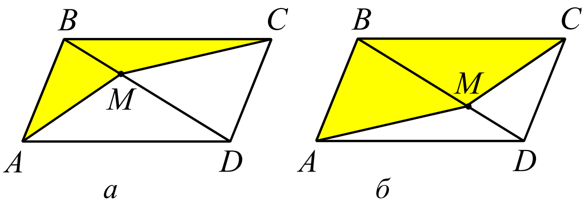


Рис. 35

Аналогично $S_{BCM}=\frac{2}{5}S_{BCD}=\frac{1}{5}S_{ABCD}$.

Тогда $S_{ABCM}=S_{ABM}+S_{BCM}=\frac{2}{5}S_{ABCD}$.

Отсюда $S_{ABCD}=\frac{5}{2}\cdot S_{ABCM}=150$.

2-й случай, когда $\frac{BM}{MD}=\frac{3}{2}$ (рис. 35*б*) рассмотрите самостоятельно.

81. В параллелограмме *ABCD* один из углов равен $45°$. Точки *E* и *F* являются серединами смежных сторон, образующих острый угол. Площадь треугольника, отсекаемого прямой *EF* от параллелограмма *ABCD*, равна *S*. Найдите площадь треугольника, вершинами которого служат точки *E*, *F* и *C*.

Ответ: S или $3S$. *Указание*. См. «Пособие», рисунок 47.

82. В треугольнике *ABC* через точку *M*, лежащую на стороне *BC*, проведены прямые, параллельные сторонам *AC* и *AB*. Площадь образовавшегося при этом параллелограмма составляет $\frac{5}{18}$ площади треугольника *ABC*. Найдите, в каком отношении точка *M* делит сторону *BC*.

Ответ: 1:5 или 5:1. *Решение*. Пусть $\frac{BM}{MC}=k$, тогда $\frac{BM}{BC}=\frac{k}{k+1}$ и $\frac{CM}{BC}=\frac{1}{k+1}$ (рис. 36). Обозначим площадь треугольника *ABC* через *S*. Тогда для подобных треугольников *KBM* и *ABC* получаем равенство $S_{BKM}=\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\cdot S$.

Аналогично для подобных треугольников *LMC* и *ABC* получаем $S_{LMC}=\left(\frac{1}{k+1}\right)^2\cdot S$. Площадь параллелограмма *AKML* равна $\left(1-\frac{k^2}{(k+1)^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\cdot S$ или $\frac{2k}{k^2+2k+1}\cdot S$.

Согласно условию задачи составим уравнение

$$\frac{2k}{k^2+2k+1}=\frac{5}{18}.$$

Отсюда находим $k=\frac{1}{5}$ или $k=5$.

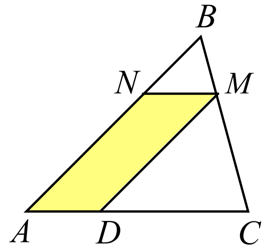


Рис. 36

83. Точки *P*, *R* и *Q* лежат на сторонах соответственно *EF*, *FG* и *EG* треугольника *EFG*, причем *EPRQ* – параллелограмм, площадь которого составляет $\frac{8}{25}$ площади треугольника *EFG*. Найдите диагональ *PQ* параллелограмма, если известно, что $EF=15$, $EG=10$ и $\angle FEG=60°$.

Ответ: 7 или $2\sqrt{31}$. *Указание*. См. «Пособие», пример 28.

84. **(ЕГЭ, 2011).** Точки *A*, *B* и *C* лежат на сторонах соответственно *KL*, *LM* и *KM* треугольника *KLM*, причем *KABC* – параллелограмм, площадь которого составляет $\frac{4}{9}$ площади треугольника *KLM*. Найдите диагональ *AC* параллелограмма, если известно, что $KL=8$, $KM=12$ и $\cos\angle LKM=\frac{7}{12}$.

Ответ: 8 или $2\sqrt{6}$. *Указание*. См. предыдущую задачу.

85. В треугольник *ABC* со сторонами $AB=18$ и $BC=12$ вписан параллелограмм *BKLM*, причем точки *K*, *L*, *M* лежат на сторонах *AB*, *AC* и *BC* соответственно. Известно, что площадь параллелограмма составляет $\frac{4}{9}$ площади треугольника *ABC*. Найдите стороны параллелограмма.

Ответ: 6 и 8 или 4 и 12. *Указание*. См. «Пособие», пример 28. Аналогично приведенному там решению обозначить $\frac{LC}{LA} = k$ и получить уравнение $k^2 - k + \frac{2}{9} = 0$.

86. Дан параллелограмм со сторонами 1 и 2 и острым углом $60°$. На двух его противоположных сторонах как на основаниях построены вне параллелограмма равнобедренные треугольники с углами $120°$ при вершинах. Найдите расстояние между этими вершинами.

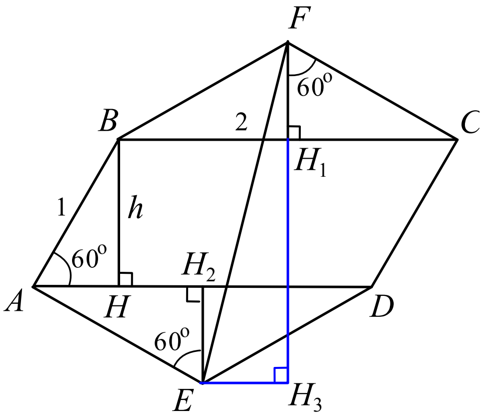


Рис. 37*а*

Ответ: $\sqrt{\frac{13}{3}}$ или $\sqrt{\frac{19}{3}}$. *Указание*. См. рис. 37*а* ($EF = \sqrt{EH_3^2 + FH_3^2}$, где $EH_3 = AH$, $FH_3 = EH_2 + BH + FH_1$) и 37*б*.

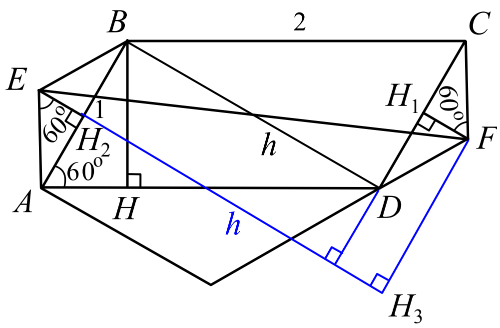


Рис. 37*б*

Ромб

87. Из вершины тупого угла ромба проведены две высоты. Расстояние между их концами равно половине диагонали ромба. Найдите углы ромба.

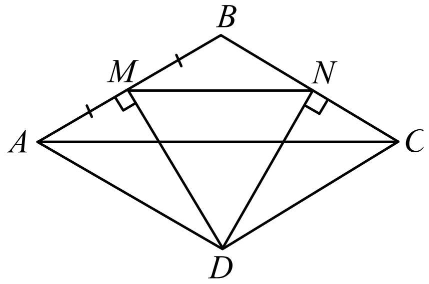


Рис. 38*а*

Ответ: $60°$; $120°$ или $30°$; $150°$.

Указание. Если $2MN = AC$ (рис. 38*а*), то MN – средняя линия треугольника ABC. Тогда $AM = \frac{AD}{2}$.

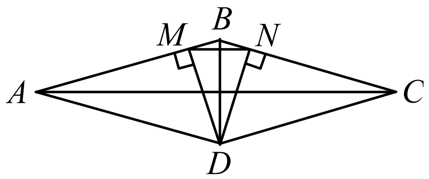


Рис. 38*б*

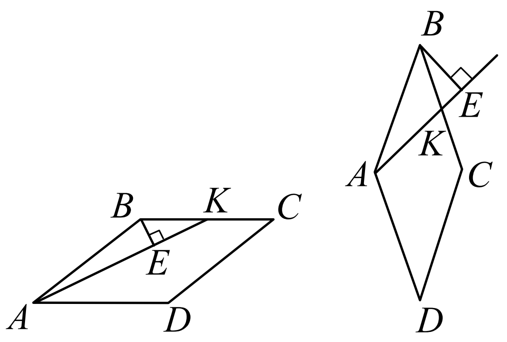
Если $2MN = BD$ (рис. 38*б*), то из подобия треугольников MND и ABD следует $MD = \frac{AD}{2}$.

88. Дан ромб со стороной, равной 1, и острым углом при вершине, равным $\frac{\pi}{6}$. Точка K лежит на стороне BC, причем $BK = KC$. Найдите расстояние от вершины B до прямой AK.

Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$ или $\frac{1}{2\sqrt{5-2\sqrt{3}}}$.

Указание. 1-*й случай*. Пусть $\angle A = \frac{\pi}{6}$ (рис. 39*а*), $\angle B = \frac{5\pi}{6}$. Отрезок BE ($BE \perp AK$) – искомый. $S_{ABK} = \frac{1}{2} AB \cdot BK \cdot \sin\angle B = \frac{1}{8}$. Из теоремы косинусов для треугольника ABK:

$$AK=\sqrt{AB^2+BK^2-2AB\cdot BK\cdot\cos\angle B}=$$
$$=\frac{\sqrt{5+2\sqrt{3}}}{2},\ BE=\frac{S_{ABK}}{AK}=\frac{1}{2\sqrt{5+2\sqrt{3}}}.$$



а *б*

Рис. 39

2-*й случай*. Пусть $\angle B=\frac{\pi}{6}$ (рис. 39*б*). Тогда

$$S_{ABK}=\frac{1}{8},\quad AK=\frac{\sqrt{5-2\sqrt{3}}}{2},\quad BE=\frac{S_{ABK}}{AK}=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{5-2\sqrt{3}}}.$$

89. В ромбе $ABCD$ со стороной a и углом $60°$ проведены высоты CM и DK. Найдите длину отрезка MK.

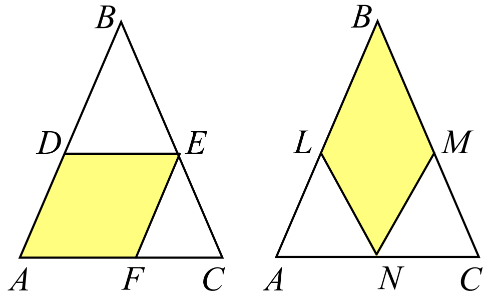
Ответ: $\frac{a}{2}$ или a, или $\frac{a\sqrt{7}}{2}$. *Указание*. См. «Решебник», Глава 2, задача 15.

90. Ромб вписан в прямоугольный треугольник с катетами 9 и 12 так, что одна из его вершин совпадает с вершиной острого угла треугольника, а три другие лежат на сторонах треугольника. Найдите площадь ромба.

Ответ: $\frac{135}{16}$ или $\frac{80}{9}$. *Указание.* См. «Решебник», Глава 3, задача 1.

91. **(ФИПИ, 2013).** Две стороны треугольника равны 8 и 10, косинус угла между ними равен $\frac{2}{5}$. В треугольник вписан ромб, имеющий с треугольником общий угол (вершина ромба, противоположная вершина этого угла, лежит на третьей стороне треугольника). Найдите сторону ромба.

Ответ: 5 или $\frac{10}{9}$. *Указание*. Показать, что данный треугольник равнобедренный, и рассмотреть два случая, когда ромб и треугольник имеют общий угол (рис. 40*а*, *б*).



а *б*

Рис. 40

92. Два ромба $ABCD$ и $AMHK$, имеющие общую вершину A, расположены так, что стороны AB и AM образуют угол в $30°$. Известно, что углы при вершине A обоих ромбов равна $60°$, площадь пересечения ромбов равна $5\sqrt{3}$, а площадь их объединения равна $23\sqrt{3}$. Найдите площадь каждого из ромбов.

Ответ: $S_{ABCD}=16\sqrt{3}$, $S_{AMHK}=12\sqrt{3}$ или $S_{ABCD}=12\sqrt{3}$, $S_{AMHK}=16\sqrt{3}$.

Решение. Исследование условия задачи показывает, что размещение ромбов зависит от положения точки H на луче AB. Обозначим стороны ромбов $ABCD$ и $AMHK$ через a и b соответственно.

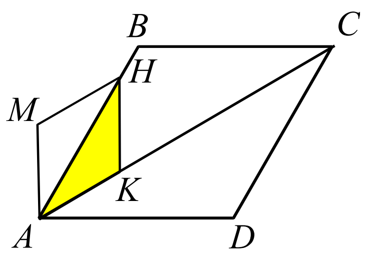


Рис. 41*а*

1-*й случай*: пусть $AH\le AB$ (рис. 41*а*). Так как $S_{ABCD}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ и $S_{AMHK}=\frac{b^2\sqrt{3}}{2}$, причем пересечение ромбов есть треугольник AHK, а объединение ромбов состоит из ромба $ABCD$ и треугольника AMH, то получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}+\dfrac{b^2\sqrt{3}}{4}=23\sqrt{3}, \\ \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4}=5\sqrt{3}. \end{cases}$$

Отсюда имеем $a=6,\ b=2\sqrt{5}$.

Из треугольника *AHK*, используя теорему косинусов, находим $AH=2\sqrt{15}$. Что противоречит условию, так как $AH>AB$.

2-*й случай*: пусть $AB<AH<3AB$ (рис. 41*б*). Тогда пересечение ромбов есть четырехугольник *ABEK*, объединение состоит из ромба *ABCD* и двух треугольников *AMH* и *BHE*.

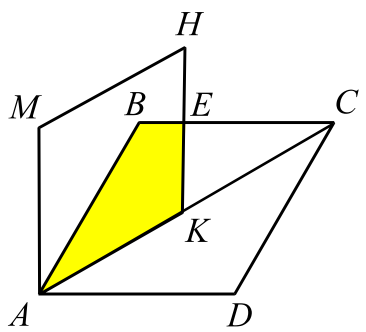


Рис. 41*б*

Из треугольника *AMH* по теореме косинусов находим $AH=b\sqrt{3}$, а $BH=b\sqrt{3}-a$.

Так как $\angle BEH=90°$, $\angle EBH=60°$, то

$$S_{BHE}=\frac{(\sqrt{3}b-a)^2\sqrt{3}}{8},\ S_{AHK}=\frac{b^2\sqrt{3}}{4},$$
$$S_{ABEK}=S_{AHK}-S_{BHE}.$$

Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4}+\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}+\dfrac{(\sqrt{3}b-a)^2\sqrt{3}}{8}=23\sqrt{3}, \\ \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4}-\dfrac{(\sqrt{3}b-a)^2\sqrt{3}}{8}=5\sqrt{3}. \end{cases}$$

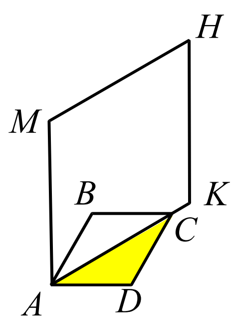


Рис. 41*в*

Получаем $\begin{cases} a=4\sqrt{2} \\ b=2\sqrt{6} \end{cases}$ или $\begin{cases} a=2\sqrt{6} \\ b=4\sqrt{2} \end{cases}$, что соответствует рассматриваемому случаю $AB<AH$ (проверьте!). При этом площади ромбов принимают одно из значений $12\sqrt{3}$ или $16\sqrt{3}$.

3-*й случай*: пусть $AH>3AB$ (рис. 41*в*). В этом случае пересечение ромбов есть треугольник *ABC*, а объединение состоит из ромба *AMHK* и треугольника *ACD*. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{b^2\sqrt{3}}{2}+\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=23\sqrt{3}, \\ \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=5\sqrt{3}. \end{cases}$$

Отсюда имеем $a=2\sqrt{5},\ b=6$. Но тогда $AH<3AB$.

Прямоугольник

93. В прямоугольнике *ABCD* $AB=5$, $BC=4$. Точка *E* на прямой *AB* выбрана так, что $\angle AED=\angle DEC$. Найдите *AE*.

Ответ: 2 или 8. *Указание*. См. «Пособие», пример 11.

94. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан прямоугольник так, что две его вершины находятся на гипотенузе, а две другие – на катетах. Чему равны стороны прямоугольника, если известно, что они относятся как 5:2, а гипотенуза треугольника равна 45?

Ответ: 10; 25 или 7,5; 18,75.

Указание. Рассмотреть два случая:

1) на гипотенузе лежит большая сторона прямоугольника;

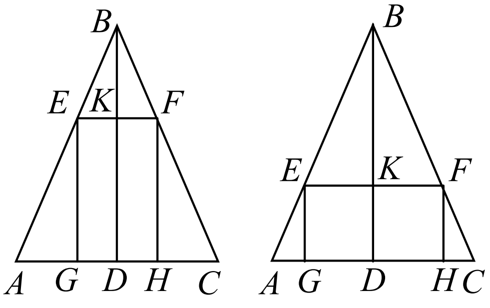
2) на гипотенузе лежит меньшая сторона прямоугольника.

95. В равносторонний треугольник *ABC* вписан прямоугольник *PQRS* так, что основание прямоугольника *RS* лежит на стороне *BC*, а вершины *P* и *Q* – на сторонах *AB* и *AC* соответственно. В каком отношении точка *Q* должна делить сторону *AC*, чтобы площадь прямоугольника *PQRS* составляла $\dfrac{45}{98}$ площади треугольника *ABC*?

Ответ: $\dfrac{AQ}{QC}=\dfrac{5}{9}$ или $\dfrac{AQ}{QC}=\dfrac{9}{5}$. *Указание.* Рассмотреть подобие треугольников *PAQ* и *BAC*.

96. В треугольнике *ABC* $AB=BC=13$, $AC=10$. В треугольник вписан прямоугольник так, что две его вершины лежат на стороне AC, а две другие – на сторонах AB и BC. Известно, что одна сторона прямоугольника вдвое больше другой. Найдите диагональ прямоугольника.

Ответ: $\frac{15\sqrt{5}}{4}$ или $\frac{60\sqrt{5}}{17}$. *Указание.* Рассмотреть подобные треугольники BFE и BCA (рис. 42), и используя пропорцию $\frac{EF}{AC}=\frac{BK}{BD}$, составить уравнение $\frac{x}{10}=\frac{12-2x}{12}$.



а б

Рис. 42

Во втором случае составить уравнение $\frac{2x}{10}=\frac{12-x}{12}$.

97. Основание равнобедренного треугольника равно 56, косинус угла при вершине равен $\frac{4}{5}$. Две вершины прямоугольника лежат на основании треугольника, а две другие – на боковых сторонах. Найдите площадь треугольника, если известно, что одна из его сторон вдвое больше другой.

Ответ: 882 или 1152. *Указание.* См. упражнение 96.

98. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 10$ на стороне AD расположены точки M и N таким образом, что $DM = 4$, при этом P – точка пересечения прямых BN и CM. Площадь треугольника MNP равна 1. Найдите длину отрезка, соединяющего точки M и N.

Ответ: 2 или 2,5. *Указание.* 1-*й случай*: пусть точка P расположена внутри прямоугольника $ABCD$ (рис. 43*а*). Пусть высота PE треугольника MNP равна x, а $MN = y$. Рассмотрим подобие треугольников MNP и CBP, и составим отношение $\frac{PE}{PF}=\frac{MN}{BC}$ или $\frac{x}{4-x}=\frac{y}{10}$. Второе уравнение получаем, исходя из площади треугольника MNP: $xy = 2$. Решая систему уравнений, находим $x = 0{,}8$ и $y = 2{,}5$.

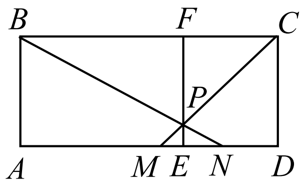


Рис. 43*а*

2-*й случай* (точка P расположена вне прямоугольника $ABCD$) рассмотрите самостоятельно (рис. 43*б*).

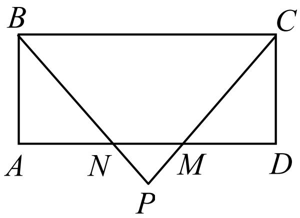
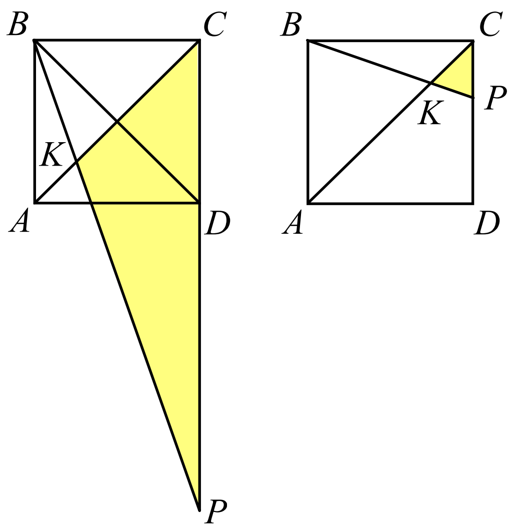


Рис. 43*б*

Квадрат

99. Точка K делит диагональ AC квадрата $ABCD$ в отношении 1:3. Прямые BK и CD пересекаются в точке P. Найдите площадь треугольника KPC, если сторона квадрата равна 4.

Ответ: $\frac{2}{3}$ или 18. *Указание.* См. рис. 44*а*, *б*.



а *б*

Рис. 44

100. **(МИОО, 2010).** Прямая, проведенная через середину стороны AB квадрата $ABCD$, пересекает прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образует с прямой AB угол, тангенс которого равен 4. Найдите площадь треугольника BMT, если сторона квадрата $ABCD$ равна 8.

Ответ: 16 или 48. *Указание.* См. «Решебник», Глава 2, задача 3.

101. Через вершину C квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке K, а серединный перпендикуляр к стороне AB – в точке M. Найдите $\angle DCK$, если $\angle AKB = \angle AMB$.

Ответ: $15°$ или $\mathrm{arctg}\sqrt{7}$. *Указание.* *1-й случай*. Пусть точка M лежит между точками K и C (рис. 45). Точки A, B, K и M лежат на одной окружности. В силу симметрии квадрата относительно диагонали BD имеем $\angle AKB = \angle BKC$. Вписанные углы, опирающиеся на одну и туже дугу, $\angle BKM = \angle BAM$. Так как $AM = BM$, то треугольник ABM равносторонний. Угол BKC – внешний угол для треугольника DCK. Получаем

$$\angle DCK = \angle BKC - \angle KDC = 60° - 45° = 15°.$$

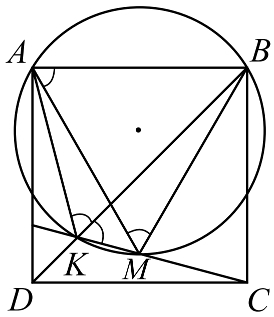


Рис. 45

2-й случай. Пусть точка K лежит между точками M и C (рис. 46). Пусть $\angle AKB = \alpha$ и сторона квадрата равна $2a$. Тогда искомый угол $\angle DCK = \alpha - \frac{\pi}{4}$. Для выполнения условия задачи необходимо выполнение условия $\angle LBM = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$. Так как $\mathrm{tg}\angle LBM = \frac{LM}{LB} = \frac{NM - NL}{LB}$, то составим уравнение

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2a \cdot \mathrm{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - 2a}{a}.$$

Отсюда $\mathrm{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - 2 = -\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$ или после преобразований $\frac{\mathrm{tg}\,\alpha - 1}{\mathrm{tg}\,\alpha + 1} - 2 = -\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$. Используя формулы $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$, получим уравнение

$$4\sin\alpha\cos\alpha - (\cos\alpha + \sin\alpha) + 1 = 0,$$

которое заменой $t = \cos\alpha + \sin\alpha$ сводится к уравнению $2t^2 - t - 1 = 0$.

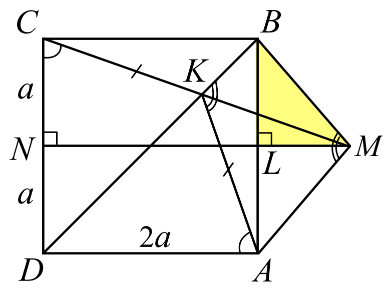


Рис. 46

102. Дан квадрат $ABCD$. В плоскости квадрата взята точка M, такая, что $BM = CM$ и $\angle AMB = 75°$. Найдите величину угла BMC.

Ответ: $60°$ или $150°$. *Указание.* Пусть сторона квадрата равна $2a$ (рис. 47). Так как $BM = CM$, то EF – серединный перпендикуляр к BC. Пусть $\angle MAF = \alpha$, тогда $\angle MBE = 75° - \alpha$, $\angle AMB = 30° + 2\alpha$. Из равенства $EM + MF = EF$ получаем уравнение $a\,\mathrm{tg}(75° - \alpha) + a\,\mathrm{tg}\,\alpha = 2a$. Отсюда следует

$$\mathrm{tg}^2\alpha - 2\mathrm{tg}\,\alpha + \left(\frac{\mathrm{tg}\,75° - 2}{\mathrm{tg}\,75°}\right) = 0.$$

Учитывая, что

$$\mathrm{tg}\,75° = \mathrm{tg}(30° + 45°) = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1},$$

получаем $\mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt{3}$ или $\mathrm{tg}\,\alpha = 2 - \sqrt{3}$. Отсюда $\alpha = 60°$ или $\alpha = 15°$.

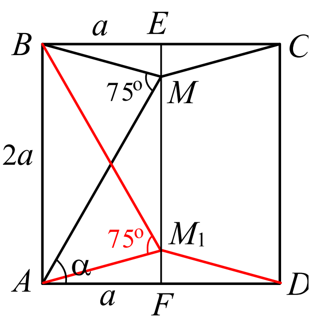
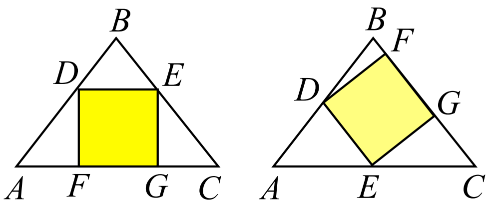


Рис. 47

103. Все вершины квадрата лежат на сторонах равнобедренного треугольника ABC, основание AC которого равно 12, а боковая сторона AB равна 10. Найдите сторону квадрата.

Ответ: $\frac{24}{5}$ или $\frac{240}{49}$. *Указание*. Рассмотреть подобие треугольников в двух случаях (рис. 48*а*,*б*).



а *б*

Рис. 48

104. Две стороны треугольника равны 10 и 13, косинус угла между ними равен $\frac{5}{13}$. Найдите сторону квадрата, все вершины которого расположены на сторонах треугольника.

Ответ: $\frac{60}{11}$ или $\frac{1560}{189}$. *Указание*. См. упражнение 103.

105. В треугольник с основанием, равным *a*, вписан квадрат, одна из сторон которого лежит на основании треугольника. Площадь квадрата составляет $\frac{1}{6}$ часть площади треугольника. Определите сторону квадрата.

Ответ: $\frac{3\pm\sqrt{6}}{6}a$. *Указание*. Пусть *MEDL* – квадрат со стороной x, вписанный в данный треугольник ABC с высотой $BK=h$, $AC=a$ (рис. 49). Из подобия треугольников AEM и ABK имеем $\frac{AE}{AB}=\frac{h}{a}$. Из подобия треугольников EBD и ABC имеем $\frac{EB}{AB}=\frac{x}{a}$. Отсюда получаем

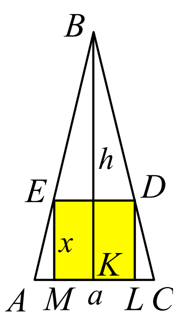


Рис. 49

$$\frac{h}{a}+\frac{x}{a}=\frac{AE}{AB}+\frac{EB}{AB}=1,$$

т.е. $xa+xh=ah$. По условию $ah=12x^2$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} ah=12x^2, \\ a+h=12x. \end{cases}$$

Отсюда $h=(5\pm2\sqrt{6})a$, $x=\frac{3\pm\sqrt{6}}{6}a$.

106. На стороне *BC* квадрата *ABCD* построен равносторонний треугольник *BCP*. Найти высоту треугольника *APD*, проведенную из вершины *A*, если известно, что сторона квадрата равна 2.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ или $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$. См. задача 2, «Решебник», Глава 3.

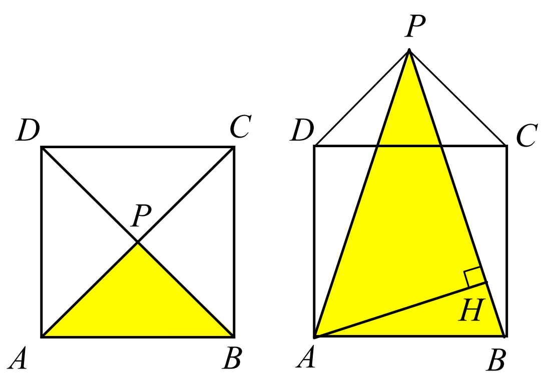
107. На стороне *CD* квадрата *ABCD* построен равносторонний треугольник *CPD*. Найдите высоту треугольника *ABP*, проведенную из вершины *A*, если известно, что сторона равна 4.

Ответ: $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ или $\sqrt{6}+\sqrt{2}$. См. задача 2, «Решебник», Глава 3.

108. На стороне *CD* квадрата *ABCD* построен равнобедренный прямоугольный треугольник *CPD* с гипотенузой *CD*. Найдите высоту треугольника *ABP*, проведенную из вершины *A*, если известно, что сторона квадрата равна 1.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$ или $\frac{3}{\sqrt{10}}$. *Указание*. 1-*й случай*: точки *P* и *A* лежат по одну сторону от прямой *CD* (рис. 50*а*).

2-*й случай*: точки *P* и *A* лежат по разные стороны от прямой *CD* (рис. 50*б*).



а *б*

Рис. 50

109. **(МИЭТ, 2000).** Два квадрата *ABCD* и *AMHK*, расположены так, что стороны *AB* и *AM* образуют угол в 45°. Известно, что площадь пересечения квадратов равна 8,5, а площадь их объединения равна 34,5. Найдите площадь каждого из квадратов.

Ответ: $S_{ABCD}=25$; $S_{AMHK}=18$ или $S_{ABCD}=18$; $S_{AMHK}=25$. *Указание.* Из трех приведенных ситуаций на рис. 51 возможна только соответствующая положению квадрата *AMHK*. Далее вычислить площади треугольников *AEF* и *AFM*.

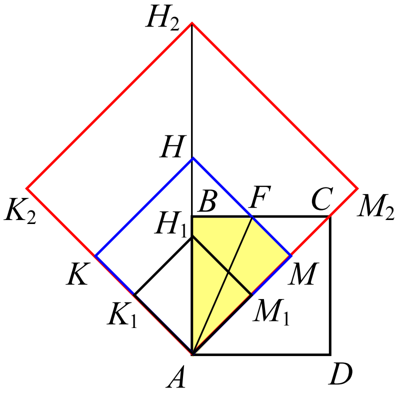


Рис. 51

Трапеция

Линейные и угловые элементы трапеции

110. Основания трапеции равны *a* и *b*. Найдите длину отрезка, высекаемого диагоналями на средней линии.

Ответ: $\frac{1}{2}|a-b|$. *Указание*. Рассмотреть два случая, когда $a>b$ или $a<b$. Отрезки MP и QN – средние линии в треугольниках ABC и BCD (рис. 52).

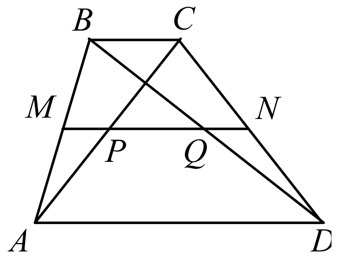


Рис. 52

111. Боковые стороны *AB* и *CD* трапеции *ABCD* равны 12 и 16 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 6. Средняя линия трапеции равна 9. Прямые *AB* и *CD* пересекаются в точке *M*. Найдите длину медианы *MK* в треугольнике *BMC*.

Ответ: $\frac{\sqrt{41}}{2}$ или $\frac{5\sqrt{41}}{2}$. *Указание*. Рассмотреть два случая, связанных с переобозначением вершин трапеции (рис. 53).

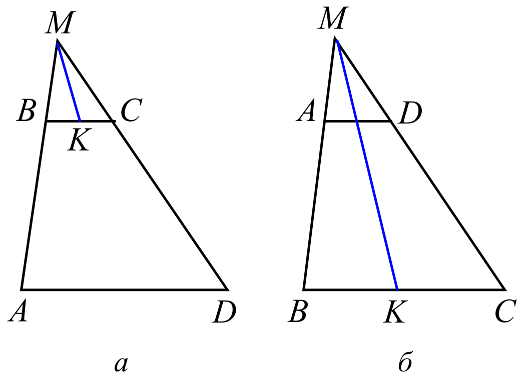


Рис. 53

112. Вычислите периметр трапеции, боковые стороны которой 40 и 25, высота 24, а одно из оснований равно 10.

Ответ: 110 или 124. *Указания*. См. «Пособие», рисунок 34.

113. Боковая сторона неравнобедренной трапеции равна 12 и образует с ее основанием угол $60°$. Основания трапеции равны 16 и 40. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований.

Ответ: 12 или $12\sqrt{3}$. *Указание*. Пусть точки E и F – середины оснований трапеции (рис. 54*а*, *б*), $CG \parallel EF$, $CG = EF$. Применить теорему косинусов для угла D в треугольнике GCD.

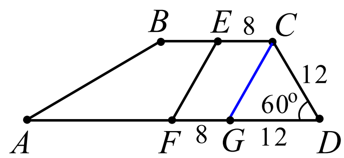


Рис. 54*а*

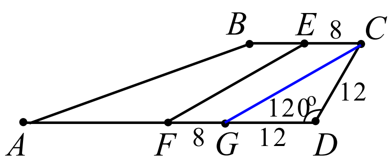


Рис. 54*б*

114. Дана трапеция *ABCD* с боковыми сторонами $AB=27$, $CD=28$ и основанием $BC=5$. Известно, что $\cos\angle BCD = -\frac{2}{7}$. Найдите диагональ *AC*.

Ответ: 28 или $2\sqrt{181}$.

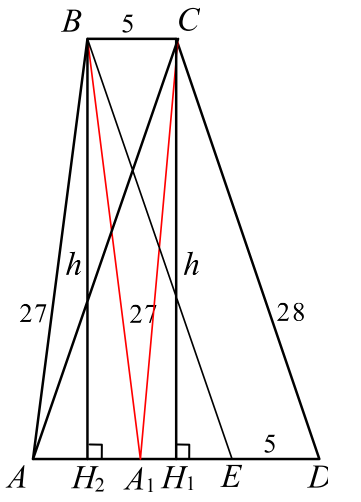


Рис. 55

Указание. Заметить, что $\cos\angle CDA = \cos(\pi - \angle BCD) = \frac{2}{7}$ (рис. 55). Далее применить теорему Пифагора.

115. В трапеции *ABCD* основание ВС равно 10, боковые стороны *AB* и *CD* равны 15 и 13 соответственно. Найдите длину основания *AD*, если известно, что синус угла *BCD* равен $\frac{12}{13}$.

Ответ: 6 или 14, или 24. *Указание.* Рассмотреть три случая (рис. 56*а* и 56*б*).

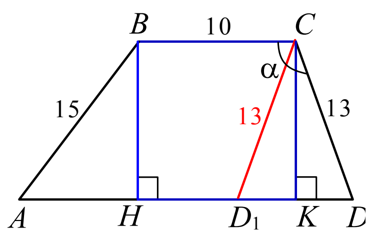


Рис. 56*а*

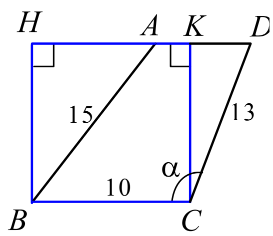


Рис. 56*б*

116. (**МГУ, 1995; ЕГЭ 2011**). В трапеции *KLMN* известны боковые стороны *KL* = =36, *MN* =34, верхнее основание *LM* =10 и $\cos(\angle KLM) = -\frac{1}{3}$. Найдите диагональ *LN*.

Ответ: 36 или $8\sqrt{19}$. *Указание.* Заметить, что $\cos\angle LKN = \cos(\pi - \angle KLM) = \frac{1}{3}$ (рис. 57). Далее несколько раз применить теорему Пифагора.

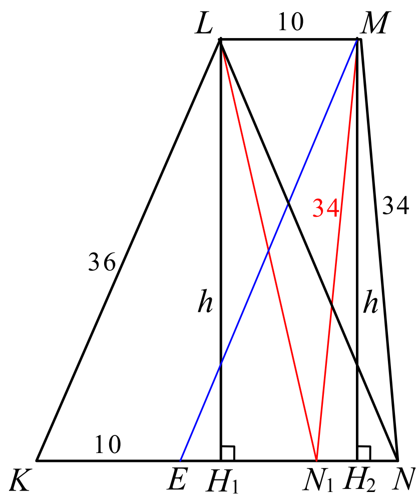


Рис. 57

117. В равнобедренной трапеции *ABCD* ($AD \parallel BC$) расстояние от вершины *A* до прямой *CD* равно длине боковой стороны. Найдите углы трапеции, если $AD:BC = 5$.

Ответ: $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$; $180° - \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$ или $\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$; $180° - \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$. *Указание.* Пусть *K* – основание перпендикуляра, опущенного на *CD* из вершины *A*, *CH* – высота трапеции (рис. 58). Использовать подобие треугольников *CHD* и *AKD*.

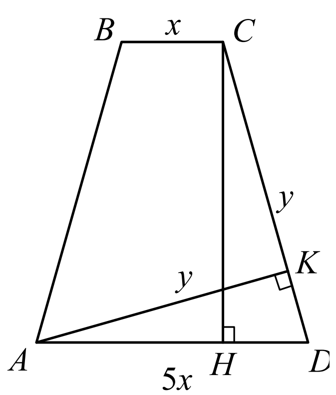


Рис. 58

Решение. Пусть $BC = x$, $AD = 5x$, $AK = CD = y$. Тогда $DH = \frac{AD - BC}{2} = 2x$.

Из подобия треугольников CHD и AKD следует, что $\frac{CH}{AK}=\frac{CD}{AD}$ или $\frac{\sqrt{y^2-4x^2}}{y}=\frac{y}{5x}$ или $\sqrt{1-4\left(\frac{x}{y}\right)^2}=\frac{y}{5x}$. Отсюда $\frac{x}{y}=\frac{1}{\sqrt{5}}$ или $\frac{x}{y}=\frac{1}{2\sqrt{5}}$.

Если $y=\sqrt{5}x$, то $\cos\angle CDA=\frac{KD}{CD}=\frac{2}{\sqrt{5}}$, если же $y=2\sqrt{5}x$, то $\cos\angle CDA=\frac{KD}{CD}=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Площадь трапеции

118. Известно, что высота трапеции равна 15, а диагонали трапеции равны 17 и 113. Чему равна ее площадь?

Ответ: 900 или 780. *Указание*. Воспользоваться тем, что площадь трапеции $ABCD$ равна площади треугольника EBD, где $BE\parallel AC$ по построению (рис. 59). При решении рассмотреть два возможных положения диагонали AC.

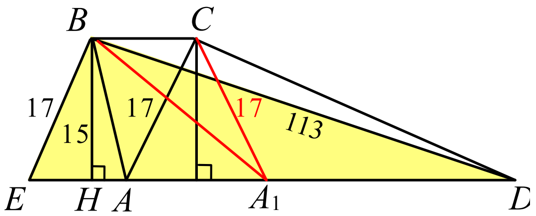


Рис. 59

119. Диагональ равнобедренной трапеции равна 5, а площадь равна 12. Найдите высоту трапеции.

Ответ: 3 или 4. *Указание*. Пусть $h-$ высота трапеции, $m-$ ее средняя линия, $S=12-$ площадь. Тогда $m=\sqrt{5^2-h^2}$, $S=mh=12$.

120. В трапеции $ABCD$ основание $BC=10$, а боковые стороны $AB=30$ и $CD=25$ диагонали пересекаются в точке O. Высота трапеции равна 24. Найдите площадь треугольника AOB.

Ответ: $\frac{280}{3}$ или $\frac{2520}{31}$. *Указание*. Пусть $\frac{BC}{AD}=k$, тогда $\frac{S_{BOC}}{S_{DOA}}=k^2$ и $\frac{S_{BOC}}{S_{AOB}}=k$. Рассмотреть два случая (трапеция $ABCD$ и $ABCD_1$ рис. 60).

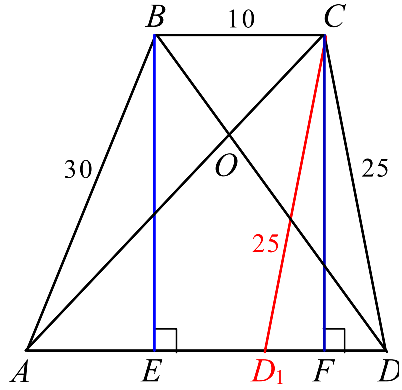


Рис. 60

121. Диагонали трапеции AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника AED равна 16, а точка E делит одну из диагоналей в отношении 1:4.

Ответ: 25 или 100, или 400. *Указание*. См. «Пособие», пример 19.

122. Площадь трапеции $ABCD$ равна 72, а одно из оснований трапеции вдвое больше другого. Диагонали пересекаются в точке O; отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N соответственно. Найдите площадь четырехугольника $OMPN$.

Ответ: 8 или 3,2. *Указание*. См. «Пособие», пример 20.

123. Площадь трапеции $ABCD$ равна 240. Диагонали пересекаются в точке O, отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N. Найдите площадь четырёхугольника $OMPN$, если одно из оснований трапеции *втрое* больше другого.

Ответ: 27 или $\frac{45}{7}$. *Указание*. См. «Пособие», пример 20.

124. Площадь трапеции $ABCD$ равна 810. Диагонали пересекаются в точке O. Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N. Найдите площадь треугольника

MON, если одно из оснований трапеции вдвое больше другого.

Ответ: $\frac{45}{2}$ или $\frac{72}{5}$. *Указания*. 1-*й случай*: пусть $AD = 2BC$ (рис. 61*а*). Четырехугольники $ABCP$ и $BCDP$ – параллелограммы, CM и BN – медианы треугольника BPC. Пусть h – высота трапеции, $BC = a$, $AD = 2a$, $OM = x$. Тогда $\frac{a+2a}{2}h = \frac{3}{2}ah = 810$, $ah = 540$, а $OC = 2x$, так как O – точка пересечения медиан треугольника BPC, поэтому $AM = MC = 3x$, $OA = AM + OM = 4x$, $\frac{OM}{OA} = \frac{1}{4}$. Аналогично, $\frac{ON}{OD} = \frac{1}{4}$. Значит, треугольники MON и AOD подобны с коэффициентом $\frac{1}{4}$.

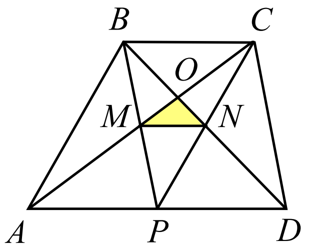


Рис. 61*а*

Треугольники AOD и BOC подобны с коэффициентом 2, поэтому высота треугольника AOD вдвое больше высоты треугольника BOC и составляет две трети высоты трапеции. Отсюда $S_{MON} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot S_{AOD} = \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot\frac{2}{3}h = \frac{1}{24}ah = \frac{45}{2}$.

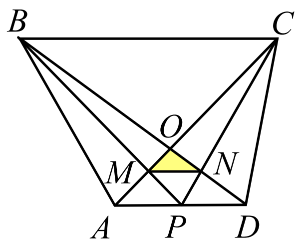


Рис. 61*б*

2-*й случай*, когда $BC = 2AD$ (рис. 61*б*) рассмотрите самостоятельно.

125. Прямая, параллельная боковой стороне трапеции, отсекает от нее ромб. Площади полученных фигур относятся как 4:5. Найдите, какую часть составляет сторона ромба от средней линии трапеции.

Ответ: $\frac{4}{9}$ или $\frac{5}{9}$. *Указания*. 1-*й случай*: пусть площадь трапеции $ABCD$ высотой h равна S (рис. 62). Тогда площадь ромба $AEGD$ со стороной a равна $ah = \frac{4}{9}S$ (первый случай), а площадь трапеции $BEGC$ с основаниями x и y равна $\frac{x+y}{2}\cdot h = \frac{5}{9}S$. Отношение площади этой трапеции к площади ромба равно $\frac{x+y}{2} : a = \frac{5}{4}$. Тогда, используя последнее равенство, найдем отношение средней линии трапеции $ABCD$ к стороне ромба

$$\frac{x+y+2a}{2} : a = \frac{x+y}{2} : a + 1 = \frac{5}{4} + 1 = \frac{9}{4}.$$

Искомая величина равна $\frac{4}{9}$.

2-*й случай*, когда площадь ромба $AEGD$ со стороной a равна $ah = \frac{5}{9}\cdot S$, рассмотрите самостоятельно.

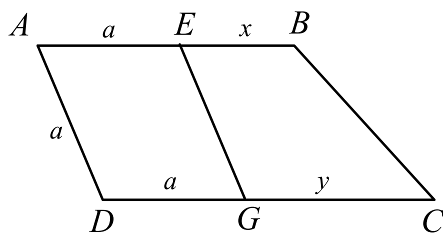


Рис. 62

126. Площадь равнобедренной трапеции равна $\sqrt{3}$. Угол между диагональю и основанием на 20 градусов больше угла между диагональю и боковой стороной. Найдите острый угол трапеции, если ее диагональ равна 2.

Ответ: $40°$ или $80°$. *Указание*. Воспользоваться тем, что площадь трапеции $ABCD$ равна площади треугольника ACE, где $BD \parallel CE$ по построению (рис. 63), в котором высота $CH = AC\cdot\sin(\alpha + 20°)$ и основание $AE = 2AC\cdot\cos(\alpha+20°)$. $S_{ACE} = \frac{1}{2}\cdot CH\cdot AE$.

В итоге получается уравнение $\sin(2\alpha+40^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

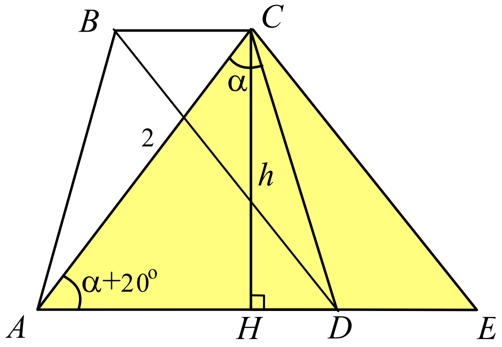


Рис. 63

127. На боковых сторонах AB и CD трапеции с основаниями AD и BC отмечены точки P и Q соответственно, причем $PQ \parallel AD$. Прямая PQ разбивает трапецию на две трапеции, площади которых относятся как 1 : 2. Найдите PQ, если $AD = a$ и $BC = b$.

Ответ: $\sqrt{\frac{2a^2+b^2}{3}}$ или $\sqrt{\frac{a^2+2b^2}{3}}$. *Указание*. См. «Пособие», примеры 8 или 26.

128. Основания трапеции равны 12 и 24. Прямая, параллельная основаниям, разбивает трапецию на две трапеции, площади которых относятся как 1:2. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного внутри трапеции.

Ответ: $12\sqrt{2}$ или $12\sqrt{3}$. *Указание*. См. «Пособие», примеры 8 или 26.

129. В равнобокой трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны 20 и 8 соответственно, а боковая сторона равна 10. Через вершину A проведена прямая, делящая площадь трапеции в отношении 1:3 и пересекающая прямую BC в точке K. Найдите длину отрезка KC.

Ответ: 1 или $\frac{260}{7}$. *Указание*. Площадь трапеции $ABCD$, треугольников ABC и ACD равны 112, 32 и 80 соответственно. Возможны два случая: точка K расположена на отрезке BC или вне отрезка BC.

1-*й случай*. Пусть точка K расположена вне отрезка BC (рис. 64*а*). В этом случае рассмотреть площадь треугольника $S_{AED}=28$ и подобие треугольников CKE и DAE.

2-*й случай*. Пусть K расположена на отрезке BC (рис. 64*б*). В этом случае использовать площадь треугольника $S_{ABK}=28$.

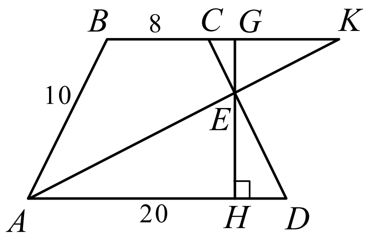


Рис. 64*а*

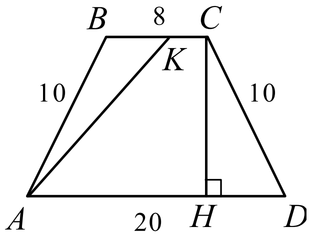


Рис. 64*б*

130. В равнобедренной трапеции $ABCD$ заданы основания $AD=9$ и $BC=3$. Биссектриса одного из углов трапеции пересекает сторону CD в точке K, при этом $CK:KD=2:1$. Найдите площадь трапеции.

Ответ: $72\sqrt{3}$ или $27\sqrt{5}$. *Указания и решение*. Использовать подобие треугольников.

1-*й случай*: пусть биссектриса угла BAD пересекает сторону CD (рис. 65*а*). Используя подобие треугольников CFK и DAK, найдем $CF=18$. Из условия задачи следует, что $AB=CF=21$.

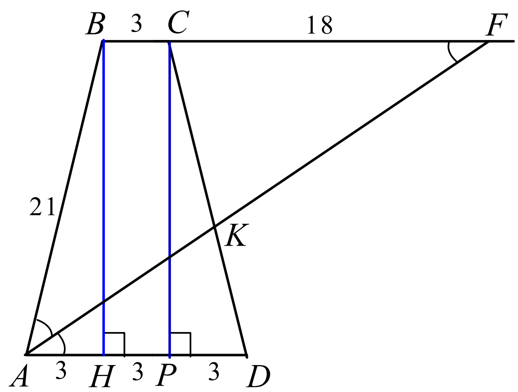


Рис. 65*а*

Найдем высоту BH и площадь S трапеции $ABCD$:

$$BH=\sqrt{21^2-3^2}=12\sqrt{3};$$

$$S=\frac{(3+9)\cdot 12\sqrt{3}}{2}=72\sqrt{3}.$$

2-*й случай*, когда биссектриса угла *ABC* пересекает сторону *CD* (рис. 65*б*), рассмотрите самостоятельно.

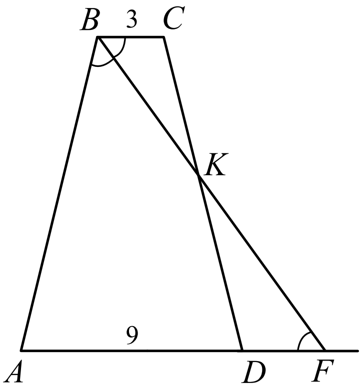


Рис. 65*б*

131. В прямоугольной трапеции *ABCD* заданы основания $AD=8$ и $BC=2$. Биссектриса прямого угла трапеции пересекает сторону *CD* в точке *K*, при этом $CK:KD=1:2$. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 30 или 60. *Указание*. См. упражнение 130.

132. Дана трапеция *ABCD*, диагонали *AC* и *BD* которой пересекаются под прямым углом, а продолжения боковых сторон *AB* и *DC* пересекаются в точке *K* под углом 30°. Известно, что $\angle BAC=\angle CDB$, а площадь трапеции равна *S*. Найдите площадь треугольника *AKD*.

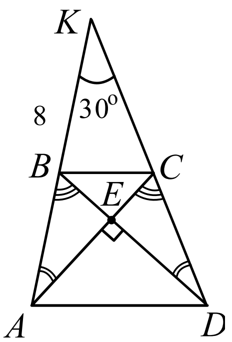


Рис. 66

Ответ: $\frac{3S}{2}$ или $\frac{S}{2}$. *Указание.* Докажите, что треугольники *AKC* и *BKD* равнобедренные (рис. 66). Так как $S=\frac{1}{2}AC\cdot BD$ и $S_{BKC}=$ $=\frac{1}{2}BK\cdot KC\cdot\sin 30°=\frac{S}{2}$. $S_{AKD}=S_{BKC}+S_{ABCD}$. Второй случай – результат переобозначения вершин.

133. Площадь трапеции *ABCD* равна *S*, отношение оснований $AD:BC=3$; на прямой, пересекающей продолжение основания *AD* за точку *D*, расположен отрезок *EF* так, что $AE\parallel DF$, $BE\parallel CF$ и $AE:DF=CF:BE=2$. Найдите площадь треугольника *EFD*.

Ответ: $\frac{S}{4}$ или $\frac{9S}{20}$. *Указание*. Рассмотреть подобие треугольников *ENB* и *FNC*, и *DFM* и *AEM* (рис. 67).

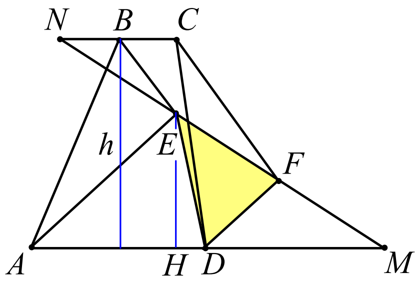


Рис. 67*а*

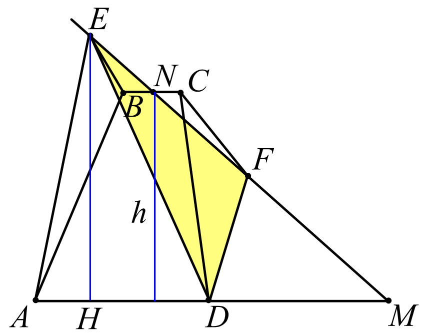


Рис. 67*б*

Решение. 1-*й случай*: пусть *N* – точка пересечения прямых *EF* и *BC* (рис. 67*а*). Из подобия отмеченных в указании треугольников следует, что $AD=DM$, $NB=BC$ и $NE=EF=FM$. Высота треугольника *AEM* $EH=\frac{2}{3}h$, где *h* – высота трапеции. Площадь трапеции $S=\frac{AD+BC}{2}\cdot h=\frac{2}{3}\cdot AD\cdot h$,

$$S_{DEF}=\frac{1}{2}S_{DEM}=\frac{1}{4}S_{AEM}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot CH\cdot AM=\frac{1}{4}S.$$

2-*й случай*: пусть *N* – точка пересечения прямых *EF* и *BC* (рис. 67*б*). В этом случае $EF=FM$, $2NE=EF$ и $EH=\frac{6}{5}h$.

134. В трапеции *ABCD* дано: $AB=BC=CD=a$, $DA=2a$. На прямых *AB* и *AD* взяты точки *E* и *F*, отличные от вершин трапеции, так, что точка пересечения высот треугольника *CEF* совпадает с точкой пересечения диагоналей трапеции *ABCD*. Найдите площадь треугольника *CEF*.

Ответ: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ или $2a^2\sqrt{3}$. *Указание.* *AC* и *BD* – биссектрисы углов *A* и *D*, сами углы равны $60°$. Треугольники *CKE* и *FKO* прямоугольные и подобные, где $K = AC \cap EF$, $O = AC \cap BD$.

135. В равнобедренной трапеции *ABCD* диагональ *AC* перпендикулярна к боковой стороне *CD*. Найдите *BC*, если известно, что $AD = a$, $AB + BC = \frac{10a}{9}$.

Ответ: $\frac{7a}{9}$ или $\frac{17a}{18}$. *Указание.* Пусть $BC = x$ (рис. 68), тогда $DE = \frac{a-x}{2}$ и

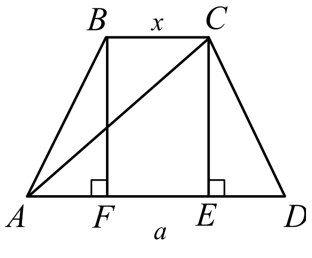


Рис. 68

$CD = \frac{10a}{9} - x$. Используя формулу $CD^2 = DE \cdot AD$, составить уравнение $\left(\frac{10a}{9} - x\right)^2 = \frac{(a-x)x}{2}$ или

$162x^2 - 279ax + 119a^2 = 0$. Корни последнего уравнения: $\frac{7a}{9}$ и $\frac{17a}{18}$.

136. В трапеции основания равны *a* и *b*, диагонали перпендикулярны, а угол между боковыми сторонами равен α. Найдите площадь трапеции.

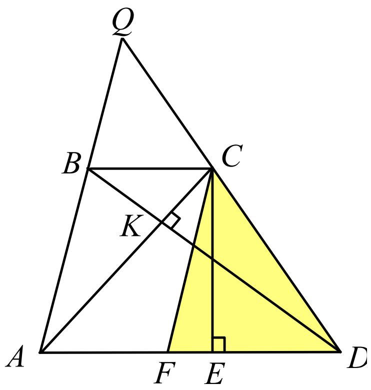


Рис. 69

Ответ: $\frac{ab(a+b)\cdot \operatorname{tg}\alpha}{2|a-b|}$. *Указание.* Суммы квадратов противоположных сторон четырехугольника с перпендикулярными диагоналями равны между собой.

Решение. Пусть $BC = a$, $AD = b$ – основания трапеции *ABCD*. Предположим, что $b > a$. Проведем *CF*, параллельно боковой стороне *AB* (рис. 69). Тогда $DF = b - a$, $\angle DCF = \alpha$.

Обозначим $AB = CF = x$, $CD = y$. Пусть *h* – высота трапеции. Тогда

$$h = \frac{2S_{CDF}}{DF} = \frac{xy\sin\alpha}{b-a}.$$

По теореме косинусов из треугольника *DCF* имеем

$$x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha = (b-a)^2. \ (1)$$

Поскольку суммы квадратов противоположных сторон четырёхугольника с перпендикулярными диагоналями равны между собой, то

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2. \ (2)$$

Вычитая почленно равенство (1) из равенства (2), получим, что $2xy\cos\alpha = 2ab$, т.е. $xy = \frac{ab}{\cos\alpha}$. Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2}\cdot h =$$

$$= \frac{a+b}{2}\cdot\frac{xy\sin\alpha}{b-a} = \frac{a+b}{2}\cdot\frac{\frac{ab}{\cos\alpha}\cdot\sin\alpha}{b-a} =$$

$$= \frac{ab(a+b)\cdot\operatorname{tg}\alpha}{2(b-a)}.$$

Решение для случая $a > b$ аналогично.

Многоугольник

137. *ABCDE* – правильный пятиугольник. Точка *M* такая, что треугольник *DEM* – равносторонний. Найдите угол *AMC*.

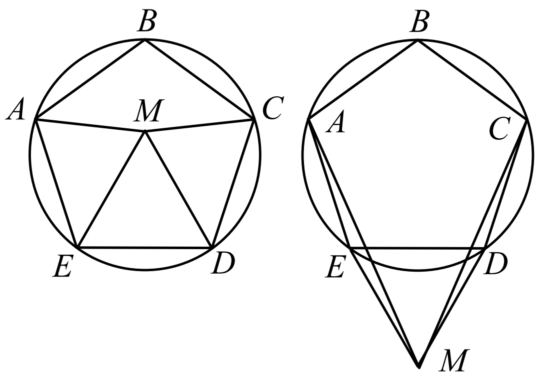
Ответ: $48°$ или $168°$. *Указание.* *1-й случай*: пусть точка *M* лежит внутри пятиугольника (рис. 70*a*). Внутренний угол правильного пятиугольника равен $108°$. Поэтому

$$\angle MDC = \angle EDC - \angle EDM = 108° - 60° = 48°.$$

Так как $MD = DC$, то из треугольника *MDC* находим $\angle DMC = \frac{180° - 48°}{2} = 66°$.

Аналогично $\angle EMA = 66°$. Искомый угол равен $360° - (60° + 66° + 66°) = 168°$.

2-*й случай*, когда точка M лежит вне пятиугольника (рис. 70*б*), рассмотрите самостоятельно.



а *б*

Рис. 70

138. **(ЕГЭ, 2011).** Через вершину A правильного шестиугольника $ABCDEF$ проведена прямая, пересекающая диагональ CF в точке K. Известно, что эта прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как 1:8. Найдите отношение $CK : KF$.

Ответ: 4 или $\frac{1}{5}$. *Указание.* См. «Решебник», Глава 2, задачу 18.

139. Через вершину C правильного шестиугольника $ABCDEF$ проведена прямая, пересекающая прямую AD в точке Q. Известно, что эта прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как 5:13. Найдите отношение $AQ : QD$.

Ответ: 2 или $\frac{1}{3}$. *Указание.* См. «Решебник», Глава 2, задача 18.

Окружность и круг

140. Радиус окружности равен 1. Найдите величину вписанного угла, опирающегося на хорду, равную $\sqrt{3}$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 60° или 120°. *Указание.* Использовать следствие из теоремы синусов $a = 2R\sin\angle A$.

141. Под каким углом видна из точек окружности хорда, равная радиусу?

Ответ: 30° или 150°. *Указание.* Использовать следствие из теоремы синусов $a = 2R\sin\angle A$ (рис. 71).

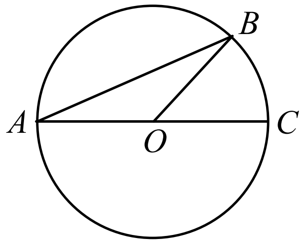


Рис. 71

142. Площадь круга, ограниченного некоторой окружностью, равна 12π, AC – диаметр этой окружности, точка O – ее центр. Точка B лежит на окружности, причем площадь треугольника AOB равна 3. Найдите величину угла CAB.

Ответ: 15° или 75°. *Указание.* Для треугольника AOB применить формулу $S_{AOB} = \frac{1}{2}R^2\sin\angle AOB$.

143. Пусть AB и AC – равные хорды, градусная мера дуги BC, не содержащей точки A, равна 200°. MN – отрезок, касательной к окружности, проходящей через точку A. Найдите углы MAB и NAC.

Ответ. $\angle MAB = \angle NAC = 40°$ или $\angle MAB = \angle NAC = 140°$, или $\angle MAB = 140°$, $\angle NAC = 40°$, или $\angle MAB = 40°$, $\angle NAC = 140°$. *Указание.* Использовать теорему об измерении угла между хордой и касательной.

144. Длина окружности равна 20π. Диаметр AB и хорда CD лежат на параллельных прямых. Расстояние между указанными прямыми равно $\sqrt{19}$. Найдите длину хорды BC.

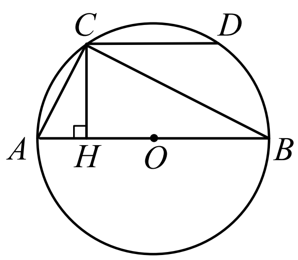


Рис. 72

Ответ: $2\sqrt{5}$ или $2\sqrt{95}$. *Указание.*

1-*й случай*: пусть $AH = x$, тогда $BH = 20 - x$. Использовать формулу $CH^2 = AH \cdot BH$ (рис. 72).

2-*й случай*: поменять точки *C* и *D* местами.

145. Длина окружности равна 10π, *AC* – диаметр этой окружности. Точка *B* лежит на окружности, причем площадь треугольника *ABC* равна 15. Найдите величину угла *CAB*.

Ответ: $\mathrm{arctg}3$, $\mathrm{arctg}\frac{1}{3}$. *Указание*. См. упражнение 144.

146. Хорда *AB* равна 13, а хорда *AC* равна 7. Найдите длину отрезка *BC*, если радиус окружности равен $\frac{13\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: 8 или 15. *Указание*. Используя следствие из теоремы синусов $AB = 2R\sin\angle C$, найти $\angle C = 60°$ или $\angle C = 120°$. Далее использовать теорему косинусов.

147. На окружности радиуса $R = \sqrt{3}$ последовательно поставлены точки *K*, *M*, *N* и *P* так, что дуги $KM = 40°$ и $NM = 100°$, а хорды *KN* и *MP* пересекаются под углом $70°$. Найдите длину наибольшей стороны четырехугольника *KMNP*.

Ответ: $2\sqrt{3}$ или 3. *Указание*. В первом случае доказать, что дуги $PN = 100°$ и $KP = 120°$ (рис. 73*а*), а во втором – доказать, что дуги $KP = 40°$ и $PN = 180°$ (рис. 73*б*).

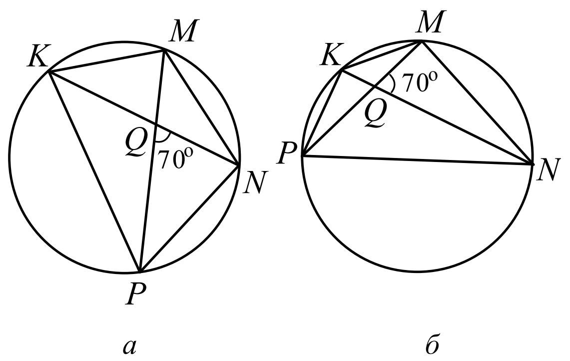


Рис. 73

148. Дана окружность радиуса 25. Точка *M* – середина радиуса *OK*. Хорда *AC* перпендикулярна радиусу *OK*, *B* – точка их пересечения. Найти расстояние *BM*, если известно, что $AB - BK = 6$.

Ответ: 5,5 или 11,5. См. «Пособие», пример 41.

149. В окружности радиуса $\sqrt{6}$ проведены хорда *MN* и диаметр *MP*. В точке *N* проведена касательная к окружности, которая пересекает продолжение диаметра *MP* в точке *Q* под углом $60°$. Найдите медиану *QD* треугольника *MQN*.

Ответ: $\sqrt{5 \pm \frac{5\sqrt{3}}{2}}$. *Указание.* В прямоугольном треугольнике *QNO* (рис. 74) $QN = NO \cdot \mathrm{tg}\,30° = \sqrt{2}$, $QO = \frac{NO}{\sin 60°} = 2\sqrt{2}$. Тогда $QM = QO - MO = 2\sqrt{2} - \sqrt{6}$. В равнобедренном треугольнике *MNO* $MN = \sqrt{NO^2 + MO^2 - 2NO \cdot MO \cdot \cos 30°} = \sqrt{12 - 6\sqrt{3}}$. По формуле медианы для треугольника QMN, в котором все стороны известны, имеем

$$QD = \sqrt{2QN^2 + 2QM^2 - MN^2} = \sqrt{5 - \frac{5\sqrt{3}}{2}}.$$

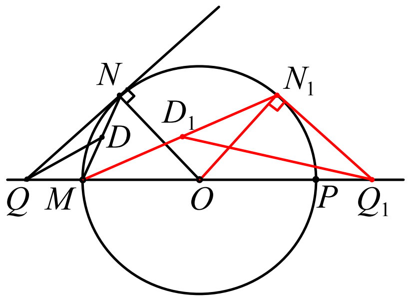


Рис. 74

Аналогично находится медиана Q_1D_1 во втором случае (рис. 74).

150. (**МГУ, 1998**). В окружности проведены хорды *KL*, *MN*, *PS*. Хорды *KL*, *PS* пересекаются в точке *C*, хорды *KL*, *MN* пересекаются в точке *A*, хорды *MN* и *PS* пересекаются в точке *B*, причем $AL = CK$, $AM = BN$, $BS = 5$, $BC = 4$. Найдите радиус окружности, если величина угла *BAC* равна $45°$.

Ответ: $\sqrt{53}$ или $\sqrt{13}$. *Указание.* Показать, что центр данной окружности совпадает с центром окружности, проходящей через точки *A*, *B* и *C*. Рассмотреть случаи расположения точек.

1-*й случай*: пусть точка *B* лежит между *S* и *C*.

2-*й случай*: пусть точка *C* лежит между *S* и *B*.

151. (МИОО, 2011). Точка M лежит на отрезке AB. На окружности с диаметром AB взята точка C, удаленная от точек A, M и B на расстояния 20, 14 и 15 соответственно. Найдите площадь треугольника BMC.

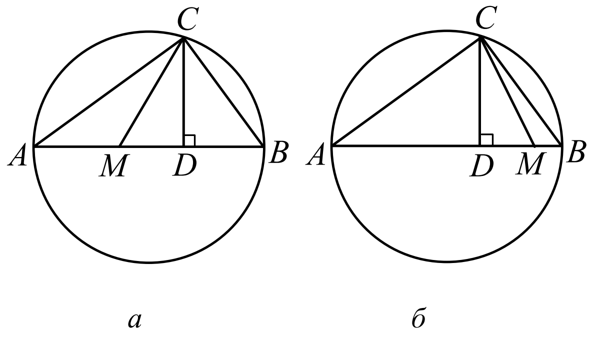


Рис. 75

Ответ: $\sqrt{54 \pm 12\sqrt{13}}$. *Указание*. Рассмотреть два случая. 1-*й случай*: пусть точка M лежит между A и D (рис. 75*а*).

2-*й случай*: пусть точка M лежит между B и D (рис. 75*б*).

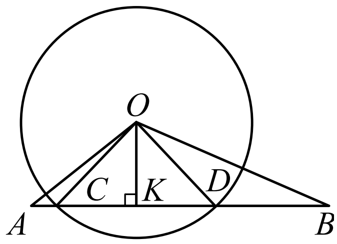


Рис. 76*а*

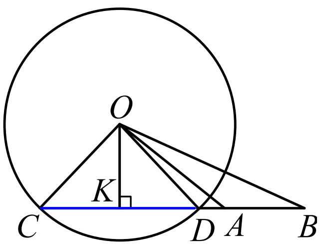


Рис. 76*б*

152. Площадь круга с центром в точке O равна 144π. Точки A и B расположены на расстоянии 12,5 и 26 соответственно от точки O. Длина хорды, лежащей на прямой AB, равна $4\sqrt{11}$. Найдите площадь треугольника AOB.

Ответ: 82,5; 157,5. *Указание*. Использовать теорему Пифагора для треугольников COK, AOK и OBK (рис. 76*а*, *б*).

153. По одну сторону от прямой l лежат точки A и B на расстоянии 1 и 5 от прямой, $AB = 2\sqrt{5}$. Найдите радиус окружности, касающейся прямой l и проходящей через точки A и B.

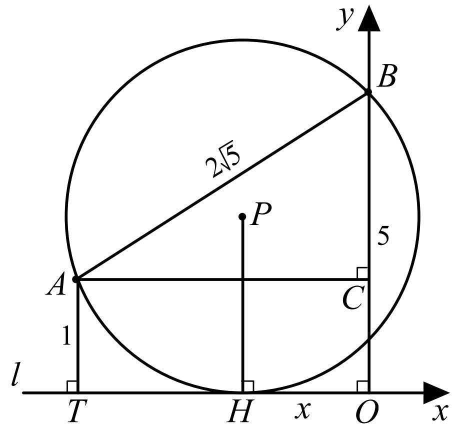


Рис. 77

Ответ: 2,5 или 5. *Указание*. Найдем $AC = 2$. Ввести систему координат, как показано на рис. 77.

Уравнение окружности с центром $P(x_0; R)$ и радиуса R имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - R)^2 = R^2.$$

Подставить в уравнение координаты точек $A(-2; 1)$ и $B(0; 5)$.

154. В системе координат задана точка $M(x; y)$, $x > 0$, $y > 0$. Дана окружность с центром в точке M радиуса r, причем любая точка окружности имеет положительные координаты. Прямая, проходящая через точку $O(0; 0)$ и через точку M, пересекает окружность в точках K и P, причем ордината точки K меньше, чем ордината точки P. Прямая, которая касается окружности в точке K, пересекает прямые $x = 0$ и $y = 0$ в точках A и B. Найдите площадь треугольника OKB.

Ответ: $\dfrac{\left(\sqrt{x^2 + y^2} - r\right)y}{2x}$; $\dfrac{\left(\sqrt{x^2 + y^2} - r\right)x}{2y}$.

Указание. Рассмотреть подобие треугольников OKB и OHM.

Во втором случае поменять местами точки A и B (рис. 78).

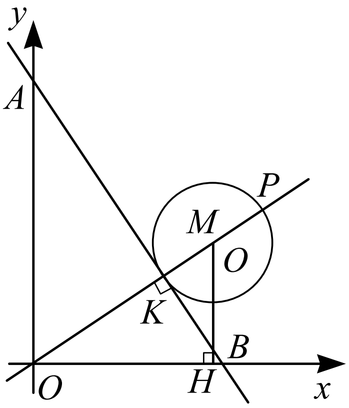


Рис. 78

Угол и окружность

155. Один из смежных углов с вершиной A вдвое больше другого. В эти углы вписаны окружности с центрами O_1 и O_2. Найдите углы треугольника O_1AO_2, если отношение радиусов окружностей равно $\sqrt{3}$.

Ответ: $90°$; $45°$; $45°$ или $90°$; $\operatorname{arctg}3$; $\operatorname{arcctg}3$.

Указание. Так как O_1A и AO_2 есть биссектрисы углов, то $\angle O_1AO_2 = 90°$. Далее выразить катеты треугольника O_1AO_2 через радиусы окружностей (рис. 79).

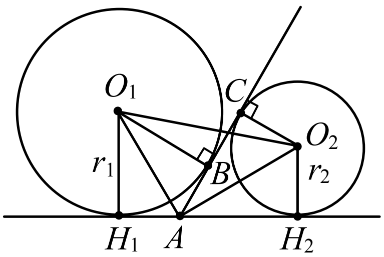


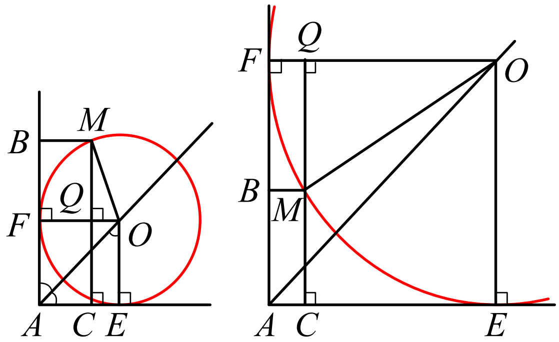
Рис. 79

156. Расстояния от точки M, расположенной внутри прямого угла, до сторон угла равны 2 и 5. Найдите радиус окружности, вписанной в этот угол и проходящей через точку M.

Ответ: $7-2\sqrt{5}$ или $7+2\sqrt{5}$. *Указание*. Пусть E и F – точки касания окружности сторон угла. Рассмотреть два случая. 1-*й случай*: точка M расположена на окружности вне квадрата $AFOM$ (рис. 80*а*).

2-*й случай*: точка M расположена на окружности внутри квадрата $AFOM$ (рис. 80*б*).

Для обоих случаев, если O – центр искомой окружности, а r – ее радиус, то $OM = r$ и $(r-2)^2+(r-5)^2 = r^2$.



а *б*

Рис. 80

157. Расстояния от точки M, расположенной внутри прямого угла, до сторон угла равны 1 и 3. Найдите радиус окружности, вписанной в этот угол и проходящей через точку M.

Ответ: $4\pm\sqrt{6}$. *Указание*. См. упражнение 156.

158. Расстояния от точки M, расположенной внутри угла, равного $60°$, до сторон угла равны 1 и 3. Найдите радиус окружности, вписанной в этот угол и проходящей через точку M.

Ответ: $\dfrac{8\pm2\sqrt{3}}{3}$. *Указание*. См. предыдущие задачи.

159. Через точку M проведены две прямые. Одна из них касается некоторой окружности в точке A, а вторая пересекает эту окружность в точках B и C, причем $BC = 7$ и $BM = 9$. Найдите AM.

Ответ: 12 или $3\sqrt{2}$. *Указание*. В случае расположения точки B между точками M и C $AM^2 = MB\cdot MC = 9\cdot(9+7) = 12^2$. В случае расположения точки C между точками M и B $AM^2 = MC\cdot MB = (9-7)\cdot 9 = 18$.

160. На стороне AC угла ACB, равного $45°$, взята такая точка D, что $CD = AD = 2$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, D и касающейся прямой BC.

Ответ: $\sqrt{2}$ или $5\sqrt{2}$. *Указание*. См. «Пособие», пример 37.

Произвольный треугольник и окружность

161. В треугольник ABC вписана окружность. Точка касания окружности стороны AC делит ее на отрезки с длинами 6 и 4. Периметр треугольника равен 24. Найдите синус угла BAC.

Ответ: 0,6 или 0,8. *Указание*. Пусть M – точка касания окружности стороны AC. Тогда $AM=4$, $MC=6$ или $AM=6$, $MC=4$.

162. Дан треугольник ABC, для которого $AB=5$, $BC=8$. В треугольник вписана окружность, касающаяся стороны BC в точке P. Известно, что $BP=3$. Найдите площадь треугольника BMP, где M – точка касания окружности со стороной треугольника ABC.

Ответ: $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ или $\frac{75\sqrt{3}}{28}$. *Указание*. M – точка касания окружности со стороной AB или AC.

163. К окружности, вписанной в треугольник с периметром 18, проведена касательная параллельно основанию треугольника. Отрезок касательной между боковыми сторонами равен 2. Найдите основание треугольника.

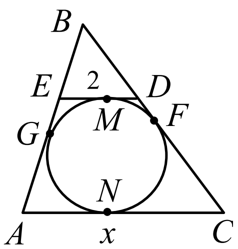


Рис. 81

Ответ. 3 или 6. *Указание*. Из равенства касательных, проведенных к окружности из одной точки, следует $AG=AN$, $CN=CF$, $EG=EM$, $DM=DF$ (рис. 81). Периметр треугольника BED равен

$$BE+BD+ED=$$
$$=18-(AG+FC)-AC=18-2AC.$$

Пусть $AC=x$. Из подобия треугольников BED и ABC следует $\frac{P_{BED}}{P_{ABC}}=\frac{ED}{AC}$ или $\frac{18-2x}{18}=\frac{2}{x}$. Остается решить уравнение $x^2-9x+18=0$.

164. В треугольнике ABC $AB=21$, $BC=15$, BD – биссектриса. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABD, если $\cos\angle BAC=\frac{5}{7}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}(14-\sqrt{79})}{6}$ или $\frac{\sqrt{6}(21-\sqrt{105})}{8}$.

Указание. По теореме косинусов получить два значения стороны AC, для каждого из них вычислить площадь S и полупериметр p треугольника ABD и воспользоваться формулой для вычисления радиуса вписанной окружности $r=\frac{S}{p}$.

165. Радиус окружности, вписанной в треугольник FGH, площадь которого равна 210, в три раза меньше высоты, проведенной из вершины F. Известно, что $GH=28$. Найдите сторону FH.

Ответ: 17 или 39. *Указание*. См. «Решебник», Глава 3, задача 10.

166. Окружность, вписанная в треугольник ABC, площадь которого равна 150, касается средней линии, параллельной стороне BC. Известно, что $BC=15$. Найдите сторону AB.

Ответ: 20 или 25. *Указание*. См. «Пособие», пример 42.

167. (ЕГЭ, 2010). В треугольнике ABC $AB=7$, $BC=9$, $CA=4$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD:DC=1:5$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найти длину отрезка EF.

Ответ: 4,5 или 6. *Указание*. См. пример 12.

168. Стороны AB и BC треугольника ABC равны соответственно 26 и 14,5, а его высота BD равна 10. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ABD и BCD.

Ответ: $5\sqrt{2}$ или $\sqrt{2}$. *Указание*. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, выражается через катеты a, b и гипотенузу c формулой $r=\frac{a+b-c}{2}$.

Решение. Пусть точки O_1 и O_2 – центры окружностей, вписанных в треугольники ABD и BCD соответственно, R и r – их радиусы, а точки E и F – точки, в которых окружности касаются отрезка BD.

Треугольники ABD и BCD прямоугольные (рис. 82*а*, *б*):

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = 24, \quad R = \frac{AD + AB - BD}{2} = 4,$$

$$CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \frac{21}{2}, \quad r = \frac{CD + BC - BD}{2} = \frac{29}{2}.$$

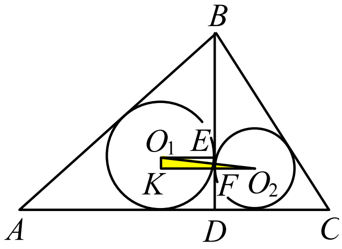


Рис. 82*а*

Опустим из точки O_1 перпендикуляр O_1K на прямую FO_2 (рис. 82*а*, *б*). Тогда расстояние, равное O_1O_2 находится из прямоугольного треугольника O_1KO_2:

1-*й случай*: пусть $\angle C$ – острый. Тогда

$$O_1K = R - r, \quad O_2K = R + r,$$

$$O_1O_2 = \sqrt{O_1K^2 + O_2K^2}, \quad O_1O_2 = 5\sqrt{2}.$$

2-*й случай*: пусть $\angle C$ – тупой. Тогда

$$O_1K = O_2K = R - r, \quad O_1O_2 = \sqrt{2}.$$

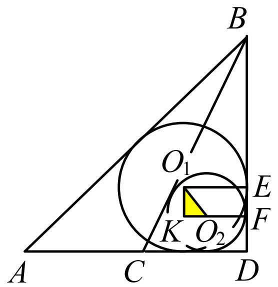


Рис. 82*б*

169. Дан треугольник ABC, в котором $\angle ABC = \arccos\frac{1}{2}$. В треугольник вписана окружность, которая касается сторон AC, BC и AB в точках K, T и M соответственно. Прямая AT пересекает окружность в точке L, причем $AL = 2$. Найдите площадь треугольника, одна из сторон которого AT, а другая содержит точку касания окружностью треугольника ABC, если $AK = 4$.

Ответ: $12\sqrt{3}$ или $\frac{4\sqrt{3}(5+2\sqrt{13})}{3}$. *Указание*. По свойству касательной и секущей $AM^2 = AL \cdot AT$ находим $AT = 8$ (рис. 83). Пусть $BM = BT = x$. Используем теорему косинусов для треугольника ABT:

$$8^2 = (x+4)^2 + x^2 - 2(x+4)\cdot x \cdot \frac{1}{2}.$$

Для положительного корня $-2 + 2\sqrt{13}$ имеем $BT = -2 + 2\sqrt{13}$, $AB = 2 + 2\sqrt{13}$. Искомую площадь вычисляем по формуле $S_{ABT} = \frac{1}{2} AB \cdot BT \cdot \sin\angle ABT$. Получаем $12\sqrt{3}$.

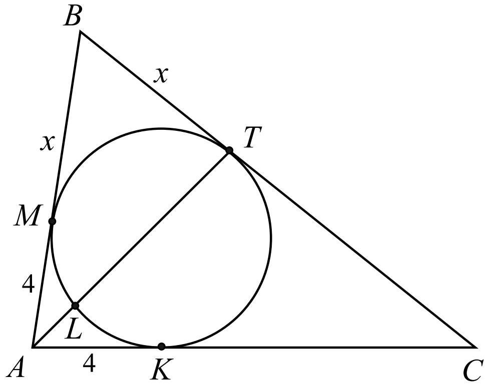


Рис. 83

Второй случай (для треугольника ATC), рассмотрите самостоятельно.

170. **(МГУ, 1996).** Касательная, проведенная через вершину M вписанного в окружность треугольника KLM, пересекает продолжение стороны KL за вершину L в точке N. Известно, что радиус окружности равен 2, $KM = \sqrt{8}$ и $\angle MNK + \angle KML = 4\angle LKM$. Найдите длину касательной MN.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{\sin 15°} = 2(\sqrt{3}+1)$ или $\frac{\sqrt{2}}{\sin 105°} = 2(\sqrt{3}-1)$. *Указание*. Угол между касательной и секущей имеет градусную меру, равную половине разности градусных мер большей и меньшей дуг, высекаемых сторонами этого угла и заключенным между ними.

По условию $\alpha + \beta = 4\gamma$ (рис. 84). Так как $\delta = \pi - \alpha - \gamma$, то сумма углов треугольника KLM равна $2\gamma + \alpha + \beta = \pi$. Отсюда $\gamma = 30°$,

$\alpha+\beta=120°$. Так как $KM=2r\cdot\sin\delta$, то $\sin\delta=\frac{\sqrt{8}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, $\delta=45°$ или $\delta=135°$.

В рассматриваемом случае $\delta=45°$. Тогда $\beta=105°$ и $\alpha=15°$. Из теоремы синусов для треугольника KLM имеем $\frac{MN}{\sin\gamma}=\frac{KM}{\sin\alpha}$, т.е. $MN=\frac{\sqrt{8}\cdot\sin 30°}{\sin 15°}$.

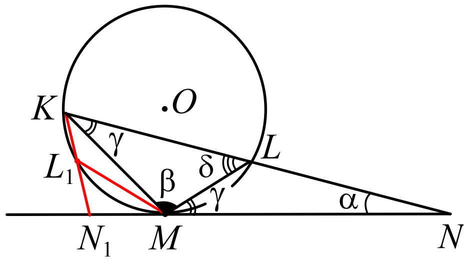


Рис. 84

Случай с $\delta=135°$ решается аналогично.

171. **(МГУ, 1996).** Касательная, проведенная через вершину C вписанного в окружность треугольника ABC, пересекает продолжение стороны AB за вершину B в точке D. Известно, что радиус окружности равен 2, $AC=\sqrt{12}$ и $\angle CDA+\angle ACB=2\angle BAC$. Найдите длину секущей AD.

Ответ: $\frac{3}{\sin 15°}=3(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ или $\frac{3}{\sin 75°}=$ $=3(\sqrt{6}-\sqrt{2})$. *Указание.* См. решение предыдущей задачи.

172. Около треугольника ABC описана окружность с центром O. Найти величину угла ACB, если угол OCB равен 15°, а угол AOC равен 50°.

Ответ: 50° или 80°. *Указание.* См. «Пособие», пример 17.

173. Угол между радиусом AO окружности, описанной около треугольника ABC и стороной AC равен $45°$. Найдите угол A треугольника ABC, если угол C равен $25°$.

Ответ: 20° или $110°$. *Указание.* 1*-й случай*: точки O и B лежат по одну сторону от прямой AC (рис. 85). Треугольник AOC равнобедренный, поэтому $\angle AOC=90°$. Вписанный угол ABC равен $45°$. В треугольнике ABC угол BAC равен $180°-45°-25°=110°$.

2*-й случай*, когда точки O и B лежат по разные стороны от прямой AC, рассмотрите самостоятельно.

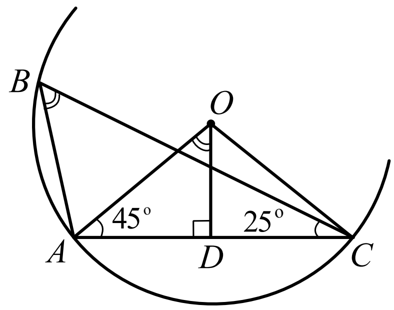


Рис. 85

174. Около треугольника ABC описана окружность с центром O, угол AOC равен $100°$. В треугольник ABC вписана окружность с центром M. Найдите угол AMC.

Ответ: $115°$ или $155°$. *Указание.* См. «Пособие», рисунок 72 примера 39.

175. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что отрезок CH равен $R\sqrt{2}$, где R – радиус окружности, описанной около треугольника. Найдите угол ACB.

Ответ: $45°$ или $135°$. *Указание.* См. «Пособие», пример 24.

176. В треугольнике ABC с углом $\angle ABC=60°$, биссектриса угла A пересекает BC в точке M. На стороне AC взята точка K так, что $\angle AMK=30°$. Найдите $\angle OKC$, где O – центр окружности, описанной около треугольника AMC.

Ответ: $30°$ или $150°$. *Указание.* Пусть N – точка пересечения прямой MK с рассматриваемой окружностью. Докажите подобие треугольников NAK и KMC и то, что точки A, K, O лежат на окружности с центром в N.

177. Две прямые пересекаются под углом $30°$. От точки пересечения A на одной из прямых отложен отрезок $AB=1$, на другой прямой отложен отрезок $AC=\sqrt{3}$. Найдите длину радиуса окружности, описанной около треугольника ABC.

Ответ: 1 или $\sqrt{7}$. *Указание*. Найти BC, используя теорему косинусов. Далее использовать формулу $a = 2R\sin\angle A$ (рис. 86).

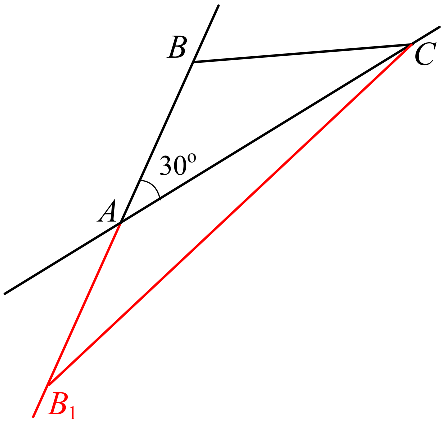


Рис. 86

178. Треугольник ABC вписан в окружность радиуса 10. Известно, что $AB = 4$ и $BC = 5$. Найдите AC.

Ответ: $2\sqrt{6} \pm \sqrt{15}$. *Указание*. См. «Пособие», пример 22.

179. В треугольнике ABC сторона $AB = 6$, $\angle BAC = 30°$, радиус описанной окружности равен 5. Найдите сторону AC.

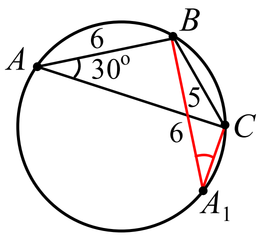


Рис. 87

Ответ: $3\sqrt{3} \pm 4$. *Указание*. Из теоремы синусов следует (рис. 87) $\sin\angle C = = \dfrac{AB}{2R} = \dfrac{6}{2\cdot 5} = 0{,}6$. Отсюда $\cos\angle C = \pm 0{,}8$. Из теоремы косинусов для $\angle C$ в треугольнике ABC (A_1BC) следует

$$6^2 = 5^2 + AC^2 - 2\cdot 5\cdot AC\cdot\cos\angle C.$$

Отсюда $AC^2 \pm 8AC - 11 = 0$.

180. В треугольнике ABC сторона $AB = 24$, $\angle BAC = 60°$, радиус описанной окружности равен 13. Найдите сторону AC.

Ответ: $12 \pm 5\sqrt{3}$. *Указание.* Из теоремы синусов получить $BC = 2R\sin\angle BAC = 13\sqrt{3}$. Далее записать теорему косинусов для $\angle BAC$: $(13\sqrt{3})^2 = 24^2 + AC^2 - 2\cdot 24\cdot AC\cdot\dfrac{1}{2}$ или $AC^2 - 24\cdot AC + 69 = 0$.

181. (МИОО, 2010). Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 13; высота, проведенная к стороне BC, равна 5; $\cos\angle BAC = \dfrac{5}{13}$. Найдите длину той хорды AM описанной окружности, которая делится пополам стороной BC.

Ответ: $\sqrt{26\left(13 \pm \sqrt{69}\right)} = \sqrt{299} \pm \sqrt{39}$.

Решение. Пусть K – середина искомой хорды AM (рис. 88). Через точку M проведем хорду MN, параллельную стороне BC. Тогда точка L пересечения отрезков AN и BC – середина AN. Значит, задача имеет два решения. Кроме того, высота AP треугольника AMN вдвое больше высоты AH треугольника ABC. Отсюда $AP = 10$ и $PH = 5$.

Пусть $R = 13$ – радиус окружности, описанной около треугольника ABC. По теореме синусов

$$BC = 2R\sin\angle BAC =$$
$$= 26\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = 26\cdot\frac{12}{13} = 24.$$

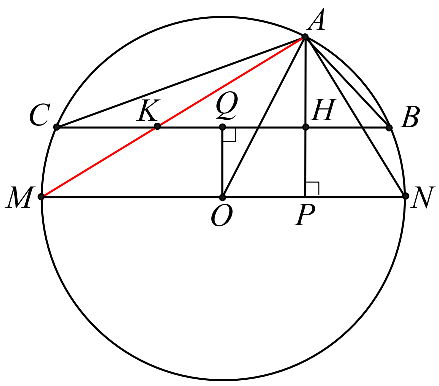


Рис. 88

Пусть O – центр окружности, описанной около треугольника ABC, точка Q – середина BC. Из прямоугольного треугольника OQB находим, что

$$OQ = \sqrt{OB^2 - BQ^2} = \sqrt{169 - 144} = 5,$$

так как расстояние между параллельными хордами BC и MN также равно 5, то точка O лежит на отрезке MN. Следовательно, MN – диаметр окружности.

Из прямоугольного треугольника AOP находим, что $OP=\sqrt{13^2-10^2}=\sqrt{69}$. Следовательно,

$$AN=\sqrt{AP^2+PN^2}=$$
$$=\sqrt{100+169-2\cdot 13\cdot\sqrt{69}+69}=\sqrt{26(13-\sqrt{69})}.$$

Аналогично находим $AN=\sqrt{26\cdot(13+\sqrt{69})}$.

182. В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN, O – центр вписанной окружности. Известно, что $BC=24$, $MN=12$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BOC.

Ответ: $8\sqrt{3}$ или 24. *Указание.* Коэффициент подобия треугольников AMN и ABC равен $|\cos\angle A|=0,5$ (см. «Пособие», задача 60 главы 1) $\angle BOC=\pi-\dfrac{\angle B+\angle C}{2}$.

183. (**ЕГЭ**, **2012**). Продолжение биссектрисы CD неравнобедренного треугольника ABC пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке E. Окружность, описанная около треугольника ADE, пересекает прямую AC в точке F, отличной от A. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $AC=8$, $AF=3$, угол BAC равен $45°$.

Ответ: $\dfrac{11\sqrt{2}}{2}$. *Указание.* Рассмотреть два варианта расположения точки F на прямой AC.

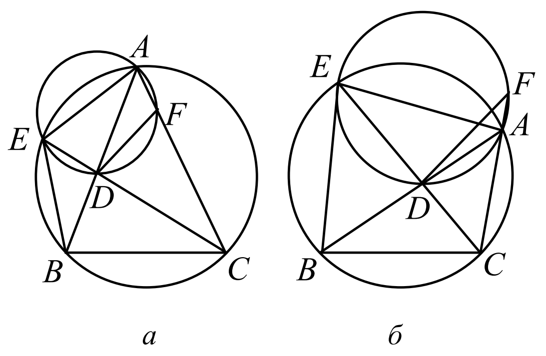


Рис. 89

1-*й случай*: пусть точка F лежит между точками A и C (рис. 89*а*). Тогда $\angle DFC=180°-\angle AFD=\angle AED=\angle ABC$, поэтому треугольники CDF и CDB равны. Значит, $BC=FC=AC-AF=5$. Отсюда, искомый радиус равен $\dfrac{BC}{2\sin\angle BAC}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$. Тогда диаметр этой окружности равен $5\sqrt{2}$, но это противоречит условию задачи, так как получается, что диаметр меньше хорды $AC=8$. Следовательно, этот случай невозможен.

2-*й случай*: точка F лежит между точками F и C (рис. 89*б*). Тогда $\angle AFD=\angle AED=$ $=\angle ABC$, поэтому треугольники CDF и CDB равны. Значит, $BC=FC=$ $=AC+AF=11$. Отсюда, искомый радиус равен $\dfrac{BC}{2\sin\angle BAC}=\dfrac{11\sqrt{2}}{2}$.

184. Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 2 и 6 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через M и N и касающейся прямой AB, если угол BAC равен $30°$.

Ответ: 2 или 14. *Указание*. Применить теорему о секущей и касательной.

Решение. Окружность может касаться прямой AB в точках P_1 или P_2 соответственно справа или слева от вершины A. В обоих случаях $AP_1^2=AP_2^2=AM\cdot AN=12$.

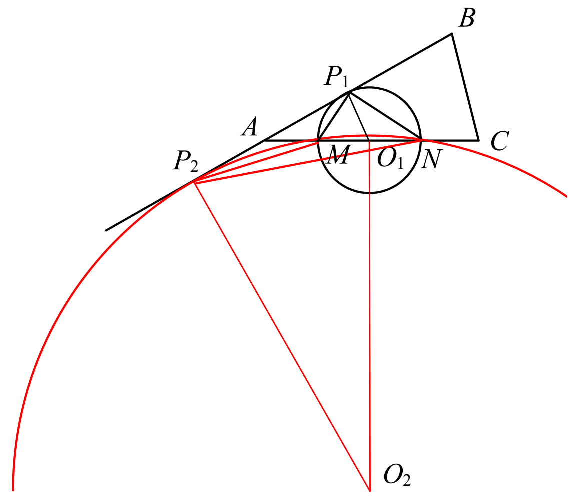


Рис. 90

1-*й случай*: пусть точка P_1 лежит правее на прямой AB правее точки A (рис. 90): $P_1M=\sqrt{AP_1^2+AM^2-2\cdot AM\cdot AP_1\cdot\cos 30°}=2$,

$P_1N=\sqrt{AP_1^2+AN^2-2\cdot AN\cdot AP_1\cdot\cos 30^\circ}=2\sqrt{3}$.

Получаем $P_1M^2+P_1N^2=MN^2$. Следовательно, угол MP_1N – прямой. Значит MN – диаметр.

Во втором случае задача сводится к рассмотрению треугольника P_2MN.

185. (МИОО, 2012). Дан треугольник ABC со сторонами $AB=15$, $AC=9$ и $BC=12$. На стороне BC взята точка D, а на отрезке AD – точка O, причем $CD=4$ и $AO=3\cdot OD$. Окружность с центром O проходит через точку C. Найдите расстояние от точки C до точки пересечения этой окружности с прямой AB.

Ответ: 7,5 или 7,2. *Решение*. Заметим, что треугольник ABC – прямоугольный и $\angle C=90^\circ$ (рис. 91). Проведем через вершину A прямую, параллельную BC. Пусть T – точка ее пересечения с прямой CO, а M – точка пересечения AB и CT. Треугольник AOT подобен треугольнику DOC с коэффициентом $\dfrac{AO}{OD}=3$, поэтому $AT=3CD=12$. Треугольник AMT равен треугольнику BMC по стороне и двум прилежащим к ней углам. Тогда M – середина AB. Следовательно, CM – медиана треугольника ABC.

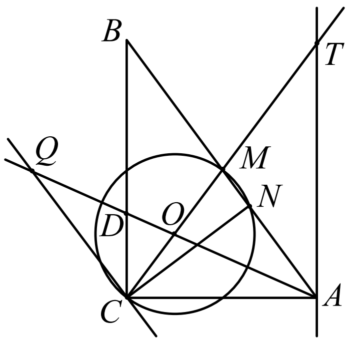


Рис. 91

Через вершину C прямую, параллельную AB. Пусть Q – точка ее пересечения с прямой AO. Треугольник CDQ подобен треугольнику BDA с коэффициентом $\dfrac{CD}{DB}=\dfrac{1}{2}$, поэтому $CQ=\dfrac{1}{2}AB=7,5$. Значит, треугольник AMO равен треугольнику QCO по стороне и двум прилежащим к ней углам. Следовательно, O – середина CM.

Окружность с центром в O проходит через точку C и при этом $OM=OC$. Следовательно, OM – радиус этой окружности. Поскольку треугольник ABC прямоугольный, то $CM=\dfrac{1}{2}AB=7,5$, а точка M – одна из точек пересечения прямой AB и окружности.

Пусть N – вторая точка. Тогда угол CNM – вписанный и опирающийся на диаметр CM, так что $CN\perp AB$, т.е. CN – высота треугольника ABC. Отсюда $CN=\dfrac{AC\cdot AB}{BC}=\dfrac{9\cdot 12}{15}=7,2$.

186. (**ЕГЭ, 2012**). В треугольнике ABC известны стороны $AB=7$, $BC=8$, $AC=9$. Окружность, проходящая через точки A и C, пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L, отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите длину отрезка KL.

Ответ: $\dfrac{9}{4}$ или 9. *Указание*. См. «Решебник», Глава 2, задача 4.

187. На стороне AB треугольника ABC, как на диаметре построена полуокружность S, которая пересекает прямые AC и BC в точках B_1 и A_1 соответственно. Найдите радиус полуокружности S, если известно, что $A_1C=8$, $B_1C=7$, а площадь треугольника A_1B_1C равна $14\sqrt{3}$.

Ответ: 13 или $\sqrt{57}$. *Указание*. Используя формулу $S_\Delta=\dfrac{1}{2}ab\sin\angle C$ для треугольника A_1B_1C, находим $\sin\angle C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Отсюда $\angle C=60^\circ$ или $\angle C=120^\circ$.

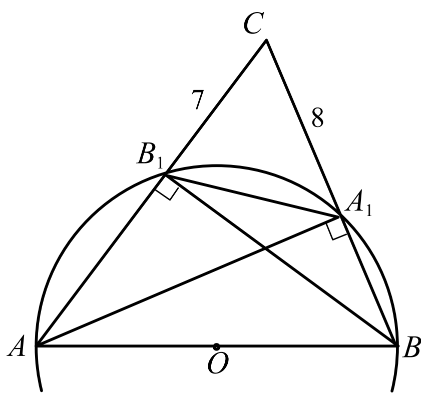


Рис. 92*а*

Решение. 1-*й случай*: пусть $\angle C = 60°$ (рис. 92*а*). Из треугольника A_1B_1C по теореме косинусов найдем $A_1B_1 = \sqrt{57}$.

Так как треугольник A_1B_1C подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $k = \cos 60° = \frac{1}{2}$, то $AB = 2\sqrt{57}$ и искомый радиус равен $\sqrt{57}$.

2-*й случай*, когда $\angle C = 120°$ (рис. 92*б*), рассмотрите самостоятельно.

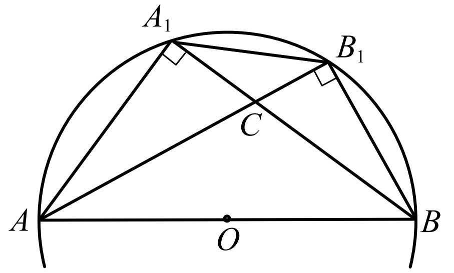


Рис. 92*б*

188. Угол C треугольника ABC равен $60°$, D – отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC как на диаметрах. Известно, что $DB : DC = 1 : 3$. Найдите угол A.

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{21}}{7}$ или $\arcsin\frac{\sqrt{21}}{14}$.

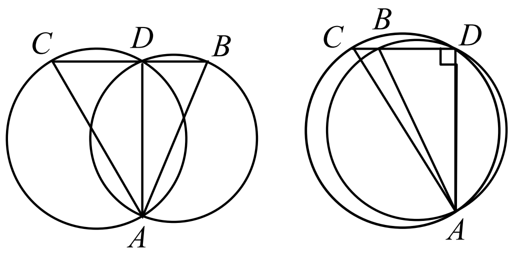


Рис. 93

Указание. 1-*й случай*: пусть точка D лежит на отрезке BC (рис. 93*а*). Пусть $DB = x$ и $DC = 3x$, тогда $AD = CD\sqrt{3} = 3\sqrt{3}x$, $AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = 2\sqrt{7}x$. Из теоремы синусов $\frac{BC}{\sin \angle A} = \frac{AB}{\sin \angle C}$, находим $\sin \angle A = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

2-*й случай*, когда точка D лежит вне отрезка BC за точку B (рис. 93*б*), рассмотрите самостоятельно.

189. В треугольнике ABC на стороне $AB = 9$ взята точка D такая, что $AD : DB = 1 : 8$. Известно, что $\angle BAC = 60°$. Найдите AC, если известно, что окружность, проходящая через точки B и D и касающаяся прямой AC, касается также прямой BC.

Ответ: 24 или 1,8. *Указание*. 1-*й случай*: пусть K – точка касания окружности и стороны AC (чертеж сделайте самостоятельно). Так как $AD = 1$, $BD = 8$, то по свойству секущей и касательной имеем $AK = 3$.

Пусть $CK = CB = x$. Используя теорему косинусов для треугольника ABC, составить уравнение

$$x^2 = 9^2 + (x+3)^2 - 2\cdot 9\cdot (x+3)\cdot \frac{1}{2}.$$

Единственному корню этого уравнения $x = 21$ соответствует $AC = 24$.

2-*й случай*: пусть точка касания K лежит вне отрезка AC за точку A (рассмотрите самостоятельно).

190. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка D так, что $AD : BD = 1 : 8$. Известно, что $BC = 9$, а $\angle BAC = 60°$. Какую длину может иметь сторона AC, если окружность, проходящая через точки B и D, касается прямых BC и AC?

Ответ: $\frac{72}{7}$ или $\frac{72}{13}$. *Указание*. См. упражнение 189.

191. Через одну и ту же точку окружности проведены хорды, равные a и b. Если соединить их концы, то получится треугольник площади S. Найдите радиус окружности.

Ответ: если $S > \frac{ab}{2}$ решений нет;

если $S = \frac{ab}{2}$, то одно решение $R = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ (хорды взаимно перпендикулярны);

если $S < \frac{ab}{2}$, то два решения $R = \frac{ab}{4S}\sqrt{a^2 + b^2 \mp 2\sqrt{a^2b^2 - 4S^2}}$ (верхний знак берется, когда угол между хордами острый, нижний знак, если угол тупой).

Указание. Использовать формулы $S_{\Delta} = \frac{1}{2}ab\sin\angle C$ и $R = \frac{abc}{4S}$.

Равнобедренный треугольник и окружность

192. Окружность описана около равностороннего треугольника *ABC*. На дуге *BC*, не содержащей точку *A*, расположена точка *M*, делящая градусную меру этой дуги в отношении $1:2$. Найдите углы треугольника *AMB*.

Ответ: 40°; 80°; 60° или 60°; 20°; $100°$. *Указание.* См. рис. 94.

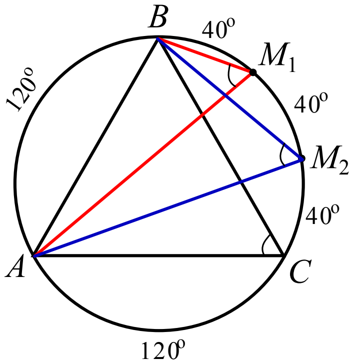
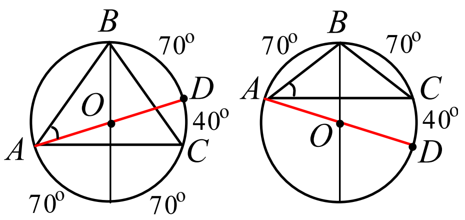


Рис. 94

193. Треугольник *ABC* равнобедренный. Радиус *OA* описанного круга образует с основанием *AC* угол *OAC*, равный $20°$. Найдите угол *BAC*.



а *б*

Рис. 95

Ответ: $35°$ или $55°$. *Указание.* См. рис. 95.

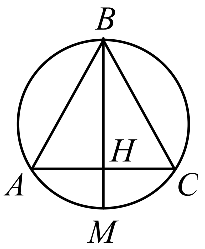


Рис. 96

194. В окружность радиуса 5 вписан равнобедренный треугольник, сумма основания и высоты которого равна 16. Найдите высоту треугольника.

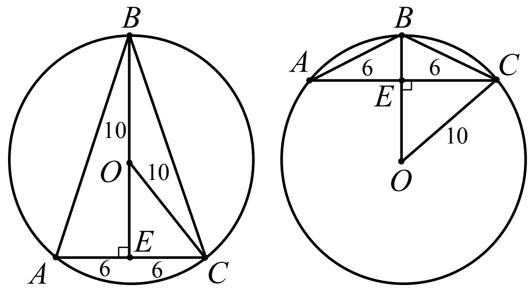
Ответ: 6,4 или 8. *Указание.* По условию (рис. 96) $AC+BH=16$. По теореме о хордах

$$AH\cdot HC=BH\cdot(BM-BH),$$

где BM – диаметр.

195. Длина окружности, описанной около равнобедренного треугольника, равна 20π. Найдите площадь этого треугольника, если его основание равно 12.

Ответ: 12 или 108. *Указание.* Рассмотрите остроугольный (рис. 97*а*) и тупоугольный (рис. 97*б*) треугольник.



а *б*

Рис. 97

196. Равносторонний треугольник *ABC* со стороной 3 вписан в окружность. Точка *D* лежит на окружности, причем хорда *AD* равна $\sqrt{3}$. Найдите хорды *BD* и *CD*.

Ответ: $\sqrt{3}$; $2\sqrt{3}$ или $2\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$. *Указание.* Точка *D* лежит на дуге, стягиваемой хордой *AB*, или на дуге, стягиваемой хордой *AC*.

197. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник *ABC*, касается его боковых сторон *AC* и *BC* в точках *M* и *N*. Найдите *AB*, если $AC=8$ и $MN=3$.

Ответ: 4 или 12. *Указание.* Касательные проведенные к окружности из одной точки равны. Из подобия треугольников *NCM* и *ABC* следует $\dfrac{8-x}{8}=\dfrac{3}{2x}$ (рис. 98). Отсюда

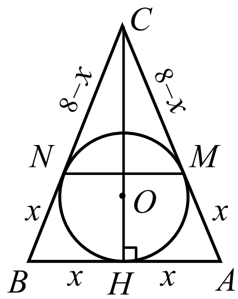


Рис. 98

$$x^2-8x+12=0.$$

198. В равнобедренный треугольник с основанием 24 и боковой стороной 20 вписана окружность. Найдите длину отрезка, заключенного между двумя сторонами треугольника, параллельного третьей стороне и касающегося окружности.

Ответ: 6 или 7,5. *Указание*. 1-*й случай*: пусть искомый отрезок параллелен основанию треугольника (рис. 99). Из равенства касательных, проведенных к окружности из одной точки, следует $AG = AN = 12$, $CN = CF = 12$, $BG = BF = 8$, $EG = EM$, $DM = DF$. Периметр треугольника BED равен 16. Пусть $ED = x$. Из подобия треугольников BED и ABC следует $\frac{P_{BED}}{P_{ABC}} = \frac{ED}{AC}$ или $\frac{16}{64} = \frac{x}{24}$. Отсюда $x = 6$.

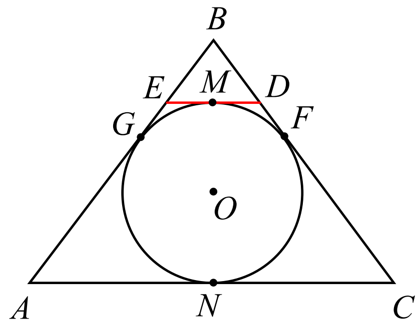


Рис. 99

2-*й случай*, когда искомый отрезок параллелен боковой стороне треугольника, рассмотрите самостоятельно.

199. (ЕГЭ, 2011). Прямая, перпендикулярная боковой стороне равнобедренного треугольника, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок прямой, заключенный внутри треугольника, равен 6, а отношение боковой стороны треугольника к его основанию равно $\frac{5}{6}$.

Ответ: $\frac{21}{4}$ или $\frac{9}{2}$. *Указание*. Пусть основание $AC = 6x$ (рис. 100), боковые стороны $AB = BC = 5x$, тогда высота $BH = 4x$. Из прямоугольного треугольника BHC найдем $\sin\angle C = \frac{4}{5}$, $\cos\angle C = \frac{3}{5}$. Тогда $\sin\angle B = = \sin 2\angle C = \frac{24}{25}$. Из прямоугольного треугольника BPQ имеем

$$PB = \frac{PQ}{\sin\angle B} = 6 : \frac{24}{25} = \frac{25}{4},$$

$$BQ = \sqrt{\left(\frac{25}{4}\right)^2 - 6^2} = \frac{7}{4}.$$

Длины отрезков $CQ = 5x - 1,75$ и $AP = 5x - 6,25$. Так как окружность вписана в четырехугольник $APQC$, то имеем $6 + 6x = = (5x - 1,75) + (5x - 6,25)$. Отсюда $x = 3,5$. Площадь и полупериметр данного треугольника соответственно равны $\frac{1}{2}\cdot 4x\cdot 6x = = 12x^2 = 12\cdot 3,5^2 = 147$ и $8x = 8\cdot 3,5 = 28$.

Получаем радиус вписанной окружности $\frac{147}{28} = 5,25$.

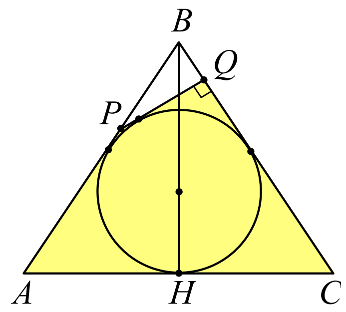


Рис. 100

2-*й случай*, когда прямая PQ пересекает основание AC и боковую сторону BC в точках P и Q соответственно, рассмотрите самостоятельно.

200. Отношение высоты равнобедренного треугольника, опущенной на боковую сторону, к другой высоте этого треугольника равно 1,2. Прямая, перпендикулярная боковой стороне треугольника, отсекает от него четырехугольник так, что отрезок этой прямой, заключенный между сторонами треугольника, равен 12, и в полученный четырехугольник можно вписать окружность. Найдите радиус этой окружности.

Ответ: 9 или 10,5. *Указание*. См. упражнение 199.

201. Прямая, перпендикулярная боковой стороне равнобедренного треугольника со сторонами 25, 25 и 14, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найдите площадь этого четырехугольника.

Ответ: $\frac{7203}{62}$ или $\frac{651}{4}$. *Указание*. См. «Пособие», пример 16.

202. В треугольнике ABC $AB = BC = 10$, $AC = 12$. В треугольник вписана окружность. Касательная к этой окружности, параллельная высоте BD, пересекает стороны треугольника в точках F и E. Найдите длину радиуса окружности, описанной около треугольника CFE.

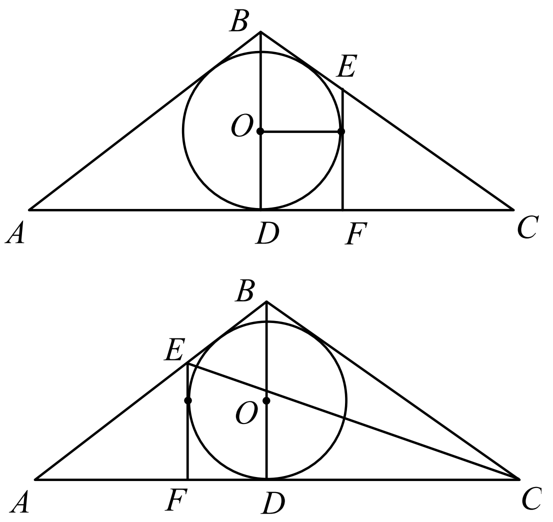


Рис. 101

Ответ: 2,5 или $0{,}5\sqrt{97}$. *Указание*. Рассмотрите два случая (рис. 101).

203. Найдите величину угла при основании равнобедренного треугольника, если отношение радиусов вписанной и описанной окружностей равно $\frac{4}{9}$.

Ответ: $\arccos\frac{1}{3}$ или $\arccos\frac{2}{3}$. *Указание*. Использовать формулы $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$, $r = \frac{S}{p}$.

Решение. Пусть угол при основании α, длина основания b, боковая сторона a, радиусы r и R. По теореме синусов $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$;

$$b = 2a\cos\alpha, \quad r = \frac{S}{p} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\sin(\pi - 2\alpha)}{2a + 2a\cos\alpha} =$$

$$= \frac{a\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$ Так как

$$\frac{r}{R} = \frac{a\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{1+\cos\alpha} : \frac{a}{2\sin\alpha} = 2(1-\cos\alpha)\cos\alpha,$$

то имеем

$$2(1-\cos\alpha)\cos\alpha = \frac{4}{9}$$

или

$$9\cos^2\alpha - 9\cos\alpha + 2 = 0.$$

Отсюда $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ или $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

204. Найдите величину угла при основании равнобедренного треугольника, если отношение радиусов вписанной и описанной окружностей равно k.

Ответ: $\arccos\frac{1\pm\sqrt{1-2k}}{2}$. *Указание*. См. упражнение 203.

205. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны, синус угла B равен $\frac{120}{169}$, а радиус вписанной окружности равен 169. Найдите радиус описанной окружности.

Ответ: 50,7 или 169. *Указание*. Из условия задачи имеем $\cos\angle B = \pm\frac{119}{169}$. Рассмотреть два случая $\cos\angle B = \frac{119}{169}$ и $\cos\angle B = -\frac{119}{169}$. Воспользоваться равенством из предыдущих задач $\frac{r}{R} = 2(1-\cos\alpha)\cos\alpha$.

206. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны, синус угла B равен $\frac{120}{169}$, а радиус описанной окружности равен 169. Найдите радиус вписанной окружности.

Ответ: 24 или 80. *Указание*. См. упражнение 205.

207. Радиус описанной около равнобедренного треугольника окружности равен 25, а вписанной в него окружности – 12. Найдите стороны треугольника.

Ответ: $8\sqrt{21}$, $10\sqrt{21}$, $10\sqrt{21}$ или 48, 40, 40. *Указание* 1. См. предыдущие задачи. *Указание* 2. Применить формулу Эйлера $d^2 = R^2 - 2Rr$, где d – расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей.

208. **(ЕГЭ, 2012).** В каком отношении точка касания вписанной в равнобедренный треугольник окружности делит его боковую сторону (считая от вершины), если известно, что отношение радиусов его вписанной окружности и окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух других сторон, равно $\frac{2}{7}$?

Ответ: $\frac{4}{5}$ или $\frac{3}{2}$. *Указание*. См. «Решебник», Глава 2, задача 17.

209. **(ЕГЭ, 2012).** Найдите угол при основании равнобедренного треугольника если известно, что отношение радиусов его вписанной окружности и окружности, касающейся стороны треугольника и продолжении двух других его сторон, равно $\frac{2}{5}$.

Ответ: $\arccos\frac{3}{7}$ или $\arccos\frac{2}{3}$. См. «Решебник», Глава 2, задача 17.

210. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 10, а основание равно 12. Окружность с центром на стороне треугольника касается двух других его сторон. Найдите радиус окружности.

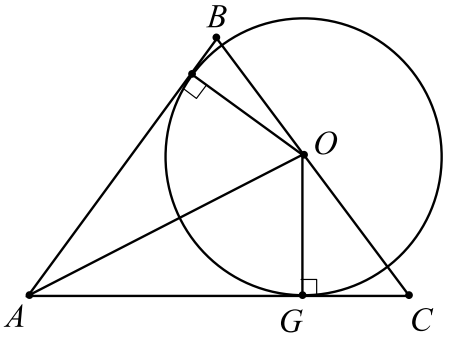


Рис. 102

Ответ: $\frac{24}{5}$ или $\frac{48}{11}$. *Указание*. *1-й случай*: пусть центр окружности лежит на боковой стороне BC треугольника ABC (рис. 102). Площадь треугольника ABC равна 48. Используя равенство $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{AOC}$, получим уравнение $48 = \frac{1}{2}r\cdot 10 + \frac{1}{2}r\cdot 12$.

Отсюда искомый радиус $r = \frac{48}{11}$.

2-й случай, когда центр окружности лежит на основании AC, рассмотрите самостоятельно.

211. На боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре построена окружность, делящая вторую боковую сторону на отрезки, равные 1 и 2. Найдите основание треугольника.

Ответ: $\sqrt{6}$ или $\sqrt{12}$. *Указание*. *1-й случай*: $BG = 1$ и $CG = 2$, тогда $AB = BC = 3$ (рис. 103). Далее использовать теорему Пифагора для прямоугольных треугольников ABG и ACG.

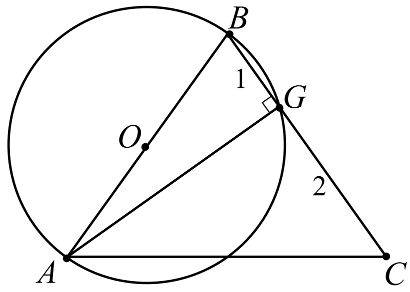


Рис. 103

2-й случай, когда $BG = 2$ и $CG = 1$.

212. На боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре построена окружность, делящая вторую боковую сторону на отрезки, равные a и b. Найдите основание треугольника.

Ответ: $\sqrt{2a(a+b)}$ или $\sqrt{2b(a+b)}$. *Указание*. $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{AB^2 - BD^2 + DC^2}$ (рис. 104).

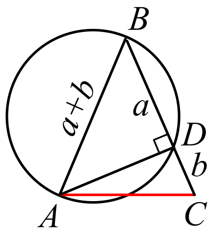


Рис. 104

213. В треугольнике ABC $AC = BC = 5$ и $\angle C = 120°$. Точка K лежит на стороне AB и делит ее в отношении $AK : KB = 1 : 4$. Найдите радиус окружности, касающейся прямых AC и BC и проходящей через точку K.

Ответ: $5\sqrt{3}\pm 6$. *Указание*. 1-*й случай*: пусть точка касания F лежит на отрезке AC (рис. 105). Используя свойство секущей и касательной $AF^2 = AK\cdot AH$, найдем $AF = 2\sqrt{3}$. Тогда $FC = 5-2\sqrt{3}$. Из прямоугольного треугольника OFC получим длину радиуса $OF = (5-2\sqrt{3})\cdot \text{tg}60^\circ = 5\sqrt{3}-6$.

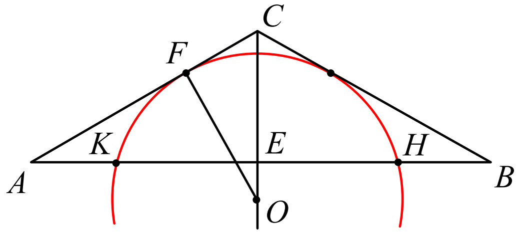


Рис. 105

Второй случай, когда точка касания F лежит вне отрезка AC за точку A, рассмотрите самостоятельно.

214. В равнобедренном треугольнике ABC на основании AC взята точка M так, что $AM = a$, $MC = b$. В треугольники ABM и CBM вписаны окружности. Найдите расстояние между точками касания этих окружностей со стороной BM.

Ответ: $\frac{|a-b|}{2}$. *Указание*. Длины отрезков касательных при вершине M в треугольниках ABM и BMC равны $\frac{AM+BM-AB}{2}$ и $\frac{CM+BM-BC}{2}$ соответственно.

215. Вершину правильного треугольника соединили отрезком с точкой, делящей противоположную сторону в отношении 3:5. В образовавшиеся при этом два треугольника вписали круги, площадь одного из которых равна 36. Найдите площадь второго круга.

Ответ: 16 или 81. *Указание*. Пусть в треугольнике ABC точка D делит сторону BC в отношении 3:5 (считая от точки B). Если $AB = 8a$, то $BD = 3a$ и $CD = 5a$. Используя теорему косинусов, найдем $AD = 7a$. Применить формулу $r = \frac{S}{p}$ для каждого из треугольников ABD и ACD и показать, что отношение квадратов радиусов вписанных кругов равно $\frac{4}{9}$.

216. В равнобедренном треугольнике с углом 120° радиус вписанной окружности равен R. Внутри треугольника расположены два равных, касающихся друг друга круга, каждый из которых касается одной боковой стороны треугольника и вписанной в треугольник окружности. Найдите радиусы этих кругов.

Ответ: $\frac{R}{3}$ или $\frac{(3-2\sqrt{2})R}{3}$. *Указание*. См. «Решебник», Глава 2, задачу 16.

217. Дан треугольник со сторонами 26, 26 и 20. Внутри него расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

Ответ: 4 или $\frac{260}{59}$. *Указание*. См. «Решебник», Глава 2, задача 16.

218. **(Юг, пробный ЕГЭ, 2012).** Радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник равен 150 *см*, а косинус угла при его основании равен $\frac{7}{8}$. Найдите радиус окружности, касающейся вписанной окружности этого треугольника и двух его сторон.

Ответ: 10 *см* или 90 *см*. *Указание*. См. «Пособие», пример 4.

219. **(ЕГЭ, 2012).** Найдите косинус угла при основании равнобедренного треугольника, если известно, что радиус его вписанной окружности в 6 раз меньше радиуса окружности, касающейся стороны и продолжений двух других сторон треугольника.

Ответ: $\frac{1}{5}$ или $\frac{5}{7}$. *Указание*. Использовать формулы: радиуса окружности, вписанной в треугольник $r = \frac{S}{p}$; радиуса внevписанной окружности треугольника, касающейся стороны a, $r_a = \dfrac{S}{p-a}$.

220. Одна окружность описана около равностороннего треугольника *ABC*, а вторая вписана в угол A и касается первой окружности. Найдите отношение радиусов окружностей.

Ответ: $3:2$ или $1:2$. *Указание.* Использовать свойство катета, лежащего против угла $30°$. Например (рис. 106), $BG = BO_1 + O_1G = 2r + r = 3r$ и $BG -$ диаметр описанной около треугольника окружности, равный $BG = 2R$. Отсюда $3r = 2R$.

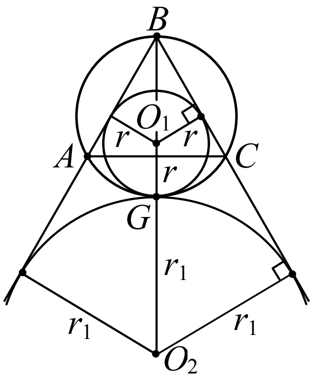


Рис. 106

221. В равнобедренный треугольник с основанием 10 и боковой стороной 13 вписана окружность. Вторая окружность касается двух сторон треугольника и первой окружности. Найдите радиус второй окружности.

Ответ: $\dfrac{40}{27}$ или $\dfrac{10(17-4\sqrt{13})}{27}$. *Указание.* См. «Решебник», Глава 2, задача 14.

222. Вершина равнобедренного треугольника с боковой стороной 25 и основанием 48 служит центром данной окружности радиуса 3. Найдите радиус окружности, касающейся данной и проходящей через концы основания треугольника.

Ответ: 74 или $\dfrac{169}{5}$. *Указание.* См. «Решебник», Глава 3, задача 4.

223. Расстояние между параллельными прямыми равно 4. На одной из них лежит точка *C*, а на другой – точки *A* и *B*, причем треугольник *ABC* – остроугольный и равнобедренный и его боковая сторона равна 5. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник *ABC*.

Ответ: $\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$ или $\dfrac{3}{2}$. *Указание.* См. «Пособие», пример 13.

224. Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит точка *C*, а на другой – точки *A* и *B*, причем треугольник *ABC* – равнобедренный и его боковая сторона равна 13. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник *ABC*.

Ответ: $\dfrac{39-9\sqrt{13}}{2}$ или $\dfrac{26-4\sqrt{13}}{3}$, или $\dfrac{10}{3}$. *Указание.* См. «Пособие», пример 13.

225. (Москва, репетиционный экзамен, 2012). Расстояние между параллельными прямыми равно 24. На одной из них лежит точка *C*, а на другой – точки *A* и *B*, причем треугольник *ABC* – остроугольный равнобедренный и его боковая сторона равна 25. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *ABC*.

Ответ: $\dfrac{625}{48}$ или $\dfrac{125}{8}$. *Указание.* См. предыдущие задачи.

226. (МИОО, 2011) Расстояние между параллельными прямыми равно 6. На одной из них лежит вершина *C*, на другой – основание *AB* равнобедренного треугольника *ABC*. Известно, что *AB* = 16. Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник *ABC*, а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника *ABC*.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ или $\dfrac{\sqrt{730}}{3}$. *Указание.* См. «Решебник», Глава 2, задача 10.

227. Высота равнобедренного треугольника, опущенная на основание, равна 45, точка касания вписанной окружности с боковой стороной делит эту сторону в отношении 8 : 9, считая от основания. Найдите радиус окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух других его сторон.

Ответ: 40 или 45. *Указание.* См. «Решебник», Глава 2, задача 13.

228. Высота равнобедренного треугольника, опущенная на основание, равна 9, а радиус вписанной в треугольник окружности равен 4. Найдите радиус окружности, касающейся стороны треугольника и продолжении двух его сторон.

Ответ: 9 или 36. *Указание.* См. «Решебник», Глава 2, задача 13.

229. Дан равнобедренный треугольник ABC $(AB = BC)$. В точке M к окружности, вписанной в треугольник, проведена касательная, перпендикулярная к стороне BC. D – точка пересечения касательной со стороной BC. Определите площадь треугольника ABC, если радиус вписанной окружности равен r, а площадь треугольника MBD равна S.

Ответ: $\dfrac{\left(\sqrt{4S^2+4Sr^2+2r^4}+r^2\right)^2}{2S-r^2}$ или $\dfrac{\left(\sqrt{4S^2-4Sr^2+2r^4}+r^2\right)^2}{2S-r^2}$. *Указание. 1-й случай*: пусть $BE = x$, $AC = 2y$, $BH = h$ (рис. 107). Четырехугольник $MOED$ – квадрат, $BD = x + r$, $MD = r$, $S_{BMD} = \frac{1}{2}(x+r)r = S$.

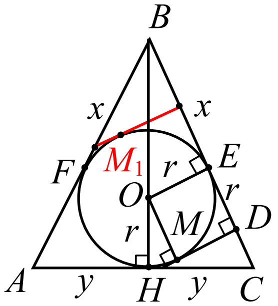


Рис. 107

Отсюда $x = \dfrac{2S - r^2}{r}$. Треугольники HBC и OBE подобны, $\dfrac{y}{r} = \dfrac{h}{x}$ и $h = \dfrac{yx}{r}$. Полупериметр и площадь треугольника ABC соответственно равны $p = x + 2y$ и

$$S_{ABC} = pr = \frac{1}{2}h \cdot 2y.$$

Отсюда

$$(x+2y)r = \frac{y^2x}{r} \text{ или } y^2x - 2yr^2 - xr^2 = 0.$$

Отсюда

$$y_{1,2} = \frac{\left(r^2 \pm \sqrt{4S^2 - 4Sr^2 + 2r^4}\right)\cdot r}{2S - r}.$$

Так как в квадратном уравнении свободный член отрицательный, то корни y_1 и y_2 разного знака. Остается подставить полученные значения в формулу $S_{ABC} = hy = \dfrac{y^2x}{r}$.

Второй случай, соответствующий касательной к окружности, проведенной через точку M_1, решается аналогично.

230. Около равнобедренного треугольника ABC $(AC = BC)$ описана окружность радиуса R. Угол C треугольника имеет величину α $\left(\alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$. Точка E – середина дуги BC описанной окружности. Найдите радиус окружности, касающейся внешним образом описанной окружности в точке E и прямой AB.

Ответ: Если $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{3}$, то

$$\frac{R\left(\cos\alpha + \sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}{1 - \sin\dfrac{\alpha}{2}} \text{ или } \frac{R\left(\cos\alpha - \sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}{1 + \sin\dfrac{\alpha}{2}};$$

если $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$, то $\dfrac{R\left(\cos\alpha + \sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}{1 - \sin\dfrac{\alpha}{2}} = 2R$;

если $\dfrac{\pi}{3} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, то

$$\frac{R\left(\cos\alpha + \sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}{1 - \sin\dfrac{\alpha}{2}} \text{ или } \frac{R\left(\sin\dfrac{\alpha}{2} - \cos\alpha\right)}{1 - \sin\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Указание. Хорда BC разбивает окружность на две дуги. Рассмотреть случаи расположения точки E на этих дугах в зависимости от величины угла α.

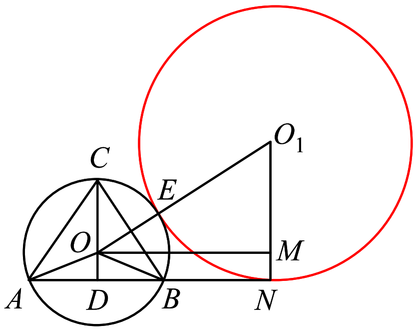


Рис. 108*а*

1-*й случай*: пусть $\frac{\pi}{3}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ и точка E расположена на малой дуге BC (рис. 108*а*, *б*). Обозначим длину искомого радиуса O_1N через x. Тогда $OO_1 = R + x$. Пусть $\angle BCD=\frac{\alpha}{2}$, тогда $\angle BOD = 2\angle BCD = \alpha$ (как центральный угол), $\angle O_1OM = \angle BCD = \frac{\alpha}{2}$ (как углы со взаимно перпендикулярными сторонами).

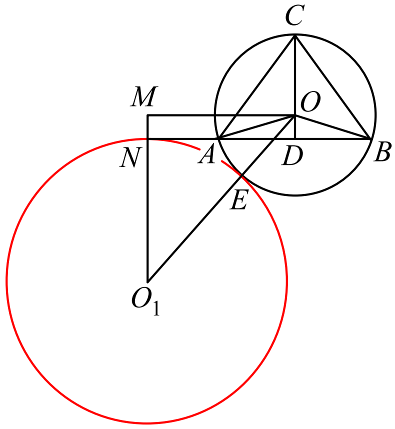


Рис. 108*б*

Из прямоугольного треугольника O_1OM имеем $O_1M = (R+x)\sin\frac{\alpha}{2}$. С другой стороны $O_1M = O_1N - OD = x - R\cos\alpha$. Из полученного уравнения $x - R\cos\alpha = (R+x)\sin\frac{\alpha}{2}$ находим $x=\dfrac{R\left(\cos\alpha+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}$.

2-*й случай*: пусть $\frac{\pi}{3}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ и точка E расположена на большой дуге BC (рис. 108*в*).

Тогда $O_1M = (R+x)\sin\frac{\alpha}{2}$ и $O_1M = O_1N + OD = x + R\cos\alpha$. Из полученного уравнения $x + R\cos\alpha = (R+x)\sin\frac{\alpha}{2}$ находим $x=\dfrac{R\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha\right)}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}$.

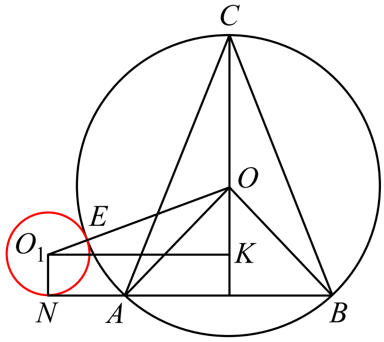


Рис. 108*в*

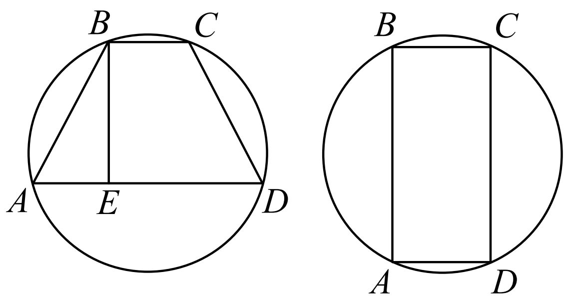
Случаи, когда $\alpha=\frac{\pi}{3}$ или $0<\alpha<\frac{\pi}{3}$, рассмотрите самостоятельно.

Четырехугольник и окружность

231. Длины соседних сторон, вписанного в окружность, четырехугольника отличаются на 1. Длина наименьшей из них также равна 1. Найдите радиус окружности.

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{2}$ или $\frac{\sqrt{21}}{3}$. *Указание*. Пусть наименьшая сторона $BC=1$, тогда длины соседних сторон $AB=CD=2$. Для стороны AD возможны два значения.

1-*й случай*: $AD=3$ (рис. 109*а*). Хорды AB и CD равны, поэтому $BC \parallel AD$ и $ABCD$ – равнобедренная трапеция. Проведем $BE \perp AD$, тогда $AE=\frac{3-1}{2}=1$, $DE=2$. Из прямоугольного треугольника ABE находим $BE=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$, а из прямоугольного треугольника BDE получаем $BD=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$. Так как в прямоугольном треугольнике гипотенуза $AB=2$ и катет $AE=1$, то $\angle BAE=60^\circ$. Для треугольника ABD запишем $BD=2R\sin\angle BAD$. Отсюда радиус окружности $R=\frac{\sqrt{7}}{2\sin 60^\circ}=\frac{\sqrt{21}}{3}$.



а *б*

Рис. 109

2-*й случай*: $AD=1$ (рис. 109*б*). Значит, $ABCD$ – прямоугольник. Радиус окружности, описанной около прямоугольника равен $R=\frac{\sqrt{2^2+1^2}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

232. Четырехугольник $KLMN$ вписан в окружность, его диагонали KM и LN пересекаются в точке F, причем $KL=8$, $MN=4$, периметр треугольника MNF равен 9, площадь треугольника KLF равна $3\sqrt{15}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KNF.

Ответ: $\frac{4\sqrt{15}}{5}$ или $\frac{8\sqrt{15}}{15}$. *Указание*. Треугольники KLF и MNF подобны по двум углам (рисунок сделайте самостоятельно), поэтому $\frac{S_{MNF}}{S_{KLF}}=\left(\frac{MN}{KL}\right)^2=\frac{1}{4}$. Отсюда $S_{MNF}=\frac{3\sqrt{15}}{4}$.
Пусть $MF=x$, тогда $FN=5-x$. По формуле Герона

$$S_{MNF}=\sqrt{\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{9}{2}-4\right)\left(\frac{9}{2}-x\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}=\frac{3\sqrt{15}}{4}.$$

Получаем уравнение $x^2-5x+6=0$, имеющее корни $x=2$ или $x=3$.

1-*й случай*. Пусть $MF=2$, тогда $FN=3$, $KF=2\cdot FN=6$. Из треугольника MNF найдем $\cos\angle FMN=\frac{2^2+4^2-3^2}{2\cdot 2\cdot 4}=\frac{11}{16}$.

Из теоремы косинусов для треугольника KMN найдем $KN=\sqrt{8^2+4^2-2\cdot 8\cdot 4\cdot\frac{11}{16}}=6$.
Площади треугольников KLF и KFN с общей высотой связаны равенством $\frac{S_{KLF}}{S_{KFN}}=\frac{LF}{FN}$, поэтому $S_{KFN}=\frac{9\sqrt{15}}{4}$. Радиус R окружности, описанной около треугольника KNF, равен $R=\frac{6\cdot 6\cdot 3}{4\cdot\frac{9\sqrt{15}}{4}}=\frac{4\sqrt{15}}{5}$.

2-*й случай*, когда $MF=3$ и $FN=2$, рассмотрите самостоятельно.

233. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности и вписан в другую окружность. Прямые AD и BC пересекаются в точке M. Найдите периметр треугольника ABM, если известно, что $AB=a$ и $CD=b$.

Ответ: $\frac{2a^2}{a-b}$ или $\frac{2ab}{b-a}$. *Указание*. Так как не указано большее основание, то возможны два случая: $b>a$ или $a>b$.

1-*й случай*: пусть $b>a$. Так как четырехугольник $ABCD$ описан около окружности, то $AD+BC=AB+CD=a+b$ (рис. 110*а*). Так как четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, то $\angle BAD+\angle BCD=180^\circ$. С другой стороны $\angle BAD+\angle MAB=180^\circ$. Значит, $\angle MAB=\angle MCD$. Отсюда следует, что треугольники ABM и CDM подобны, и коэффициент подобия $k=\dfrac{a}{b}$. Обозначим периметры $P_{ABM}=P$ и $P_{CDM}=P_1$. Находим $P_1=P-a+b+(a+b)==P+2b$. Так как $\dfrac{P}{P_1}=\dfrac{a}{b}$, то $\dfrac{P}{P+2b}=\dfrac{a}{b}$. Откуда $P=\dfrac{2ab}{b-a}$.

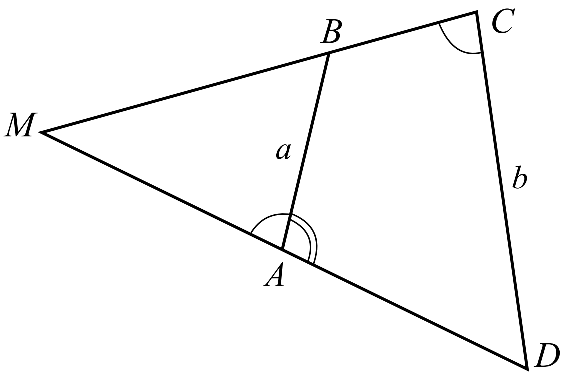


Рис. 110*а*

2-*й случай* (рис. 110*б*) рассмотрите самостоятельно.

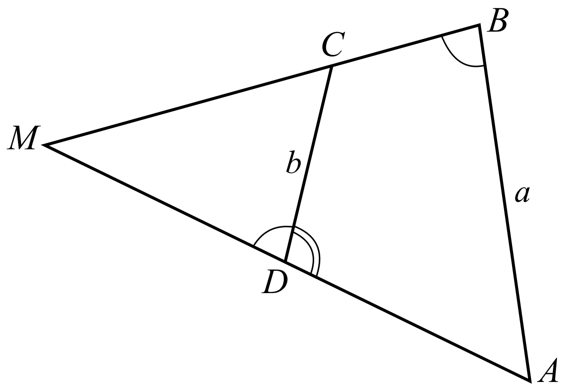


Рис. 110*б*

234. (Санкт-Петербург, репетиционный экзамен, 2011). Четырехугольник *ABCD* описан около окружности и вписан в окружность. Прямые *AB* и *DC* пересекаются в точке *M*. Найдите площадь четырехугольника, если известно, что $\angle AMD=\alpha$ и радиусы окружностей, вписанных в треугольники *BMC* и *AMD*, равны соответственно r и R.

Ответ: $\dfrac{R(R^2-r^2)}{r}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$ или $\dfrac{r(r^2-R^2)}{R}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$. *Указание.* См. упражнение 233.

1-*й случай* (рис. 111*а*). $S_{ABCD}=S_{ADM}-S_{BCM}=$ $=\dfrac{R^2}{r^2}S_{BCM}-S_{BCM}=\left(\dfrac{R^2}{r^2}-1\right)S_{BCM}$.

Полупериметр треугольника *BCM* равен длине отрезка *KM*. Из прямоугольного треугольника *OKM* находим $KM=R\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$. Так как $S_{BCM}=pr=Rr\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$, то $S_{ABCD}=\dfrac{R(R^2-r^2)}{r}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

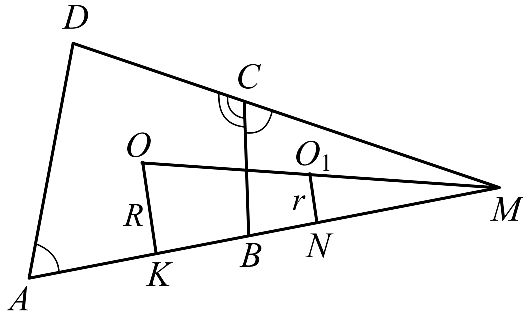


Рис. 111*а*

2-*й случай* (рис. 111*б*) рассмотрите самостоятельно.

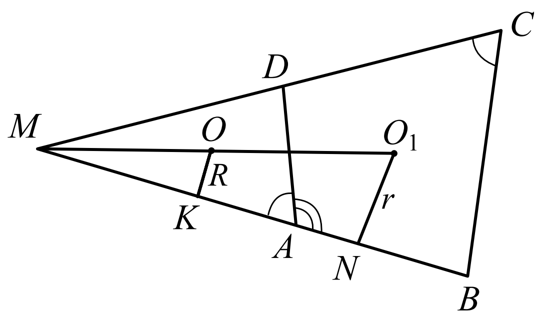


Рис. 111*б*

235. Четырехугольник *KLMN* описан около окружности и вписан в окружность. Прямые *KL* и *NM* пересекаются в точке *P*. Найдите площадь треугольника *KPN*, если известно, что $\angle KPN=\varphi$ и радиусы окружностей, вписанных в треугольники *KPN* и *LPM*, равны соответственно r и R.

Ответ: $\dfrac{r^2}{R^2}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}$ или $Rr\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}$. *Указание.* См. упражнение 234.

Параллелограмм и окружность

236. В параллелограмме $ABCD$ угол ACD равен $30°$. Известно, что центры окружностей, описанных около треугольников ABD и BCD, расположены на диагонали AC. Найдите угол ABD.

Ответ: $30°$ или $60°$. *Указание.* Центр описанной около треугольника окружности лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам. Следовательно, диагонали параллелограмма $ABCD$ перпендикулярны и он является ромбом (рис. 112*а*).

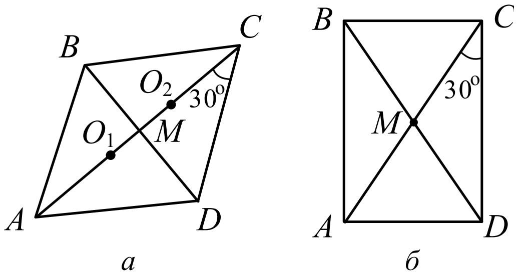


Рис. 112

Если центры окружностей совпадают, то параллелограмм $ABCD$ – прямоугольник (рис. 112*б*).

237. **(МИОО, 2010).** Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 2$, $BC = 5$, $\angle A = 60°$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найти площадь четырехугольника $ABOD$.

Ответ: $\frac{35\sqrt{3}}{12}$ или $\frac{23\sqrt{3}}{6}$. *Указание.* См. «Пособие», пример 7.

238. В параллелограмме острый угол равен $60°$, периметр равен 30, а площадь равна $28\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, касающейся двух сторон и диагонали параллелограмма.

Ответ: $\sqrt{3}$ или $\frac{5\sqrt{3}-\sqrt{19}}{2}$. *Указание.* Зная периметр $2(a+b)=30$ и площадь $ab\sin 60° = 28\sqrt{3}$ параллелограмма, находим его стороны $a=7$ и $b=8$. Используя теорему косинусов, определим диагонали $AC=13$ и $BD=\sqrt{57}$. Далее использовать формулу $r=\frac{S}{p}$ для треугольников ABC и ABD (рис. 113).

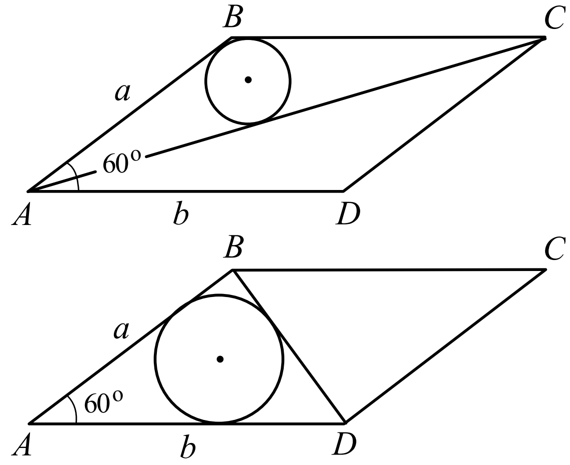


Рис. 113

239. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, длина диагонали BD равна 12. Расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников AOD и COD равно 16. Радиус окружности, описанной около треугольника AOB, равен 5. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

Ответ: $\frac{192}{17}$ или $\frac{1728}{25}$. *Указание.* Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 – центры окружностей, описанных около треугольников AOB, BOC, COD, AOD соответственно (рис. 114). Так как O_1O_2, O_2O_3, O_3O_4, O_1O_4 – серединные перпендикуляры к отрезкам BO, CO, DO и AO соответственно, то $O_1O_2O_3O_4$ – параллелограмм. $\angle O_1O_4O_3 = \angle AOB = \varphi$. Если E – проекция точки O_3 на прямую O_3O_4, то $AO = EO_3 = O_3O_4 = 16\sin\varphi$. В треугольнике ABO $AB = 2R\sin\varphi = 10\sin\varphi$. В треугольнике ABO используем теорему косинусов $AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO\cdot BO\cos\varphi$,

$$100\sin^2\varphi = 256\sin^2\varphi + 36 - 192\sin\varphi\cos\varphi,$$

$3\text{ctg}^2\varphi - 16\text{ctg}\varphi + 16 = 0$. Последнее уравнение имеет два решения $\text{ctg}\,\varphi = \frac{4}{3}$ и $\text{ctg}\,\varphi = 4$. Отсюда $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{17}}$ или $\sin\varphi = \frac{3}{5}$. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна

$$4S_{AOB}=4\cdot\frac{1}{2}\cdot AO\cdot BO\sin\varphi=192\sin^2\varphi.$$

Для первого случая (центры O_1, O_2 и O_3, O_4 попарно лежат по разные стороны от прямой BD) $S_{ABCD}=\frac{192}{17}$, во втором (центры O_1, O_2 и O_3, O_4 попарно лежат по одну сторону от прямой BD) $S_{ABCD}=\frac{1728}{25}$.

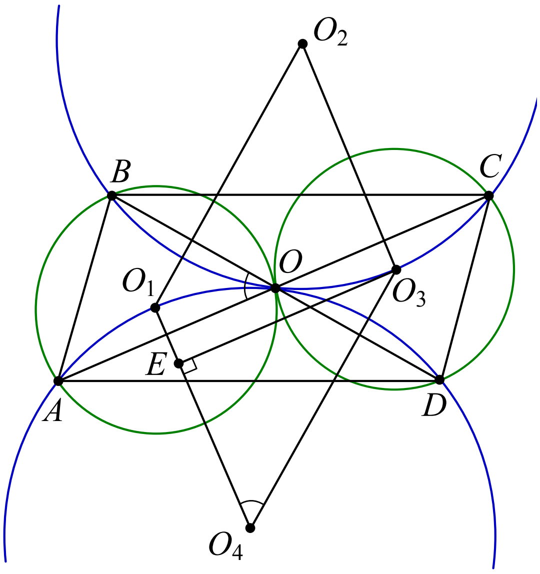


Рис. 114

240. В параллелограмме $ABCD$ $AB=2$, $BC=4$. Площадь параллелограмма равна $4\sqrt{3}$. Круг с центром в точке A касается прямой BD. Найдите площадь части круга, расположенной внутри параллелограмма.

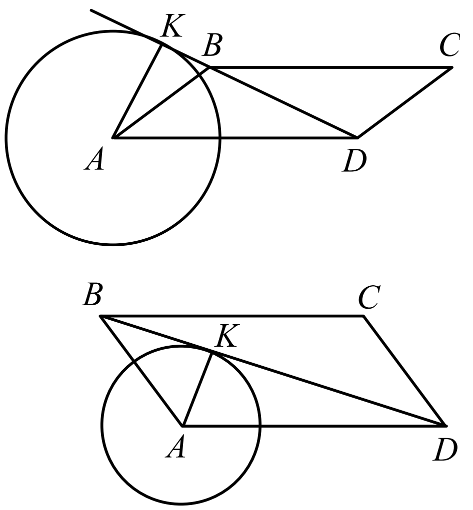


Рис. 115

Ответ: $\frac{2\pi}{3}$ или $\frac{4\pi}{7}$. *Указание*. Используя площадь параллелограмма, найдем $\sin\angle A=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (рис. 115). Далее следует рассмотреть два случая: $\angle A=60^\circ$ или $\angle A=120^\circ$.

241. **(МГУ).** В параллелограмме $ABCD$ угол BCD равен 150°, а сторона AD равна 8. Найдите радиус окружности, касающейся прямой CD и проходящей через вершину A, а также пересекающей сторону AD на расстоянии 2 от точки D.

Ответ: $10\pm4\sqrt{3}$. *Указание*. *1-й случай*: пусть точка касания лежит на отрезке CD (рис. 116*а*). Так как $LD=2$, то по свойству секущей и касательной имеем $DK^2=DL\cdot DA$. Отсюда $DK=4$. В треугольнике KLD используем теорему косинусов: $KL^2=4+16-2\cdot2\cdot4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=20-8\sqrt{3}$.

Из треугольников KLD и AKL получаем $\frac{2}{\sin\angle LKD}=\frac{KL}{\sin30^\circ}$ и $R=\frac{KL}{2\sin\angle KAL}$ соответственно. Так как $\angle LKD=\angle KAL$, то из последних двух равенств получаем $R=\frac{KL^2}{2}=10-4\sqrt{3}$.

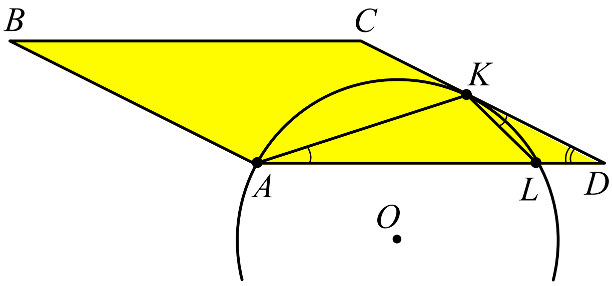


Рис. 116*а*

2-й случай, когда точка касания лежит на продолжении отрезка CD за точку D (рис. 116*б*), рассмотрите самостоятельно.

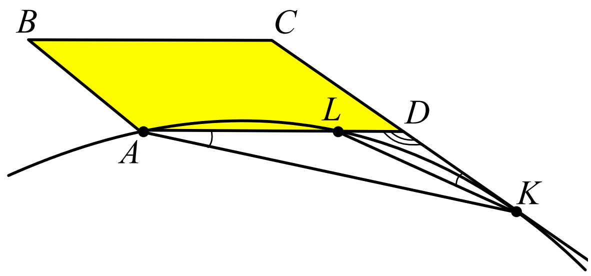


Рис. 116*б*

242. В параллелограмме $ABCD$ известны стороны $AB=a$, $BC=b$ и $\angle ABC=\alpha$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BCD и DAB.

Ответ: $\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}\cdot|\operatorname{ctg}\alpha|$. *Указание*. См. «Решебник», Глава 4, задача 11.

243. Длины сторон параллелограмма a и b $(a>b)$ острый угол равен α. Найдите радиус окружности, проходящей через вершину одного из острых углов и касающейся двух несмежных с ней сторон параллелограмма или их продолжений.

Ответ: $\left(a+b\pm\sqrt{2ab(1-\cos\alpha)}\right)\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. *Указание*. Возможны две конфигурации, удовлетворяющие условию задачи.

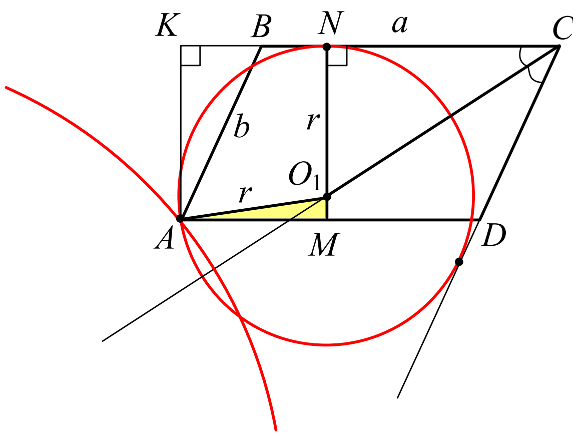


Рис. 117

1-*й случай*: пусть вершина, через которую проходит окружность, лежит на большей из двух дуг, на которые указанные в условии точки касания разбивают окружность (рис. 117). Центр окружности O лежит на биссектрисе угла C параллелограмма. Пусть искомый радиус окружности равен r. Рассмотрим прямоугольный треугольник AO_1M:

$$AO_1^2=O_1M^2+AM^2,\ AO_1=r,$$

$$O_1M=NM-O_1N=AK-r=b\sin\alpha-r,$$

$$AM=KC-NC=a+b\cos\alpha-r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Так как $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$, то получаем:

$$(b\sin\alpha-r)^2+\left(a+b\cos\alpha-r\cdot\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2=r^2.$$

Отсюда после преобразований следует:

$$\left(a+b-r\cdot\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2=2ab(1-\cos\alpha).$$

Отсюда получаем два значения r, меньший из которых соответствует рассматриваемому случаю, а больший – второму случаю, когда вершина A лежит на меньшей из двух дуг, на которые указанные в условии точки касания разбивают окружность.

Ромб и окружность

244. В ромб $ABCD$ с острым углом $60°$ вписана окружность с центром O. H – точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите сторону ромба, если $OH=1$.

Ответ: $\dfrac{2}{3}$ или $2\sqrt{3}$. *Указание*. Треугольник ABC – равносторонний (рис. 118). Точка H – точка пересечения медиан, поэтому $BH=2$, высота $OB=3$. Сторона правильного треугольника равна $\dfrac{2OB}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$.

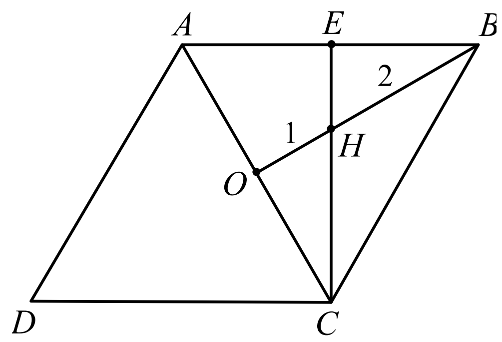


Рис. 118

2-*й случай*: переобозначить вершины ромба так, чтобы в треугольнике ABC $\angle B=120°$.

245. В параллелограмме $ABCD$ диагонали перпендикулярны, острый угол равен $60°$. Найдите расстояние от центра описанной около треугольника ABC окружности до центра окружности, вписанной в параллелограмм $ABCD$, если $AB=2\sqrt{3}$.

Ответ: 1 или $\sqrt{3}$. *Указание*. См. упражнение 244.

246. Дан ромб $ABCD$ с диагоналями $AC=24$ и $BD=10$. Проведена окружность радиуса $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ с центром в точке пересечения диагоналей ромба. Прямая, проходящая через вершину B касается этой окружности и пересекает прямую CD в точке M. Найдите CM.

Ответ: $\frac{91}{17}$ или $\frac{221}{7}$. *Указание*. 1-*й случай*: пусть точка M лежит на отрезке CD (рис. 119*а*). Из прямоугольного треугольника COD находим $CD=\sqrt{12^2+5^2}=13$. Пусть $\angle OBM=\alpha$ и $\angle BDC=\beta$. Получим $\sin\alpha=\frac{OP}{OB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha=45°$, $\cos\beta=\frac{OD}{CD}=\frac{5}{13}$, $\sin\beta=\frac{12}{13}$. Используем теорему синусов в треугольнике BMD

$$\frac{DM}{\sin 45°}=\frac{BD}{\sin(180°-45°-\beta)},$$

$$DM=\frac{5\sqrt{2}}{\sin(45°+\beta)}=\frac{130}{17}.$$

Значит, $CM=13-\frac{130}{17}=\frac{91}{17}$.

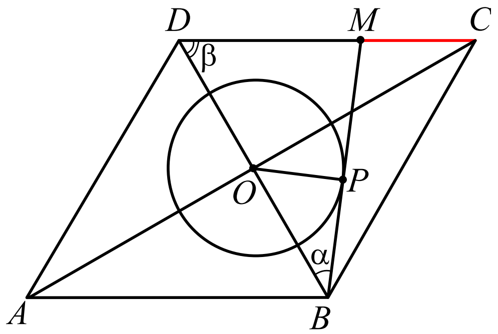


Рис. 119*а*

2-*й случай*, когда точка M лежит на продолжении отрезка CD (рис. 119б), рассмотрите самостоятельно.

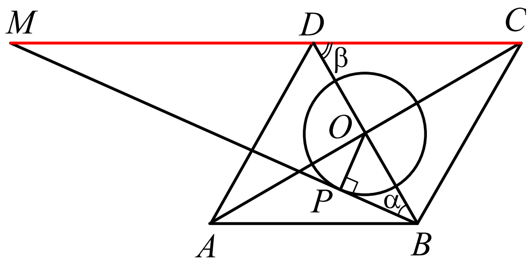


Рис. 119*б*

247. Окружность касается двух соседних сторон ромба со стороной 10 и меньшей диагональю 12. Вершина ромба лежит на прямой, проходящей через центр окружности и точку касания. Найдите радиус окружности.

Ответ: 9,6 или 2,1. *Указание*. 1-*й случай*: пусть окружность с центром M и радиуса MH касается сторон AB и AD (рис. 120).

Из подобия треугольников DHB и AOB имеем $\frac{HB}{OB}=\frac{DB}{AB}$. Отсюда $HB=\frac{6\cdot 12}{10}=7{,}2$, $AH=10-7{,}2=2{,}8$. Из подобия треугольников AHM и AOB имеем $\frac{HM}{OB}=\frac{AH}{AO}$. Отсюда $HM=\frac{6\cdot 2{,}8}{8}=2{,}1$.

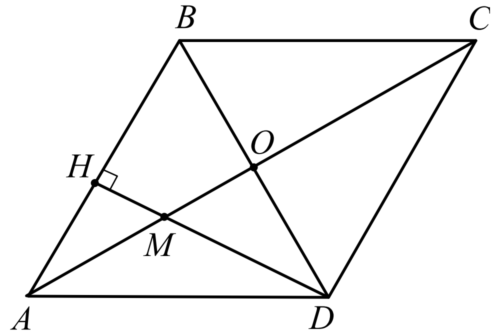


Рис. 120

2-*й случай*, когда окружность касается сторон AB и BC, рассмотрите самостоятельно.

248. Две стороны треугольника равны 7 и 8, угол между ними равен $120°$. В треугольник вписан ромб, имеющий с треугольником общий острый угол (вершина ромба, противоположная вершина этого угла, лежит на третьей стороне треугольника). Найдите радиус окружности, вписанной в ромб.

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ или $\frac{7\sqrt{3}}{10}$. *Указание*. Используя теорему косинусов, находим $BC=13$ (рис. 121). Пусть $\angle ABC=\beta$ и $\angle ACB=\gamma$. Применяем теорему синусов $\frac{AC}{\sin\beta}=\frac{BC}{\sin 120°}$, $\frac{AB}{\sin\gamma}=\frac{BC}{\sin 120°}$ и находим $\sin\beta=\frac{7\sqrt{3}}{26}$, $\sin\gamma=\frac{4\sqrt{3}}{13}$.

1-*й случай*: пусть треугольник и ромб имеют общий угол при вершине B. Треугольники LMC и ABC подобны, поэтому $\frac{LM}{AB}=\frac{CM}{CB}$, $\frac{x}{8}=\frac{13-x}{13}$. Находим сторону ромба $x=\frac{104}{21}$. Радиус окружности, вписанной в ромб, равен $\frac{S}{p}=\frac{BK\cdot BM\sin\beta}{p}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

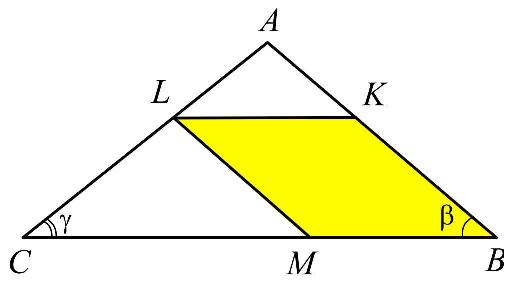


Рис. 121

2-*й случай*, когда треугольник и ромб имеют общий угол при вершине *C*, рассмотрите самостоятельно.

Прямоугольник и окружность

249. Окружность с диаметром, равным 10 проходит через соседние вершины *A* и *B* прямоугольника *ABCD*. Длина касательной, проведенной к окружности из точки *C*, равна 3. Найдите длину стороны BC, если известно, что $AB=1$.

Ответ. $\frac{3(\sqrt{15}\pm\sqrt{11})}{2}$. *Указание.* См. «Решебник», Глава 2, задача 7.

250. Окружность проходит через соседние вершины *M* и *N* прямоугольника *MNPQ*. Длина касательной, проведенной из точки *Q* к окружности, равна 1, $PQ=2$. Найдите площадь прямоугольника *MNPQ*, если диаметр окружности равен $\sqrt{5}$.

Ответ. $\sqrt{5}\pm 1$. *Указание.* См. предыдущую задачу.

251. **(Тренировочная работа МИОО, 22.11.2012).** Дан прямоугольник *KLMN* со сторонами $KN=11$, $MN=8$. Прямая, проходящая через вершину *M*, касается окружности с центром *K* радиуса 4 и пересекается с прямой *KN* в точке *Q*. Найдите *QK*.

Ответ: 5 или $\frac{37}{3}$. *Указание.* 1-*й случай*: пусть точка *Q* лежит между *K* и *N* (рис. 122*а*). Пусть $KQ=x$. Из прямоугольного треугольника *QPK* получим $PQ=\sqrt{x^2-16}$. Из подобия треугольников *QPK* и *QNM* имеем пропорцию $\frac{PK}{PQ}=\frac{MN}{QN}$, $\frac{4}{\sqrt{x^2-16}}=\frac{8}{11-x}$.

Уравнение $3x^2+22x-185=0$ имеет положительный корень $x=5$.

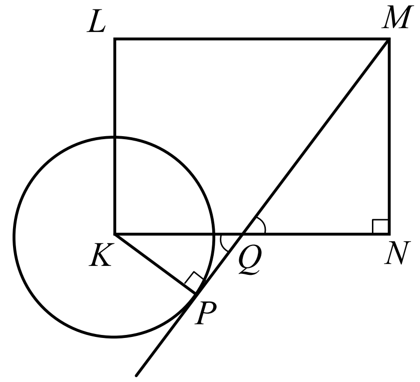


Рис. 122*а*

2-*й случай*, когда точка *Q* лежит на продолжении стороны *NK* за точку *K* (рис. 122*б*), рассмотрите самостоятельно.

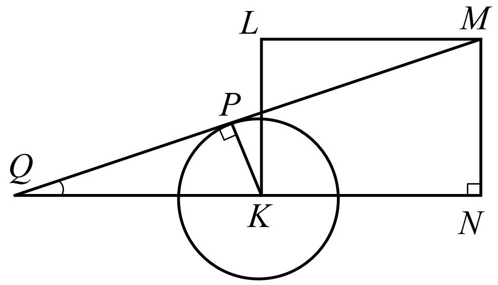


Рис. 122*б*

252. Дан прямоугольник *ABCD* со сторонами $AB=9$, $BC=12$ и окружность *S* радиуса 2 с центром *O* на стороне *AB*, проходящая через вершину *A*. Найдите радиус окружности, касающейся внешним образом окружности *S*, содержащейся внутри прямоугольника и касающейся двух его соседних сторон.

Ответ: 3. *Указание.* Пусть искомая окружность касается сторон *AB* и *BC* (рис. 123). Обозначим ее радиус через x. Использовать теорему Пифагора для треугольника OO_1M: $MO_1^2+MO^2=OO_1^2$, $x^2+(7-x)^2=(x+2)^2$. Отсюда $x=3$ или $x=15$. Второй корень не удовлетворяет условию задачи, так как радиус окружности больше стороны *AB*.

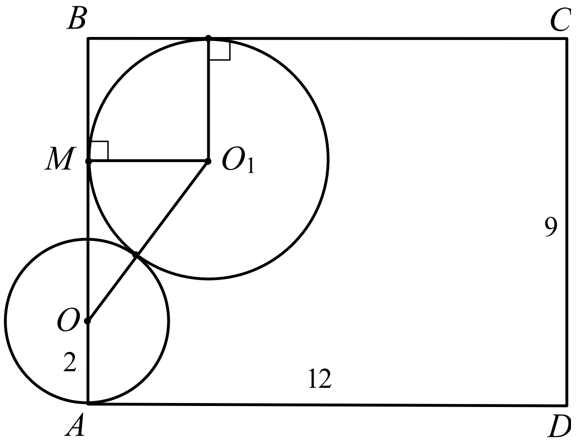
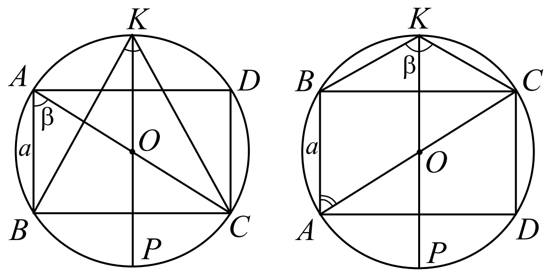


Рис. 123

Рассмотрите самостоятельно случаи:
– окружность касается сторон *BC* и *CD*;
– окружность касается сторон *AD* и *CD*;
– окружность касается сторон *AB* и *AD*.

253. В окружность вписан прямоугольник *ABCD*, сторона *AB* которого равна a. Из конца *K* диаметра *KP*, параллельного стороне *AB*, сторона *BC* видна под углом β. Найдите радиус окружности.

Ответ. $\dfrac{a}{2|\cos\beta|}$. *Указание*. Рассмотрите два случая (рис. 124*а*,*б*).



а *б*

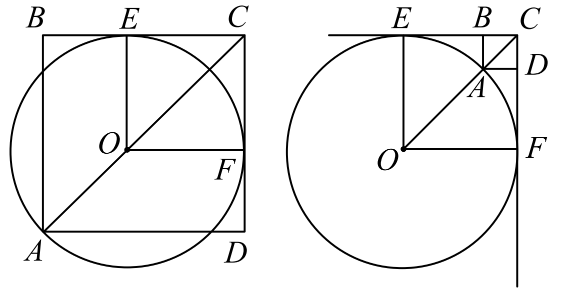
Рис. 124

Квадрат и окружность

254. Площадь квадрата *ABCD* равна 16. Окружность проходит через вершину *A* и касается прямых *BC* и *CD*. Найдите радиус этой окружности.

Ответ: $4\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$ или $4\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$. *Указание.* Для диагонали $AC = AO + OC$ или $4\sqrt{2} = R + R\sqrt{2}$ (рис. 125*а*). Отсюда искомый радиус окружности равен $4\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$.

Второй случай рассмотрите самостоятельно (рис. 125*б*).



а *б*

Рис. 125

255. На окружности радиуса 5 расположены две смежные вершины квадрата. Расстояние между центрами квадрата и окружности равно 7. Вычислите сторону квадрата.

Ответ: 6 или 8. *Указание.* Пусть сторона квадрата равна $2x$. По условию (рис. 126) $EF = 7 - FO = 2$, $FM = EM - EF = x - 2$.

По теореме о хордах $AM \cdot MD = FM \cdot MN$, где $MN = FN - FM = 12 - x$. Отсюда получаем уравнение

$$x^2 = (x-2)(12-x)$$

или

$$x^2 - 7x + 12 = 0.$$

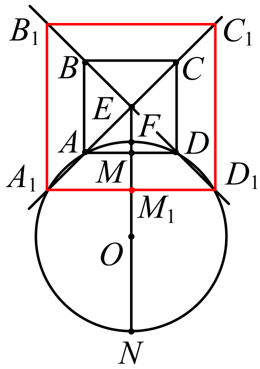


Рис. 126

256. На окружности радиуса *R* расположены две смежные вершины квадрата. Расстояние между центрами квадрата и окружности равно *d*. Вычислите сторону квадрата.

Ответ: $\dfrac{d \pm \sqrt{2R^2 - d^2}}{2}$. *Указание.* См. упражнение 255.

257. Сторона квадрата *ABCD* равна 20. Проведена окружность с центром *D* радиуса 4. Касательная, проведенная к этой окружности из вершины *B*, пересекает прямую *CD* в точке *N*. Найдите *DN*.

Ответ: 5 или $\dfrac{20}{3}$. *Указание.* *1-й случай*: пусть точка *N* лежит между *C* и *D* (рис. 127). Пусть $DN = x$. Из прямоугольного треугольника *DPN* получаем $PN = \sqrt{x^2 - 16}$. Из подобия треугольников *DPN* и *BCN* имеем

$\frac{DP}{BC}=\frac{PN}{CN}$ или $\frac{4}{20}=\frac{\sqrt{x^2-16}}{20-x}$. Полученное уравнение $3x^2+5x-100=0$ имеет один положительный корень $x=5$.

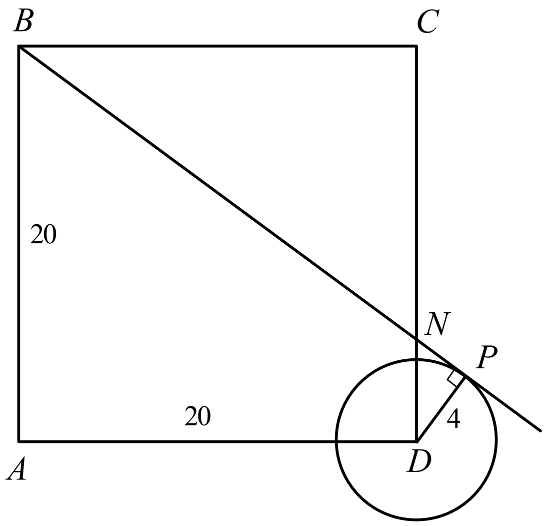


Рис. 127

2-*й случай*, когда точка *N* лежит на продолжении *CD* за точку *D*, рассмотрите самостоятельно.

258. Дан квадрат *ABCD* со стороной 7 и окружность *S* с центром в точке *A* радиуса 2. Найдите радиус окружности, касающейся внешним образом окружности *S*, содержащейся внутри квадрата и касающейся двух его соседних сторон.

Ответ: 3 или $16-9\sqrt{2}$. *Указание*. См. упражнение 252.

259. **(МИЭТ, 2000).** Сторона квадрата равна *a*. Найдите радиус окружности, касающейся стороны квадрата и окружностей радиуса *a* с центрами в вершинах квадрата, принадлежащих одной из его сторон.

Ответ: $\frac{a}{16}$ или $\frac{3a}{8}$, или $\frac{a}{6}$, или $\frac{a}{2}$. *Указание*. Использовать теорему: *точка касания окружностей лежит на линии центров и расстояние между их центрами равно сумме радиусов при внешнем касании и разности – при внутреннем.* Тогда, например, для прямоугольного треугольника *AOE* (рис. 128) получаем уравнение $(a-r)^2-r^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$, $r=\frac{3a}{8}$.

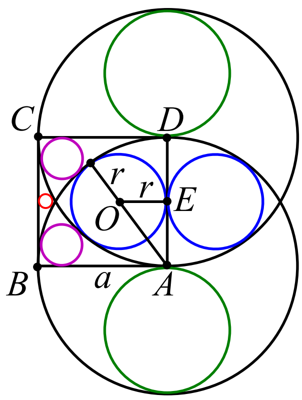


Рис. 128

260. На двух смежных сторонах квадрата построены во внешнюю часть две полуокружности и к ним проведены касательные, параллельные диаметрам. Найдите радиус окружности, касающейся этих полуокружностей и указанных касательных, если сторона квадрата равна $2a$.

Ответ: $2(2-\sqrt{3})a$ или $2a$.

Указание. В прямоугольном треугольнике O_1KE $(2a-r)^2+(a-r)^2=(a+r)^2$ (рис. 129). Больший корень является посторонним.

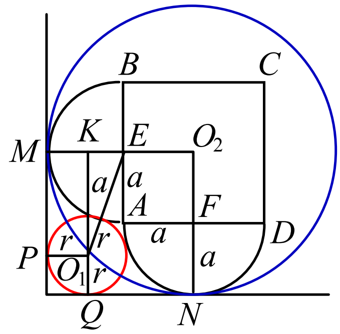


Рис. 129

Трапеция и окружность

261. Трапеция с основаниями 10 и 24 вписана в окружность радиуса 13. Найдите высоту трапеции.

Ответ: 7 или 17. *Указание*. См. «Пособие», пример 18.

262. В окружность радиуса $2\sqrt{5}$ вписана трапеция с основаниями 8 и $2\sqrt{11}$. Найдите длину диагонали трапеции.

Ответ: $2\sqrt{7+2\sqrt{11}}$ или $2\sqrt{13+2\sqrt{11}}$. *Указание*. Использовать теорему Пифагора в треугольниках OCE, OFD, ACK (рис. 130*а*, *б*).

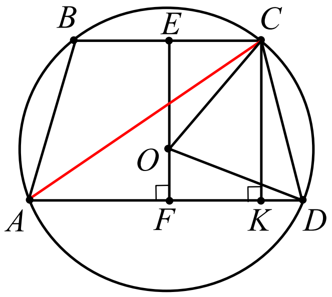


Рис. 130*а*

1-*й случай*: центр окружности находится внутри трапеции (рис. 130*а*).

2-*й случай*: центр окружности находится вне трапеции (рис. 130*б*).

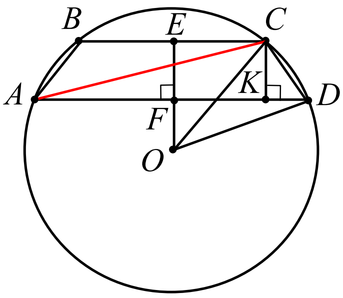


Рис. 130*б*

263. Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана в окружность с центром O. Найдите высоту трапеции, если ее средняя линия равна 5 и $\sin\angle AOB = \frac{5}{13}$.

Ответ: 1 или 25. *Указание*. См. «Пособие», пример 40.

264. (ЕГЭ, 2010). В окружность радиуса $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ вписана трапеция с основаниями 3 и 4. Найдите расстояние от центра окружности до точки пересечения диагоналей трапеции.

Ответ: $\frac{24\pm3\sqrt{29}}{14}$. *Указание*. 1-*й случай*: центр описанной окружности лежит внутри трапеции (рис. 131*а*).

Расстояние от центра окружности до верхнего основания вписанной трапеции $l_1=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=3$, расстояние от центра окружности до нижнего основания вписанной трапеции $l_2=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)^2-2^2}=\frac{\sqrt{29}}{2}$.

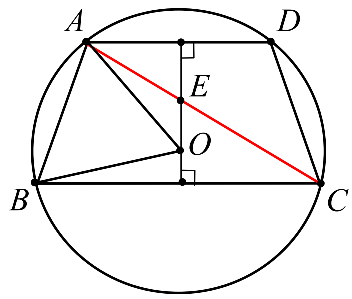


Рис. 131*а*

Тогда высота трапеции $h=l_1+l_2=\frac{6+\sqrt{29}}{2}$ и искомое расстояние равно

$$l_1-\frac{3}{7}h=3-\frac{3(6+\sqrt{29})}{14}=\frac{24-3\sqrt{29}}{14}.$$

Второй случай, когда центр описанной окружности лежит вне трапеции (рис. 131*б*), рассмотрите самостоятельно.

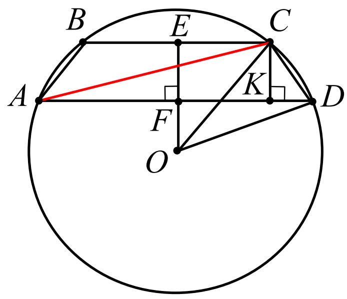


Рис. 131*б*

265. В окружность радиуса R вписана трапеция так, что расстояние от центра окружности до одного из ее оснований вдвое меньше соответствующего расстояния до другого основания. Найдите периметр трапеции, если известно, что один из ее углов равен $60°$.

Ответ: $\frac{11R\sqrt{7}}{7}$. *Указание*. Из условия задачи следует, что $\angle ABP=30°$ (рис. 132*а*). Обозначим $OM=x$, тогда $NO=2x$, $BP=3x$,

$AP = x\sqrt{3}$. Из теоремы Пифагора для треугольника OBN имеем $BN = \sqrt{R^2 - 4x^2}$, из треугольника AOM имеем $AM = \sqrt{R^2 - x^2}$.

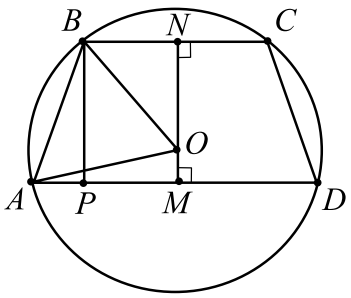


Рис. 132*а*

Пусть центр описанной окружности лежит внутри трапеции. Используя равенство $AP + BN = AM$, составим уравнение

$$x\sqrt{3} + \sqrt{R^2 - 4x^2} = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Отсюда $x = \dfrac{R}{2}$ и $NO = R$ (противоречие). Аналогично не реализуется случай, когда $OM = 2NO$.

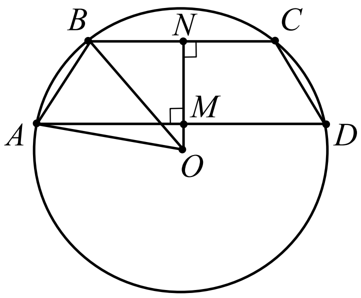


Рис. 132*б*

Для случая, когда центр описанной окружности лежит вне трапеции (рис. 132*б*), получаем $x = \dfrac{R\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$ и искомый периметр равен $\dfrac{11R\sqrt{7}}{7}$.

266. Трапеция, боковые стороны которой равны 13 и 15, описана около окружности. Радиус окружности равен 6. Найдите основания трапеции.

Ответ: 7; 21 или 12; 16. *Указание*. Использовать свойство трапеции, описанной около окружности, и применить теорему Пифагора (рис. 133).

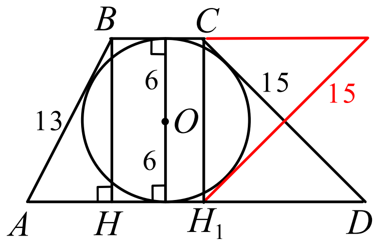


Рис. 133

267. В описанной около окружности равнобокой трапеции основания относятся как 3:5. Из вершины меньшего основания опущена высота на большее основание; точка H – основание высоты. Из точки H опущен перпендикуляр HE на боковую сторону трапеции. В каком отношении точка E делит боковую сторону?

Ответ: 1:15 или 1:3. *Указание*. Пусть основания $AD = 5x$ и $BC = 3x$, тогда отрезки $AH = \dfrac{5x - 3x}{2} = x$, $DH = \dfrac{5x + 3x}{2} = 4x$ (рис. 134). Так как в трапецию вписана окружность, то $AB = \dfrac{5x + 3x}{2} = 4x$.

Пусть точка E лежит на стороне AB. Из равенства $AH^2 = AE \cdot AB$, получим $AE = \dfrac{x}{4}$, $BE = 4x - \dfrac{x}{4} = \dfrac{15x}{4}$. Отсюда $\dfrac{AE}{BE} = \dfrac{x}{4} : \dfrac{15x}{4} = \dfrac{1}{15}$.

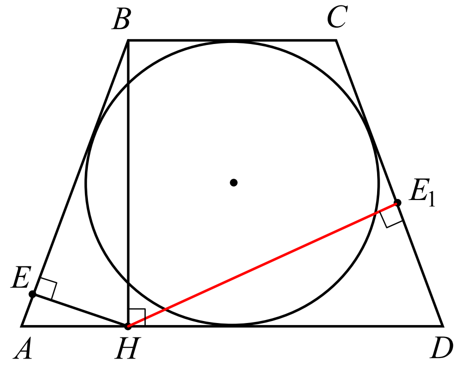


Рис. 134

Второй случай, когда точка E лежит на стороне CD, рассмотрите самостоятельно.

268. Периметр трапеции равен 112. Точка касания вписанной в трапецию окружности делит одну из боковых сторон на отрезки, равные 8 и 18. Найдите основания трапеции.

Ответ: 14; 42 или 24; 32. *Указание*. Пусть $\angle BAD$ – острый и $\angle ADC$ – острый (рис.

135*а*). В этом случае $AM=18$ и $BM=8$. Так как отрезки касательных $AM=AK=18$, $BM=BN=8$, $CN=CT$, $DK=DT$, то $CD=\dfrac{112-16-36}{2}==30$.

Центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис углов *ABC* и *BAD*, поэтому $\angle ABO+\angle OAB=90°$ и $\angle AOB=90°$.

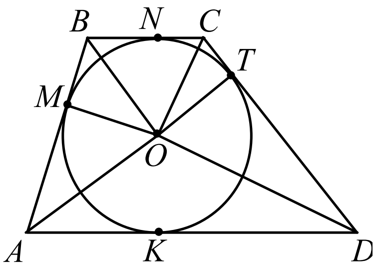


Рис. 135*а*

Пусть $CT=x$, тогда $DT=30-x$. Из прямоугольного треугольника *COD* имеем $OT^2=CT\cdot TD$ или $12^2=x(30-x)$. Отсюда $x=6$ или $x=24$ (не удовлетворяет условию, что $\angle ADC$ – острый). Тогда $BC=8+6=14$, $AD=18+(30-6)=42$.

Пусть $\angle BAD$ – тупой и $\angle ADC$ – острый (рис. 135*б*). В этом случае $AM=8$ и $BM=18$. Тогда $BC=18+6=24$, $AD=8+(30-6)=32$.

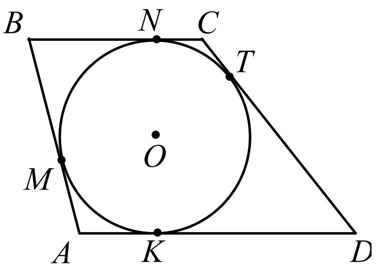


Рис. 135*б*

269. (ЕГЭ, 2011). Периметр равнобедренной трапеции равен 52. В трапецию вписана окружность радиуса 6. Прямая, проходящая через центр окружности и вершину трапеции, отсекает от трапеции треугольник. Найдите отношение площади этого треугольника к площади трапеции.

Ответ: $\dfrac{1}{2}$ или $\dfrac{162}{299}$. *Указание*. См. «Пособие», пример 9.

270. В равнобедренную трапецию с периметром 20 вписана окружность. Точка касания делит боковую сторону в отношении 1:4. Прямая, проходящая через центр окружности и вершину трапеции, отсекает от трапеции треугольник*. Найдите его площадь.*

Ответ: 10 или $\dfrac{128}{11}$. *Указание*. См. «Пособие», пример 9.

271. (**ЕГЭ**, **2012**). Боковые стороны *AB* и *CD* трапеции *ABCD* равны 7 и 24 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 12,5, средняя линия трапеции равна 27,5. Прямые *AB* и *CD* пересекаются в точке *M*. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник *BMC*.

Ответ: 1,8 или 4,8. *Указание*. См. «Решебник», Глава 2, задача 12.

272. В трапеции *ABCD* с основаниями 10 и 30 боковые стороны *AB* и *CD* равны 20 и 24 соответственно. Прямые *AB* и *CD* пересекаются в точке *O*. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *OBC*.

Ответ: $\dfrac{25}{4}$ или $\dfrac{75}{4}$. *Указание*. Использовать подобие треугольников *AOD* и *BOC* (рис. 136*а*), и формулу для радиуса описанной окружности $R=\dfrac{abc}{4S}$.

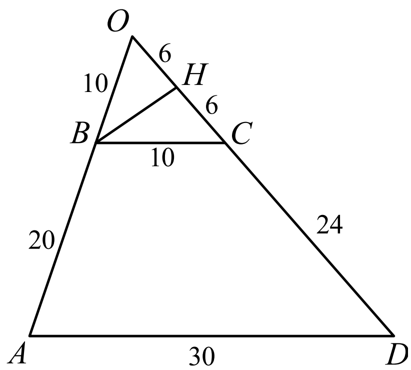


Рис. 136*а*

Для второго случая (рис. 136*б*) искомый радиус будет в три раза больше, чем в первом случае (см. подобие треугольников).

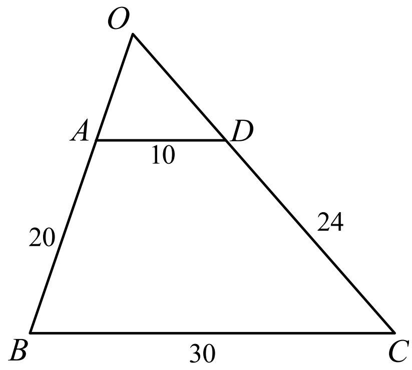


Рис. 136*б*

273. В трапеции длины боковых сторон равны 20 и 24, а длины оснований 30 и 10. Найдите радиус окружности, касающейся меньшего основания трапеции и прямых, содержащих ее боковые стороны.

Ответ: 3 или 8. *Указание*. См. предыдущую задачу. Использовать формулы для радиуса вписанной окружности $r=\dfrac{S}{p}$ и вневписанной окружности $r_a=\dfrac{S}{p-a}$.

274. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC известны длины сторон: $AB=13$, $BC=4$, $CD=13$, $AD=14$. Найдите радиус окружности, касающейся двух сторон этой трапеции и диагонали.

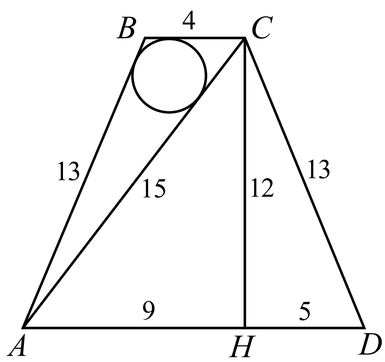


Рис. 137

Ответ: 4 или $\dfrac{3}{2}$. *Указание*. Длины отрезков $AH=9$, $HD=5$, $CH=\sqrt{13^2-5^2}=12$, $AC=\sqrt{9^2+12^2}=15$ (рис. 137). Радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, равен $\dfrac{S_{ABC}}{p_{ABC}}=\dfrac{0{,}5\cdot 4\cdot 12}{16}=\dfrac{3}{2}$.

Второй случай, когда окружность вписана в треугольник ACD, рассмотрите самостоятельно.

275. В прямоугольной трапеции с основаниями 18 и 32 тангенс острого угла равен $\dfrac{12}{7}$. Найдите радиус окружности, которая касается одного из оснований, меньшей боковой стороны и диагонали трапеции.

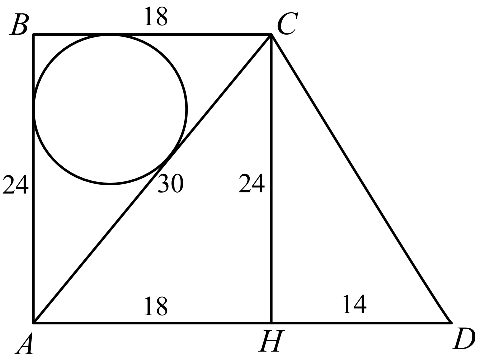


Рис. 138

Ответ: 6 или 8. *Указание*. Длины отрезков (рис. 138) $AH=BC=18$, $HD=32-18=14$, $AB=CH=14\cdot\dfrac{12}{7}=24$, $AC=\sqrt{24^2+18^2}=30$.

Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABC, равен $\dfrac{24+18-30}{2}=6$.

2-*й случай*, когда окружность вписана в треугольник ABD, рассмотрите самостоятельно.

276. **(МИОО, 2009).** Дана трапеция $ABCD$, основания которой $BC=44$, $AD=100$, а боковые стороны $AB=CD=35$. Окружность, касающаяся прямых AD и AC, касается стороны CD в точке K. Найдите длину отрезка CK.

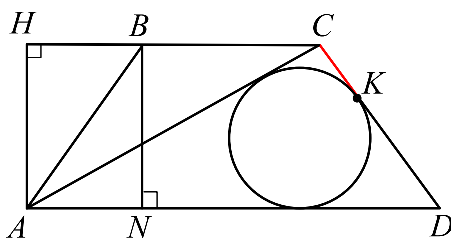


Рис. 139*а*

Ответ: 5 или 30.

Указание. Найдем $AN = (100-44):2 = 28$, $CH = 44+28 = 72$, $AH = \sqrt{35^2 - 28^2} = 21$, $AC = \sqrt{21^2 + 72^2} = 75$.

1-*й случай*: окружность вписана в треугольник ACD (рис. 139*а*). Искомый отрезок касательной $CK = p_{ACD} - AD = 105 - 100 = 5$.

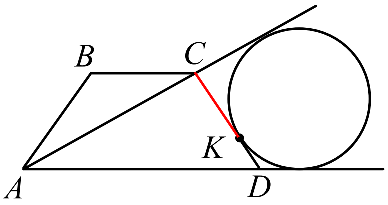


Рис. 139*б*

2-*й случай*: для треугольника ACD окружность является вневписанной (рис. 139*б*). Искомый отрезок касательной $CK = p_{ACD} - AC = 105 - 75 = 30$.

277. (МИОО, 2010). Окружность S радиуса 12 вписана в прямоугольную трапецию с основаниями 28 и 21. Найдите радиус окружности, которая касается основания, большей боковой стороны и окружности S.

Ответ: 3 или $\frac{4}{3}$. *Указание*. Из подобия треугольников H_1O_1D и HOD следует $\frac{H_1O_1}{HO} = \frac{O_1D}{OD}$ или $\frac{r_1}{12} = \frac{8-r_1}{20}$ (рис. 140). Отсюда $r_1 = 3$. Из подобия треугольников O_2CE_1 и OCE следует $\frac{O_2E}{OE} = \frac{O_2C}{OC}$ или $\frac{r_2}{12} = \frac{3-r_2}{15}$.

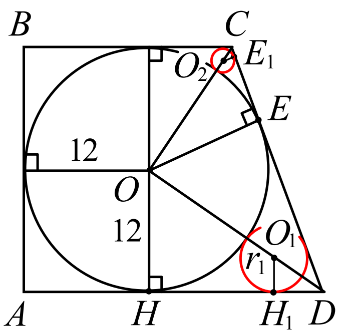


Рис. 140

Отсюда $r_2 = \frac{4}{3}$.

278. Окружность S радиуса 24 вписана в равнобедренную трапецию с основаниями 36 и 64. Найдите радиус окружности, которая касается основания, боковой стороны и окружности S.

Ответ: 4 или 6. *Указание*. Найти $KD = 64:2 = 32$, $OD = \sqrt{24^2 + 32^2} = 40$ (рис. 141). Рассмотреть случай, когда окружность касается большего основания. Из подобия треугольников OMD и ONO_1 имеем пропорцию $\frac{OM}{ON} = \frac{OD}{OO_1}$ или $\frac{24}{24-x} = \frac{40}{24+x}$. Отсюда искомый радиус $x = 6$.

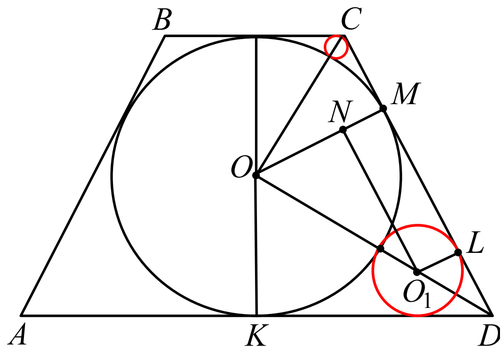


Рис. 141

Второй случай, когда окружность касается меньшего основания, рассмотрите самостоятельно.

279. Площадь равнобедренной трапеции, меньшее основание и высота равны 120, 9 и 8 соответственно. Прямая, параллельная ее основаниям, делит боковую сторону в отношении 5:3, считая от большего основания. Найдите длину отрезка, отсекаемого на этой прямой окружностью, вписанной в треугольник, образованный диагональю трапеции, ее основанием и боковой стороной.

Ответ: $2\sqrt{10}$ или $2\sqrt{3}$. *Указание*. Используя формулу площади трапеции, находим большее основание трапеции, которое равно 21. Диагональ трапеции равна 17, боковая сторона – 10.

Радиус окружности, вписанной в треугольник ACD, равен $\frac{S}{p} = \frac{0,5 \cdot 21 \cdot 8}{24} = \frac{7}{2}$ (рис. 142). Отрезок PH равен $\frac{5}{8} \cdot FH = 5$, тогда отрезок PQ равен $2\cdot\frac{7}{2}-5=2$. Пусть искомый отрезок $MN=2x$, тогда по свойству пересекающихся хорд имеем $PH\cdot PQ=MP^2$ или $5\cdot 2=x^2$. Отсюда $x=\sqrt{10}$ и $MN=2\sqrt{10}$.

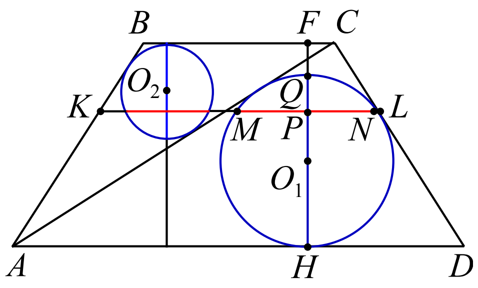


Рис. 142

Второй случай, когда окружность вписана в треугольник *ABC*, рассмотрите самостоятельно.

280. (Санкт-Петербургский ун-т, 1980). Основания равнобедренной трапеции равны a и b $(b>a)$, острый угол при вершине равен α. Найдите радиус окружности, проходящей через две вершины трапеции и касающейся ее оси симметрии.

Ответ: $\dfrac{a+b\pm 2\sqrt{ab}\sin\alpha}{4\cos^2\alpha}$. *Указание*. Ось симметрии равнобедренной трапеции – прямая KN, проходящая через середины оснований. Тогда окружность проходит через вершины, лежащие на одной боковой стороне. Центр окружности находится на серединном перпендикуляре боковой стороны. Пусть это будет сторона $CD=\dfrac{b-a}{2}\cdot\cos\alpha$ (рис. 143).

Продолжим CD до пересечения с осью симметрии в точке F:

$$FN=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha,\quad FC=\frac{a}{2\cos\alpha},\quad FD=\frac{b}{2\cos\alpha}.$$

1-*й случай*: пусть точка касания E лежит на оси симметрии выше точки F. Тогда по теореме о секущей и касательной $EF^2=FC\cdot FD$. Отсюда $EF=\dfrac{\sqrt{ab}}{2\cos\alpha}$.

$$EN=EF+FN=\frac{\sqrt{ab}}{2\cos\alpha}+\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha.$$

Пусть искомый радиус равен r, центр окружности находится в точке O.

В прямоугольном треугольнике CHO:

$CH=EN=\dfrac{\sqrt{ab}}{2\cos\alpha}+\dfrac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha$, $OH=OE-EH=$ $=r-\dfrac{a}{2}$, $CO=r$, $CO^2=CH^2+HO^2$:

$$r^2=\left(\frac{\sqrt{ab}}{2\cos\alpha}+\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)^2+\left(r-\frac{a}{2}\right)^2.$$

Отсюда $r=\dfrac{a+b+2\sqrt{ab}\sin\alpha}{4\cos^2\alpha}$.

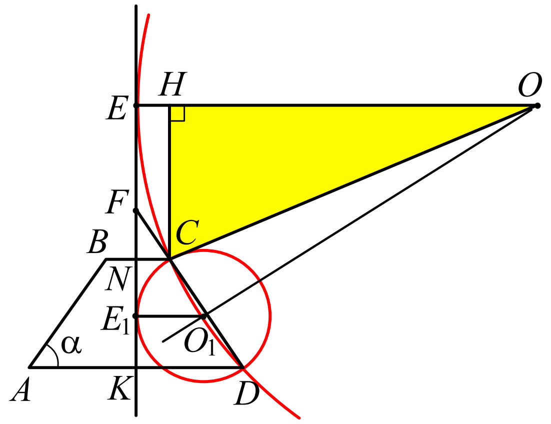


Рис. 143

Второй случай рассмотрите самостоятельно.

281. Около окружности радиуса r описана равнобочная трапеция, периметр которой равен $2p$. Найдите большее основание трапеции.

Ответ. $\dfrac{p+\sqrt{p^2-16r^2}}{2}$ при $p>4r$; при $p=4r$ трапеция превращается в квадрат. *Указание*. Свойство описанного четырехугольника: суммы противоположных сторон равны, т.е. сумма оснований и сумма боковых сторон равны p. Высота трапеции равна $2r$, $\dfrac{b-a}{2}=\sqrt{\dfrac{p^2}{4}-4r^2}$ и $a+b=p$.

282. В окружность радиуса R вписана трапеция. Прямые, проходящие через концы одного основания параллельно боковым сторонам, пересекаются в центре окружности. Боковая сторона видна из центра под углом α. Найдите площадь трапеции.

Ответ: Если $\alpha < \frac{\pi}{3}$, то два решения $R^2 \sin\alpha\left(1 \pm \sin\frac{\alpha}{2}\right)$; если $\frac{\pi}{3} \le \alpha < \pi$, то одно $R^2 \sin\alpha\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)$. *Указание.* Отрезки, отсекаемые окружностью на прямых, проходящих через концы одного основания параллельно боковым сторонам и пересекающихся в центре окружности, – диаметры.

Шестиугольник и окружность

283. (**ЕГЭ**, **2012**). Точка O – центр правильного шестиугольника $ABCDEF$, в котором $AC = 10,5$. Найдите радиус окружности, касающейся окружностей, описанных около треугольников AOB, COD и EOF.

Ответ: 7 или 3. *Указание.* Меньшая диагональ правильного шестиугольника равна $AC = AB\sqrt{3}$. Отсюда сторона данного шестиугольника (данных равносторонних треугольников) равна $AB = \frac{7\sqrt{3}}{2}$.

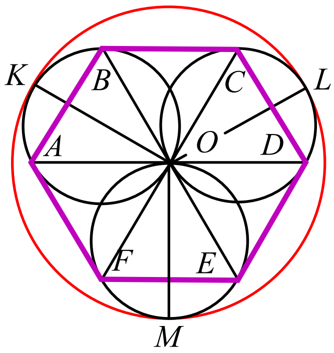


Рис. 144*а*

Радиусы окружностей, описанных около этих треугольников, равны $\frac{7\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{7}{2}$.

1-*й случай*: искомая окружность касается всех трех данных окружностей внутренним образом (рис. 144*а*). Если OK, OL и OM – диаметры данных окружностей, перпендикулярных сторонам AB, CD и FE соответственно, то искомая окружность с центром O и радиусом 7 касается данных окружностей в точках K, L, M.

2-*й случай*: искомая окружность с центром Q радиуса x касается внутренним образом описанной окружности треугольника COD и внешним образом описанных окружностей треугольников AOB и EOF (рис. 144*б*). Пусть точка P – основание перпендикуляра, опущенного из центра N описанной окружности треугольника AOB на прямую OL. Тогда

$$NP = \frac{OB}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{4},$$

$$OP = ON \cdot \sin\angle ONP = \frac{7}{2} \cdot \sin 30^\circ = \frac{7}{4},$$

$$OQ = OL - QL = 7 - x,$$

$$PQ = OP + OQ = \frac{7}{4} + 7 - x = \frac{35}{4} - x,$$

$$QN = x + \frac{7}{2}.$$

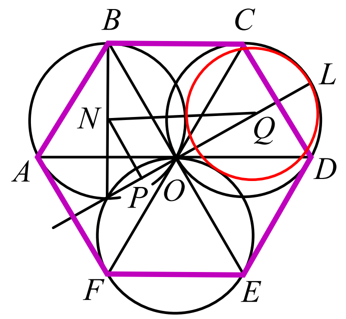


Рис. 144*б*

Используя теорему Пифагора в треугольнике PQN, составим уравнение $\left(x+\frac{7}{2}\right)^2 = \left(\frac{35}{4} - x\right)^2 + \left(\frac{7\sqrt{3}}{4}\right)^2$. Отсюда $x = 3$.

284. Точка O – центр правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 4. Найдите радиус окружности, касающейся окружностей, вписанных в четырехугольники $ABOF$, $CDOB$ и $EFOD$.

Ответ: $2 \pm \sqrt{3}$. *Указание.* Рассмотреть два случая касания: внешним образом, внутренним образом (рис. 145).

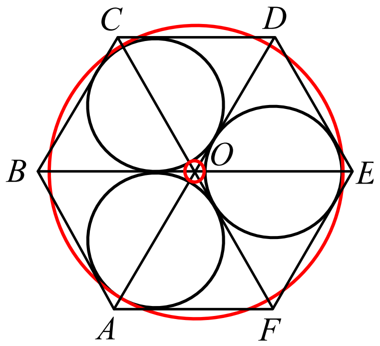


Рис. 145

Касающиеся окружности

285. Окружность S с центром в вершине прямого угла прямоугольного треугольника касается окружности, вписанной в этот треугольник. Найдите радиус окружности S, если известно, что катеты треугольника равны 5 и 12.

Ответ: $2(\sqrt{2}\pm 1)$. *Указание.* Использовать теорему: *точка касания окружностей лежит на линии центров и расстояние между их центрами равно сумме радиусов при внешнем касании и разности – при внутреннем.* Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен $\frac{5+12-13}{2}=2$.

1-*й случай*: пусть окружность S касается вписанной окружности внешним образом (рис. 146). Из прямоугольного треугольника COM имеем $OM=\frac{CO}{\cos 45°}=2\sqrt{2}$. Значит, $CK=CO-OK=2\sqrt{2}-2$.

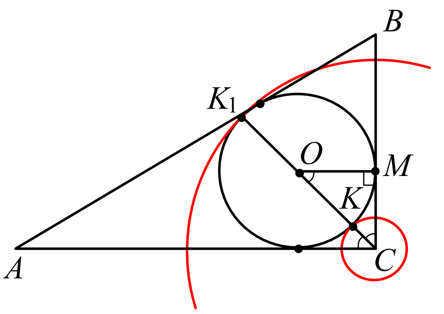


Рис. 146

2-*й случай*, когда окружность S касается вписанной окружности внутренним образом, рассмотрите самостоятельно.

286. **(МИОО, 2010).** Дана окружность радиуса 4 с центром в точке *O*, расположенной на биссектрисе угла, равного 60°. Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся данной окружности, если известно, что расстояние от точки *O* до вершины угла равно 10.

Ответ: 2 или 14, или 6, или $\frac{14}{3}$. *Указание.* 1-*й случай*: пусть искомая окружность с центром O_1 радиуса x касается внешним образом данной окружности, причем точка O_1 лежит между *A* (вершина угла) и *O* (рис. 147). Так как $\angle BAO_1=30°$, то $AO_1=2x$. Используя равенство $AO=AO_1+O_1O$, составим уравнение $10=2x+(x+4)$, $x=2$.

Остальные случаи рассмотрите самостоятельно.

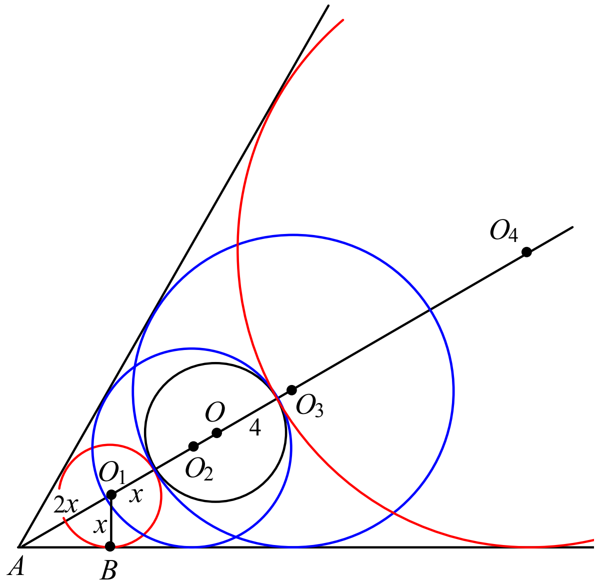


Рис. 147

287. **(ЕГЭ, 2011).** Дана окружность радиуса 4 с центром в точке *O*, расположенной на биссектрисе угла, равного 60°. Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся данной окружности внешним образом, если известно, что расстояние от точки *O* до вершины угла равно 10.

Ответ: 2 или 14. *Указание.* См. . упражнение 286.

288. Окружности радиусов R и r $(R>r)$ касаются внешним образом. К ним проведена общая внешняя касательная; *A* и *B* – точки касания. Найдите радиус окружности, касающейся внешним образом данных окружностей и касающейся прямой *AB*.

Ответ: $\frac{Rr}{(\sqrt{R}\pm\sqrt{r})^2}$. *Указание.* Использовать опорную задачу: *отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов* r_1 *и* r_2 *равен* $2\sqrt{r_1r_2}$. См. «Решебник», Глава 3, задача 9.

289. Две окружности радиусов R и r $(R>r)$ касаются в точке *A*. Определите сторону равностороннего треугольника, одна из вершин которого находится в точке A, а две другие лежат на разных окружностях.

Ответ: $\dfrac{Rr\sqrt{3}}{\sqrt{R^2+Rr+r^2}}$ или $\dfrac{Rr\sqrt{3}}{\sqrt{R^2-Rr+r^2}}$.

Указание. См. предыдущую задачу.

290. Две окружности радиусов R и r $(R>r)$ касаются. Найдите радиус третьей окружности, касающейся первых двух окружностей и прямой, проходящей через центры данных.

Ответ: $\dfrac{4Rr(R+r)}{(R-r)^2}$ или $\dfrac{4Rr(R-r)}{(R+r)^2}$.

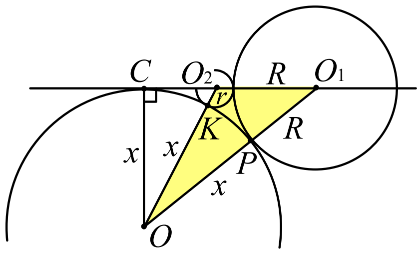


Рис. 148*а*

Указание. Выразить площадь треугольника O_1O_2O двумя способами:

по формуле $S_{O_1O_2O}=\dfrac{1}{2}O_1O_2\cdot x$

и

по формуле Герона (полупериметр равен $R+r+x$ в случае рис. 148*а* и R в случае рис. 148*б*).

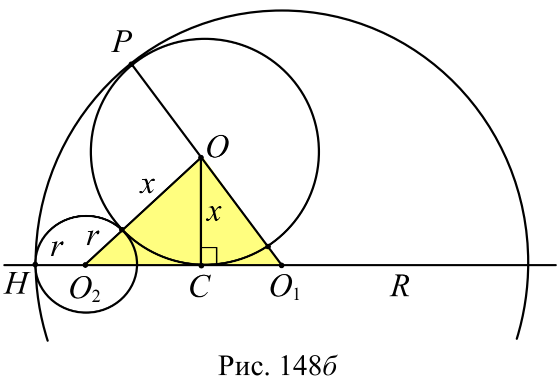


Рис. 148*б*

291. Окружности радиусов 3 и 8 касаются друг друга. Через центр одной из них проведены две прямые, каждая из которых касается другой окружности (точки A и B – точки касания). Найдите расстояние между точками A и B.

Ответ: $\dfrac{24\sqrt{7}}{11}$ или $\dfrac{16\sqrt{57}}{11}$, или 4,8.

Указание. *1-й случай*: пусть окружности касаются внешним образом, касательные проведены из центра большей окружности (рис. 149*а*). Проведем радиусы из центра O_1 в точки касания. В прямоугольном треугольнике O_1AO_2 находим катет $AO_2=\sqrt{(3+8)^2-3^2}=4\sqrt{7}$. Высота AC, опущенная на гипотенузу O_1O_2, равна $\dfrac{3\cdot 4\sqrt{7}}{11}=\dfrac{12\sqrt{7}}{11}$. Тогда $AB=\dfrac{24\sqrt{7}}{11}$.

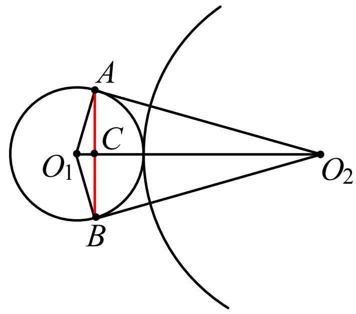


Рис. 149*а*

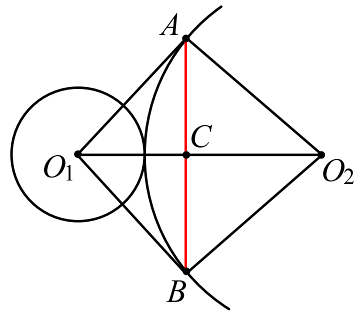


Рис. 149*б*

Второй случай, когда окружности касаются внешним образом и касательные проведены из центра меньшей окружности (рис. 149*б*), рассмотрите самостоятельно.

Третий случай, когда окружности касаются внутренним образом и касательные проведены из центра большей окружности (рис. 149*в*), рассмотрите самостоятельно.

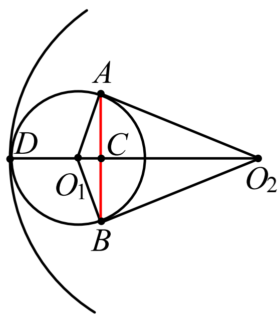


Рис. 149*в*

292. Две окружности радиусов R и r касаются внешним образом в точке A. На окружности радиуса r взята точка B, диаметрально противоположная точке A, и в этой точке проведена касательная l. Найдите радиус окружности, касающейся двух данных окружностей и прямой l.

Ответ: $R+r$ или $\frac{r(R+r)}{R}$. *Указание*. 1-*й случай*: пусть искомая окружность касается прямой l в точке B (рис. 150*а*). Поэтому ее радиус равен $R+r$.

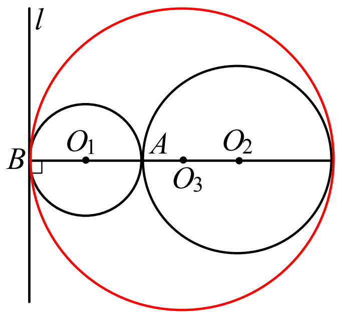


Рис. 150*а*

2-*й случай*: пусть искомая окружность с центром O_3 радиуса x касается прямой l в точке $C \neq B$ (рис. 150*б*). Стороны треугольника $O_1O_2O_3$ равны $O_1O_2 = R+r$, $O_1O_3 = r+x$, $O_2O_3 = R+x$. Высота треугольника $O_1O_2O_3$ равна $O_3H = CB = 2\sqrt{rx}$, а площадь $S = \frac{1}{2}O_1O_2 \cdot O_3H = (R+r)\sqrt{rx}$.

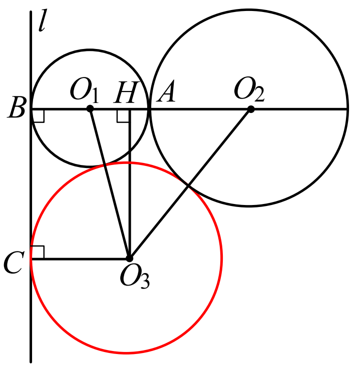


Рис. 150*б*

С другой стороны по формуле Герона площадь треугольника $O_1O_2O_3$ равна $\sqrt{(R+r+x)\cdot R\cdot r\cdot x}$. Приравнивая площади, получаем уравнение с решением $x = \frac{r(R+r)}{R}$.

293. Через центры двух равных касающихся окружностей радиуса r проведена окружность радиуса $2r$. Из некоторой точки, находящейся на последней окружности, описана окружность, касательная к первым двум. Найдите ее радиус.

Ответ: $r(\sqrt{6} \pm \sqrt{2} \pm 1)$. *Указание*. На рисунке 151 представлены четыре возможные окружности – с центрами в точках A (две концентрические) и D (две концентрические).

Рассмотрим одну окружность с центром в точке A и радиуса $AK = x$. Из прямоугольных треугольников ACE и FCE получим

$$AC^2 = AE^2 + EC^2 = (AF+FE)^2 + EC^2.$$

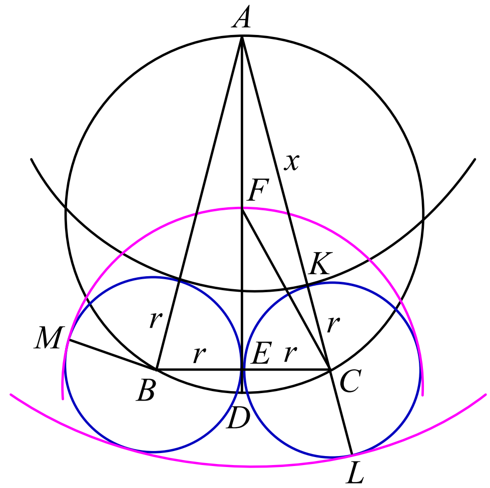


Рис. 151

Так как $AC = AK + KC = x + r$, $AF = 2r$, $EF = \sqrt{FC^2 - EC^2} = \sqrt{4r^2 - r^2} = r\sqrt{3}$, то

$$(x+r)^2 = (2r + r\sqrt{3})^2 + r^2.$$

Отсюда $(x+r)^2 = r^2(8+4\sqrt{3})$, $(x+r)^2 = r^2(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2$, $x+r = r(\sqrt{6}+\sqrt{2})$, $x = r(\sqrt{6}+\sqrt{2}-1)$.

Остальные случаи рассмотрите самостоятельно.

294. В окружности, радиус которой равен 10, проведена хорда $AB = 12$. Точка C лежит на хорде AB так, что $AC : BC = 1:3$. Найдите радиус окружности, касающейся данной окружности и касающейся хорды AB в точке C.

Ответ: 0,75 или 6,75. *Указание*. См. «Решебник», Глава 3, задача 8.

295. **(МИЭТ, 2003).** Две окружности касаются внешним образом. Прямая касается первой окружности в точке M и пересекает вторую окружность в точках A и B. Найдите радиус первой окружности, если известно, что $AB = 12$, $MB = 6$, а радиус второй окружности равен 10.

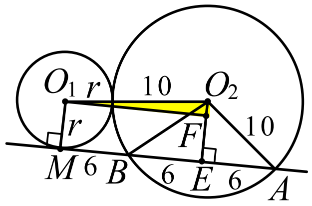


Рис. 152*а*

Ответ: 3 или 27. *Указание.* Условию задачи удовлетворяют два случая: центры окружностей расположены по одну сторону от прямой или – по разные. Задача сводится к составлению и решению уравнения $(r+10)^2 = (8 \pm r)^2 + 12^2$ (рис. 152*а*,*б*).

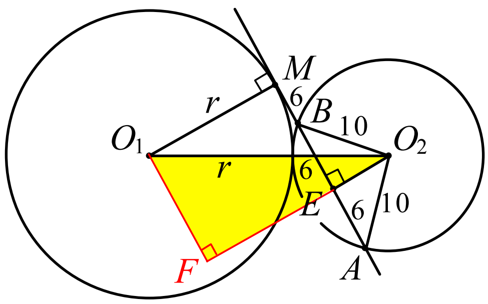


Рис. 152*б*

296. **(МИЭТ, 2003).** Две окружности касаются внутренним образом. Хорда AB большей окружности касается меньшей окружности в точке M. Найдите радиус меньшей окружности, если известно, что длины отрезков $AM = 28$, $MB = 4$, а радиус большей окружности равен 20.

Ответ: 7 или 1,75. *Указание.* См. . упражнение 295.

297. Окружности S_1 и S_2 радиусов 16 и 9 соответственно касаются в точке A. Через точку B, лежащую на окружности S_1, проведена прямая, касающаяся окружности S_2 в точке M. Найдите BM, если известно, что $AB = 4$.

Ответ: 5 или $\sqrt{7}$. *Указание.* См. «Пособие», пример 31.

298. Отношение радиусов окружностей S_1 и S_2, касающихся в точке B, равно k $(k > 1)$. Из точки A, лежащей на окружности S_1, проведена прямая, касающаяся окружности S_2 в точке C. Найдите AC, если известно, что хорда, высекаемая окружностью S_2 на прямой AB, равна b.

Ответ: $b\sqrt{k^2 \pm k}$. *Указание.* См. «Пособие», пример 31.

299. **(МИОО, 2010).** На стороне прямого угла с вершиной A взята точка O, причем $AO = 7$. С центром в точке O проведена окружность S радиуса 1. Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся окружности S.

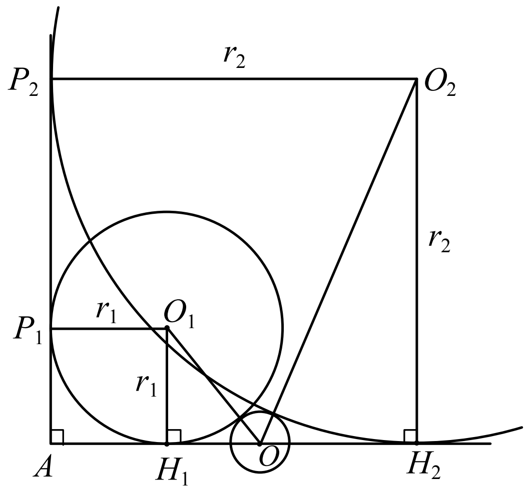


Рис. 153

Ответ: 4 или 12. *Указание.* Использовать теорему: *точка касания окружностей лежит на линии центров и расстояние между их центрами равно сумме радиусов при внешнем касании и разности – при внутреннем.*

Тогда, искомые радиусы находятся из уравнения $(\pm(7-r))^2 + r^2 = (r+1)^2$ (рис. 153).

300. Окружность S проходит через вершину C прямого угла и пресекает его стороны в точках, удаленных от вершины C на расстояния 6 и 8. Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающийся окружности S.

Ответ: 4 или 24. *Указание.* Пусть окружность S с центром O и радиуса R пересекает стороны данного прямого угла в точках A и B, $AC = 8$, $BC = 6$, искомая окружность с центром Q радиуса r касается сторон данного угла AC и BC в точках N и K соответственно, а окружность S – в точке M (рис. 154*а*,*б*).

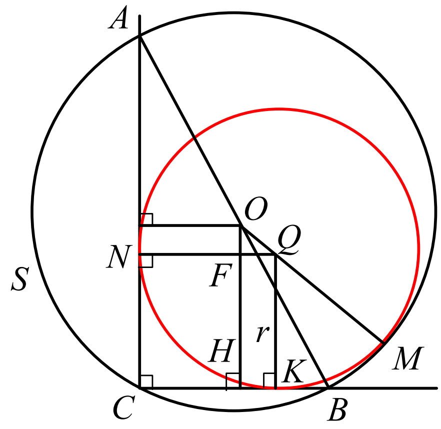


Рис. 154*а*

Радиус окружности S, описанной около треугольника ABC, равен $R=\frac{1}{2}AB=5$. Пусть OH – перпендикуляр, опущенный на прямую BC, тогда

$$OH=\frac{1}{2}AC=4 \text{ и } CH=\frac{1}{2}BC=3.$$

Так как $\angle QCK=45°$, то $CK=QK=r$. Пусть $QF\perp OH$, тогда $QF=KH=|r-3|$,

$$OF=|OH-FH|=|OH-QK|=|4-r|.$$

Если окружности касаются внутренним образом, то $OQ=OM-QM=5-r$.

Для прямоугольного треугольника OFQ, используя теорему Пифагора, имеем уравнение

$$(5-r)^2=(4-r)^2+(r-3)^2,\ r=4.$$

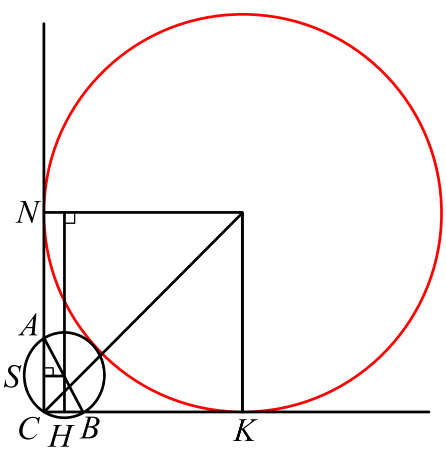


Рис. 154*б*

Случай внешнего касания рассмотрите самостоятельно.

301. Окружности радиусов 2 и 1 касаются в точке A. Найдите сторону равностороннего треугольника, одна из вершин которого находится в точке A, а две другие лежат на разных окружностях.

Ответ: 2 или $\frac{2\sqrt{21}}{7}$. *Указание*. *1-й случай*: пусть окружности касаются внешним образом (рис. 155*а*). Обозначим искомую сторону равностороннего треугольника через a. Пусть $\angle O_1AB=\alpha$, $0°<\alpha<90°$, тогда $\angle O_2AC=120°-\alpha$. Из равнобедренного треугольника O_1AB по теореме синусов находим $a=2O_1B\cos\alpha=4\cos\alpha$. Аналогично из треугольника O_2AC получаем

$$a=2O_2C\cos(120°-\alpha)=2\cos(120°-\alpha)=$$
$$=-\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha=-\cos\alpha+$$
$$+\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\frac{a}{4}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-\frac{a^2}{16}}.$$

Отсюда $5a=\sqrt{3}\cdot\sqrt{16-a^2}$, $25a^2=3(16-a^2)$, $a=\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

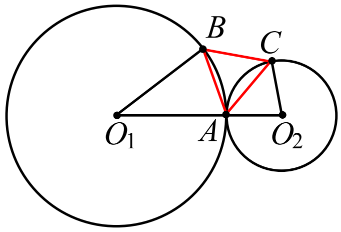


Рис. 155*а*

Второй случай, когда окружности касаются внутренним образом (рис. 155*б*), рассмотрите самостоятельно.

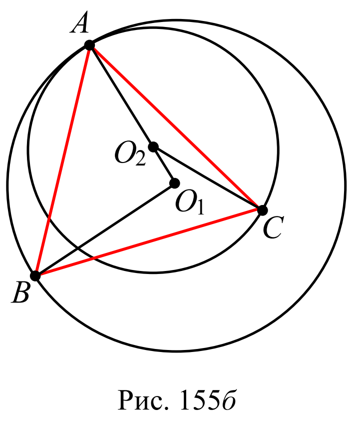


Рис. 155*б*

302. В прямоугольном секторе AOB из точки B как из центра проведена дуга OC (C – точка пересечения этой дуги с дугой AB) радиуса BO. Окружность S_1 касается дуги AB, дуги OC и прямой OA, причем точки касания различны, а окружность S_2 касается дуги AB, прямой OA и окружности S_1 (точки касания также попарно различны). Найдите отношение радиуса окружности S_1 к радиусу окружности S_2.

Ответ: $\frac{4(2\pm\sqrt{3})}{3}$. *Указание.* См. «Пособие», пример 25, или «Решебник», Глава 4, задача 8.

303. Угол ABC равен $60°$, причем $AB = BC = a$. Окружность S_1 касается AB в точке A, а окружность S_2 касается BC в точке C, кроме того, эти окружности касаются внешним образом. Найдите радиусы этих окружностей, если известно, что их отношение равно двум.

Ответ: $\frac{\sqrt{35}-3\sqrt{3}}{4}a$ и $\frac{\sqrt{35}-3\sqrt{3}}{2}a$, или $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ и $\frac{a\sqrt{3}}{3}$, или $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ и $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$, или $\frac{\sqrt{35}+3\sqrt{3}}{4}a$ и $\frac{\sqrt{35}+3\sqrt{3}}{2}a$.

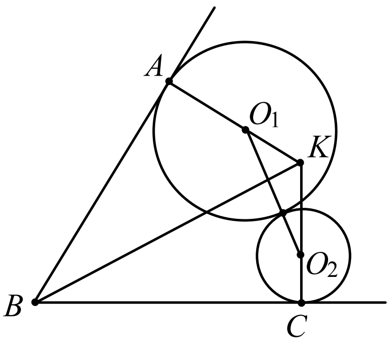


Рис. 156*а*

Указание. 1-*й случай*: пусть центры обеих окружностей лежат внутри угла (рис. 156*а*). Пусть $O_1A \perp AB$, $O_2C \perp BC$, $O_1A \cap O_2C = K$. Так как $\Delta ABK = \Delta CBK$, то

$$\angle ABK = \angle CBK = 30° \text{ и } AK = CK = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Пусть $O_2C = r$, тогда $O_1A = 2r$, $O_1K = \frac{a\sqrt{3}}{3} - 2r$, $O_2K = \frac{a\sqrt{3}}{3} - r$. Используем теорему косинусов в треугольнике O_1O_2K:

$$9r^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - 2r\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - r\right)^2 - $$
$$-2\left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - 2r\right)\left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - r\right)\cos 120°.$$

Отсюда $\frac{\sqrt{35}-3\sqrt{3}}{4}a$.

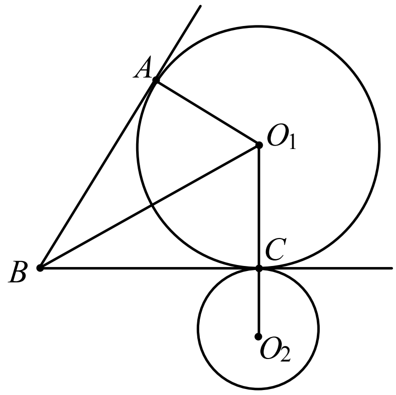


Рис. 156*б*

Остальные три случая расположения центров окружностей относительно сторон данного угла (рис. 156*б*, 156*в*, 156*г*) рассмотрите самостоятельно.

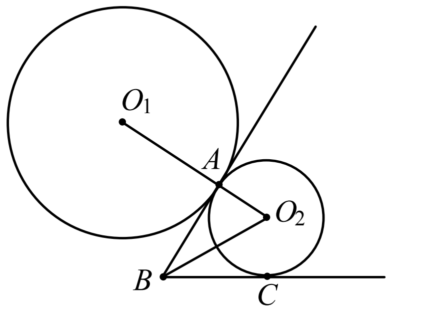


Рис. 156*в*

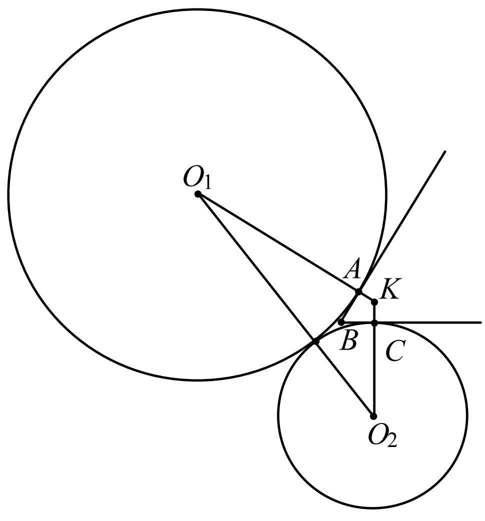


Рис. 156*г*

Пересекающиеся окружности

304. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведены диаметры AC и AD этих окружностей. Найдите расстояние между центрами окружностей, если $BD = 6$, $BC = 14$.

Ответ: 4 или 10. *Указание*. См. «Пособие», пример 6.

305. Окружности радиусов 25 и 30 пересекаются в точках A и B. Найдите расстояние между центрами окружностей, если $AB = 48$.

Ответ: 25 или 11. *Указание*. См. «Пособие», пример 33.

306. **(МИОО, 2012).** Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведены диаметры AC и AD этих окружностей. Найдите расстояние между центрами окружностей, если $BD = 3$, $BC = 7$.

Ответ: 2 или 5. *Указание*. См. «Пособие», пример 6.

307. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведены диаметры AC и AD этих окружностей. Найдите расстояние между центрами окружностей, если $BC = a$, $BD = b$.

Ответ: $\frac{a+b}{2}$ или $\frac{|a-b|}{2}$. *Указание*. См. упражнение 306.

308. Расстояние между центрами двух окружностей равно 20, длина радиуса одной из них равна 10. Окружности пересекаются в точках A и B, причем $AB = 12$. Найдите длину радиуса второй окружности.

Ответ: $6\sqrt{5}$ или $2\sqrt{205}$. *Указание*. Рассмотреть два случая расположения центров окружностей относительно AB (рис. 157*а*,*б*).

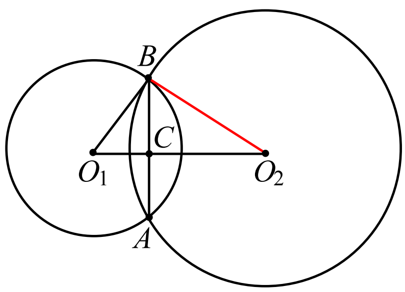


Рис. 157*а*

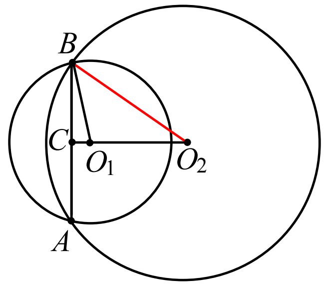


Рис. 157*б*

309. **(МИОО, 2010).** Расстояния от общей хорды двух пересекающихся окружностей до их центров относятся как 2:5. Общая хорда имеет длину $2\sqrt{3}$, а радиус одной из окружностей в два раза больше радиуса другой окружности. Найдите расстояние между центрами окружностей.

Ответ: 3 или 7. *Указание*. См. предыдущие упражнения.

310. Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Известно, что $\angle AO_1B = 90°$, $\angle AO_2B = 60°$, $O_1O_2 = \sqrt{3}+1$. Найдите длины радиусов окружностей.

Ответ: $\sqrt{2}$; 2 или $\sqrt{2}(2+\sqrt{3})$; $2(2+\sqrt{3})$. *Указание*. См. «Пособие», пример 34.

311. Общая хорда двух окружностей служит для одной из них стороной вписанного квадрата, а для другой – стороной правильного вписанного шестиугольника. Найдите расстояние между центрами окружностей, если радиус меньшей из них равен r.

Ответ: $\frac{r(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}}$ или $\frac{r(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}}$. *Указание*. См. предыдущие упражнения.

312. **(МИОО, 2010).** Две окружности, касающиеся прямой в точках A и B, пересекаются в точках C и D, причем $AB = 8$, $CD = 15$. Найдите медиану CE треугольника ABC.

Ответ: 16 или 1. *Указание*. Продолжить хорду CD до пересечения с данной прямой и применить теорему о секущей и касательной.

313. (ЕГЭ, 2013). Окружность радиуса $6\sqrt{2}$ вписана в прямой угол. Вторая окружность также вписана в этот угол и пересекается с первой в точках *M* и *N*. Известно, что расстояние между центрами окружностей равно 8. Найдите *MN*.

Ответ: $4\sqrt{2}$ или $4\sqrt{14}$. *Указание*. Найти радиус второй окружности ($2\sqrt{2}$ или $10\sqrt{2}$), учитывая, что центры окружностей лежат на биссектрисе прямого угла. Зная стороны треугольника, образованного радиусами окружностей и отрезком между центрами, найти его высоту (половину искомой хорды).

314. (ЕГЭ, 2012). Угол *C* треугольника *ABC* равен $60°$, *D* – отличная от *A* точка пересечения окружностей, построенных на сторонах *AB* и *AC* как на диаметрах. Известно, что $DB:DC=2:3$. Найдите угол *A*.

Ответ. $\arcsin\frac{5\sqrt{93}}{62}$ или $\arcsin\frac{\sqrt{93}}{62}$. *Указание*. См. «Решебник», Глава 2, задача 5.

315. (ЕГЭ, 2012). Угол *C* треугольника *ABC* равен $30°$, *D* – отличная от *A* точка пересечения окружностей, построенных на сторонах *AB* и *AC* как на диаметрах. Известно, что $DB:DC=2:5$. Найдите синус угол *A*.

Ответ. $\frac{3\sqrt{111}}{74}$ или $\frac{7\sqrt{111}}{74}$. *Указание*. См. «Решебник», Глава 2, задача 5.

316. (**МГУ**, **1984**, **аналог**). Две окружности радиусов 8 и 6 пересекаются в точках *A* и *B*. Через центры O_1 и O_2 окружностей проведена прямая; C_1 и C_2 – две из четырех точек пересечения этой прямой с окружностями, причем точка C_1 лежит на окружности с центром O_1, а длина отрезка C_1C_2 больше 16. Найдите расстояние между точками O_1 и O_2, если произведение площадей треугольников C_1O_1A и C_2O_2B равно 336.

Ответ: $6\pm2\sqrt{2}$. *Указание*. Общая хорда двух окружностей перпендикулярна линии центров и делится ею пополам. Пусть $AB=2h$ (рис. 158*а*,*б*). Тогда $S_{C_1O_1A}=\frac{1}{2}\cdot AF\cdot C_1O_1=4h$ и $S_{C_2O_2B}=\frac{1}{2}\cdot BF\cdot C_2O_2=3h$. Отсюда $12h^2=336$, $h^2=28$ и

$$O_1F=\sqrt{O_1A^2-h^2}=6,$$
$$FO_2=\sqrt{O_2A^2-h^2}=\sqrt{8}.$$

Тогда $O_1O_2=O_1F\pm O_2F$ (рис. 158*а* и 158*б*).

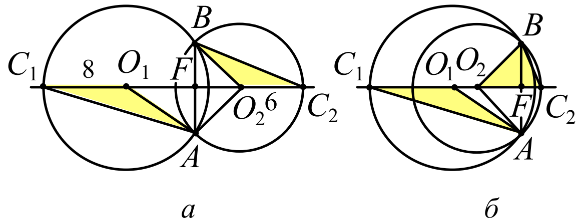


Рис. 158

317. (ФЦТ, 2012). Радиусы окружностей S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 равны 1 и 7 соответственно, расстояние между точками O_1 и O_2 равно 5. Хорда *AB* окружности S_2 касается окружности S_1 в точке *M*, причем точки O_1 и O_2 лежат по одну сторону от прямой *AB*. Найдите длину отрезка *AB*, если известно, что $AM:MB=1:6$.

Ответ: $7\sqrt{3}$, или $\frac{7\sqrt{143}}{6}$. *Указание*. См. «Решебник», Глава 3, задача 5.

Непересекающиеся окружности

318. Найдите радиус окружности, касающейся двух концентрических окружностей радиусов 3 и 5.

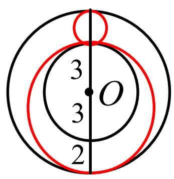


Рис. 159

Ответ: 1 или 4. *Указание*. См. рис. 159.

319. (МИОО, 2010). Найдите длину отрезка общей касательной к двум окружностям, заключенного между точками касания, если радиусы окружностей равны 23 и 7, а расстояние между центрами окружностей равно 34.

Ответ: 16 или 30. *Указание*. См. «Пособие», пример 29.

320. (МИОО, 2010). Расстояние между центрами окружностей радиусов 1 и 9 равно 17. Третья окружность касается обеих окружностей и их общей внешней касательной. Найдите радиус третьей окружности.

Ответ: $\frac{225}{64}$ или $\frac{225}{16}$, или $\frac{225}{4}$, или $\frac{25}{4}$.

Указание. Использовать опорную задачу: *отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов* r_1 *и* r_2 *равен* $2\sqrt{r_1r_2}$.

Длина общей внешней касательной данных окружностей равна

$$AB=\sqrt{a^2-(R-r)^2}=\sqrt{17^2-(9-1)^2}=15.$$

Пусть x – радиус искомой окружности, C, A, B – точки касания искомой окружности, данных окружностей с данной общей внешней касательной соответственно (рис. 160*а*,*б*). Тогда для касающихся окружностей длины общих внешних касательных равны

$$AC=2\sqrt{rx}=2\sqrt{x},$$
$$BC=2\sqrt{Rx}=6\sqrt{x}.$$

1-*й* и 2-*й случаи* (рис. 160*а*): пусть искомая окружность касается данных окружностей внешним образом и точка C лежит между A и B, тогда $AC+CB=AB$ или $2\sqrt{x}+6\sqrt{x}=15$. Отсюда $x=\frac{225}{64}$.

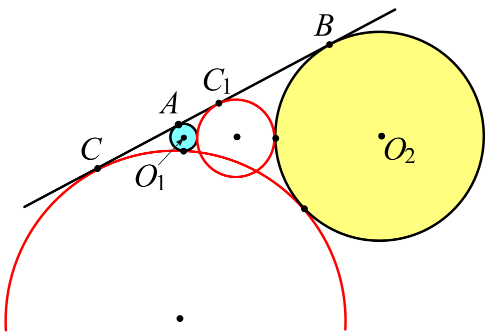


Рис. 160*а*

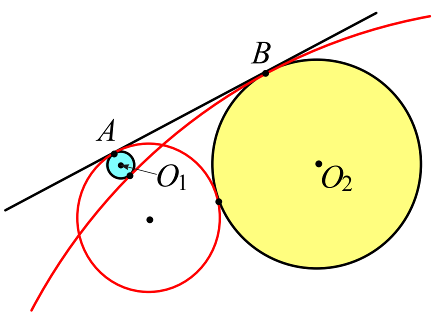


Рис. 160*б*

Если точка A лежит между C и B, то $CB-AC=AB$ или $6\sqrt{x}-2\sqrt{x}=15$. Отсюда $x=\frac{225}{16}$.

3-*й* и 4-*й случаи* (рис. 160*б*). При внутреннем касании искомой окружности с одной из данных окружностей получаем $x=\frac{25}{4}$ или $x=\frac{225}{4}$.

321. (МИОО, 2010). Расстояние между центрами окружностей радиусов 1 и 9 равно 17. Третья окружность касается обеих окружностей и их общей внутренней касательной. Найдите радиус третьей окружности.

Ответ: $\frac{189}{4}$ или $\frac{21}{4}$.

Указание. Использовать формулу длины общей внутренней касательной

$$AB=\sqrt{a^2-(R+r)^2},$$

где a – расстояние между центрами, а R, r – радиусы окружностей, и рассмотреть два случая расположения искомой окружности относительно касательной (рис. 161*а*,*б*).

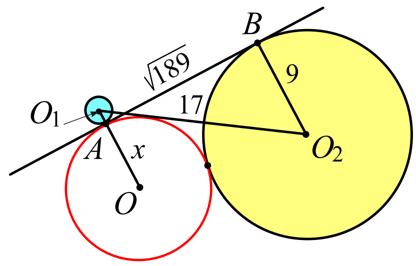


Рис. 161*а*

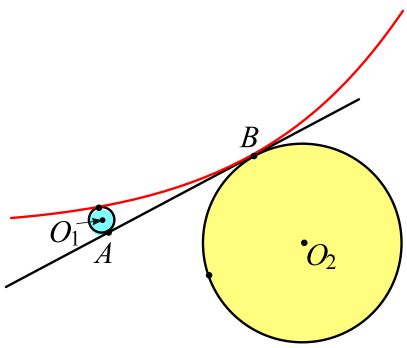


Рис. 161*б*

322. Даны две окружности радиусов 3 и 4. Расстояние между их центрами равно 25. К этим окружностям проведена общая внутренняя касательная. Найдите радиус окружности, касающейся общей внутренней касательной и обеих данных окружностей.

Ответ: 36 или 48. *Указание*. См. «Пособие», пример 5.

Три окружности

323. Найдите радиусы трех попарно касающихся окружностей с центрами в вершинах треугольника со сторонами 8, 9 и 10.

Ответ: (4,5; 3,5; 5,5), (13,5; 5,5; 3,5), (5,5; 13,5; 4,5), (3,5; 4,5; 13,5). *Указание*. Пусть $AB=8$, $BC=9$ и $AC=10$.

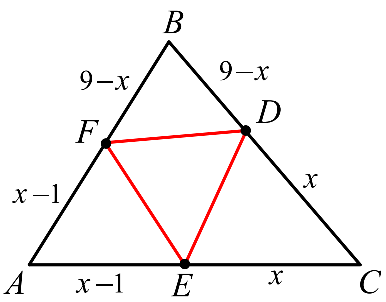


Рис. 162*а*

1-*й случай*: пусть окружности касаются внешним образом (рис. 162*а*). Если окружность с центром *C* имеет радиус *x*, то последовательно получаем окружность с центром *B* радиуса $9-x$, окружность с центром *A* радиуса $x-1$.

Так как $AC=AE+EC$, то получаем уравнение $x-1+x=10$. Отсюда $x=5,5$. Следовательно, находим радиусы окружностей (3,5; 4,5; 5,5).

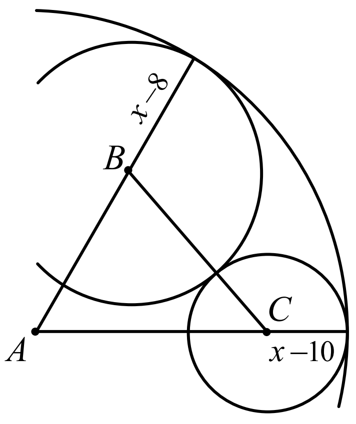


Рис. 162*б*

2-*й случай*: окружность с центром *A* касается окружностей с центрами *B* и *C* внутренним образом, окружности с центрами *B* и *C* касаются внешним образом (рис. 162*б*).

Если радиус окружности с центром *A* равен *x*, то радиусы окружностей с центрами *B* и *C* будут соответственно равны $x-8$ и $x-10$. Так как $BC=9$, то $(x-8)+(x-10)=9$. Отсюда $x=13,5$. Радиусы окружностей равны (3,5; 5,5; 13,5). Остальные случаи рассмотрите самостоятельно.

324. Точка *B* – середина отрезка *AC*, причем $AC=6$. Проведены три окружности радиуса 5 с центрами *A*, *B* и *C*. Найдите радиус четвертой окружности, касающейся всех трех данных.

Ответ: $\frac{9}{20}$ или $\frac{9}{10}$. *Указание*. См. рис. 163. Использовать теорему: *точка касания окружностей лежит на линии центров и расстояние между их центрами равно сумме радиусов при внешнем касании и разности – при внутреннем.*

Тогда, например, для треугольника *AOC* медиана $OB=5-r$, стороны $AO=5-r$, $OC=5+r$ и $AC=6$. Из формулы для медианы получаем уравнение

$$4(5-r)^2=2(5-r)^2+2(5+r)^2-6^2.$$

Отсюда $r=\frac{9}{10}$.

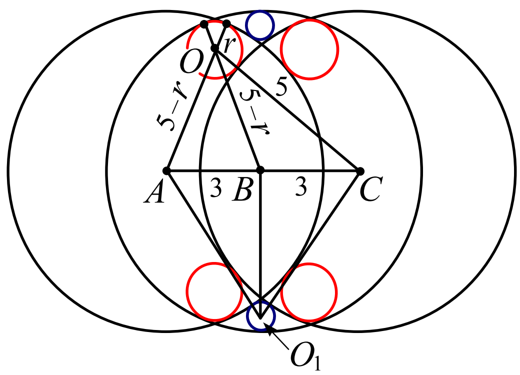


Рис. 163

325. Дан отрезок длины 20. Три окружности радиуса 4 имеют центры в концах отрезка и в его середине. Найдите радиус четвертой окружности, касающейся трех данных.

Ответ: 6,25 или 12,5. *Указание*. Пусть x – радиус искомой окружности, тогда $O_1O_4 = x+4$, $O_4O_2 = x-4$ (рис. 164*а*). В прямоугольном треугольнике $O_1O_4O_2$ имеем $(x+4)^2 = (x-4)^2 + 10^2$. Отсюда $x = 6,25$.

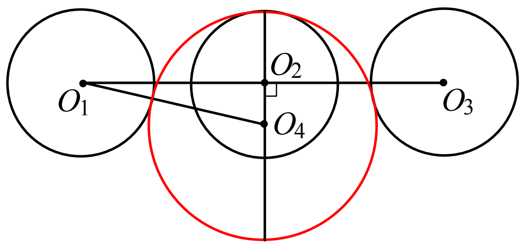


Рис. 164*а*

Второй случай (рис. 164*б*) рассмотрите самостоятельно.

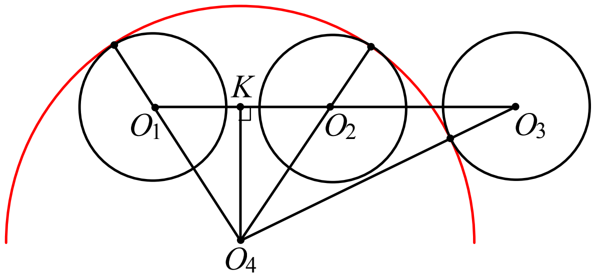


Рис. 164*б*

Другие симметричные расположения искомой окружности приводят к тем же результатам.

326. Три окружности радиуса r попарно касаются друг друга. Найдите радиус окружности, касающейся всех этих окружностей.

Ответ: $r\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\pm 1\right)$. *Указание*. Использовать теорему: *точка касания окружностей лежит на линии центров и расстояние между их центрами равно сумме радиусов при внешнем касании и разности – при внутреннем* (рис. 165).

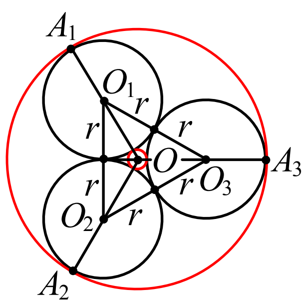


Рис. 165

327. Дан отрезок a. Три окружности радиуса R имеют центры в концах отрезка и в его середине. Найдите радиус четвертой окружности, касающейся трех данных.

Ответ: Если $\frac{a}{4} < R < \frac{a}{2}$, то одно решение $\frac{a^2}{16R}$; если $0 < R \le \frac{a}{4}$ или $R \ge \frac{a}{2}$, то два $\frac{a^2}{16R}$ или $\frac{a^2}{8R}$. *Указание*. Пусть O и r – центр и радиус четвертой окружности соответственно. Расстояния от O до A, B и C равно $R+x$ или $|R-x|$. Рассмотрите случаи: 1) два расстояния равны $R+x$, одно равно $|R-x|$; 2) два расстояния равны $|R-x|$, одно $R+x$.

328. В полукруг радиуса R вписаны два круга, касающиеся друг друга, полукруга и его диаметра. Радиус одного из кругов равен r. Найдите радиус другого круга.

Ответ: $\frac{Rr}{(R+2r)^2}\left(3R-2r\pm\sqrt{8(R^2-2Rr)}\right)$.

Указание. Рассмотреть два случая (рис. 166). В первом случае из прямоугольных треугольников OMO_1 и ONO_2 найти OM и ON, где $MO_1 = r$, $NO_2 = x$, $OO_1 = R-r$, $OO_2 = R-x$, $MN = 2\sqrt{rx}$.

Для составления уравнения использовать равенство $MO + ON = MN$.

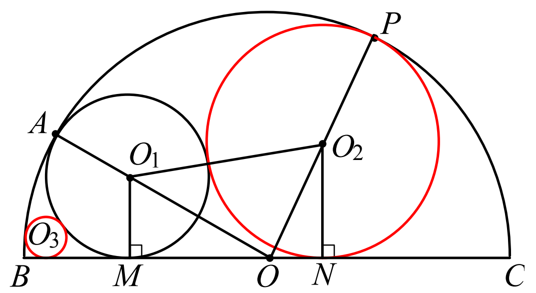


Рис. 166

329. В квадрате $ABCD$, сторона которого равна a, из точки A как из центра проведена внутри квадрата дуга через вершины B и D. На стороне DC как на диаметре построена внутри квадрата полуокружность. Найдите радиус окружности, касающейся проведенной дуги, полуокружности и одной из сторон квадрата.

Ответ. $\frac{a(9-\sqrt{6})}{25}$, $\frac{a(3-2\sqrt{2})}{2}$, $\frac{4a}{25}$.

Решение. 1-*й случай*: искомая окружность касается стороны AB квадрата $ABCD$ (рис. 167*а*). Обозначим радиус этой окружности через x. Из прямоугольного треугольника AMO получаем

$$AM=\sqrt{AO^2-MO^2}=\sqrt{(a-x)^2-x^2}=\sqrt{a^2-2ax}.$$

Так как $OO_1=OK_1+K_1O_1=\frac{a}{2}+x$,

$$ON=MN-OM=a-x,$$

$$O_1N=DN-DO_1=\sqrt{a^2-2ax}-\frac{a}{2},$$

то из прямоугольного треугольника ONO_1 имеем $OO_1^2=ON^2+O_1N^2$ или

$$\left(\frac{a}{2}+x\right)^2=(a-x)^2+\left(\sqrt{a^2-2ax}-\frac{a}{2}\right)^2.$$

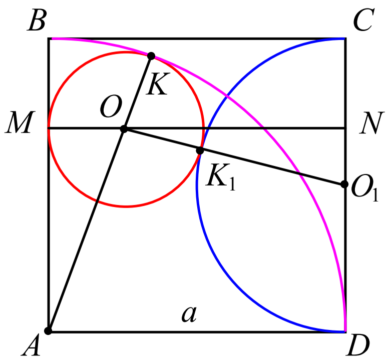


Рис. 167*а*

После преобразований $\sqrt{a^2-2ax}=2a-5x$ или $25x^2-18ax+3a^2=0$ при условии $x\le\frac{2a}{5}$.

Получаем один корень $x=\frac{a(9-\sqrt{6})}{25}$.

2-*й случай*: искомая окружность касается стороны BC квадрата $ABCD$ (рис. 167*б*). Обозначим радиус этой окружности через y. Из прямоугольного треугольника AMO получаем

$$OM=\sqrt{AO^2-AM^2}=$$

$$=\sqrt{(a+y)^2-(a-y)^2}=2\sqrt{ay}.$$

Из прямоугольного треугольника ONO_1 получаем

$$ON=\sqrt{O_1O^2-O_1N^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{a}{2}+y\right)^2-\left(\frac{a}{2}-y\right)^2}=\sqrt{2ay}.$$

Используя равенство $MN=OM+ON$, составим уравнение $a=2\sqrt{ay}+\sqrt{2ay}$. Отсюда находим $y=\frac{a(3-2\sqrt{2})}{2}$.

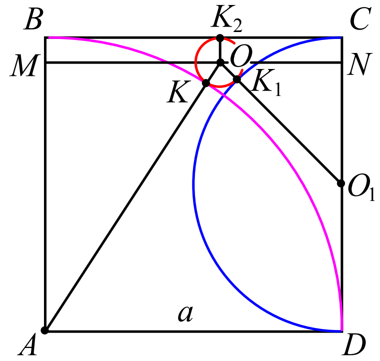


Рис. 167*б*

3-*й случай*: пусть искомая окружность касается стороны CD квадрата $ABCD$ (рис. 167*в*).

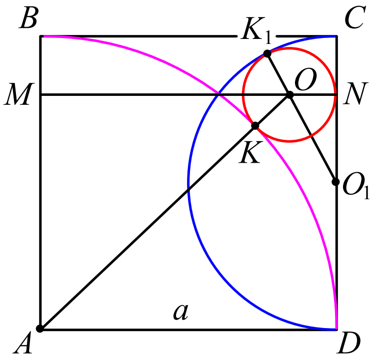


Рис. 167*в*

Обозначим радиус этой окружности через z. Из прямоугольного треугольника ONO_1 получаем

$$O_1N=\sqrt{O_1O^2-ON^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{a}{2}-z\right)^2-z^2}=\frac{\sqrt{a^2-4az}}{2}.$$

Тогда $AM=\frac{\sqrt{a^2-4az}+a}{2}$. Из прямоугольного треугольника AMO имеем $AO^2=AM^2+OM^2$ или

$$(a+z)^2=\left(\frac{\sqrt{a^2-4az}+a}{2}\right)^2+(a-z)^2.$$

После преобразований $\sqrt{a^2-4az}=10z-a$ или $z=\frac{4a}{25}$.

330. В квадрате $ABCD$ из точки A как из центра проведена внутри квадрата дуга, проходящая через вершины B и D. На сторонах BC и CD как на диаметрах построены внутри квадрата полуокружности. Найдите радиус окружности, касающейся построенных полуокружностей и дуги BD, если стороны квадрата равны a.

Ответ. $\frac{a(5-3\sqrt{2})}{7}$, $\frac{a(\sqrt{2}-1)}{3}$, $\frac{a(3\sqrt{2}-1)}{17}$.

Указание. Рассмотреть отдельно три случая (рис. 168).

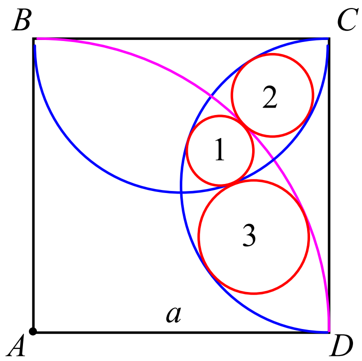


Рис. 168

331. Окружность вписана в квадрат со стороной 1. Из одной его вершины проведена дуга окружности радиуса 1 до пересечения с другими двумя противоположными вершинами. Проведена окружность, которая касается вписанной окружности и проведенной дуги. Найдите радиус окружности, касающейся этой окружности, вписанной окружности и дуги.

Ответ. $\frac{5\sqrt{2}-1}{84}$, $\frac{7(4\sqrt{2}-5)}{4(37-17\sqrt{2})}$.

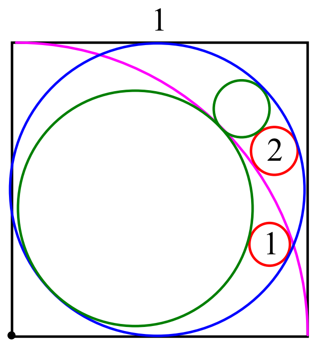


Рис. 169

Указание. Рассмотреть отдельно два случая (рис. 169).

332. Около окружности описан квадрат со стороной a. На двух смежных сторонах этого квадрата построены полуокружности, расположенные внутри квадрата. Найдите радиус окружности, касающейся этих двух полуокружностей и окружности.

Ответ: $\frac{a(\sqrt{2}-1)}{2(4-\sqrt{2})}$, $\frac{a(2-\sqrt{2})}{4}$, $\frac{a}{2\sqrt{6}}$, $\frac{a(\sqrt{2}+1)}{2(\sqrt{2}+4)}$. *Указание.* Рассмотреть отдельно четыре случая (рис. 170).

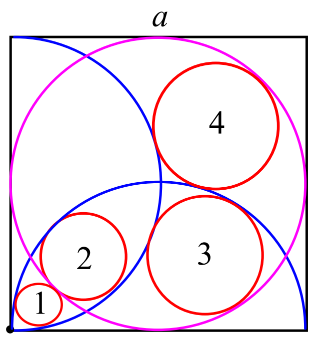


Рис. 170