

**Тренировочные материалы  
для подготовки  
к единому государственному  
экзамену по математике  
2010**

**Учебное пособие**

**Самара 2010**

Государственное образовательное учреждение дополнительного  
профессионального образования (повышения квалификации)  
специалистов  
Самарский областной институт повышения квалификации и  
переподготовки работников образования

**Тренировочные материалы  
для подготовки  
к единому государственному  
экзамену по математике  
2010**

**Учебное пособие**

**Самара 2010**

ББК 22.1

Т 66

Тренировочные материалы для подготовки к единому государственному экзамену по математике 2010. /Сост. С.В.Богатырев, А.А.Максютин, Ю.Н.Неценко, С.Ю.Попов, Т.П.Шаповалова. — Самара: ГОУ СИПКРО, 2010 – 124с.

Рецензенты: Усов А.А. — проректор ГОУ СИПКРО по информатизации, кандидат педагогических наук.

Клековкин Г.А. — заведующий кафедрой математики и информатики СФ МГПУ, кандидат физико-математических наук, профессор МГПУ.

Учебное пособие предназначено для самостоятельной подготовки выпускников общеобразовательных школ к единому государственному экзамену по математике. Оно может быть использовано также для проведения репетиционных экзаменов в выпускных классах.

В пособии приведены 16 вариантов экзаменацационной работы, составленной в соответствии со спецификацией экзаменацационной работы ЕГЭ по математике 2010 года для выпускников XI классов общеобразовательных учреждений.

Кроме этого, в пособии приведено некоторое количество дополнительных задач по различным разделам ЕГЭ и две статьи по методам решения задач С5 и С6.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Государственного образовательного учреждения дополнительного профессионального образования (повышения квалификации) Самарского областного института повышения квалификации и переподготовки работников образования

ISBN 978–5–7174–0421–1

© ГОУ СИПКРО  
С.В.Богатырев,  
А.А.Максютин,  
Ю.Н.Неценко,  
С.Ю.Попов,  
Т.П.Шаповалова

## Введение

Учителя и школьники Самарской области начиная с 2002 года участвуют в ЕГЭ и имеют богатый опыт подготовки и сдачи ЕГЭ по математике. Кафедра математики СИПКРО традиционно выпускает сборник материалов для подготовки выпускников средних учебных заведений к ЕГЭ по математике. Главной особенностью 2010 года является измененная модель варианта КИМа, сохранявшаяся в течение предыдущих лет:

1. не используются задания с выбором ответа;
2. сокращено общее число заданий;
3. усиlena геометрическая линия;
4. увеличено число заданий высокого уровня сложности и расширена тематика задач (С6).

По просьбам учителей и выпускников в пособие включены методические рекомендации, содержащие обзор типовых заданий (типа С5, С6) и соответствующих им способов решения, а также подробные решения большого числа задач.

В статье С.В.Богатырева, посвященной задачам типа С5 (модуль, параметр) и методам их решения собраны и систематизированы практически все виды заданий, встречающиеся в демоверсии и тренировочных вариантах по плану 2010 г. Рассмотрен графический метод решения задач данного типа.

В статье А. А. Максютина, посвященной задачам в целых числах (типа С6) предложен следующий подход. В числовой

линии школьного курса выделены 11 базовых задач, в которых в наибольшей степени сконцентрированы идеи, приемы, методы рассматриваемого раздела школьного курса. На многочисленных примерах показывается, что решение практически любой задачи С6 сводится к некоторой подпоследовательности базовых задач (решение раскладывается по базису).

Еще одной особенностью сборника этого года является включение дополнительных задач повышенного и высокого уровня сложности, не вошедших в варианты. Это сделано для более полного охвата основных идей, методов и приемов, применяемых в данном разделе программы. При этом под сложностью решения задачи мы понимаем объективную характеристику решения задачи, которая определяется не только числом использованных понятий, теорем, приемов, но также наличием явных и особенно неявных связей между перечисленными элементами знаний. Под трудностью решения задачи мы понимаем субъективную характеристику решения задачи, которая определяется степенью готовности решающего продемонстрировать все необходимые элементы содержания образования.

**Единый государственный экзамен по математике**  
**Вариант №1**

**Часть 1**

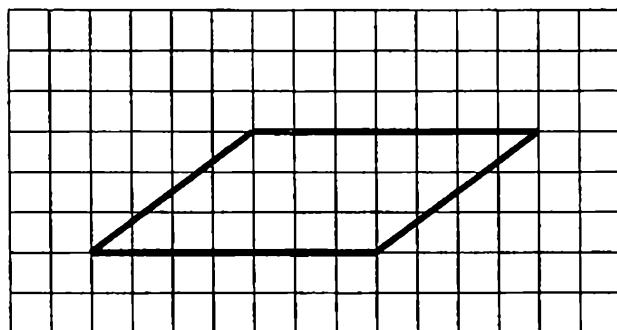
- B1** Имеется 10 ящиков, каждый из которых весит 1200 кг. Какое наименьшее количество трехтонных грузовиков потребуется для их перевозки?
- B2** На рисунке приведен график движения лифта со второго этажа до шестого этажа. На горизонтальной оси откладываются время движения лифта (в секундах). На вертикальной оси откладываются номера этажей. С помощью этого графика найдите среднюю скорость движения лифта в течении первых 30 секунд. Высота этажа равна 3 метрам. Скорость измеряется в метрах в секунду.



- B3** Найдите корень уравнения  $\left(\frac{1}{25}\right)^{0,4x-2} = 125$ .
- B4** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $AB = \sqrt{3}$ ,  $AC = 1,5$ . Найдите угол  $B$ .
- B5** Семья из 3-х человек (двоих взрослых и один ребенок) едет из города в деревню. Расстояние между городом и деревней равно 150 км. Ехать можно на автобусе, или на личном автомобиле. Билет на автобус для взрослого стоит 190 рублей, а билет для ребенка стоит 50% стоимости

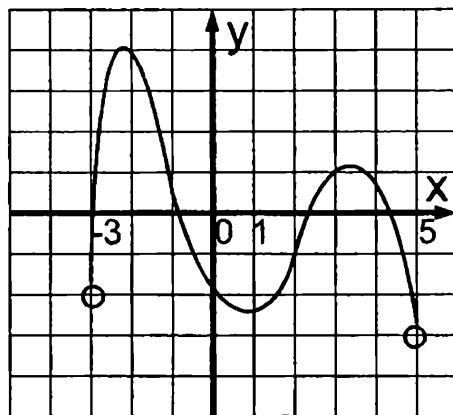
билета для взрослого. Автомобиль расходует 12 литров бензина на 100 км пути. Цена бензина равна 21,5 рублей за 1 литр. Сколько придется заплатить за наиболее дешевую поездку?

- B6** На клетчатой бумаге с размером клетки 1см x 1см изображен параллелограмм. Найдите синус острого угла этого параллелограмма.



- B7** Вычислите  $\log_6 5 + \log_6 \frac{1}{180}$ .

- B8** На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ . Найдите сумму всех целых значений аргумента, входящих в область определения этой функции. (Размер клетки  $1 \times 1$ ).



- B9** Высоту цилиндра, объем которого равен 8,5, уменьшили в 1,5 раза, а радиус основания увеличили в 3 раза. Найдите объем полученного цилиндра.

- B10** Под огород отведен участок земли прямоугольной формы, периметр которого равен 120 метров. Найдите наибольшую возможную площадь такого участка.

**B11** Найдите наибольшее значение функции  $f(x) = 2 \cos x - \sin^2 x$  на отрезке  $[0; 2\pi]$ .

**B12** Сколько килограммов соли надо добавить к трем литрам 20%-ного раствора соли, чтобы получить 25%-ный ее раствор?

## Часть 2

**C1** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3^y + 2 \sin 2x = 0, \\ 2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0. \end{cases}$$

**C2** В основании прямой призмы  $ABC A_1 B_1 C_1$  лежит прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом  $C$ . Диагональ большей (по площади) боковой грани равна 20 и составляет с плоскостью основания угол  $60^\circ$ . Найдите угол между плоскостью  $AB_1C$  и плоскостью основания призмы, если  $AC = 6$ .

**C3** Решите неравенство  $\log_{|x-2|}(2 - |x - 1|) < 1$ .

**C4** На стороне  $AC$  угла  $ACB$ , равного  $45^\circ$ , взята точка  $D$  так, что  $CD = AD = 2$ . Найдите радиус окружности, которая проходит через точки  $A$  и  $D$  и касается прямой  $BC$ .

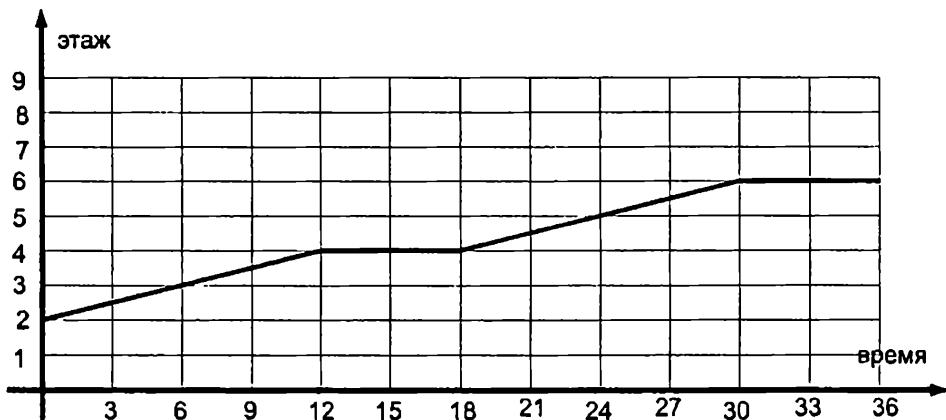
**C5** Найти все значения параметра  $a$ , при которых графики двух функций  $y = 3|x + 1| + |x - 6|$  и  $y = 3|x - 2| + x + a$  пересекаются ровно в двух точках.

**C6** Найдите наибольшее натуральное число  $n$ , для которого  $2016!$  делится на  $3^n$ .

**Единый государственный экзамен по математике**  
**Вариант №2**

**Часть 1**

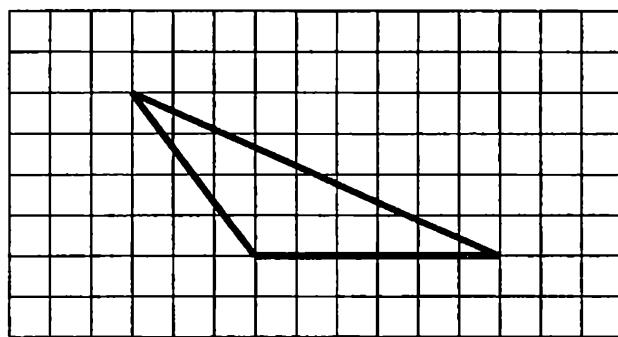
- B1** Имеется 13 ящиков, каждый из которых весит 900 кг. Какое наименьшее количество грузовиков грузоподъемностью 3,3 т каждый потребуется для их перевозки?
- B2** На рисунке приведен график движения лифта со второго этажа до шестого этажа. На горизонтальной оси откладываются время движения лифта (в секундах). На вертикальной оси откладываются номера этажей. С помощью этого графика найдите скорость движения лифта с 6-ой по 30-ую секунды. Высота этажа равна 3 метрам. Скорость измеряется в метрах в секунду.



- B3** Решите уравнение  $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x+2}{2x-3}} = 9$ .
- B4** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $AB = 10$ ,  $\sin A = 0,8$ . Найдите  $BC$ .
- B5** Семья из 3-х человек (двоих взрослых и один ребенок) едет из города в деревню. Расстояние между городом и деревней равно 150 км. Ехать можно на автобусе, или на личном автомобиле. Билет на автобус для взрослого стоит 190 рублей, а билет для ребенка стоит 50% стоимости билета для взрослого. Автомобиль расходует 12 литров

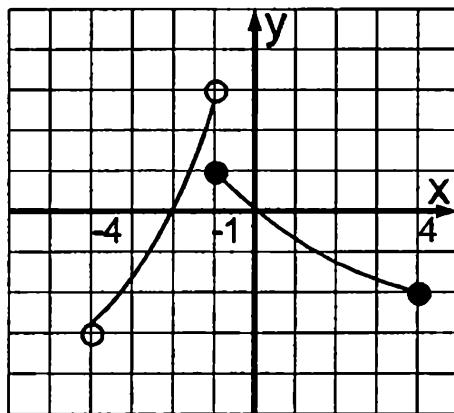
бензина на 100 км пути. Цена бензина равна 21,5 рублей за 1 литр. Предположим, что семья выбирает наиболее дешевый вариант поездки. Сколько рублей семья сэкономит за 10 таких поездок?

- B6** На клетчатой бумаге с размером клетки  $1\text{см} \times 1\text{см}$  изображен тупоугольный треугольник. Найдите косинус тупого угла этого треугольника.



- B7** Вычислите  $\log_6 5 - \log_6 30$ .

- B8** На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ . Найдите сумму всех целых значений аргумента, входящих в область определения этой функции. (Размер клетки  $1 \times 1$ ).



- B9** Высоту конуса, объем которого равен 15 увеличили в 1,6 раза, а радиус основания увеличили в 1,5 раза. Найдите объем полученного конуса.

- B10** В зоопарке куском веревки длиной 100 метров огордили загон для зверей, имеющий форму прямоугольника. Одной стороной загона является стена павильона. Какую длину должна иметь меньшая сторона этого прямоугольника, чтобы площадь загона была наибольшей.

**B11** Найдите наибольшее значение функции  $f(x) = 15 - 3 \cos x + \cos 3x$  на отрезке  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

**B12** Смешали 30%-ный раствор соляной кислоты с 10%-ным и получили 600 граммов 15%-ного раствора. Сколько граммов 10%-ного раствора было взято?

## Часть 2

**C1** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3^y + \operatorname{tg} x = 0, \\ 4 \sin^2 x + 8 \sin x + 3 = 0. \end{cases}$$

**C2** В основании прямой призмы  $ABC A_1 B_1 C_1$  лежит прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом  $C$ , катет  $AC$  в два раза больше катета  $BC$ . Известно, что плоскость  $AB_1C$  составляет с плоскостью основания угол  $60^\circ$ . Под каким углом диагональ большей (по площади) боковой грани наклонена к плоскости основания?

**C3** Решите неравенство  $\log_{|x-2|}(3 - |x|) < 1$ .

**C4** Окружность  $\omega$  пересекает сторону  $AC$  угла  $ACB$  в точке  $A$  и точке  $D$  – середине отрезка  $AC$ . Кроме того, окружность  $\omega$  касается прямой  $BC$ . Ее радиус равен 10. Найдите длину отрезка  $AC$ , если угол  $ACB$  равен  $45^\circ$ .

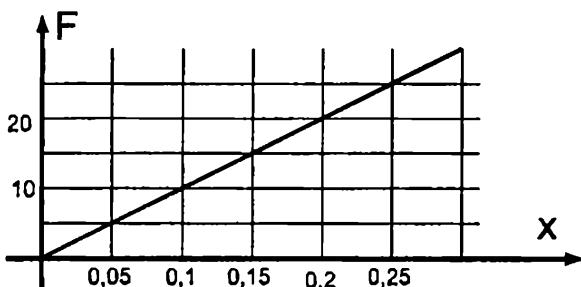
**C5** Функция  $|x^2 + 2x| - |x^2 + 3x - 4| - a$  рассматривается на отрезке  $[-5; 5]$ . Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых эта функция принимает только неотрицательные значения.

**C6** Найдите наибольшее натуральное число  $n$ , для которого  $2009!$  делится на  $49^n$ .

**Единый государственный экзамен по математике**  
**Вариант №3**

**Часть 1**

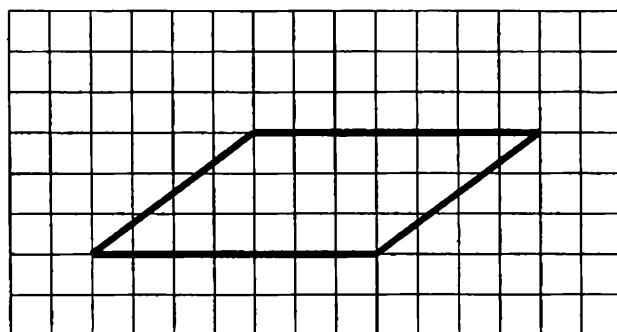
- B1** Пчеловод планировал разлить 50 литров меда по трехлитровым банкам, но в его распоряжении оказались только двухлитровые банки. На сколько больше двухлитровых банок, чем трехлитровых потребуется пчеловоду, чтобы разлить весь мед?
- B2** На рисунке представлен график зависимости величины силы упругости от деформации пружины. Зависимость силы упругости  $F$  от деформации  $x$  выражается формулой  $F = kx$ , где  $k$  – коэффициент жесткости пружины. На горизонтальной оси откладываются значения деформации пружины (в метрах). На вертикальной оси откладываются значения величины силы (в килограммах). Найдите коэффициент жесткости  $k$  пружины.



- B3** Найдите корень уравнения  $\log_{\frac{1}{6}}(1,6x + 36,8) = -2$ .
- B4** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $AC = 8$ ,  $\operatorname{tg} A = 0,75$ . Найдите  $BC$ .
- B5** Из пункта А в пункт Б можно проехать по трем различным дорогам. Первая дорога, полностью асфальтированная, имеет длину 500 км. Вторая дорога состоит из двух участков: один участок является полностью асфальтированным и имеет длину 150 км, а второй участок является грунтовой дорогой и имеет длину 250 км. Третья дорога является полностью грунтовой и имеет длину 300 км.

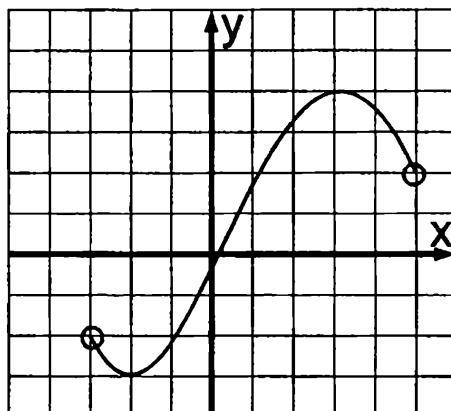
Скорость автомобиля по асфальтированной дороге равна 80 км в час, а по грунтовой – 50 км в час. По какой дороге время поездки будет наибольшим? Найдите это время (в часах).

- B6** На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см изображен параллелограмм. Чему равен квадрат длины меньшей диагонали этого параллелограмма?



- B7** Вычислите  $0,3^{-1+\log_{0,3} 6}$ .

- B8** На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ . Найдите сумму всех целых чисел, принадлежащих множеству значений этой функции. (Размер клетки  $1 \times 1$ ).



- B9** Сторону основания правильной четырехугольной призмы объем которой равен 15, увеличили в 1,2 раза, а высоту в 1,5 раза. Найдите объем полученной призмы.

- B10** Тело, выпущенное вертикально вверх, движется по закону  $h(t) = 40t - 5t^2$  (высота подъема  $h(t)$  измеряется в метрах, а время  $t$  в секундах). Найдите наибольшую высоту подъема тела.

**B11** Точка движется прямолинейно по закону  $s(t) = 5 + 6t^2 - \frac{1}{3}t^3$ , где  $s(t)$  – пройденный точкой путь (в метрах) за время  $t$  (в секундах). Найдите наибольшее значение скорости точки.

**B12** Бассейн наполняется водой через две трубы за 12 часов. Одна первая труба заполняет его на 10 часов скорее, чем одна вторая. За сколько времени может заполнить бассейн одна труба с меньшей производительностью?

## Часть 2

**C1** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2y^2 - 2y + \cos 2x + 2 \cos x = 11, \\ \cos x - y = 1. \end{cases}$$

**C2** В правильной четырехугольной призме  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  диагональ основания в 2 раза больше бокового ребра. Найдите угол между плоскостью  $ACB_1$  и боковой гранью  $BB_1C_1C$ .

**C3** Решите неравенство  $\log_{|3x+5|}(3x^2 + 8x + 9) > 2$ .

**C4** Две окружности имеют ровно одну общую точку. К первой из них проведена касательная, проходящая через центр второй окружности. Известно, что расстояние от точки касания до центра второй окружности равно половине расстояния между центрами окружностей. Найдите радиус первой окружности, если радиус второй равен 10.

**C5** Найти все значения параметра  $a$ , при которых точки графика функции  $y = 2|x + 2| + 2|x - 4|$  для  $x$  из интервала  $(-4; -2)$  лежат ниже точек графика функции  $y = 4|x - 2| - x + a$ , а для  $x$  из интервала  $(0; 2)$  – выше.

**C6** Найдите наибольшее натуральное число  $n$ , для которого  $2017!$  делится на  $6^n$ .

**B11** Точка движется прямолинейно по закону  $s(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 5t$ , где  $s(t)$  – пройденный точкой путь (в метрах) за время  $t$  (в секундах). Найдите наименьшее значение скорости точки.

**B12** Две машинистки вместе напечатали 65 страниц, причем первая работала на один час больше второй. Так как вторая машинистка печатает в час на две страницы больше первой, то она напечатала на 5 страниц больше. Сколько страниц в час печатает вторая машинистка?

## Часть 2

**C1** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \cos 2x - 2y^2 + 2y = 1, \\ \cos x - 2y = -3. \end{cases}$$

**C2** Границы  $ABC$  и  $ADC$  тетраэдра  $ABCD$  перпендикулярны и являются равнобедренными треугольниками с общим основанием  $AC$ . Точки  $E$  и  $F$  – середины ребер  $AD$  и  $CD$  соответственно. Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $FBE$ , если известно, что площадь треугольника  $ABC$  в 3 раза меньше площади треугольника  $FBE$ .

**C3** Решите неравенство  $\log_{|x+4|}(x^2 - x - 4) \geq 1$ .

**C4** В выпуклом четырехугольнике диагонали взаимно перпендикулярны. Серединные перпендикуляры к трем сторонам этого четырехугольника проходят через одну точку. Известно, что три стороны четырехугольника равны 2, 3, 4. Найдите четвертую сторону четырехугольника.

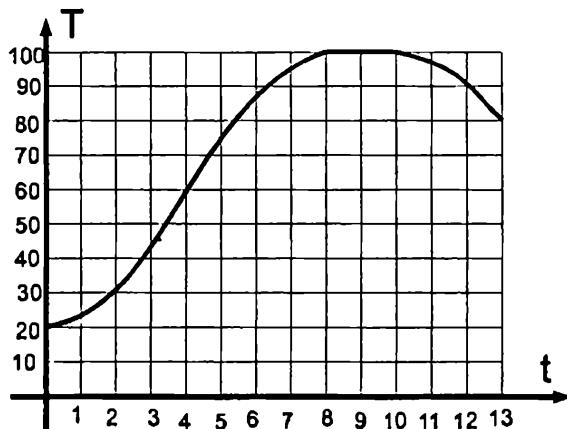
**C5** Найти все значения параметра  $a$ , для которых интервал  $(-2; -1)$  будет решением неравенства  $2x + 2|x - a| + |x - 1| < 3$ .

**C6** Найдите наибольшее натуральное число  $n$ , для которого  $2011!$  делится на  $15^n$ .

**Единый государственный экзамен по математике**  
**Вариант №5**

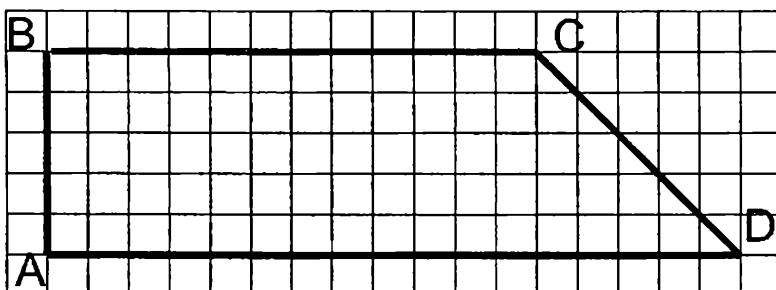
**Часть 1**

- B1** Книга-двуихтомник стоит 360 рублей, при этом первый том дешевле второго на 20%. Сколько рублей стоит первый том?
- B2** На рисунке представлен график зависимости температуры  $T$  воды в чайнике от времени  $t$ . На горизонтальной оси откладывается время (в минутах). На вертикальной оси откладываются значения температуры воды в чайнике (в градусах по Цельсию). Сколько минут кипел чайник?



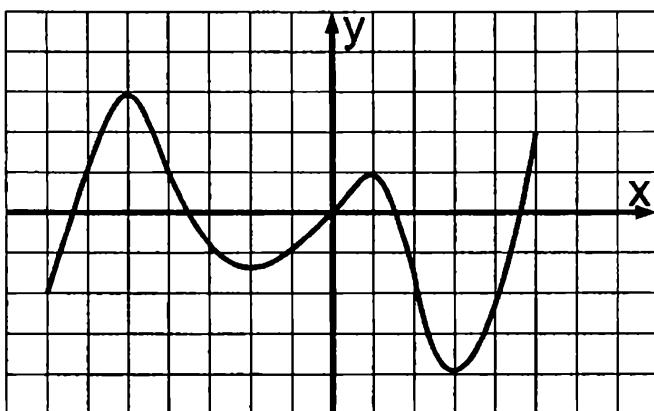
- B3** Решите уравнение  $\sqrt{x+16} = x - 4$ .
- B4** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $CH$  – высота треугольника,  $\cos A = 0,8$ ;  $BC = 3$ . Найдите  $AH$ .
- B5** Для строительства гаража можно использовать один из двух видов фундамента: каменный, или бетонный. Для бетонного фундамента надо 5 тонн щебня и 50 мешков цемента, для каменного – 7 тонн природного камня и 8 мешков цемента. Тонна камня стоит 1600 рублей, тонна щебня – 700 рублей, мешок цемента – 200 рублей. Укажите наименьшую стоимость материала, необходимого для построения фундамента гаража.

- B6** На клетчатой бумаге с размером клетки  $1\text{см} \times 1\text{см}$  изображена прямоугольная трапеция ABCD. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC.



- B7** Вычислите  $\log_{\sqrt{10}/4}(\ln \sqrt[8]{e^5})$ .

- B8** На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ . Найдите наибольшую длину отрезка, на котором функция монотонна. (Размер клетки  $1 \times 1$ ).



- B9** Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды 240, сторона основания 12, высота 8. Найдите высоту боковой грани пирамиды.

- B10** Температура остывающего электрического чайника описывается формулой  $T(t) = 20 + 80 \cdot 2^{-0,2t}$  (температура  $T(t)$  измеряется в градусах, а  $t$  – время, прошедшее с момента отключения чайника, измеряется в минутах). Сколько минут температура чайника будет не меньше 60 градусов.

- B11** Данна функция  $f(x) = x^2(2x - 3) - 12(3x - 2)$ . Найдите ее наибольшее значение на отрезке  $[-3; 6]$ .

**B12** Две колбы заполнены раствором соли. Объем первой колбы на 35% больше объема второй, концентрация раствора в первой колбе на 35% меньше, чем во второй. На сколько процентов меньше содержится соли в первой колбе, чем во второй?

## Часть 2

**C1** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \cos y \cdot \sqrt{2 \sin x + 1} = 0, \\ 4 \cos^2 y + 2 \cos 2x + 1 = 0. \end{cases}$$

**C2** Границы  $ABC$  и  $ADC$  тетраэдра  $ABCD$  перпендикулярны и являются равнобедренными треугольниками с общим основанием  $AC$ . Точки  $E$  и  $F$  – середины ребер  $AD$  и  $CD$  соответственно. Известно, что плоскость  $FBE$  составляет угол  $45^\circ$  с плоскостью основания. Найдите площадь сечения  $FBE$ , если площадь основания равна  $6\sqrt{2}$ .

**C3** Решите неравенство  $\log_{3\sqrt{x-3}} \left( \frac{x-10}{x^2 - 6x + 5} \right) + 3 \leq 0$ .

**C4** В некоторый угол вписана окружность радиуса 6, а длина хорды, соединяющей точки касания, равна 8. Параллельно этой хорде проведены две касательные к окружности, в результате чего получилась трапеция. Найдите площадь этой трапеции.

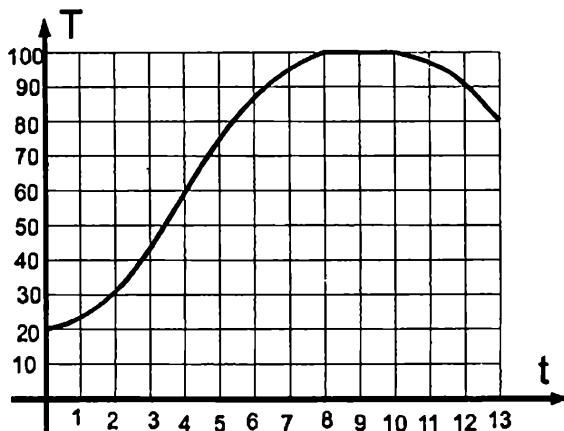
**C5** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых неравенство  $3 - |x - a| > x^2$  имеет хотя бы одно отрицательное решение.

**C6** Найдите все простые числа  $k$ , для которых число 2009! делится на  $k^k$ .

**Единый государственный экзамен по математике**  
**Вариант №6**

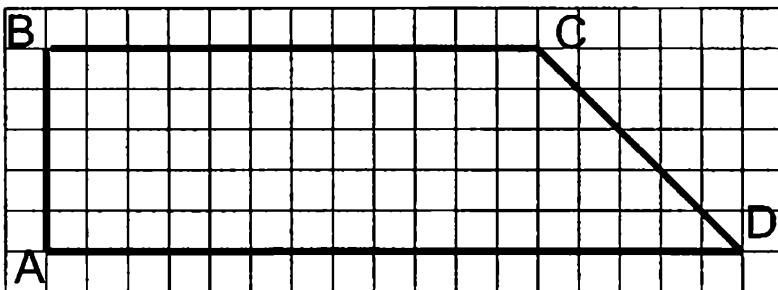
**Часть 1**

- B1** Костюм, состоящий из пиджака и брюк, стоит 5400 рублей, причем пиджак на 25% дороже, чем брюки. Сколько рублей стоит пиджак?
- B2** На рисунке представлен график зависимости температуры  $T$  воды в чайнике от времени  $t$ . На горизонтальной оси откладывается время (в секундах). На вертикальной оси откладываются значения температуры воды в чайнике (в градусах по Цельсию). Сколько минут остывала вода в чайнике?



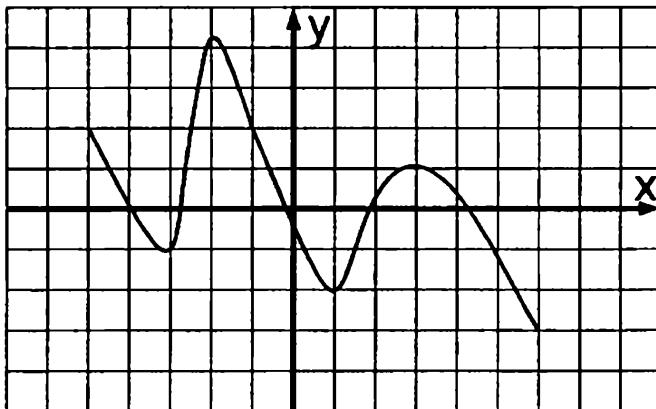
- B3** Найдите корень уравнения  $\sqrt{3 - 2x} = -x$ .
- B4** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $CH$  – высота треугольника,  $AH = 3,2$ ;  $BC = 3$ . Найдите  $\sin A$ .
- B5** Для строительства гаража можно использовать один из двух видов фундамента: каменный, или бетонный. Для бетонного фундамента надо 5 тонн щебня и 50 мешков цемента, для каменного – 7 тонн природного камня и 8 мешков цемента. Тонна камня стоит 1600 рублей, тонна щебня – 700 рублей, мешок цемента – 200 рублей. На сколько рублей стоимость материала для построения фундамента в дорогом варианте больше, чем в дешевом?

- B6** На клетчатой бумаге с размером клетки 1см x 1см изображена прямоугольная трапеция ABCD. Найдите площадь треугольника ACD.



- B7** Вычислите  $\log_3 \frac{\sqrt[4]{27}}{\sqrt{1/3}}$ .

- B8** На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ . Найдите наименьшую длину отрезка, на котором функция монотонна. (Размер клетки  $1 \times 1$ ).



- B9** Площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды равна 288, высота боковой грани 8. Найдите высоту пирамиды.

- B10** Температура остывающего электрического чайника описывается формулой  $T(t) = 20 + 80 \cdot 2^{-0,2t}$  (температура  $T(t)$  измеряется в градусах, а  $t$  – время, прошедшее с момента отключения чайника, измеряется в минутах). Сколько минут температура чайника будет не меньше 60 градусов. Сколько минут температура чайника будет в пределах от 40 до 60 градусов.

**B11** Данна функция  $f(x) = 12(3x - 2) + x^2(3 - 2x)$ . Найдите ее наименьшее значение на отрезке  $[-3; 4]$ .

**B12** Два завода по плану должны были выпустить за месяц 720 станков. Первый завод перевыполнил план на 48 станков, второй – на 10%, и вместе они выпустили за месяц 800 станков. На сколько процентов перевыполнил план первый завод?

## Часть 2

**C1** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \cos y \sqrt{4 \sin x + 1} = 0, \\ 6 \cos 2x + \cos 2y + 2 \sin x = 3. \end{cases}$$

**C2** Основанием пирамиды служит квадрат, две боковые грани этой пирамиды перпендикулярны к плоскости ее основания, две другие ее боковые грани образуют с плоскостью основания равные двугранные углы, каждый из которых равен  $30^\circ$ . Высота пирамиды равна  $\sqrt{2}$ . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

**C3** Решите неравенство  $\log_{\sqrt[3]{x-2}} \left( \frac{x-8}{x^2-4x+3} \right) + 3 \leq 0$ .

**C4** В угол, равный  $\arccos(-1/9)$ , вписана окружность радиуса 3. Параллельно хорде, соединяющей точки касания, проведены две касательные к окружности, в результате чего получилась трапеция. Найдите площадь этой трапеции.

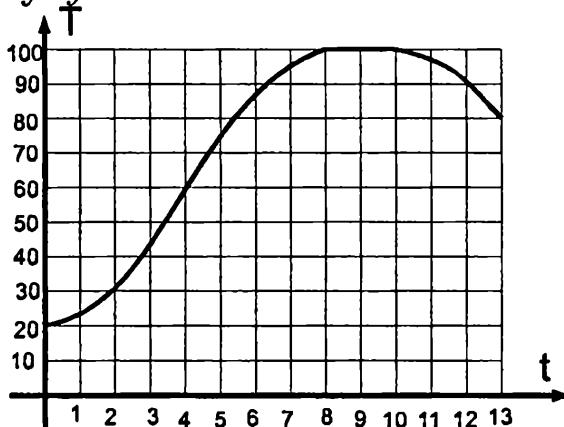
**C5** Найти все такие значения параметра  $a$ , для которых уравнение  $2x - |2x - |x + a|| = 3|x - 2|$  имеет ровно два корня.

**C6** Найдите все простые числа  $k$ , для которых число 2009! делится на  $k^{k+1}$ .

**Единый государственный экзамен по математике**  
**Вариант №7**

**Часть 1**

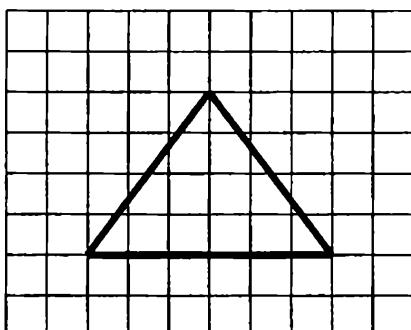
- B1** Первой бригаде надо было вспахать 25 га пашни, второй – 21 га. Производительность труда второй бригады на 30% меньше, чем у первой. Во сколько раз (по времени) одна бригада будет работать больше, чем другая?
- B2** На рисунке представлен график зависимости температуры  $T$  воды в чайнике от времени  $t$ . На горизонтальной оси откладывается время (в секундах). На вертикальной оси откладываются значения температуры воды в чайнике (в градусах по Цельсию). На сколько градусов повысилась температура воды в чайнике в период со 2-ой по 4-ую минуту?



- B3** Пусть  $(x_0; y_0)$  – решение системы  $\begin{cases} 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 0,7 \\ 5\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = 0,4 \end{cases}$ . Найдите сумму  $x_0 + y_0$ .
- B4** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $CH$  – высота треугольника,  $AH = 3,2$ ;  $\cos A = 0,8$ . Найдите  $BC$ .
- B5** Автомобилист заправил машину бензином и заплатил за заправку 500 рублей. Стоимость 1 литра бензина равна 21,5 рублей. Известно, что при движении машины по городу расход бензина составляет 12 литров на 100 км, а по загородному шоссе – 9 литров на 100 км. Автомобилист проехал по загородному шоссе 120 км и по городу

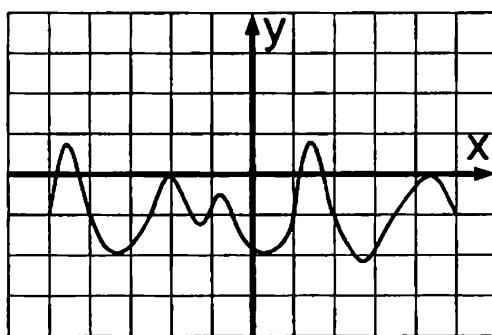
– 70 км. Сколько литров бензина осталось в баке после поездки. Ответ округлите до целого числа.

- B6** На клетчатой бумаге с размером клетки 1см × 1см изображен равнобедренный треугольник. Найдите радиус окружности, описанной вокруг этого треугольника.



- B7** Вычислите  $64^{\log_4 5} + 10^{1-\lg 2}$ .

- B8** На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  на отрезке  $[-5; 5]$ . Найдите число экстремумов функции. (Размер клетки  $1 \times 1$ ).



- B9** Площадь боковой поверхности правильной шестиугольной пирамиды равна 468, сторона основания 12, высота боковой грани 13. Найдите высоту пирамиды.

- B10** Для вычисления тормозного пути автомобиля используют формулу  $S = \frac{v^2+30v}{108}$ , где  $S$  – длина тормозного пути (в метрах),  $v$  – скорость автомобиля перед началом торможения (выраженная в км/час). С какой наибольшей скоростью может ехать автомобиль, чтобы тормозной путь не превышал 50 метров.

**B11** При каких значениях  $a > 0$  точка  $x = 3$  является точкой минимума функции  $f(x) = 2x^3 - 6a^2x + 3$ ?

**B12** Сельскохозяйственный кооператив имеет два поля прямоугольной формы. Длина второго поля в полтора раза больше, а ширина – на 20% меньше, чем у первого. Известно, что урожайность второго поля составляет 90% урожайности первого. На сколько процентов урожай на втором поле больше чем на первом?

## Часть 2

**C1** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2\sin^2 y - \sin y - 1 = 0, \\ \sqrt{x-2} = 2\cos y. \end{cases}$$

**C2** Известно, что основания  $ABCD$  и  $CDEF$  двух правильных четырехугольных пирамид  $ABCDG$  и  $CDEFH$  лежат в одной плоскости и имеют общую сторону  $CD$ . Вершины  $G$  и  $H$  этих пирамид лежат по одну сторону относительно плоскости оснований. Найдите расстояние между точками  $G$  и  $H$ , если известно, что  $AB = HF = 7$ .

**C3** Решите неравенство  $\sqrt{5\log_2 x - 4} + \sqrt{6\log_4 x + 1} < 3$ .

**C4** В треугольник  $ABC$  вписана окружность. Касательная к окружности, параллельная стороне  $AC$ , пересекает стороны  $BA$  и  $BC$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Отрезок  $MN$  равен 12. Найдите сторону  $AC$ , если периметр треугольника равен 100.

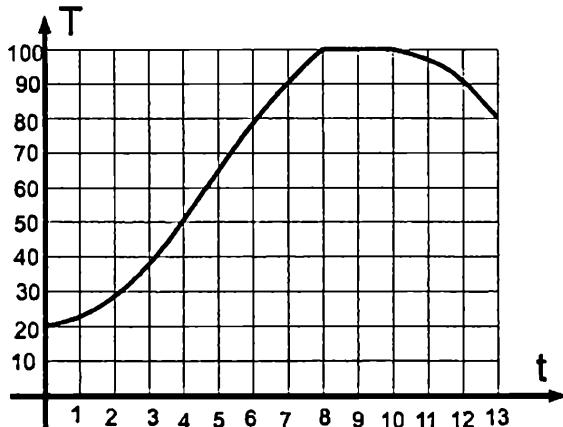
**C5** Найти все такие значения параметра  $a$ , для которых наименьшее значение функции  $y = |x-1| + |x-2| + |x-a| - 3$  будет положительным.

**C6** Найдите наименьшее простое число  $k$ , для которого  $2008!$  не делится нацело на  $k^k$ .

**Единый государственный экзамен по математике**  
**Вариант №8**

**Часть 1**

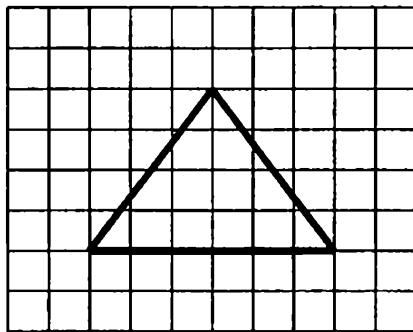
- B1** Андрею надо перебрать 12,5 кг грибов, Борису – 7 кг. Скорость, с которой трудится Андрей, в 2 раза больше скорости Бориса. Во сколько раз время работы одного мальчика больше, чем время второго?
- B2** На рисунке представлен график зависимости температуры  $T$  воды в чайнике от времени  $t$ . На горизонтальной оси откладывается время (в секундах). На вертикальной оси откладываются значения температуры воды в чайнике (в градусах по Цельсию). В течении какого промежутка времени (в минутах) температура воды в чайнике была не меньше 90 градусов по Цельсию?



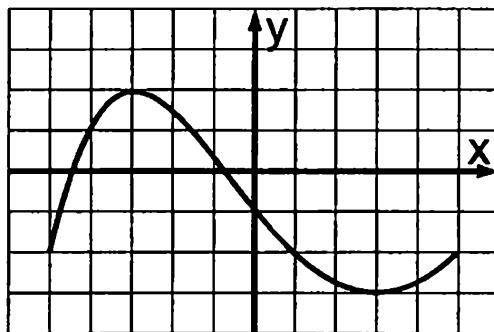
- B3** Пусть  $(x_0; y_0)$  – решение системы  $\begin{cases} \sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 1,3 \\ 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 0,6 \end{cases}$ . Найдите разность  $x_0 - y_0$ .
- B4** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $CH$  – высота треугольника,  $\sin A = 0,6$ ;  $BC = 3$ ;  $AH = 3,2$ . Найдите  $AB$ .
- B5** Автомобилист заправил машину бензином и заплатил за заправку 500 рублей. Стоимость 1 литра бензина равна 21,5 рублей. Известно, что при движении машины по городу расход бензина составляет 12 литров на 100 км, а по

загородному шоссе – 9 литров на 100 км. Автомобилист проехал по загородному шоссе 120 км и по городу – 70 км. Сколько километров по городу сможет проехать автомобилист на оставшемся в баке бензине. Ответ округлите до целого числа.

- B6** На клетчатой бумаге с размером клетки 1см x 1см изображен равнобедренный треугольник. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.



- B7** Вычислите  $(5 + 8 \log_2 3)^{\log_{32} 7}$ .
- B8** На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  на отрезке  $[-5; 5]$ . Найдите расстояние между точками экстремума этой функции. (Размер клетки  $1 \times 1$ ).



- B9** Найдите сторону основания правильной треугольной пирамиды, если боковое ребро и высота пирамиды соответственно равны 10 и  $\sqrt{52}$ .
- B10** Для вычисления тормозного пути железнодорожного состава используют формулу  $S = \frac{v^2 + 50v}{14}$ , где  $S$  – длина тормозного пути (в метрах),  $v$  – скорость состава перед началом торможения (выраженная в км/час). С какой

наибольшей скоростью может ехать железнодорожный состав, чтобы тормозной путь не превышал 600 метров.

**B11** При каких значениях  $p$  точка  $x = -3$  является точкой максимума функции  $f(x) = x^3 + px^2 + 3x - 1$ ?

**B12** Территория второй страны на 30% больше территории первой, при этом ее средняя плотность населения на 10% меньше первой. На сколько процентов численность населения второй страны больше, чем у первой?

## Часть 2

**C1** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2 \sin^2 x + \sin x = 0, \\ \sqrt{y+5} + \sin x + \sqrt{3} \cos x = 0. \end{cases}$$

**C2** Диагональ основания правильной четырехугольной призмы равна  $5\sqrt{2}$ , а диагональ призмы наклонена к плоскости основания под углом  $60^\circ$ . Найдите площадь сечения призмы, проходящего через сторону нижнего основания и противоположную сторону верхнего основания.

**C3** Решите неравенство  $\sqrt{3 \log_2 x - 4} + \sqrt{5 \log_2 x - 2} < 3\sqrt{2}$ .

**C4** Через точку  $K$ , расположенную на диаметре окружности радиуса 76, проведена хорда  $AB$ , образующая с этим диаметром угол  $30^\circ$ . Найдите длину хорды  $AB$ , если  $AK : KB = 2 : 3$ .

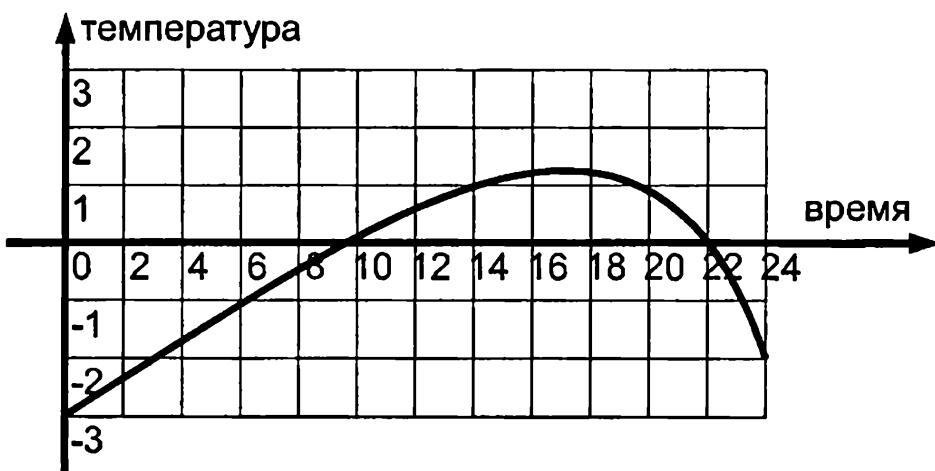
**C5** Найти все такие значения параметра  $a$ , что наименьшее значение функции  $y = |x^2 - (1+a)x + a| + (a-1)|x+1|$  меньше  $-2$  и больше  $-15$ .

**C6** Найдите наименьшее простое число  $k$ , для которого  $2008!$  не делится нацело на  $k^{k+1}$ .

**Единый государственный экзамен по математике**  
**Вариант №9**

**Часть 1**

- B1** В течение пяти часов поезд двигался со средней скоростью 60 км/ч, а затем в течение четырех часов со средней скоростью 15 км/ч. Найдите среднюю скорость поезда за все время движения.
- B2** На рисунке показан график изменения температуры воздуха в течении суток. На горизонтальной оси откладывается время суток в часах. На вертикальной оси откладывается температура воздуха в градусах по Цельсию. Сколько времени (в часах) температура воздуха была не выше 0 градусов по Цельсию?



- B3** Найдите наименьший неотрицательный корень уравнения (в градусной мере) уравнения  $\sin^2 x - 5 \sin x + 4 = 0$ .
- B4** В треугольнике  $ABC$  высота  $CH$  равна 3,  $AB = BC$ ,  $\cos C = 0,8$ . Найдите  $AC$ .
- B5** Магазину нужно закупить 500 кассет яиц (в кассете 30 яиц). У него есть 3 поставщика-птицефермы. Стоимость 1 десятка яиц на 1-ой ферме – 8 рублей, на 2-ой – 8,5 рублей, на 30-ей – 9 рублей. Первая ферма находится на расстоянии 150 км от города, вторая – 100 км, третья – 80

км. Известно, что на 100 км пути расходуется 15 литров бензина стоимостью по 20 рублей за 1 л. Стоимость закупки партии яиц состоит из стоимости самих яиц и стоимости доставки. Сколько рублей придется заплатить магазину за самую дешевую закупку яиц?

**B6** В окружность радиуса  $R$  вписан правильный треугольник и правильный четырехугольник. Найдите отношение квадрата стороны этого треугольника к квадрату стороны этого четырехугольника.

**B7** Вычислите  $\frac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ \sin 70^\circ}$ .

**B8** Зависимость температуры тела  $T$  от времени  $t$  задается соотношением  $T(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - 3t + 5$ . Найдите скорость нагревания тела в момент времени  $t = 4$ .

**B9** Объем цилиндра равен  $44 \text{ м}^3$ . У конуса высота в 12 раз больше высоты цилиндра, а радиус основания – в 2 раза меньше радиуса основания цилиндра. Найдите объем конуса, ответ дайте в кубических метрах.

**B10** Изменение массы радиоактивного вещества происходит по закону  $m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T}$ , где  $m(t)$  – масса вещества в момент времени  $t$ ,  $m_0$  – масса вещества в начальный момент времени,  $T$  – период полураспада. К началу радиактивного распада имелось 3 грамма полония-218. Через сколько минут останется 0,375 граммов полония-218, если его период полураспада равен 3 мин.

**B11** Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями функции  $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 18x^2 + 15$  на отрезке  $[-3; 1]$ .

**B12** Теплоход проплыл 9 км по озеру и 20 км по течению реки за один час. Найдите скорость теплохода при движении по озеру, если скорость течения реки 3 км/ч.

## Часть 2

**C1** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(xy) + y + 2 = 0, \\ 3^{2+y} + 17 = \frac{18}{xy} \end{cases}$$

**C2** Основанием пирамиды является равнобедренная трапеция, большее основание которой равно 24, а боковая сторона равна 15. Основание высоты пирамиды, равной 8, лежит в центре окружности, вписанной в основание пирамиды. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

**C3** Решите неравенство

$$\sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x + 2} - \sqrt{\log_2^2 x - \log_2 x - 2} < 1.$$

**C4** Через вершину угла  $A$  проведена окружность, пересекающая стороны угла в точках  $M$  и  $N$ . Биссектриса угла  $A$  пересекает окружность в точке  $P$ . Найдите радиус этой окружности, если  $AM = 1$ ,  $AN = 2$  и  $AP = 4$ .

**C5** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых решение системы неравенств

$$\begin{cases} x + 2y \geq a, \\ y - x \geq 2a \end{cases}$$

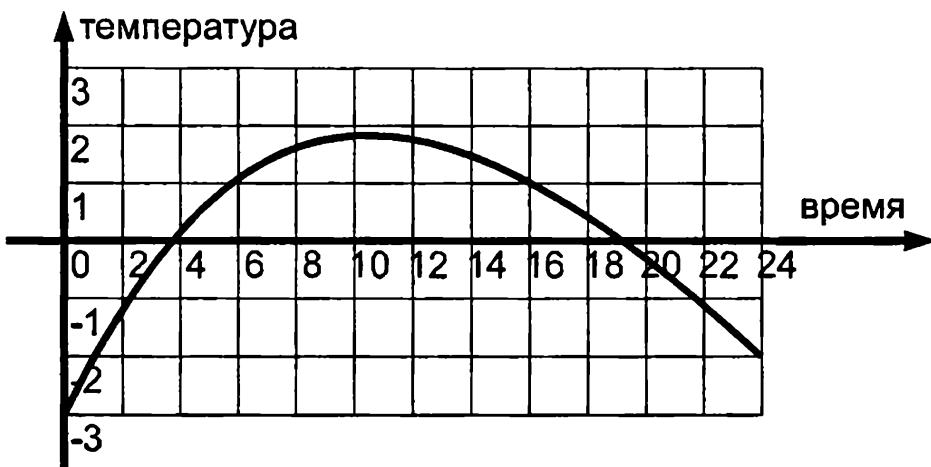
будет также решением неравенства  $2y - x > a + 3$ .

**C6** Может ли дискриминант квадратного трехчлена с целыми коэффициентами быть равным 20092007?

**Единый государственный экзамен по математике**  
**Вариант №10**

**Часть 1**

- B1** Самолет пролетел расстояние от А до В со средней скоростью 800 км/ч за 2 часа, а обратно из пункта В в А со средней скоростью 533 км/ч за 3 часа. Какова средняя скорость полета на всем пути?
- B2** На рисунке показан график изменения температуры воздуха в течении суток. На горизонтальной оси откладывается время суток в часах. На вертикальной оси откладывается температура воздуха в градусах по Цельсию. Сколько времени (в часах) температура воздуха была не ниже 1 градуса по Цельсию?



- B3** Найдите наибольший отрицательный корень уравнения (в градусной мере)  $6 \cos^2 x + 11 \cos x + 4 = 0$ .
- B4** В треугольнике  $ABC$  высота  $CH$  равна 3,  $AB = BC$ ,  $AC = 5$ . Найдите  $\cos C$ .
- B5** Магазину нужно закупить 500 кассет яиц (в кассете 30 яиц). У него есть 3 поставщика-птицефермы. Стоимость 1 десятка яиц на 1-ой ферме – 8 рублей, на 2-ой – 8,5 рублей, на 30-ей – 9 рублей. Первая ферма находится на расстоянии 150 км от города, вторая – 100 км, третья – 80

км. Известно, что на 100 км пути расходуется 15 литров бензина стоимостью по 20 рублей за 1 литр. Стоимость закупки партии яиц состоит из стоимости самих яиц и стоимости доставки. Найдите разность между самой дорогой и самой дешевой закупкой партии яиц.

- B6** Около окружности радиуса  $R$  описаны правильный треугольник и правильный четырехугольник. Найдите отношение квадрата стороны этого треугольника к квадрату стороны этого четырехугольника.

- B7** Найдите значение выражения  $2 - \frac{\sin \frac{8}{3}\pi}{\operatorname{tg} \frac{4}{3}\pi}$ .

- B8** Материальная точка движется по координатной оси  $Ox$  так, что в момент времени  $t$  ее координата  $x(t)$  может быть вычислена по формуле  $t^3 - e^{4-t}$ . Найдите скорость движения точки в момент времени  $t = 4$ .

- B9** Одно из измерений прямоугольного параллелепипеда в 3 раза больше ребра куба, а два других – в 2 раза меньше ребра куба. Известно, что объем куба равен  $40 \text{ м}^3$ . Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, ответ дайте в кубических метрах.

- B10** Изменение массы радиоактивного вещества происходит по закону  $m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T}$ , где  $m(t)$  – масса вещества в момент времени  $t$ ,  $m_0$  – масса вещества в начальный момент времени,  $T$  – период полураспада. При радиоактивном распаде вещества через 20 минут осталось  $\frac{1}{16}$  от его первоначальной массы. Найдите период полураспада вещества.

- B11** Найдите разность между наименьшим и наибольшим значениями функции  $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^3 - x^2 + 1$  на отрезке  $[-3; 1]$ .

- B12** Катер отошел от причала одновременно с плотом и прошел вниз по реке 14 км. Не делая остановки, он развер-

нулся и пошел вверх по реке. Пройдя 10 км, он встретился с плотом. Какова собственная скорость катера, если скорость течения реки 4 км/ч?

## Часть 2

**C1** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3^y \cdot 9^x = 81, \\ \lg(x+y)^2 - \lg x = 2 \lg 3 \end{cases}$$

**C2** Основанием пирамиды является равнобедренная трапеция, большее основание которой равно 24, боковая сторона – 15. Высота пирамиды проходит через центр окружности, вписанной в основание. Найдите объем пирамиды, если боковая поверхность пирамиды равна 300.

**C3** Решите неравенство

$$\sqrt{\log_2^2 x + 4 \log_2 x + 3} - \sqrt{\log_2^2 x - \log_2 x - 2} < 1.$$

**C4** Окружность, диаметр которой равен  $\sqrt{10}$ , проходит через соседние вершины  $A$  и  $B$  прямоугольника  $ABCD$ . Длина касательной, проведенной из точки  $C$  к окружности, равна 3,  $AB = 12$ . Найдите длину  $BC$ .

**C5** Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых существует только одно значение  $x$ , удовлетворяющее системе уравнений

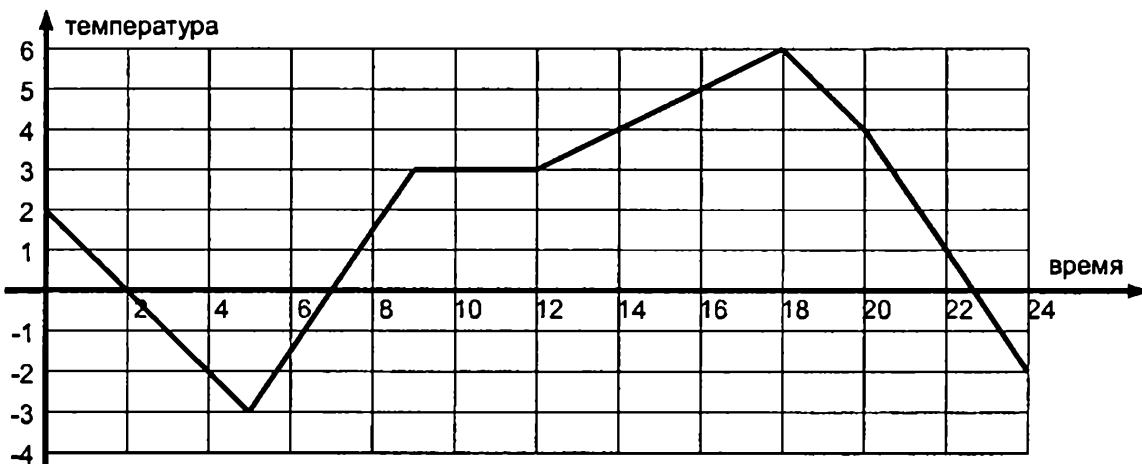
$$\begin{cases} |x^2 - 5x + 4| - 9x^2 - 5x + 4 + 10x|x| = 0, \\ x^2 - 2(a-1)x + a(a-2) = 0. \end{cases}$$

**C6** Существует ли квадратный трехчлен с целыми коэффициентами, дискриминант которого равен 200920102011?

**Единый государственный экзамен по математике**  
**Вариант №11**

**Часть 1**

- B1** В 2008 году квартплата составляла 1800 рублей в месяц. Какой стала квартплата в 2009 году после ее увеличения на 35%?
- B2** На рисунке показан график изменения температуры воздуха в течении суток. На горизонтальной оси откладывается время суток в часах. На вертикальной оси откладывается температура воздуха в градусах по Цельсию. Укажите наибольшее значение температуры воздуха в период с 1 часа ночи по 4 часа дня?



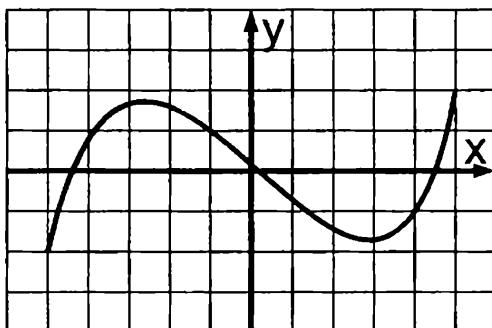
- B3** Найдите наибольшее целое число, принадлежащее множеству решений неравенства  $2^{x^2-3} < 2^{5x+3}$ .
- B4** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$  и  $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . На продолжении катета  $CA$  взята точка  $D$  так, что вершина  $A$  лежит между точками  $C$  и  $D$ . Найдите  $\sin \angle BAD$ .
- B5** Колхоз арендовал 2 экскаватора. Аренда первого экскаватора стоит 6000 рублей в день, а его производительность равна  $250 \text{ м}^3$  в день для мягкого грунта и  $-150 \text{ м}^3$  в день для твердого грунта. Аренда второго экскаватора

стоит 5000 рублей в день, а его производительность равна  $180 \text{ м}^3$  в день для мягкого грунта и  $-100 \text{ м}^3$  в день для твердого грунта. Первый экскаватор должен выкопать  $750 \text{ м}^3$  мягкого грунта и  $900 \text{ м}^3$  твердого грунта; второй –  $720 \text{ м}^3$  мягкого грунта и  $600 \text{ м}^3$  твердого грунта. Сколько рублей заплатил колхоз за аренду этих двух экскаваторов.

**B6** Найдите площадь четырехугольника, вершины которого имеют координаты  $(0; 0)$ ,  $(2; 8)$ ,  $(8, 8)$  и  $(12; 0)$ .

**B7** Найдите значение выражения  $\frac{16 - c^{-2}}{c^{-1} + 4}$  при  $c = 8$ .

**B8** На рисунке изображен график производной функции  $y = f'(x)$ . К графику этой функции проведена касательная прямая в точке с абсциссой  $x = 4$ . Найдите угол наклона этой касательной прямой (в градусной мере).



**B9** Конус и полушар имеют общее основание и равные высоты. Известно, что объем полушара равен  $240 \text{ м}^3$ . Найдите объем конуса, ответ дайте в кубических метрах.

**B10** Коэффициент  $D$  звукоизоляции стены вычисляется по формуле  $D = 20 \cdot \lg \left( \frac{p_0}{p} \right)$ , где  $p_0$  – давление звука до поглощения,  $p$  – давление звука, прошедшего через стену. Пусть коэффициент звукоизоляции равен 20. Во сколько раз стена снижает давление звука.

**B11** Данна функция  $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 2ax - 1$ . При каком наибольшем целом значении  $a$  эта функция является возрастающей на всей числовой прямой?

**B12** Первый турист преодолевает расстояние 20 км на 2,5 часа быстрее, чем второй. Если бы первый турист уменьшил свою скорость на 2 км/ч, второй увеличил бы свою скорость в полтора раза, то они затратили бы на тот же путь одинаковое время. Найдите первоначальную скорость второго туриста.

## Часть 2

**C1** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_x 36 + 2y = 2, \\ -\left(\log_x \frac{1}{6}\right)^3 + y = 1 \end{cases}$$

**C2** Диагональ осевого сечения цилиндра равна 48, а угол между этой диагональю и осью цилиндра равен  $60^\circ$ . Найдите полную поверхность цилиндра (считайте, что  $\pi = 3$ )

**C3** Решите неравенство  $\log_x(x^3 - 1) \cdot \log_{x-1} x < 3$ .

**C4** Около прямоугольного треугольника  $ABC$  описана окружность. Точки  $M$  и  $N$  – середины дуг  $AC$  и  $BC$ . Точка  $F$  – середина дуги  $AB$ , не содержащей точки  $C$ . Найдите площадь четырехугольника  $FAMN$ , если катеты  $AC = 5$ ,  $BC = 12$ .

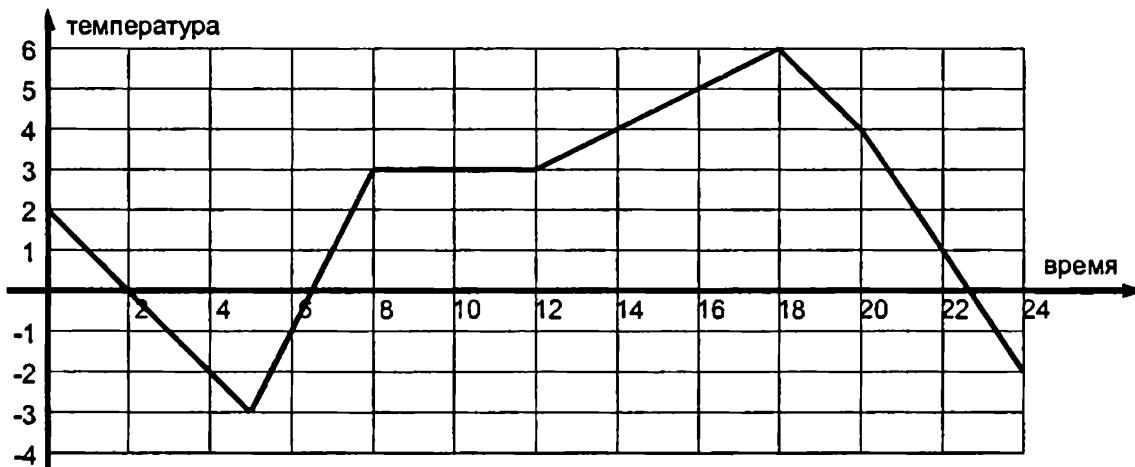
**C5** Найдите наименьшее значение выражения  $z = x + \sqrt{3}y$  на точках множества, являющегося решением неравенства  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

**C6** Найдите все приведенные квадратные трехчлены (то есть квадратные трехчлены со старшим коэффициентом 1) с целыми коэффициентами и имеющие целые корни, если известно, что сумма коэффициентов каждого из этих многочленов равна 29.

**Единый государственный экзамен по математике**  
**Вариант №12**

**Часть 1**

- B1** Первоначальная цена на фрукты летом была снижена на 30%, а зимой повышенна на 40%. На сколько процентов изменилась цена фруктов по сравнению с первоначальной ценой?
- B2** На рисунке показан график изменения температуры воздуха в течении суток. На горизонтальной оси откладывается время суток в часах. На вертикальной оси откладывается температура воздуха в градусах по Цельсию. Укажите наибольший промежуток времени, в течении которого температура воздуха не менялась.



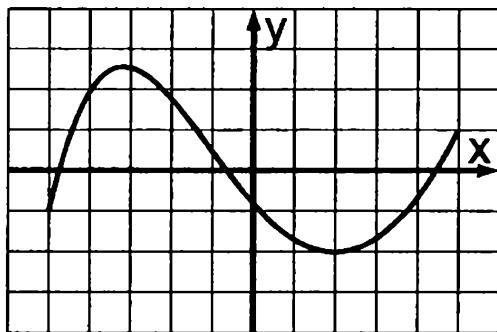
- B3** Найдите наибольшее целое число, принадлежащее множеству решений неравенства  $9^x + 3^x - 12 < 0$ .
- B4** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ . На продолжении катета  $CA$  взята точка  $D$  так, что вершина  $A$  лежит между точками  $C$  и  $D$ . Известно, что  $\sin \angle BAD = \frac{1}{2}$ . Найдите  $\cos B$ .
- B5** Колхоз арендовал 2 экскаватора. Аренда первого экскаватора стоит 6000 рублей в день, а его производительность равна  $250 \text{ м}^3$  в день для мягкого грунта и  $-150 \text{ м}^3$

в день для твердого грунта. Аренда второго экскаватора стоит 5000 рублей в день, а его производительность равна  $180 \text{ м}^3$  в день для мягкого грунта и  $-100 \text{ м}^3$  в день для твердого грунта. Первый экскаватор должен выкопать  $750 \text{ м}^3$  мягкого грунта и  $900 \text{ м}^3$  твердого грунта; второй –  $720 \text{ м}^3$  мягкого грунта и  $600 \text{ м}^3$  твердого грунта. На сколько рублей стоимость аренды первого экскаватора больше, чем второго?

**B6** На координатной плоскости размещены точки  $A(0;0)$ ,  $B(5;4)$  и  $C(7;2)$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ .

**B7** Вычислите  $\frac{1}{\sqrt{5}+2} - \frac{\sqrt{5}}{5-2\sqrt{5}}$ .

**B8** На рисунке изображен график производной функции  $y = f'(x)$ . Найдите абсциссу  $x_0$  точки графика этой функции, обладающей следующим свойством: угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции  $y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$ , равен  $-2$ .



**B9** Полушар и цилиндр имеют общее основание и равные высоты. Известно, что объем цилиндра равен  $144 \text{ м}^3$ . Найдите объем полушара, ответ дайте в кубических метрах.

**B10** Коэффициент  $D$  звукоизоляции стены вычисляется по формуле  $D = 20 \cdot \lg \left( \frac{p_0}{p} \right)$ , где  $p_0$  – давление звука до поглощения,  $p$  – давление звука, прошедшего через стену. Пусть коэффициент звукоизоляции равен 30, а давление

звука до поглощения равно  $\sqrt{10^5}$ . Найдите давление звука, прошедшего через стену.

**B11** При каком наибольшем натуральном значении  $a$  функция  $f(x) = -4x^3 + 2ax^2 - 2,5ax - 4$  убывает на всей числовой прямой?

**B12** Поезд должен был пройти 840 км за определенное время. На середине пути поезд был задержан у семафора на 0,5 часа и для того, чтобы прибыть к месту назначения в срок, увеличил скорость на 2 км/ч. Сколько времени поезд находился в пути?

## Часть 2

**C1** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3^{1+2\log_3(y-x)} = 48, \\ 2\log_5(2y-x-12) - \log_5(y-x) = \log_5(x+y) \end{cases}$$

**C2** Через вершину конуса и хорду, стягивающую дугу в  $120^\circ$ , проведено сечение, составляющее с плоскостью основания угол в  $45^\circ$ . Найдите площадь сечения, если радиус основания равен  $4\sqrt{3}$ .

**C3** Решите неравенство  $\log_x(5x^2) \cdot \log_5^2 x > 1$ .

**C4** Окружность радиуса 6 касается прямых  $AB$  и  $BC$  в точках  $A$  и  $C$  соответственно и пересекает медиану  $BD$  треугольника  $ABC$  в точке  $M$ , так что  $BM = \frac{5}{9}BD$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ .

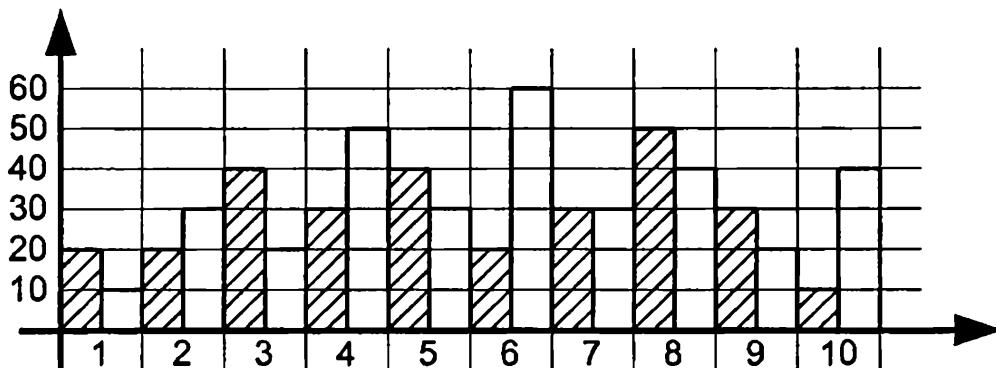
**C5** Найти все значения параметра  $a$ , при которых площадь фигуры  $|x - y| + 2|y| < a$  будет больше 4.

**C6** Найдите все натуральные  $n$ , такие, что десятичная запись числа  $n!$  ( $n$ -факториал) оканчивается на 2008 нулей.

**Единый государственный экзамен по математике**  
**Вариант №13**

**Часть 1**

- B1** Вклад, внесенный в банк 2 года назад, составляет 1312,5 тысяч рублей. Каков был первоначальный вклад при 25% годовых?
- B2** На диаграмме показано, как проходит прием абитуриентов в университет на естественные и гуманитарные специальности в течении 10 дней июля 2009 года (пустыми квадратиками отмечается количество заявлений на естественные специальности, а заштрихованными квадратиками – на гуманитарные специальности). Сколько всего заявлений было принято 6 июля на обе специальности?



- B3** Найдите наименьшее целое число, принадлежащее множеству решений неравенства  $\log_{\frac{1}{3}}(8x+1) > \log_{\frac{1}{3}}(5x-11)$ .
- B4** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $30^\circ$ . Найдите  $\sin B$ , если  $AC = 12,3$  и  $AB = 61,5$ .
- B5** Для загрузки танкера нефтью, вместимость которого равна 13650 тонн, в порту имеются три трубопровода. По первому из них в час может быть закачено 300 тонн нефти, по второму – 350 тонн, по третьему – 400 тонн. Загрузка танкера одновременно может идти только по двум трубопроводам (либо первому со вторым, либо второму

с третьим, либо первому с третьим). В каком случае танкер будет заполнен быстрее? Укажите наименьшее время заполнения танкера.

**B6** Площадь круга, описанного вокруг правильного шестиугольника, равна  $25\sqrt{3}\pi$ . Найдите площадь этого шестиугольника.

**B7** Вычислите  $\frac{3 \cdot 3^{\log_8 1} - \log_{\sqrt{2}} 16}{\log_6 25 - 2 \log_6 \frac{5}{6}}$ .

**B8** Прямая, проходящая через начало координат, является касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $M(4; 6)$ . Вычислите значение производной  $f'(x)$  в точке  $x = 4$ .

**B9** Конус и цилиндр имеют равные основания, а образующая конуса в 3 раза больше образующей цилиндра. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если площадь боковой поверхности конуса равна  $321 \text{ м}^2$ , ответ дайте в квадратных метрах.

**B10** Число людей в городе изменяется по закону  $N(t) = N_0 \cdot 2,5^{0,02t}$ , где  $N(t)$  – число людей в городе в момент времени  $t$ ,  $N_0$  – число людей в момент времени  $t = 0$ . Через сколько лет численность населения города увеличится с 18000 человек до 45000 человек.

**B11** Найдите точку минимума функции  $f(x) = e^{2x+3} \cdot (x^2 - 2)$ .

**B12** В лаборатории имеется смесь, общий вес которой на 3,3 кг больше веса титана, содержащегося в ней. Если к этой смеси добавить 2 кг новой смеси, содержащей 25% титана, то получится смесь, содержащая 20% титана. Определите процентное содержание титана в первоначальной смеси.

## Часть 2

**C1** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{4}, \\ \cos(2x) + 2 \cos y = 1 \end{cases}$$

**C2** Равнобедренный треугольник вращается вокруг своей высоты. Найдите большую сторону этого треугольника, если его периметр равен 30, а площадь полной поверхности тела вращения равна  $60\pi$ .

**C3** Решите неравенство  $\left(2 + \log_2 \left(\frac{5}{4} - x\right)\right) \cdot \log_x \frac{1}{2} > 1$ .

**C4** Окружность радиуса 12 проходит через вершины  $A$  и  $B$  квадрата  $ABCD$ . Длина касательной, проведенной к окружности из вершины  $C$ , равна 2. Чему равен диаметр окружности, если сторона квадрата равна 1?

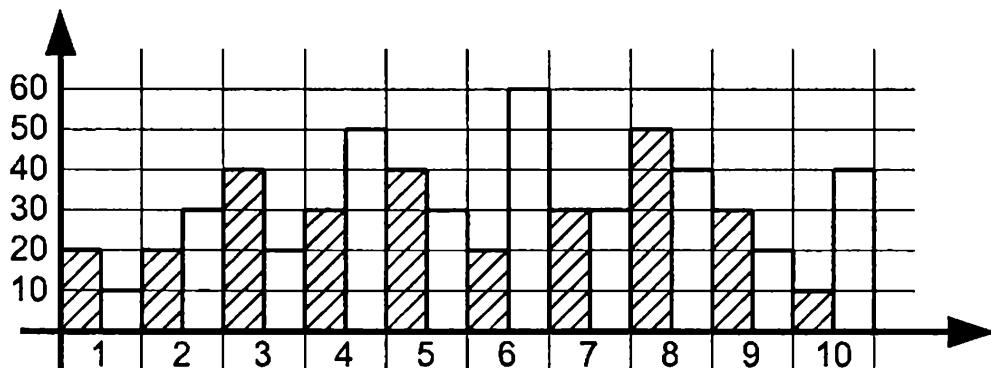
**C5** Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых из неравенства  $0 \leq x \leq 1$  будет следовать неравенство  $(a^2 + a - 2)x^2 + (a - 4)x - 2 \leq 0$ .

**C6** Найдите натуральное  $n$ , имеющее ровно 6 делителей, сумма которых равна 3528.

**Единый государственный экзамен по математике**  
**Вариант №14**

**Часть 1**

- B1** Вклад внесен в банк под 20% годовых. На сколько процентов возрастет величина вклада к концу третьего года?
- B2** На диаграмме показано, как проходит прием абитуриентов в университет на естественные и гуманитарные специальности в течении 10 дней июля 2009 года (пустыми квадратиками отмечается количество заявлений на естественные специальности, а заштрихованными квадратиками – на гуманитарные специальности). Сколько всего заявлений было принято за последние три дня на обе специальности?



- B3** Найдите наименьшее целое решение неравенства  $\log_2 x - 2 \log_2 x - 3 < 0$ .
- B4** В треугольнике  $ABC$  угол  $B$  равен  $60^\circ$ ,  $BC = 3\sqrt{3}$ ,  $AC = 15$ . Найдите  $\sin A$ .
- B5** Для загрузки танкера нефтью, вместимость которого равна 13650 тонн, в порту имеются три трубопровода. По первому из них в час может быть закачено 300 тонн нефти, по второму – 350 тонн, по третьему – 400 тонн. Загрузка танкера одновременно может идти только по двум трубопроводам (либо первому со вторым, либо второму с третьим, либо первому с третьим). В каком случае

танкер будет заполняться дольше? Укажите наибольшее время заполнения танкера.

- B6** Найдите радиус круга, вписанного в равнобедренную трапецию ABCD с основаниями AD и BC, если BC=8 и AD=18.
- B7** Вычислите  $\frac{3^2 \log_3 5 - 81^{\log_2 1}}{\log_6 7 + 2 \log_6 \frac{6}{\sqrt{7}}}.$
- B8** Прямая, проходящая через начало координат, является касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $M(-2; -9)$ . Вычислите значение производной  $f'(x)$  в точке  $x = -2$ .
- B9** Образующая конуса в 2 раза больше образующей цилиндра, площадь основания конуса в 4 раза больше площади основания цилиндра. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если площадь полной поверхности конуса равна  $212 \text{ м}^2$ . Ответ дайте в квадратных метрах.
- B10** Зависимость мощности тока  $P$  от силы тока  $I$  выражается формулой  $P(I) = -2I^2 + 6I$  ( $I$  измеряется в амперах,  $P$  измеряется в ваттах). Чему равна максимальная мощность тока?
- B11** Дана функция  $f(x) = e^{x-5} \cdot (2x+1)^2$ . Найдите точку максимума этой функции.
- B12** У фермера имеются две теплицы общей площадью  $160 \text{ м}^2$ . В первой теплице собрали 1800 кг огурцов, во второй – 1320 кг, причем во второй теплице с  $1 \text{ м}^2$  собрали на 4 кг огурцов больше, чем с  $1 \text{ м}^2$  в первой. Сколько килограммов огурцов собрали с одного квадратного метра во второй теплице?

## Часть 2

**C1** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{\cos x} + 2^{\frac{1}{\cos y}} = 5, \\ 2^{\cos x + \frac{1}{\cos y}} = 4 \end{cases}$$

**C2** Плоскость сечения делит диаметр сферы на части, длины которых равны 6 и 12. Найдите отношение объемов меньшей части шара к большей.

**C3** Решите неравенство  $\log_x 2 \cdot \log_4 \left( \frac{3 - 8x}{8x - 10} \right) \leq \frac{1}{2}$ .

**C4** В трапеции  $ABCD$  длина боковой стороны  $AB = 4$ , биссектриса угла  $BAD$  пересекает прямую  $BC$  в точке  $E$ . В треугольник  $ABE$  вписана окружность с центром в точке  $O$ , касающаяся сторон  $AB$  в точке  $M$ ,  $BE$  в точке  $N$ . Найдите угол  $MON$ , если  $MN = 2$ .

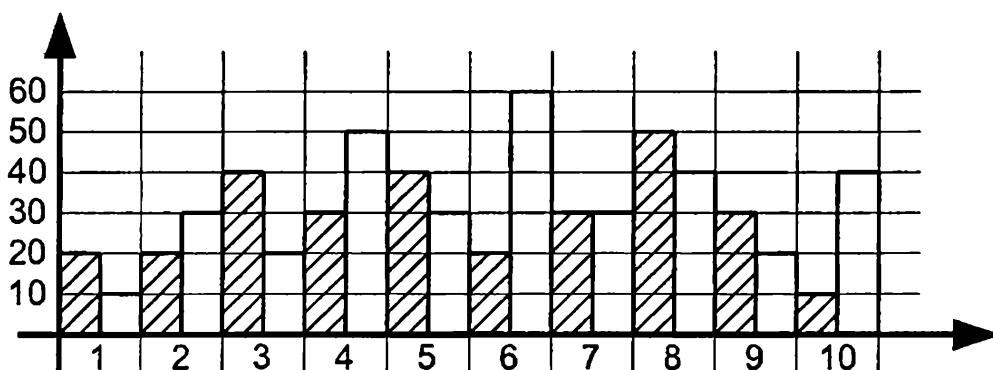
**C5** Найти все значения  $a$ , при каждом из которых из неравенства  $0 \leq x \leq 3$  будет следовать неравенство  $ax^2 - 2x + 3a - 2 \leq 0$ .

**C6** Найдите все такие натуральные числа  $n$ , что число  $n^2$  имеет ровно в 3 раза больше делителей (считая 1 и само число), чем  $n$ , если известно, что число  $n$  имеет ровно 2 простых делителя 2 и 3.

**Единый государственный экзамен по математике**  
**Вариант №15**

**Часть 1**

- B1** На полу комнаты прямоугольной формы, площадью 18 квадратных метров на одном и том же расстоянии от стен лежит коврик размером 1,5 м х 2 м. Найдите расстояние от коврика до стен комнаты.
- B2** На диаграмме показано, как проходит прием абитуриентов в университет на естественные и гуманитарные специальности в течении 10 дней июля 2009 года (пустыми квадратиками отмечается количество заявлений на естественные специальности, а заштрихованными квадратиками – на гуманитарные специальности). На сколько заявлений больше было подано в период с 4 по 6 июля на гуманитарные специальности, чем на естественные?



- B3** Пусть  $(x_0; y_0)$  – решение системы уравнений

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_3 y = -1 \\ 2\log_2 x - \log_3 y = 7 \end{cases}$$

Найдите отношение  $\frac{x_0}{y_0}$ .

- B4** В треугольнике  $ABC$  проведена медиана  $AK$ , равная  $\frac{13\sqrt{2}}{4}$  и составляющая со стороной  $AC$  угол  $30^\circ$ . Найдите  $BC$ , если угол  $C$  равен  $45^\circ$ .

- B5** При строительстве домов разного типа используются детали двух видов. Для строительства 6-ти квартирного дома надо 30 деталей первого и 40 деталей второго видов. Для 10-ти квартирного дома надо 40 деталей первого и 60 деталей второго видов. Для 14-ти квартирного дома надо 90 деталей первого и 120 деталей второго видов. Всего в наличии имеется 600 деталей первого и 800 деталей второго видов. На сколько больше из этих деталей можно построить 6-ти квартирных домов, чем 14-ти квартирных?
- B6** В равнобедренную трапецию, площадь которой равна 63, вписана окружность радиуса 3. Найдите периметр трапеции.
- B7** Вычислите  $(2 - \sqrt{5})^2 + |1 - 4\sqrt{5}|$ .
- B8** Данна функция  $y = 3x^2 + 5x - 1$ . В точке графика этой функции с абсциссой  $x_0 = -1$  проведена касательная прямая к графику. Найдите абсциссу точки пересечения этой касательной с осью  $Ox$ .
- B9** Металлический шар разрезали на два полушара. Сколько литров краски потребуется, чтобы полностью покрасить эти полушары, если на покраску полного шара требуется 246 литров краски?
- B10** Из отверстия в днище цилиндрического бака вытекает вода. Высота столба воды в баке изменяется по закону  $h(t) = 4,5 - 1,65t + 0,15t^2$  ( $h(t)$  – высота столба воды в баке в момент времени  $t$ , измеряемая в метрах, время  $t$  измеряется в минутах). В течении какого времени вся вода из бака вытечет?
- B11** Данна функция  $f(x) = \ln(2x - 3) - 2x$ . Найдите ее наибольшее значение.
- B12** Числитель дроби на 2 больше ее знаменателя. Если сложить эту дробь с обратной ей дробью, получится  $\frac{74}{35}$ . Найдите исходную дробь.

## Часть 2

**C1** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \cos(2y) \cdot \sqrt{\sin x} = 0, \\ \cos(2y) + 4 \sin^2 x - 3 = 0 \end{cases}$$

**C2** Шар и конус имеют равновеликие объемы. Найдите отношение радиуса шара к радиусу конуса, если осевое сечение конуса – равносторонний треугольник.

**C3** Решите неравенство  $\log_x(\log_{x/4} \sqrt{4-x}) < 0$ .

**C4** Из точки  $A$  к окружности с радиусом 2 проведена касательная, которая касается окружности в точке  $M$  и секущая, пересекающая окружность в точках  $B$  и  $C$ , причем точка  $C$  – середина  $AB$ , угол  $AMB$  равен  $60^\circ$ . Найдите площадь треугольника  $AMB$ .

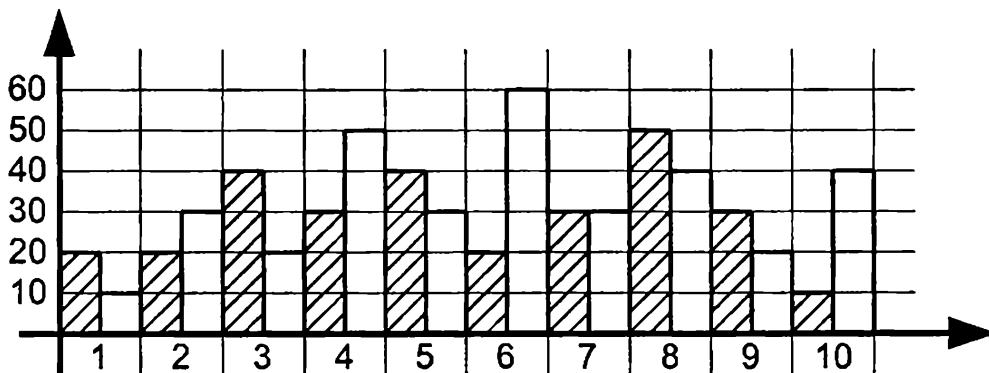
**C5** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых множество значений функции  $y = \frac{x^2 - ax + 1}{x^2 + x + 1}$  лежит на интервале  $(-1; 3)$ .

**C6** Про  $n \in \mathbb{N}$  известно, что его десятичная запись заканчивается цифрой 0 и что число  $n^2$  имеет ровно в 3 раза больше делителей (считая 1 и само число), чем  $n$ . Найдите все такие числа  $n$ .

**Единый государственный экзамен по математике**  
**Вариант №16**

**Часть 1**

- B1** Балкон имеет форму прямоугольника размером 4 м х 2 м. На балконе находится коврик прямоугольной формы площадью 2,88 квадратных метров. Одной стороной коврик прилегает к большей стороне балкона, а три другие его стороны находятся на одинаковом расстоянии от краев балкона. Найдите это расстояние.
- B2** На диаграмме показано, как проходит прием абитуриентов в университет на естественные и гуманитарные специальности в течении 10 дней июля 2009 года (пустыми квадратиками отмечается количество заявлений на естественные специальности, а заштрихованными квадратиками – на гуманитарные специальности). На сколько заявлений больше было подано на обе специальности в последние три дня, чем в первые три дня?



- B3** Пусть  $(x_0; y_0)$  – решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2 \log_2 x + \log_4 y = 4 \\ 3 \log_2 x - 2 \log_4 y = 13 \end{cases}$$

Найдите произведение  $x_0 \cdot y_0$ .

- B4** Диагональ  $BD$  параллелограмма  $ABCD$ , равная  $\frac{9\sqrt{6}}{2}$ , составляет с основанием  $AD$  угол  $60^\circ$ . Найдите длину второй диагонали  $AC$ , если она составляет с тем же основанием  $AD$  угол  $45^\circ$ .
- B5** При строительстве домов разного типа используются детали двух видов. Для строительства 6-ти квартирного дома надо 30 деталей первого и 40 деталей второго видов. Для 10-ти квартирного дома надо 40 деталей первого и 60 деталей второго видов. Для 14-ти квартирного дома надо 90 деталей первого и 120 деталей второго видов. Всего в наличии имеется 600 деталей первого и 800 деталей второго видов. На сколько больше из этих деталей можно построить 10-ти квартирных домов, чем 14-ти квартирных?
- B6** Площадь круга, вписанного в трапецию, равна  $25\pi$ . Сумма боковых сторон трапеции равна 16. Найдите площадь трапеции.
- B7** Найдите значение выражения  $\sqrt[6]{(x+1)^6} + \sqrt[4]{(x+2)^4}$  при  $x = -\sqrt{2}$ .
- B8** К графику функции  $y = -2x^2 + 3x + 1$  в точке графика с абсциссой  $x_0 = 1$  проведена касательная прямая. Найдите ординату точки пересечения этой касательной с осью  $Oy$ .
- B9** Известно, что сторона основания и высота правильной шестиугольной призмы соответственно в 12 раз и в 2 раза больше стороны основания и высоты правильной треугольной призмы. Найдите площадь полной поверхности правильной шестиугольной призмы, если полная поверхность правильной треугольной призмы равна  $10 \text{ м}^2$ . Ответ дайте в квадратных метрах.
- B10** Из отверстия в днище цилиндрического бака вытекает вода. Высота столба воды в баке изменяется по закону  $h(t) = 7,5 - 2,75t + 0,25t^2$  ( $h(t)$  – высота столба воды в

баке в момент времени  $t$ , измеряемая в метрах, время  $t$  измеряется в минутах). В течении какого времени высота столба воды в баке не будет превышать 5 метров.

**B11** Найдите наименьшее значение функции  $f(x) = 5x - \ln(5x + 2)$ .

**B12** Найдите двузначное число, в котором число десятков на 4 больше его единиц, а произведение этого числа и полусуммы его цифр равно 153.

## Часть 2

**C1** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\sin x - \cos y} = \cos x, \\ \sin x + \cos y = \sin^2 x \end{cases}$$

**C2** В прямой треугольной призме через сторону основания под углом  $45^\circ$  к нему проведена плоскость, пересекающая противоположное ребро. Найдите площадь сечения, если площадь основания равна  $S$ .

**C3** Решите неравенство  $\log_x(\log_{x/2} \sqrt{2-x}) < 0$ .

**C4** Окружность радиуса 1,5 проходит через вершины  $M$  и  $D$  трапеции  $MNPD$  ( $MD$  параллельна  $NP$ ,  $MD$  больше  $NP$ ), пересекает сторону  $PD$  в точке  $K$ , так что  $PD = 4\sqrt{3}KD$ , угол  $NDM$  равен  $60^\circ$ . Найдите площадь трапеции  $MNPD$ .

**C5** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} (x-a)(ax-a-1) \geq 0, \\ ax \geq 4 \end{cases}$$

не имеет решений.

**C6** Найдите все такие натуральные числа  $n$ , что число  $n^2$  имеет ровно в 3 раза больше делителей (считая 1 и само число), чем  $n$ .

## Ответы к задачам из вариантов №1–№16

	Номера заданий											
	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
1	5	0,4	1,25	60	387	0,6	-2	7	51	900	2	0,2
2	5	0,375	0,8	8	880	-0,6	-1	4	54	25	15	450
3	8	100	-0,5	6	6,875	18	20	4	32,5	80	36	30
4	12	0,25	11	0,8	6	97	1,5	7	39,2	6	3	7
5	160	2	9	3,2	12800	6,5	2	3	8	5	132	12,25
6	3000	3	-3	0,6	700	42,5	1,25	1	4	5	-68	12
✓ 7	1,2	30	108	3	4	3,125	130	9	11	60	3	8
8	1,12	5	0,09	5	33	1,5	7	6	12	70	5	17
9	40	12	90	5	12450	1,5	2	9	44	9	67	27
10	640	10	-120	0,8	1290	3	1,5	49	30	5	-8,5	24
✓ 11	2430	5	5	0,5	104000	72	3,875	135	120	10	1	4
12	2	4	0	0,5	4000	9	-4	2	96	10	7	21
13	840000	80	3	0,1	18,2	112,5	-2,5	1,5	214	50	1	17,5
14	72,8	190	1	0,3	21	6	12	4,5	106	4,4	-2,5	18
15	1,25	50	108	6,5	14	42	8	-4	369	5	-4	1,4
16	0,8	50	0,5	13,5	7	80	1	3	480	4	-1	51

	Номера заданий	
	C1	C2
1	$\left\{ \left( -\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{1}{2} \right)   n \in \mathbb{Z} \right\}$	$\arctg(5\sqrt{3}/4)$
2	$\left\{ \left( -\frac{\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{1}{2} \right)   n \in \mathbb{Z} \right\}$	$\arctg(\sqrt{15}/5)$
3	$\{(\pi + 2\pi n; -2)   n \in \mathbb{Z}\}$	$60^\circ$
4	$\{(\pi + 2\pi n; 1)   n \in \mathbb{Z}\}$	$\arccos(1/6)$
5	$\left\{ \left( (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi k \right)   n, k \in \mathbb{Z} \right\}$	6
6	$\left\{ \left( (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi k \right)   n, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$6\sqrt{3}$
7	$\left\{ \left( 2; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right)   n \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \left( 5; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \right)   n \in \mathbb{Z} \right\}$	7
8	$\{(\pi + 2\pi n; -2)   n \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \left( -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; -1 \right)   n \in \mathbb{Z} \right\}$	$25\sqrt{7}$
9	$(-\frac{1}{2}; -2)$	300
10	$(1; 2), (16; -28)$	480
11	$(6; 0), (\frac{1}{6}; 2)$	$9(144 + 8\sqrt{3})$
12	$(16; 20)$	$4\sqrt{6}$
13	$\left\{ \left( \frac{\pi}{4} + \pi n; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k \right)   n, k \in \mathbb{Z} \right\}$	8
14	$\left\{ \left( \frac{\pi}{2} + \pi n; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k \right)   n, k \in \mathbb{Z} \right\}$	0, 35
15	$\left\{ \left( (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k \right)   n, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$
16	$\left\{ \left( \frac{\pi}{6} + 2\pi n; \pm \arccos(-\frac{1}{4}) + 2\pi k \right)   n, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$S\sqrt{2}$

	Номера заданий	
	C3	C4
1	$\left(-1; \frac{1}{2}\right) \cup (1; 2) \cup \left(2; \frac{5}{2}\right)$	$\sqrt{2}$ или $5\sqrt{2}$
2	$\left(-3; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; 2) \cup \left(2; \frac{5}{2}\right)$	$20\sqrt{2}$ или $4\sqrt{2}$
3	$\left(-\frac{8}{3}; -2\right) \cup \left(-\frac{4}{3}; -1\right)$	$20(2 - \sqrt{3})$ или $20(2 + \sqrt{3})$
4	$(-\infty; -5) \cup (-3; -2] \cup [4; \infty)$	$\sqrt{11}$
5	$\left[\frac{25}{7}; 4\right) \cup (10; \infty)$	216
6	$\left[\frac{13}{6}; 3\right) \cup (8; \infty)$	54
7	$\left(\sqrt[5]{16}; 2\right)$	20 или 30
8	$\left(2\sqrt[3]{2}; 4\right)$	$20\sqrt{57}$
9	$\left(0; \frac{1}{4}\right] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$	$\frac{4\sqrt{14}}{\sqrt{55}}$
10	$\left(0; \frac{1}{8}\right] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$	$\sqrt{32} (\sqrt{5} \pm 1)$
11	$(1; 2)$	58, 5
12	$\left(0; \frac{1}{5}\right) \cup (\sqrt{5}; \infty)$	9, 72
13	$\left(\frac{1}{4}; 1\right) \cup \left(1; \frac{5}{4}\right)$	$\sqrt{10}$
14	$\left[\frac{3}{4}; 1\right)$	120
15	$(3; 8\sqrt{2} - 8)$	$8(6 - \sqrt{3})$
16	$(1; 2\sqrt{3} - 2)$	$22, 5\sqrt{3} - 27$

	Номера заданий	
	C5	C6
1	$(-1; 3) \cup \{11\}$	1004
2	$(-\infty; -6]$	166
3	$[-6; 4]$	1004
4	$\left[ -\frac{5}{2}; 0 \right]$	501
5	$\left( -\frac{13}{4}; 3 \right)$	$\{2; 3; 5; \dots; 43\}$
6	$(-18; -2) \cup (-2; 6)$	$\{2; 3; 5; \dots; 43\}$
7	$(-\infty; -1) \cup (4; \infty)$	47
8	$(-4; 0)$	47
9	$\left[ \frac{3}{2}; \infty \right)$	не может
10	$\{-1\} \cup (1; 3) \cup (4; 6]$	не может
11	-2	$x^2 - 32x + 60, x^2 + 28x$
12	$(2; \infty)$	8045, 8046, 8047, 8048, 8049
13	$[-4; 2]$	$503 \cdot 2 \cdot 2 = 2012$
14	$\left( -\infty; \frac{2}{3} \right]$	144, 324
15	$(-3; 1)$	400, 2500
16	$(-2; 0]$	$p^4 \cdot q^2$ , где $p$ и $q$ – различные простые числа

## Дополнительные задачи

### Задачи раздела В1

- B1.1** Молодому специалисту при устройстве на работу предложили (в связи с финансовым кризисом) в течении первого месяца зарплату на 20% меньше положенной. Затем в следующем месяце обещали повысить зарплату на 20%. На сколько процентов меньше положенного получить работник за два месяца работы?
- B1.2** Два предпринимателя при открытии фирмы сложили свои капиталы в 700 тысяч рублей и 900 тысяч рублей соответственно. Полученную прибыль в 150000 рублей разделили пропорционально вложенному капиталу. Какую прибыль получит первый предприниматель?
- B1.3** Купленный на складе товар продан в магазине за 1386 тысяч рублей при 10%-ной торговой наценке. Сколько стоил товар на складе?
- B1.4** Цена на товар была снижена на 20%, затем новая цена еще раз была снижена и составила 60% от первоначальной. На сколько процентов цена на товар была снижена во второй раз?
- B1.5** Себестоимость единицы продукции сначала выросла на некоторое число процентов, а затем новая себестоимость была снижена на такое же число процентов. Определите это число процентов, если конечная себестоимость оказалась на 4% ниже первоначальной.
- B1.6** Денежный вклад внесен в банк под 30% годовых. Через два года процентная ставка была понижена до 20% годовых. На сколько процентов вырастет величина вклада к концу третьего года?
- B1.7** Периметр прямоугольной детской площадки равен 18 м. Если ее длину уменьшить на 20%, а ширину увеличить на 25%, то периметр не изменится. Найдите пло-

щадь этой площадки.

- B1.8** Одну пятую часть пути автомобиль ехал со средней скоростью 40 км/ч, а оставшийся путь – со средней скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на всем пути. Ответ округлите до целого числа.

### Задачи раздела В3

- B3.1** Пусть  $(x_0; y_0)$  – решение системы уравнений

$$\begin{cases} 3 \cdot 4^x - 2 \cdot 9^y = 6 \\ 2 \cdot 4^x + 9^y = 11 \end{cases}$$

Найдите разность  $x_0 - y_0$ .

- B3.2** Найдите корень уравнения  $\log_2(x^2 + 1) + 2 = 2 \cos(\pi x)$ .

- B3.3** Решите уравнение  $\sqrt{x^2 + 16} = 4 - \sin^2(3x)$ .

- B3.4** Решите уравнение  $0,25^{x+2} = \sqrt{2x + 22}$ .

- B3.5** Решите уравнение  $\log_2(x + 5) = 59 - 5x$ .

- B3.6** Найдите наименьшее нечетное решение неравенства  $\log_2 x \geq 20 - x$ .

- B3.7** Пусть  $(x_0; y_0)$  – решение системы уравнений

$$\begin{cases} 3 \cdot 4^x + 10 \cdot 5^y = 6,4 \\ 2 \cdot 4^x - 5 \cdot 5^y = 3,8 \end{cases}$$

Найдите отношение  $\frac{x_0}{y_0}$ .

- B3.8** Найдите наименьшее положительное целое число, при-  
надлежащее множеству решений неравенства  

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{6x+10-x^2} > \frac{1}{8}$$

## Задачи раздела В12

- B12.1** Клиент банка взял в банкомате  $\frac{1}{3}$  своих денег, потом  $\frac{3}{4}$  оставшихся и еще 2200 р. После этого на пластиковой карточке у него осталось  $\frac{1}{8}$  всех денег. Какая сумма первоначально лежала на счету клиента?
- B12.2** Один из рабочих выполнил пятилетний план за 3 года 4 месяца. На сколько процентов он перевыполнил план, который был намечен на 3 года 4 месяца?
- B12.3** В треугольник с длинами сторон 4, 5 и 6 проведена биссектриса к большей стороне, которая при этом разделилась на два отрезка. Сколько процентов длина меньшего отрезка составляет от длины большего?
- B12.4** Первый бак для воды имеет форму куба, второй – форму прямоугольного параллелепипеда. Оба бака открыты сверху. У второго бака ширина, длина и высота больше, чем у первого соответственно в полтора, два и два с половиной раза. Оба бака надо покрасить снаружи краской. На сколько процентов больше потребуется краски для второго бака, чем для первого бака?
- B12.5** За три часа первый лыжник прошел на 2,5 км больше другого, так как один километр он проходил на одну минуту быстрее. За сколько минут первый лыжник проходил один километр?
- B12.6** Школьник прочитал книгу за три дня. В первый день он прочитал 0,2 всей книги и еще 16 страниц, во второй день – 0,3 остатка и еще 20 страниц, в третий день – 0,75 нового остатка и последние 30 страниц. Сколько страниц в книге?
- B12.7** Бак емкостью 2400 м<sup>3</sup> наполняется топливом. При опорожнении бака производительность насоса на 10 м<sup>3</sup> в минуту выше, чем производительность насоса при наполнении. В результате время опорожнения бака на 8

минут меньше времени заполнения. Определите производительность насоса при наполнении бака.

**B12.8** Первый рабочий изготовил 60 деталей на три часа быстрее второго. За сколько часов второй рабочий изготовит 90 деталей, если, работая вместе, они изготавливают за один час 30 деталей?

**B12.9** Для перевозки 60 т груза намечалось использовать несколько грузовиков. Ввиду большого подъема пути на каждый грузовик пришлось грузить меньше, чем предполагалось, и поэтому потребовалось еще 4 машины. Какое число грузовиков предполагалось использовать первоначально?

### Задачи раздела С1

**C1.1** Решить систему  $\begin{cases} 3^y + 2 \sin \frac{x}{2} = 0, \\ 4 \cos^2 x - 8 \cos x - 5 = 0. \end{cases}$

**C1.2** Решить систему  $\begin{cases} 3^y + \operatorname{tg} x = 0, \\ 4 \cos^2 x - 4 \cos x - 3 = 0. \end{cases}$

**C1.3** Решить систему  $\begin{cases} 2x^2 + 2x - \cos 2y - \sin y = 12, \\ x - \sin y = 1. \end{cases}$

**C1.4** Решить систему  $\begin{cases} 2x^2 + \cos 2y + 2 \sin y = 3, \\ x - 2 \sin y = -3. \end{cases}$

**C1.5** Решить систему  $\begin{cases} \sin y \sqrt{2 \cos x + 1} = 0, \\ 2 \cos 2y + 2 \cos 2x = 3. \end{cases}$

**C1.6** Решить систему  $\begin{cases} \sin y \sqrt{5 \sin x - 2} = 0, \\ 6 \sin^2 x - 5 \sin x + \cos^2 y = 0. \end{cases}$

**C1.7** Решить систему  $\begin{cases} 4 \sin^2 y - 8 \sin y + 3 = 0, \\ \sqrt{x - 2} = \sin y + \sqrt{3} \cos y. \end{cases}$

**C1.8** Решить систему  $\begin{cases} 2 \cos^2 x + \cos x = 0, \\ \sqrt{y + 1} = \sin x + \sqrt{3} \cos x. \end{cases}$

**C1.9** Решить систему  $\begin{cases} \cos x = 2 - y, \\ \sin x = y - 3. \end{cases}$

**C1.10** Решить систему  $\begin{cases} \cos x = y + \sqrt{3}, \\ \sin x = \sqrt{3}y + 2. \end{cases}$

**C1.11** Решить систему  $\begin{cases} \sin x + \cos x = 2y - 5, \\ \sin x - 2 \cos x = 1 - y. \end{cases}$

**C1.12** Решить систему  $\begin{cases} \cos x = \sqrt{3} - y, \\ \sin x = \sqrt{3}y - 2. \end{cases}$

**C1.13** Решить систему  $\begin{cases} 8 \cdot (\sqrt{2})^{x-y} = \left(\frac{1}{2}\right)^{y-3}, \\ \log_3(x-2y) + \log_3(3x+2y) = 3 \end{cases}$

**C1.14** Решить систему  $\begin{cases} 3^y \cdot 9^x = 81, \\ \lg(x+y)^2 - \lg x = 2 \lg 3 \end{cases}$

**C1.15** Решить систему  $\begin{cases} 3^x - 2^{y^2} = 77, \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y^2}{2}} = 7 \end{cases}$

**C1.16** Решить систему  $\begin{cases} (2^x - 2^{2y})(4^x - 2^{4y}) = 45, \\ 2^x + 4^y = 5 \end{cases}$

**C1.17** Решить систему  $\begin{cases} x^{\frac{1}{y}} = 2^{1-\frac{1}{y}}, \\ x = 64^{\frac{1}{y}} \end{cases}$

**C1.18** Решить систему  $\begin{cases} 7^x - 3y = 43, \\ 4y + 2 \cdot 7^x = 106 \end{cases}$

**C1.19** Решить систему  $\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y} + \sqrt[3]{x-y+2} = 3, \\ 2x + y = 7 \end{cases}$

**C1.20** Решить систему  $\begin{cases} \sqrt{x} + 3y = 9, \\ x - 1 = (\sqrt{x} + 1)y \end{cases}$

**C1.21** Найдите все решения системы  $\begin{cases} \sin(2x+y) = 0, \\ \cos(x+y) = 1 \end{cases}$

удовлетворяющие условиям  $\begin{cases} -\pi \leq x \leq \pi, \\ -2\pi \leq y \leq -\pi \end{cases}$

**C1.22** Решить систему  $\begin{cases} 4^x + 2^y = 12, \\ \sqrt{3x - 2y} = \sqrt{5 + x - 3y} \end{cases}$

**C1.23** Решить систему  $\begin{cases} \log_x \frac{y}{9} + \frac{3x}{y(x+9)} = 0, \\ (y-2)^{-1} = (y-2)^{-\log_9(x+8)} \end{cases}$

**C1.24** Решить систему  $\begin{cases} 2 \lg \sqrt{x} + 2^y + 1 = 0, \\ \lg x^3 + 4^y - 1 = 0 \end{cases}$

**C1.25** Решить систему  $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4 \end{cases}$

**C1.26** Решить систему  $\begin{cases} 6 \sin x + 7 \log_y 3 = -10, \\ -5 \sin x + 2 \log_y 3 = \frac{1}{2} \end{cases}$

**C1.27** Решить систему  $\begin{cases} 2^x + 3 \cdot 2^y = 7, \\ x + 2y = 3 \end{cases}$

**C1.28** Решить систему  $\begin{cases} \log_{|xy|}(x^2 - y^2) = 1, \\ \log_{|xy|}(x - y) = 0 \end{cases}$

**C1.29** Решить систему  $\begin{cases} \log_{2-x}(2-y) > 0, \\ \log_{4-y}(2x-2) > 0 \end{cases}$

**C1.30** Решить систему  $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 6, \\ x^2 + y^2 \cdot \log_2^2 3 = 1 + \log_2^2 3 \end{cases}$

**C1.31** Решить систему  $\begin{cases} \sin \frac{\pi x^2}{2} = 1, \\ |x| + |y| = 3 \end{cases}$

**C1.32** Решить систему  $\begin{cases} \sqrt{2x - y + 11} - \sqrt{3x + y - 9} = 3, \\ \sqrt[4]{2x - y + 11} + \sqrt[4]{3x + y - 9} = 3 \end{cases}$

**C1.33** Решить систему  $\begin{cases} 3\sqrt[4]{x+y} = \log_3(9x), \\ 2\sqrt[4]{x+y} = \log_3 \frac{27}{x} \end{cases}$

### Задачи раздела С3

**C3.1** Решить неравенство  $\log_{|x|}(5 - 4x) < 2$ .

**C3.2** Решить неравенство  $\log_{|x-1|} \left( \frac{7}{4} - x \right) > 2$ .

**C3.3** Решить неравенство  $\log_{|x+6|} (x^2 - x - 2) \geq 1$ .

**C3.4** Решить неравенство  $\log_{|2x+4|} (4x^2 + 8x + 15) > 1$ .

**C3.5** Решить неравенство  $\log_{x^2} \left( \frac{2x}{|x-3|} \right) \leq \frac{1}{2}$ .

**C3.6** Решить неравенство  $\log_{(x-1)^2} \left( \frac{2(x+1)}{|x-2|} \right) > \frac{1}{2}$ .

**C3.7** Решить неравенство

$$\sqrt{8 + \log_4 x} - \sqrt{10 \log_{16} x + 20} + 2 < 0.$$

**C3.8** Решить неравенство

$$\sqrt{\log_3(x-1) + 1} + \sqrt{\log_3(x-1) + 16} < 5.$$

**C3.9** Решить неравенство  $\sqrt{1 - 4 \log_{1/2}^2 x} + \log_{1/2} x < 1$ .

**C3.10** Решить неравенство  $\sqrt{1 - 4 \log_4^2 x} - \log_4 x < 1$ .

**C3.11** Решить неравенство  $\sqrt{\log_{\sqrt{x}}(5x)} \cdot \log_5 x < 2$ .

**C3.12** Решить неравенство  $\log_x(x^3 + 1) \cdot \log_{x+1} x > 2$ .

**C3.13** Решить неравенство  $\log_x 3 \cdot \log_9 \left( \frac{5 - 12x}{12x - 8} \right) \leq \frac{1}{2}$ .

**C3.14** Решить неравенство  $\left( 2 + \log_3 \left( \frac{5}{4} + x \right) \right) \cdot \log_x \frac{1}{3} < 1$ .

**C3.15** Решить неравенство

$$4 \log_{x-1}((x-1)(6x-x^2-5)) - \log_{x-1}^2(x-5)^2 \geq 8.$$

**C3.16** Решить неравенство

$$4 \log_{x+1}(1-x^2) + 4 \geq \log_{x+1}^2(x-1)^2.$$

## Задачи раздела С4

- C4.1** Около окружности описана равнобедренная трапеция, одно из оснований которой равно 15, а боковая сторона равна 12. Найдите площадь трапеции.
- C4.2** Окружность радиуса  $2\sqrt{2}$  пересекает сторону  $BC$  ромба  $ABCD$  в точке  $M$  так, что  $4BM = BC$ , касается прямых  $AB$  и  $AD$  в точках  $B$  и  $D$  соответственно. Найдите площадь ромба  $ABCD$ .
- C4.3** В трапеции  $ABCD$  боковая сторона  $AB$  перпендикулярна основанию  $BC$ . Окружность проходит через точки  $C$  и  $D$  и касается прямой  $AB$  в точке  $E$ . Найдите расстояние от точки  $E$  до прямой  $CD$ , если  $AD = 4$  и  $BC = 3$ .
- C4.4** На прямой, проходящей через точку  $O$  – центр окружности радиуса 12, взяты точки  $A$  и  $B$  так, что  $OA = 15$ ,  $AB = 5$ . Из точек  $A$  и  $B$  проведены касательные к окружности (точки касания лежат по одну сторону от прямой  $OB$ ). Найдите площадь треугольника  $ABC$ , где  $C$  – точка пересечения этих касательных.
- C4.5** Из точки  $A$  к окружности проведена секущая, которая пересекает ее в точках  $B$  и  $C$  и касательная, касающаяся окружности в точке  $K$ . Найдите расстояние от точки  $K$  до секущей  $AC$ , если расстояние от точек  $B$  и  $C$  до касательной соответственно равны 12 и 15.
- C4.6** Хорда  $AB$  окружности с центром в точке  $O$  пересекает радиус  $OC$  в точке  $D$ , причем угол  $CDA$  равен  $120^\circ$ . Найдите радиус окружности, касающейся отрезков  $AD$  и  $DC$  и дуги  $AC$ , если  $OC = 2$ ,  $OD = \sqrt{3}$ .
- C4.7** Основание  $AD$  трапеции  $ABCD$  ( $AD$  больше  $BC$ ) является диаметром окружности радиуса  $2\sqrt{3}$ , которая касается прямой  $CD$  в точке  $D$  и пересекает сторону  $AB$  в точке  $K$ , такой что  $AB = \frac{4\sqrt{3}}{3}AK$ . Найдите площадь

трапеции  $ABCD$ , если угол  $CAD$  равен  $45^\circ$ .

- C4.8** Продолжения боковых сторон  $AB$  и  $CD$  трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Центром описанной окружности около треугольника  $ADE$  является точка  $O$ . Найдите величину острого угла  $A$  трапеции  $ABCD$ , если точки  $A, B, C, D, O$  лежат на окружности, радиус которой в  $\sqrt{3}$  раз меньше радиуса окружности, описанной около треугольника  $ADE$ .

- C4.9** На катете  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу  $AB$  треугольника  $ABC$  в точке  $K$ . Найдите площадь треугольника  $BCK$ , если  $CB = 3$ ,  $CA = 4$ .

- C4.10** Через точку  $K$ , расположенную на диаметре окружности радиуса 5, проведена хорда  $AB$ , образующая с этим диаметром угол  $45^\circ$ . Через точку  $B$  проведена хорда окружности, перпендикулярная данному диаметру. Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AK : KB = 1 : 2$ .

## Задачи раздела С5

- C5.1** Найти все значения параметра  $a$ , при которых графики двух функций  $y = 2|x + 2| + |x - 7|$  и  $y = 2|x - 3| + x + a$  пересекаются ровно в двух точках.

- C5.2** Найти все значения параметра  $a$ , при которых графики двух функций  $y = 3|x + 1| + 3|x - 6|$  и  $y = 3|x - 2| + x + a$  пересекаются ровно в двух точках.

- C5.3** Найти все значения параметра  $a$ , при которых графики двух функций  $y = 2|x + 2| + |x - 5|$  и  $y = 2|x - 1| + x + a$  пересекаются ровно в двух точках.

- C5.4** Найти все значения параметра  $a$ , при которых графики двух функций  $y = 2|x + 3| + 2|x - 2|$  и  $y = 2|x| + x + a$  пересекаются ровно в двух точках.

- C5.5** Функция  $x^2 + |2x + 2| - |x^2 + 3x - 4| - a$  рассматривается на отрезке  $[-5; 5]$ . Найти все значения параметра  $a$ .

при каждом из которых эта функция принимает только неотрицательные значения.

**C5.6** Функция  $|x^2 + 3x - 4| - |x - 1| - a$  рассматривается на отрезке  $[-5; 5]$ . Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых эта функция принимает только неотрицательные значения.

**C5.7** Функция  $|x^2 + 2x - 3| + |x + 4| - a$  рассматривается на отрезке  $[-5; 5]$ . Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых эта функция принимает только неотрицательные значения.

**C5.8** Функция  $|x^2 + 2x - 3| + |x^2 + 3x - 4| - a$  рассматривается на отрезке  $[-5; 5]$ . Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых эта функция принимает только неотрицательные значения.

**C5.9** Найти все значения параметра  $a$ , при которых точки графика функции  $y = 2|x+3| + |x-5|$  для  $x$  из интервала  $(0; 3)$  лежат выше точек графика функции  $y = 2|x-1| + x + a$ , а для  $x$  из интервала  $(-4; -3)$  – ниже.

**C5.10** Найти все значения параметра  $a$ , при которых точки графика функции  $y = 2|x+3| + 2|x-5|$  для  $x$  из интервала  $(0; 2)$  лежат выше точек графика функции  $y = 2|x-1| + x + a$ , а для  $x$  из интервала  $(4; 6)$  – ниже.

**C5.11** Найти все значения параметра  $a$ , при которых точки графика функции  $y = 2|x+3| + 2|x-5|$  для  $x \in (-4; -2)$  лежат ниже точек графика функции  $y = 4|x-1| - x + a$ , а для  $x$  из интервала  $(0; 2)$  – выше.

**C5.12** Найти все значения параметра  $a$ , при которых точки графика функции  $y = -2|x+4| + 2|x-3|$  для  $x$  из интервала  $(-4; -2)$  лежат выше точек графика функции  $y = -4|x-1| - x + a$ , а для  $x$  из интервала  $(0; 2)$  – ниже.

**C5.13** Найти все значения  $a$ , для которых интервал  $(-3; -1)$  будет решением неравенства  $2x + 2|x-a| + |x+1| < 4$ .

- C5.14** Найти все значения  $a$ , для которых интервал  $(0; 2)$  будет решением неравенства  $x + 2|x - a| + |x - 1| < 6$ .
- C5.15** Найти все значения  $a$ , для которых интервал  $(0; 2)$  будет решением неравенства  $2x + 2|x - 2a| + |x - 1| < 8$ .
- C5.16** Найти все значения  $a$ , для которых интервал  $(-2; 0)$  будет решением неравенства  $2x + 2|2x - a| + |x + 1| < 4$ .
- C5.17** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых неравенство  $2 > |x + a| + x^2$  имеет хотя бы одно положительное решение.
- C5.18** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых неравенство  $4 - |x + a| > x^2$  имеет хотя бы одно отрицательное решение.
- C5.19** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых неравенство  $1 > |x - a| + x^2$  имеет хотя бы одно положительное решение.
- C5.20** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых неравенство  $4 > 2|x - 2a| + (x + 1)^2$  имеет хотя бы одно положительное решение.
- C5.21** Найти все такие значения  $a$ , для которых уравнение  $2x - |2x - |x - a|| = 4|x - 2|$  имеет ровно два корня.
- C5.22** Найти все такие значения  $a$ , для которых уравнение  $2x - |2 - |x - a|| = 4|x - 2|$  имеет ровно два корня.
- C5.23** Найти все такие значения  $a$ , для которых уравнение  $2x - |2 - |x + a|| = 4|x - 2|$  имеет ровно два корня.
- C5.24** Найти все такие значения  $a$ , для которых уравнение  $x - 2|2 - |x + a|| = 2|x - 2|$  имеет ровно два корня.
- C5.25** Найти все такие значения  $a$ , для которых наименьшее значение функции  $y = |x - 1| + 2|x - 2| + |x - a| - 4$  будет положительным.
- C5.26** Найти все такие значения  $a$ , для которых наименьшее значение функции  $y = 2x + |x - 1| + |x - 2| + |x - a| - 4$  будет положительным.

**C5.27** Найти все такие значения  $a$ , для которых наименьшее значение функции  $y = -x + |x - 1| + |x - 2| + |x - a| - 3$  будет положительным.

**C5.28** Найти все такие значения  $a$ , для которых наименьшее значение функции  $y = -2x + 2|x - 1| + |x - 2| + |x - a| - 4$  будет положительным.

**C5.29** Найти все такие значения параметра  $a$ , что наименьшее значение функции  $y = |x^2 - (2+a)x + 2a| + (a-2)|x+1|$  меньше  $-9$  и больше  $-28$ .

**C5.30** Найти все такие значения параметра  $a$ , что наименьшее значение функции  $|x^2 + ax - x| + (a-1)|x-2|$  меньше  $4$  и больше  $-8$ .

**C5.31** Найти все такие значения параметра  $a$ , что наименьшее значение функции  $|x^2 - ax| - a|x - 2|$  меньше  $-4$  и больше  $-15$ .

**C5.32** Найти все такие значения параметра  $a$ , что наименьшее значение функции  $|x^2 + ax| - a|x + 2|$  меньше  $0$  и больше  $-24$ .

**C5.33** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых решение системы неравенств

$$\begin{cases} x + 3y \geq a \\ y - x \geq 2a \end{cases}$$

будет также решением неравенства  $3y - x > a + 3$ .

**C5.34** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых решение системы неравенств

$$\begin{cases} x + 2y \geq a - 1 \\ y - 2x \geq -3a + 1 \end{cases}$$

будет также решением неравенства  $y - x > a + 3$ .

**C5.35** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых решение системы неравенств

$$\begin{cases} x + y \geq a - 1 \\ y - 3x \geq -3a + 1 \end{cases}$$

будет также решением неравенства  $y - x > a + 3$ .

**C5.36** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых решение системы неравенств

$$\begin{cases} 2x + y \geq a - 1 \\ y - 4x \geq -3a + 1 \end{cases}$$

будет также решением неравенства  $y - x > a + 3$ .

**C5.37** Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых существует ровно два значения  $x$ , удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} |x^2 - 7x + 6| + x^2 + 5x + 6 - 12|x| = 0, \\ x^2 - 2(a - 2)x + a(a - 4) = 0. \end{cases}$$

**C5.38** Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых существует только одно значение  $x$ , удовлетворяющее системе уравнений

$$\begin{cases} |x^2 + 5x + 4| - 9x^2 + 5x + 4 - 10x|x| = 0, \\ x^2 - 2(a + 1)x + a(a + 2) = 0. \end{cases}$$

**C5.39** Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых существует ровно два значения  $x$ , удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} |x^2 + 7x + 6| + x^2 - 5x + 6 - 12|x| = 0, \\ x^2 - 2(a + 2)x + a(a + 4) = 0. \end{cases}$$

**C5.40** Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых существует только одно значение  $x$ , удовлетворяющее системе уравнений

$$\begin{cases} |x^2 + 8x| + x^2 - 12x - 20|x| = 0, \\ x^2 - 2(a + 2)x + a(a + 4) = 0. \end{cases}$$

**C5.41** Найдите наименьшее значение выражения  $z = x - y$  на точках множества, являющегося решением системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \\ x + y \geq 0. \end{cases}$$

**C5.42** Найдите наибольшее значение выражения  $z = x - \sqrt{3}y$  на точках множества, являющегося решением системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \\ x - y \leq 0. \end{cases}$$

**C5.43** Найдите наименьшее значение выражения  $z = x + \sqrt{3}y$  на точках множества, являющегося решением системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \\ x + y \leq 0. \end{cases}$$

**C5.44** Найдите наименьшее значение выражения  $z = 3x + y$  на точках множества, являющегося решением системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \\ x + y \geq 0. \end{cases}$$

**C5.45** Найти все значения параметра  $a$ , при которых площадь фигуры  $2|x + y| + |y| < a$  будет больше 2.

**C5.46** Найти все значения параметра  $a$ , при которых площадь фигуры  $|2x + y| + |x + y| < a$  будет больше 8.

**C5.47** Найти все значения параметра  $a$ , при которых площадь фигуры  $|2x - y| + |x - y| < a$  будет больше 8.

**C5.48** Найти все значения параметра  $a$ , при которых площадь фигуры  $|2x + y| + |x + 2y| < 3a$  будет больше 6.

**C5.49** Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых из неравенства  $0 \leq x \leq 1$  будет следовать неравенство  $(a^2 - a - 2)x^2 + (a - 5)x - 2 \leq 0$ .

**C5.50** Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых из неравенства  $0 \leq x \leq 1$  будет следовать неравенство  $(a^2 - 2a - 3)x^2 - (a + 5)x - 2 \leq 0$ .

**C5.51** Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых из неравенства  $0 \leq x \leq 1$  будет следовать неравенство  $(a^2 - a - 6)x^2 - (a + 7)x - 2 \leq 0$ .

**C5.52** Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых из неравенства  $0 \leq x \leq 1$  будет следовать неравенство  $(a^2 - a - 6)x^2 + (a - 13)x - 6 \leq 0$ .

**C5.53** Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых из неравенства  $0 \leq x \leq 1$  будет следовать неравенство  $ax^2 - 2x + a - 2 \leq 0$ .

**C5.54** Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых из неравенства  $2 \leq x \leq 3$  будет следовать неравенство  $ax^2 + 2x + a - 2 \geq 0$ .

**C5.55** Найти все значения  $a$ , при каждом из которых из неравенства  $1 \leq x \leq \frac{7}{5}$  будет следовать неравенство  $ax^2 - 3x + 3a - 2 \leq 0$ .

**C5.56** Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых из неравенства  $0 \leq x \leq 2$  будет следовать неравенство  $ax^2 - x + 4a - 2 \leq 0$ .

**C5.57** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых множество значений функции  $y = \frac{x^2 - 2ax + 4}{x^2 + x + 4}$  лежит на интервале  $(-2; 2)$ .

**C5.58** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых множество значений функции  $y = \frac{2x^2 - ax + 2}{2x^2 + x + 2}$  лежит на интервале  $(-2; 2)$ .

**C5.59** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых множество значений функции  $y = \frac{x^2 - 4ax + 1}{x^2 + x + 1}$  лежит на

интервале  $(-2; 2)$ .

**C5.60** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых множество значений функции  $y = \frac{4x^2 - 2ax + 1}{4x^2 + x + 1}$  лежит на интервале  $(-2; 2)$ .

**C5.61** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система неравенств  $\begin{cases} (x+1-a)(ax-1) \geq 0 \\ ax \geq 4-a \end{cases}$  не имеет решений.

**C5.62** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система неравенств  $\begin{cases} (x+a)(ax+a+1) \geq 0 \\ ax \leq -4 \end{cases}$  не имеет решений.

**C5.63** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система неравенств  $\begin{cases} (x+a-1)(ax+1) \geq 0 \\ ax \leq a-4 \end{cases}$  не имеет решений.

**C5.64** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система неравенств  $\begin{cases} (x+a-2)(ax+3) \geq 0 \\ ax \leq 2a-4 \end{cases}$  не имеет решений.

## Задачи раздела С6

**C6.1** Найдите наибольшее натуральное число  $n$ , для которого  $2012!$  делится нацело на  $119^n$ .

**C6.2** Найдите три самых больших простых числа, встречающихся в произведении всех натуральных чисел от 1 до 2009.

**C6.3** Найдите все натуральные  $n$ , такие, что десятичная запись числа  $n!$  ( $n$ -факториал) оканчивается на 2009 нулей.

**C6.4** Рассмотрим все пятизначные числа, получаемые перестановкой цифр числа 12357. Докажите, что сумма всех таких чисел (включая исходное число) делится на 11111.

**C6.5** Простое или составное число  $2^{160} + 3^{160}$ ? Ответ обоснуйте.

**C6.6** Имеющийся на складе уголь может быть погружен полностью в некоторое количество вагонов вместимостью по 50 т. Если уголь погрузить в вагоны вместимостью по 60 т, то понадобится на 5 вагонов меньше, но при этом один вагон будет загружен не полностью. Если же уголь погрузить в вагоны вместимостью по 80 т, то вагонов потребуется еще на 8 меньше, чем во втором случае, но опять один вагон будет не полностью загружен. Сколько тонн угля имеется на складе?

**C6.7** Жидкость налита в бутылки емкостью по 40 л, при этом одна бутыль оказалась не совсем полной. Если жидкость перелить в бутыли емкостью по 50 л, то бутыли будут заполнены полностью, но при этом понадобится на 5 бутылей меньше. Если же жидкость разлить по бутылям емкостью по 70 л, то понадобится еще на 4 бутыли меньше, но опять одна бутыль будет не совсем полной. Сколько было литров жидкости?

**C6.8** Четно или нечетно произведение

$$(9a + 3b - 5c + 7)(7a - 11b + 7c + 20),$$

где  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ .

**C6.9** Антоша написал на доске  $1*2*3*4*5*\dots*999 = 499500$ , причем вместо каждой звездочки он написал либо плюс, либо минус. Лена переправила несколько знаков на противоположные, получив в результате 399499. Не ошиблась ли Лена при подсчете?

**C6.10** Найдите все решения в целых числах уравнения  $19x + 97y = 116$ . Сколько решений удовлетворяют условиям  $|x| > 500$  и  $|y| < 1000$ ?

**C6.11** Процент учеников 11 А класса, повысивших во второй четверти успеваемость, заключен в пределах от 2,9%

до 3,1%. Определите минимально возможное число учеников в этом классе.

**C6.12** При анкетировании группы учащихся 11 В выяснилось, что процент учащихся 11 В класса, использующих Skype, заключается в пределах от 92,5% до 93,5%. Определите минимально возможное число опрошенных учащихся.

**C6.13** В результате реструктуризации автозавода процент высвободившихся сотрудников цеха оказался заключенным в пределах от 1,7% до 2,3%. Определите минимально возможное число сотрудников цеха.

**C6.14** В сводке новостей сообщалось, что процент числа спелеологов, принявших участие в спуске в пещеру, принадлежит интервалу от 96,8% до 97,2%. Определите минимально возможное число спелеологов в группе.

**C6.15** Школьник переклеивает все свои марки в альбом. Если он наклеит по 20 марок на один лист, то ему не хватит альбома, а если по 23 марки на лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если школьнику подарить такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то всего у него станет 500 марок. Сколько листов в альбоме?

**C6.16** В автогонках принимают участие команды, имеющие одинаковое количество автомобилей марки «Волга» и марки «Лада», причем в каждой команде общее количество автомобилей меньше 7. Если в каждой команде количество автомобилей марки «Волга» оставить без изменения, а количество автомобилей «Лада» увеличить в три раза, то общее количество автомобилей «Лада», участвующих в гонках, будет на 50 штук больше общего количества автомобилей «Волга», а общее количество автомобилей в каждой команде превысит 12. Определите количество команд, участвующих в гонках, и количество

автомобилей «Волга» и «Лада» в каждой команде.

**C6.17** Найдите все целые значения  $a$ , при которых число  $y = x^3 + ax^2 + 5x + 9$  будет нечетным при всех целых значениях  $x$ .

**C6.18** Верно ли, что любую сумму, выраженную целым числом рублей, не меньшую, чем 8 рублей, можно оплатить, используя лишь марки достоинством в 3 рубля и 5 рублей? Ответ обоснуйте.

**C6.19** Докажите, что любую сумму, выраженную целым числом рублей, не меньшую, чем 54 рубля, можно оплатить, используя лишь марки достоинством в 7 рублей и 10 рублей. Ответ обоснуйте.

**C6.20** Пусть простое число  $p$  больше 5 и число  $2p + 1$  является простым. Верно ли, что число  $4p + 1$  является составным числом? Ответ обоснуйте.

**C6.21** Найдите последнюю цифру числа

$$2008^{2009} + 2009^{2008} + 2007^{2010} + 2006^{2011}.$$

**C6.22** Решите уравнение  $n! + 5m + 12 = k^2$  в натуральных числах  $n$  и  $k$ .

**C6.23** Решите уравнение  $x^2 = 4y + 3$  в целых числах.

**C6.24** Найдите последние 499 цифр числа  $2010!$ .

**C6.25** Пусть  $n, m$  – натуральные числа, причем  $\frac{m}{n}$  – правильная несократимая дробь. На какие натуральные числа может быть сокращена дробь  $\frac{3n-m}{5n+2m}$ , если известно, что при некоторых  $n, m$  эта дробь сократима?

**C6.26** Пусть  $n, m$  – натуральные числа, причем  $\frac{m}{n}$  – правильная несократимая дробь. На какие натуральные числа может быть сокращена дробь  $\frac{2n-m}{3n+2m}$ , если известно, что при некоторых  $n, m$  эта дробь сократима?

**C6.27** Последовательность  $a_1, a_2, a_3, \dots$  задана первыми двумя членами  $a_1 = 4$  и  $a_2 = 6$  и условием  $a_{k+2} = a_{k+1}/a_k$

$(k = 1, 2, 3, \dots)$ . Найдите 2010-й член этой последовательности.

**C6.28** Числовая последовательность строится по следующему правилу. Первый ее член равен  $3^{2010}$ , а каждый следующий член, начиная со второго, равен сумме цифр в десятичной записи предыдущего члена. Найдите девятый член этой последовательности.

**C6.29** Числовая последовательность строится по следующему правилу. Первый ее член равен  $3^{2010}$ , а каждый следующий член, начиная со второго, равен модулю разности суммы цифр, стоящих на четных местах в десятичной записи предыдущего члена, и суммы цифр, стоящих на нечетных местах в десятичной записи предыдущего члена. Найдите девятый член этой последовательности.

**C6.30** Пусть  $A$  – множество целых чисел, принадлежащих отрезку  $[-10, 10]$ . Найдите количество функций  $f$ , определенных для всех элементов из  $A$  и принимающих значения во множестве  $A$ , обладающих свойством  $f(f(n)) = -n$  для всех  $n$  из  $A$ .

## Ответы на дополнительные задачи

**B1.1** 12; **B1.2** 65625; **B1.3** 1260000; **B1.4** 25; **B1.5** 20; **B1.6** 102,8; **B1.7** 20; **B1.8** 55.

**B3.1** 0, 5; **B3.2** 0; **B3.3** 0; **B3.4** -3; **B3.5** 11; **B3.6** 17; **B3.7** -0, 25; **B3.8** 8;

**B12.1** 52800; **B12.2** 50; **B12.3** 80; **B12.4** 310; **B12.5** 8; **B12.6** 270; **B12.7** 20; **B12.8** 9; **B12.9** 20.

**C1.1**  $\left\{ \left( -\frac{2}{3}\pi + 2\pi n; \frac{1}{2} \right) \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ ; **C1.2**  $\left\{ \left( \frac{2}{3}\pi + 2\pi n; \frac{1}{2} \right) \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ ;  
**C1.3**  $\left\{ \left( 2; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ ; **C1.4**  $\left\{ \left( -1; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ ;  
**C1.5**  $\left\{ \left( \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n; \pi k \right) \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\}$ ;

**C1.6**  $\left\{ \left( (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n; \pi k \right) \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\}$ ; **C1.7**  $\left\{ \left( 6; \frac{\pi}{6} + 2\pi n \right) \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ ;

**C1.8**  $\left\{ \left( \frac{\pi}{2} + 2\pi n; 0 \right) \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \left( \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; -1 \right) \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ ;

**C1.9**  $\left\{ \left( \pi + 2\pi n; 3 \right) \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \left( -\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2 \right) \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ ;

**C1.10**  $\left\{ \left( \frac{\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \left( -\frac{\pi}{2} + 2\pi n; -\sqrt{3} \right) \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ ;

**C1.11**  $\left\{ \left( 2\pi n; 3 \right) \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \left( -\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2 \right) \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ ;

**C1.12**  $\left\{ \left( \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \sqrt{3} \right) \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \left( -\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ ;

**C1.13**  $(3; -3)$ ; **C1.14**  $(1; 2), (16; -28)$ ; **C1.15**  $(4; \sqrt{2}), (4; -\sqrt{2})$ ;

**C1.16**  $(2; 0), (0; 1)$ ; **C1.17**  $(\frac{1}{8}; -2), (4; 3)$ ; **C1.18**  $(2; 2)$ ; **C1.19**

$(2; 3), (\frac{13}{3}; -\frac{5}{3})$ ; **C1.20**  $(9; 2)$ ; **C1.21**  $(-\pi; \pi), (0; -2\pi), (\pi; -\pi)$ ;

**C1.22**  $(\frac{3}{2}; 2)$ ; **C1.23**  $(9; 3)$ ; **C1.24**  $(10^{-5}; 2)$ ; **C1.25**  $(2; 6)$ ; **C1.26**

$\left\{ \left( (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{1}{3} \right) \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ ;

**C1.27**  $(2; 0), (0; 1)$ ; **C1.28**  $\left( \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \right), \left( \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$ ;

**C1.29**  $\{(x; y) \mid \frac{3}{2} < x < 2, 1 < y < 2\}$ ; **C1.30**  $(1; 1), (\log_2 3; \log_3 2)$ ;

**C1.31**  $(1; \pm 2), (-1; \pm 2), (\sqrt{5}; \pm(3-\sqrt{5})), (-\sqrt{5}; \pm(3-\sqrt{5})), (\pm 3; 0)$ ;

**C1.32**  $(3; 1)$ ; **C1.33**  $(3; -2)$ .

**C3.1**  $(-\infty; -5) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; \frac{5}{4})$ ; **C3.2**  $(-\frac{1}{2}; 0) \cup (\frac{3}{2}; \frac{7}{4})$ ;

**C3.3**  $(-\infty; -7) \cup (-5; -2] \cup [4; \infty)$ ; **C3.4**  $(-\infty; -\frac{5}{2}) \cup (-\frac{3}{2}; \infty)$ ;

**C3.5**  $[5; \infty)$ ; **C3.6**  $(2; 5)$ ; **C3.7**  $(4; \infty)$ ; **C3.8**  $\left( \frac{4}{3}; 2 \right)$ ; **C3.9**  $\left[ \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt[5]{4}} \right) \cup$

$(1; \sqrt{2}]$ ; **C3.10**  $\left[ \frac{1}{2}; \frac{\sqrt[5]{2}}{2} \right) \cup (1; 2]$ ; **C3.11**  $(0; \frac{1}{5}] \cup (1; 5)$ ; **C3.12**  $(2; \infty)$ ;

**C3.13**  $\left[ \frac{1}{2}; \frac{2}{3} \right)$ ; **C3.14**  $\left( 0; \frac{1}{12} \right) \cup (1; \infty)$ ; **C3.15**  $[3; 4]$ ; **C3.16**

$(-1; 0)$ .

**C4.1**  $36\sqrt{15}$ ; **C4.2**  $15\sqrt{15}$ ; **C4.3**  $2\sqrt{3}$ ; **C4.4**  $\frac{150}{7}$ ; **C4.5**  $6\sqrt{5}$ ; **C4.6**  $\sqrt{84} - 9$ ; **C4.7**  $9 - 1,5\sqrt{3}$ ; **C4.8**  $75$ ; **C4.9**  $2,16$ ; **C4.10**  $120$ .

**C5.1**  $(1; 3) \cup \{11\}$ ; **C5.2**  $(3; 13) \cup (19; \infty)$ ; **C5.3**  $\{3\} \cup \{9\}$ ; **C5.4**

$(4; 7) \cup (10; \infty)$ ; **C5.5**  $(-\infty; -5]$ ; **C5.6**  $(-\infty; -5]$ ; **C5.7**  $(-\infty; 1]$ ;

**C5.8**  $(-\infty; 0]$ ; **C5.9**  $[5; 7]$ ; **C5.10**  $[6; 12]$ ; **C5.11**  $[2; 12]$ ; **C5.12**

$[2; 16]$ ; **C5.13**  $[-4; 1]$ ; **C5.14**  $\left[ \frac{1}{2}; \frac{5}{2} \right]$ ; **C5.15**  $\left[ \frac{1}{4}; \frac{7}{4} \right]$ ; **C5.16**  $\left[ -\frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \right]$ ;

**C5.17**  $\left(-\frac{9}{4}; 2\right)$ ; **C5.18**  $\left(-4; \frac{17}{4}\right)$ ; **C5.19**  $\left(-1; \frac{5}{4}\right)$ ; **C5.20**  $\left(-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right)$ ;  
**C5.21**  $(-6; 2) \cup (2; 12)$ ; **C5.22**  $(-4; 8)$ ; **C5.23**  $(-8; 4)$ ; **C5.24**  $(-6; -3) \cup (-2; 1)$ ;  
**C5.25**  $(-\infty; -1) \cup (5; \infty)$ ; **C5.26**  $(2; \infty)$ ; **C5.27**  $(-\infty; -2) \cup (6; \infty)$ ;  
**C5.28**  $(-\infty; -4) \cup (8; \infty)$ ; **C5.29**  $(-5; -1)$ ;  
**C5.30**  $(-3; 3)$ ; **C5.31**  $(2; 5)$ ; **C5.32**  $(0; 6)$ ; **C5.33**  $\left[\frac{6}{5}; \infty\right)$ ; **C5.34**  $(-\infty; -1]$ ;  
**C5.35**  $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right]$ ; **C5.36**  $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right]$ ; **C5.37**  $\{1\} \cup \{2\} \cup [5; 6]$ ;  
**C5.38**  $\{1\} \cup (-3; -1)$ ; **C5.39**  $\{-1\} \cup \{-2\} \cup [-6; -5]$ ;  
**C5.40**  $[-12; -8] \cup (-4; 0] \cup \{8\} \cup \{12\}$ ; **C5.41**  $-\sqrt{2}$ ; **C5.42**  $2$ ;  
**C5.43**  $-2$ ; **C5.44**  $-\sqrt{2}$ ; **C5.45**  $(2; \infty)$ ; **C5.46**  $(2; \infty)$ ; **C5.47**  $(2; \infty)$ ;  
**C5.48**  $(1; \infty)$ ; **C5.49**  $[-3; 3]$ ; **C5.50**  $[-2; 5]$ ; **C5.51**  $[-3; 5]$ ;  
**C5.52**  $[-5; 5]$ ; **C5.53**  $(-\infty; 2]$ ; **C5.54**  $\left[-\frac{2}{5}; \infty\right)$ ; **C5.55**  $\left(-\infty; \frac{5}{4}\right]$ ;  
**C5.56**  $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$ ; **C5.57**  $(-3; 1)$ ; **C5.58**  $(-6; 2)$ ; **C5.59**  $(-1; 0)$ ;  
**C5.60**  $(-3; 1)$ ; **C5.61**  $(-3; -1]$ ; **C5.62**  $[0; 2)$ ; **C5.63**  $[1; 3)$ ; **C5.64**  $[2; 4)$ .

**C6.1** 124; **C6.2** 2003, 1999, 1997; **C6.3**  $\emptyset$ ; **C6.4**  $432 \cdot 11111 = 4799952$ ;

**C6.5** **C6.6** 1750; **C6.7** 850;  
**C6.8 Решение.** Т.к. сумма множителей нечетна, то множители имеют разную четность. *Ответ.* Четно.

**C6.9 Решение.** Заменив все звездочки на плюсы, получим верное равенство, т.е. сумма оказывается четной. При замене одного плюса на минус сумма уменьшается на  $2n$ , где  $n$  – число, знак перед которым изменен, т.е. сумма изменяется на четное число, при этом четность суммы сохраняется (это инвариант данной задачи). Записанные суммы имеют разную четность, Лена ошиблась. Очень просто показывается ошибка в случае, когда изменен лишь один знак, тогда имеем  $499500 - 2n = 399499$ . Или  $2n = 100001$ . Это уравнение не имеет решения в натуральных числах.

**C6.10** **C6.11** **C6.12** 14; **C6.13** 44; **C6.14** 32;

**C6.15 Решение.** Через  $l$  будем обозначать число листов в альбоме, через  $m$  – количество марок у ученика ( $l, m \in \mathbb{N}$ ).

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} 20l < m \\ 23l \geq m + 23 \\ 21l + m = 500 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m = 500 - 21l \\ 23l \geq 523 - 21l \\ 20l < 500 - 21l \end{array} \right. \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m = 500 - 21l \\ 44l \geq 523 \\ 41l < 500 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m = 500 - 21l \\ l \geq 12 \\ l \leq 12 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m = 248 \\ l = 12 \end{array} \right. \end{aligned}$$

*Ответ.* 12 листов.

**C6.16 Решение.** Введем обозначения. Пусть  $k$  – число команд,  $v$  – количество автомобилей «Волга»,  $l$  – количество автомобилей «Лада» в каждой команде ( $k, l, v \in \mathbb{N}$ ). По условию задачи

$$\left\{ \begin{array}{l} v + l < 7 \\ 3lk = 50 + vk \\ 3l + v > 12 \end{array} \right.$$

Из первого и третьего неравенства следует неравенство  $2l > 5$ . Отсюда следует, что  $l$  может принимать целые значения, начиная с 3. Поэтому последняя система равносильна следующей системе

$$\left\{ \begin{array}{l} l \in \{3, 4, 5, \dots\} \\ v < 7 - l \\ k = \frac{50}{3l-v} \end{array} \right.$$

Дальше займемся перебором. Пусть  $l = 3$ . Тогда  $v$  может принимать значения из множества  $\{1, 2, 3\}$ . Ни для одного из этих значений дробь  $\frac{50}{3l-v}$  не будет целым числом. Таким образом в этом случае задача не имеет решений.

Пусть  $l = 4$ . Тогда  $v$  может принимать значения из множества  $\{1, 2\}$ . В этом случае дробь  $\frac{50}{3l-v}$  принимает целое значение 5 при  $v = 2$ . Таким образом в этом случае  $k = 5$ ,  $l = 4$ ,  $v = 2$ .

Пусть  $l = 5$ . Тогда  $v = 1$ . В этом случае  $\frac{50}{3l-v}$  не будет целым числом. Таким образом в этом случае задача не имеет решения.

*Ответ.* 5 команд по 2 «Волги» и 4 «Лады» в каждой команде.

**C6.17 Решение.** Будем рассуждать по модулю 2. Пусть  $x = 2n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Тогда

$$y = 8n^3 + 4an^2 + 10n + 9 = 2(4n^3 + 2an^2 + 5n + 4) + 1.$$

Отсюда следует, что  $y$  нечетно при любом целом  $a$ .

Пусть  $x = 2n + 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} y &= (2n+1)^3 + a(4n^2 + 4n + 1) + 10n + 5 + 9 = \\ &= (2n+1)^3 + 2a(2n^2 + 2n) + 10n + 14 + a. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $y$  будет нечетным при четных  $a$ .

Т.о.  $y$  будет нечетным для всех целых  $x$  при четных  $a$ .

**C6.18 C6.19 C6.20 C6.21** 4; **C6.22**  $\emptyset$ ; **C6.23**  $\emptyset$ ; **C6.24** нули; **C6.25** 11; **C6.26** 7; **C6.27** 2/3; **C6.28** 9; **C6.29** 1; **C6.30**  $10!/5! = 30240$ .

# Графический метод решения задач с параметром

Богатырев С.В.

В этой части пособия будут рассмотрены некоторые приемы решения задач с параметром. Мы ограничимся ситуациями, когда задача с параметром формулируется в виде

- задачи о поведении графиков функций с параметром,
- задачи о свойствах корней уравнения с параметром,
- задачи о свойствах решений неравенства с параметром.

Кроме этого, при описании задач мы ограничимся рассмотрением классов функций, при построении которых используются модули, линейные двучлены и квадратные трехчлены.

Классифицировать задачи с параметром можно по их внешнему виду, по сложности используемых в формулировке задачи функций, по сложности вхождения параметра и, наконец, по методам решения.

В этой части пособия мы обсудим (на примерах) графический метод решения задач с параметром. Этот метод нам кажется предпочтительным по сравнению с другими подходами, так как он позволяет провести полное исследование задачи. В этом случае мы не будем зависеть от особенностей формулировки вопроса по отношению к задаче с параметром.

И еще одно. Все вычисления в этой статье производились с помощью пакета компьютерной алгебры Maple V. Этот пакет «умеет» работать с алгебраическими выражениями точно также, как с ними работает человек. Важно отметить, что он не заменяет человека, он помогает ему, беря на себя рутинные вычисления. Ниже почти для всех примеров мы приводим как математическое решение, так и вычисления, произведенные с помощью Maple. Они дополняют математическое решение.

Конечно, пакет Maple V стоит дорого, но в Интернете имеется бесплатная демонстрационная версия. Она полностью функциональна, то есть с ее помощью можно производить те же самые вычисления, что и с полной версией. Конечно, в ней нет всех возможностей полной версии, но для вычислений школьного уровня эти возможности не нужны. Кроме этого, вы не будете нарушать авторские права компании Waterloo Maple Inc. И еще, она мала (около 2,5 мб) и работает даже на маломощных компьютерах.

Демо-версия Maple получена из 4-го релиза, вышедшего в 1966 году. Но я бы не назвал ее устаревшей. Научившись работать в 4 релизе, вы легко перейдете на текущий 13 релиз. Отличие этих версий друг от друга, в основном, количественные. Демо-версию можно скачать на странице

<http://www.exponenta.ru/educat/free/>, или на странице  
<ftp://ftp.maplesoft.com/pub/maple/demo/windows/>, или по адресу  
<http://vuz.exponenta.ru/PDF/DNLD/MVR4DEMO.rar>.

## Задачи с простым способом вхождения параметра

Задача может формулироваться как задача о графиках, об уравнениях, или неравенствах. Исходная формулировка задачи неважна. Важно то, что в формулировке задачи используется функция с линейным вхождением параметра, то есть функция вида  $y = g(x) + a$ . Таким образом параметр  $a$  вводится в задачу наиболее простым способом.

Самой важной частью решения является умение переформулировать задачу с одного языка на другой. Например, задача о решении уравнения вида  $f(x) = g(x)$  может быть сформулирована как задача о точках пересечения графиков функций  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$ . Задача о решении неравенства  $f(x) > g(x)$  может быть сформулирована как задача об отыскании таких значений неизвестной  $x$ , при которых график функции  $y = f(x)$  лежит выше графика функции  $y = g(x)$ .

Рассмотрим, например, следующий класс задач. Даны две функции  $y = f(x)$  и  $y = g(x) + a$ . Надо найти все значения параметра  $a$ , при которых графики этих функций пересекаются определенное количество раз.

При решении задачи не надо сразу же начинать строить графики этих функций. Задачу сначала полезно переформулировать. На языке уравнений эта задача может быть сформулирована следующим образом. Надо найти все значения  $a$ , при которых уравнение  $f(x) = g(x) + a$  имеет заданное количество решений.

Для решения задачи последнее уравнение можно переписать в виде  $f(x) - g(x) = a$ . После этого можно вернуться к языку графиков. Теперь задача может быть сформулирована так: найти все значения  $a$ , при которых горизонтальная прямая  $y = a$  пересекает график функции  $y = f(x) - g(x)$  в заданное количество раз. Такая задача, как правило, уже легко решается. Рассмотрим пример.

**Пример 1.** Найти все значения параметра  $a$ , при которых графики двух функций  $y = 2|x + 4| + |x - 2|$  и  $y = 2|x| + x + a$  пересекаются ровно в двух точках.

**Решение.** На языке уравнений эта задача означает, что надо найти все значения  $a$ , при которых уравнение

$$2|x + 4| + |x - 2| - 2|x| - x = a$$

имеет ровно два решения. Построим график левой части уравнения.

Стандартные рассуждения здесь следующие. В описании функции  $y = 2|x + 4| + |x - 2| - 2|x| - x$  имеется три модуля. Каждый из них может быть раскрыт либо с плюсом, либо с минусом. Модуль раскрывается с плюсом, если выражение, стоящее под знаком модуля, является положительным и – с минусом в противном случае. Таким образом способ раскрытия модуля меняется при прохождении переменной  $x$  через ноль выражения, стоящего под знаком модуля.

В выражении имеется три модуля, каждый из которых обращается в ноль в одной точке. Таким образом на числовой прямой имеются три точки  $-4, 0, 2$ , при прохождении через которые происходит смена знака раскрытия одного из модулей. Эти три точки разбивают числовую прямую на четыре области  $(-\infty; -4]$ ,  $(-4; 0]$ ,  $(0; 2]$  и  $(2; \infty)$ , в каждой из которых каждый модуль раскрывается с определенным знаком.

Раскрывая модули в каждой из областей с нужными знаками и приводя после этого подобные члены, получим

$$y = \begin{cases} -2x - 6, & x \in (-\infty; -4], \\ 2x + 10, & x \in (-4; 0], \\ -2x + 10, & x \in (0; 2], \\ 6, & x \in (2; \infty). \end{cases} \quad (1)$$

Такой график нетрудно построить. Достаточно построить графики четырех прямых и для каждой из них выбрать соответствующий кусок прямой.

$$a = 2|x+4| + |x-2| - 2|x| - x$$

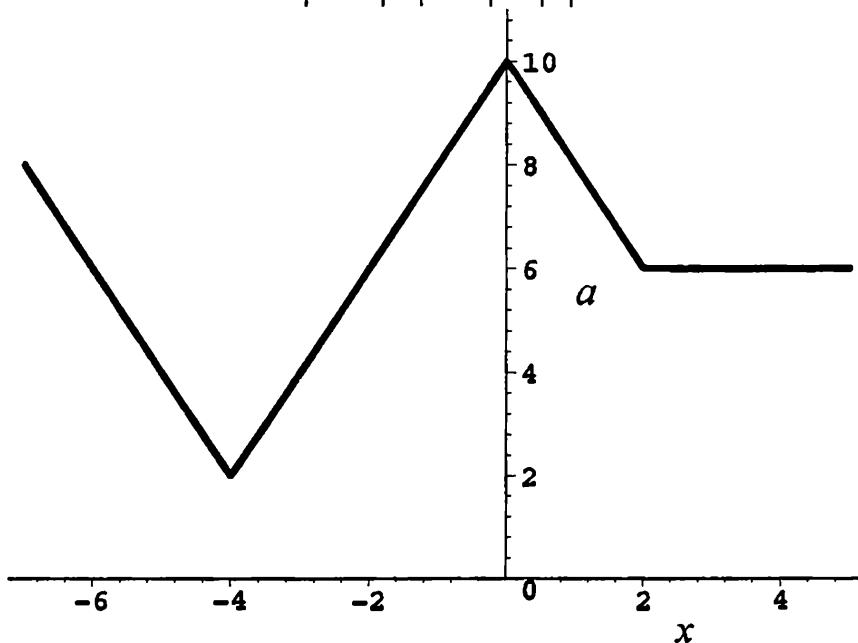


Рис.1. График функции  $y = 2|x + 4| + |x - 2| - 2|x| - x$ .

Графиком правой части будет горизонтальная прямая  $y = a$ . При изменении  $a$  эта прямая будет двигаться параллельно горизонтальной оси

координат. Передвигая ее, нетрудно провести полный анализ количества решений данного уравнения. При  $a < 2$  уравнение вообще не имеет решений. При  $a = 2$  уравнение будет иметь одно решение. При  $a \in (2; 6)$  уравнение будет иметь два решения. При  $a = 6$  уравнение будет иметь бесконечно много решений. При  $a \in (6; 10)$  уравнение будет иметь три решения. При  $a = 10$  количество решений равно 2. При  $a > 10$  уравнение будет иметь одно решение.

Сделаем одно замечание. При построении графиков функций полезно находить координаты точек графика, при прохождении через которые меняется вид выражения, задающего функцию. В нашем примере это точки с координатами  $(-4; 2)$ ,  $(0; 10)$  и  $(2; 6)$ .

**Ответ:**  $(2; 6) \cup \{10\}$ .

**Вычисления в Maple V.** Все вычисления в этой статье проводились с помощью пакета компьютерной алгебры Maple V. Некоторые детали этих вычислений наверно будут небезинтересны читателю.

Сначала заметим, что Maple V является интерактивной системой, т.е. она работает в режиме вопрос–ответ. Вопрос задается в виде команды, понятной Maple и набранной в командной строке. Ответ появляется на экране в виде аналитического выражения, или в виде графика. Если команда завершается точкой с запятой, то ответ выводится на терминал, а если двоеточием – то не выводится (но вычисления производятся).

Начнем с построения графика функции  $a = 2|x+4| + |x-2| - 2|x| - x$ . Сначала в командной строке набирается выражение, описывающее эту функцию. Синтаксис, надеюсь, понятен. Набранное выражение присваивается (как значение) переменной  $f$ .

```
> f:=2*abs(x+4)+abs(x-2)-2*abs(x)-x;
f := 2 |x + 4| + |x - 2| - 2 |x| - x
```

Теперь построим график  $f$ . График строит функция `plot`. У нее есть два обязательных аргумента и целая куча необязательных (опциональных). Обязательные – описание функции и области значений независимой переменной.

```
> plot(f,x=-7..5);
```

Но в таком виде график некрасив. Начнем добавлять опции. Сначала укажем, что мы хотели бы видеть по вертикали область от 0 до 11.

```
> plot(f,x=-7..5,view=0..11);
```

Теперь сам график нарисуем жирной, черной линией.

```
> plot(f,x=-7..5,view=0..11,thickness=7,color=black);
```

Добавим к графику его название. При этом можно выбирать шрифт, размеры шрифта и начертание шрифта.

```
> plot(f,x=-7..5,view=0..11,thickness=7,color=black,
> title="a=2|x+4|+|x-2|-2|x|-x",titlefont=[TIMES,ITALIC,24]);
```

В школе оси координат принято подписывать. Приведем опции, отвечающие за подписывание осей координат.

```
> plot(f,x=-7..5,labels=[x,a],labelfont=[TIMES,ITALIC,24]);
```

Последний штрих – укажем шрифт, его размер и начертание для меток на осях координат.

```
> plot(f,x=-7..5,axesfont=[COURIER,BOLD,18]);
```

Если теперь собрать все это вместе, то вы увидите приведенный на рисунке 1 график.

Для построения графика «вручную» нам пришлось разбивать числовую прямую на четыре промежутка и на каждом из них – раскрывать все модули. В Maple это можно сделать одной командой (сравните с (1)).

```
> convert(f,piecewise);
```

$$\begin{cases} -2x - 6 & x < -4 \\ 2x + 10 & x < 0 \\ -2x + 10 & x < 2 \\ 6 & 2 \leq x \end{cases}$$

Эта команда выполняет преобразование  $f$  к кусочно-значному виду.

Последнее. Для нахождения значений функции  $f$ , введенной ранее в Maple, достаточно подставить в  $f$  вместо  $x$  нужное числовое значение. Это можно сделать с помощью команды `subs` (от английского `substitution` – подстановка).

```
> subs(x=-4,f);
```

$$2|0| + |-6| - 2|-4| + 4$$

Здесь Maple вместо  $x$  подставляет число 4 и проводит обязательные упрощения (складывает числа под модулями). Раскрывание самих модулей с его точки зрения не является обязательным (а вдруг вы не хотите этого делать). Дальнейшие упрощения можно произвести с помощью команды `eval` (от английского `evaluation` – вычисление).

```
> eval(%);
```

$$2$$

«Вычислять» надо результат выполнения предыдущей команды. Ссылкой на этот результат является символ `%`. Кстати, ссылкой на предпредыдущий и предпредпредыдущий результаты являются символы `%%` и `%%%`.

**Пример 2.** Найти все значения параметра  $a$ , при которых точки графика функции  $y = 2|x|$  для  $x$  из интервала  $(-2; -1)$  лежат ниже точек графика функции  $y = |x - 2| + a$ , а для  $x$  из интервала  $(1; 3)$  – выше.

**Решение.** Сначала займемся переформулировкой задачи. На языке неравенств эта задача формулируется в следующем виде. Мы должны найти такие значения  $a$ , при которых интервал  $(-2; -1)$  будет решением

неравенства  $2|x| < |x - 2| + a$  (или, в другой записи,  $a > 2|x| - |x - 2|$ ), а интервал  $(1; 3)$  будет решением неравенства  $2|x| > |x - 2| + a$  (или, в другой записи,  $a < 2|x| - |x - 2|$ ).

Найдем графическое изображение решений обоих неравенств  $a > 2|x| - |x - 2|$  и  $a < 2|x| - |x - 2|$ . Для этого построим график функции  $a = 2|x| - |x - 2|$  в плоскости переменных  $(x, a)$ . Раскрывая модули так, как это было описано в предыдущем примере, мы сможем эту функцию представить в виде

$$a = \begin{cases} -x - 2, & x \in (-\infty; 0], \\ 3x - 2, & x \in (0; 2], \\ x + 2, & x \in (2; \infty) \end{cases}$$

Ее график нетрудно построить.

Этот график разбивает всю плоскость  $(x, a)$  на две области: часть плоскости, лежащая выше графика (она описывается неравенством  $a > 2|x| - |x - 2|$ ), и часть плоскости, лежащая ниже графика (она описывается неравенством  $a < 2|x| - |x - 2|$ ).

С графической точки зрения мы ищем все значения  $a$ , при которых интервал  $-2 < x < -1$ , лежащий на прямой  $a = \text{const}$ , располагается выше графика  $a = 2|x| - |x - 2|$ , а интервал  $1 < x < 3$ , лежащий на прямой  $a = \text{const}$ , лежит ниже этого графика. В другой формулировке мы ищем значения  $a$ , для которых часть полосы  $-2 < x < -1$  лежит выше графика функции  $a = 2|x| - |x - 2|$ , а часть полосы  $1 < x < 3$  — ниже этого графика.

Из приведенного рисунка видно, что первому требованию отвечают  $a \geq 0$ , а второму  $-a \leq 1$ . Таким образом, обоим требованиям отвечают  $a \in [0; 1]$ .

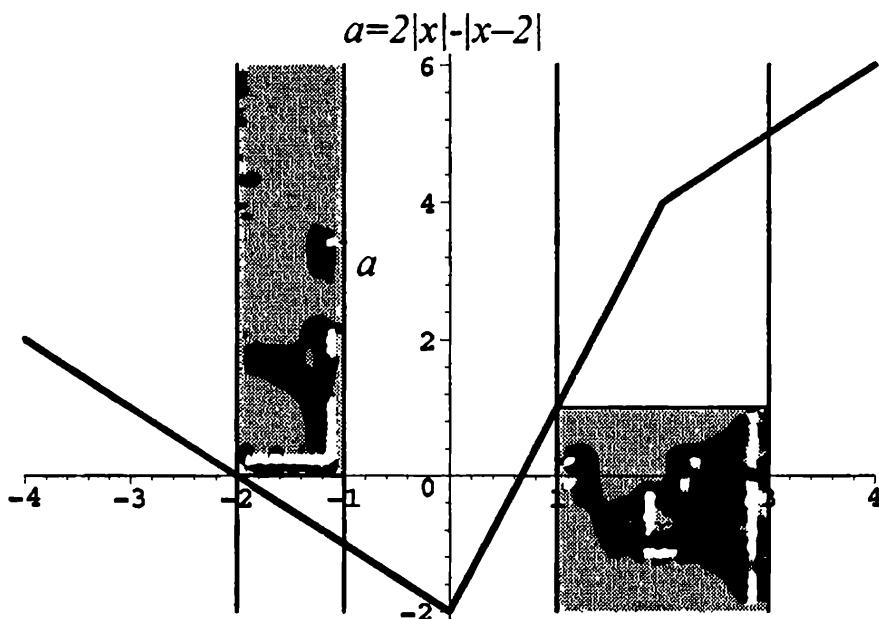


Рис.2. Изображение решения задачи из примера 2.

**Ответ:**  $a \in [0; 1]$

**Вычисления в Maple.** Построим рисунок 2. По сравнению с рисунком 1 из предыдущей задачи здесь появляются несколько новых моментов. Сначала введем функцию  $a = 2|x| - |x - 2|$  и построим ее график. Но поскольку на рисунке кроме этого графика должны присутствовать дополнительные линии, то не будем этот график выводить на экран, а сохраним его в переменной  $p1$ . Напомним, что команду `plot` в этом случае надо завершить двоеточием.

```
> f:=2*abs(x)-abs(x-2);
f := 2 |x| - |x - 2|
> p1:=plot(f,x=-4..4,thickness=7,color=black):
```

Теперь нарисуем две полосы. Для этого надо нарисовать четыре вертикальные прямые  $x = -2$ ,  $x = -1$ ,  $x = 1$  и  $x = 3$ . Поэтому описывать их надо не как график функции, а как множество точек плоскости  $(x, a)$ . Первую прямую  $x = -2$  можно описать, например, как множество точек плоскости с координатами  $(-2, a)$ , где  $a$  пробегает промежуток  $[-2, 6]$ . Этот промежуток представляет собой размеры по вертикали выводимой на экран картинки. Математически такое множество точек описывается выражением  $\{(-2, a) \mid a \in [-2; 6]\}$ . В Maple такое множество имеет следующее синтаксическое описание `[-2,a,a=-2..6]`. Этого описания достаточно для построения отрезка прямой, т.е. хватит команды `plot([-2,a,a=-2..6])`. Но мы построим сразу два вертикальных отрезка. Для этого надо описания обоих вертикальных отрезков поместить в фигурные скобки. Для Maple это означает, что мы строим множество точек, состоящее из двух отрезков прямых.

```
> p2:=plot({[-2,a,a=-2..6],[-1,a,a=-2..6]},color=black):
```

А теперь построим вторую полосу.

```
> p3:=plot({[1,a,a=-2..6],[3,a,a=-2..6]},color=black):
```

Теперь найдем часть первой полосы, лежащей выше графика  $a = 2|x| - |x - 2|$ . Для этого найдем точки пересечения прямых  $x = -2$ ,  $x = -1$  с этим графиком.

```
> subs(x=-2,f): eval(%);
0
> subs(x=-1,f): eval(%);
-1
```

Т.о. полоса  $-2 < x < -1$  при  $a > 0$  лежит выше графика, а при  $a < -1$  — ниже графика. Поскольку нас интересует часть, лежащая выше графика, то разделим эту полосу на две части отрезком прямой  $[x, 0, x=-2..-1]$ .

Разберемся аналогичным образом со второй полосой.

```
> subs(x=1,f): eval(%);
1
> subs(x=3,f): eval(%);
5
```

Т.о. полоса  $1 < x < 3$  при  $a > 5$  лежит выше графика, а при  $a < 1$  – ниже графика. Здесь мы разделяем полосу на две части отрезком прямой  $[x, 1, x=1..3]$ .

Построим оба эти отрезка.

```
> p4:=plot({[x,0,x=-2..-1],[x,1,x=1..3]},color=black):
```

В качестве последнего штриха зальем построенные куски двух полос серым цветом.

```
> p5:=plot(6,x=-2..-1,filled=true,color=grey):
> p6:=plot(1,x=1..3,filled=true,color=grey):
> p7:=plot(-2,x=1..3,filled=true,color=grey):
```

Мы построили по отдельности семь графиков и хотели бы вывести все семь графиков на одном рисунке. Это делает команда `display`. Но дело в том, что при запуске Maple первоначально загружается небольшое количество наиболее важных команд. К ним мы имеем прямой доступ с помощью указания их имени. Все остальные команды распределены по отдельным пакетам и могут быть вызваны с указанием имени пакета. Команда `display` находится в пакете `plots`. Т.о. она может быть вызвана с помощью «длинного» имени `plots[display]`.

```
> plots[display]({p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7},
> title="a=2|x|-|x-2|",titlefont=[TIMES,ITALIC,24],
> labels=[x,a],labelfont=[TIMES,ITALIC,24],
> axesfont=[COURIER,BOLD,18]);
```

После выполнения этой последней команды вы увидите график, приведенный на рисунке 2.

## Задачи с параметром под модулем

Задача может быть сформулирована на языке графиков, уравнений или неравенств. Это не принципиально. Важно то, что формулировке задачи участвует функция вида  $y = f(x) + |x - a|$ . Таким образом параметр входит в задачу более сложным образом, чем в предыдущей группе задач.

Здесь также предлагается графическое решение. То есть задачу надо сводить к построению графика уравнения вида  $g(x) + |x - a| = 0$  в плоскости  $(x, a)$ . Но теперь этот график приходится строить как график функции  $a = x + g(x)$  в области  $a < x$ , и как график функции  $a = x - g(x)$  в области  $a > x$ .

**Пример 3.** Найти все значения параметра  $a$ , для которых интервал  $(-1; 1)$  будет решением неравенства  $x + |x - a| + |x - 1| < 3$ .

**Решение.** Построим график уравнения  $x + |x - a| + |x - 1| = 3$ , то есть графическое изображение всех пар  $(x, a)$ , удовлетворяющих этому уравнению.

Для этого надо раскрыть оба модуля в уравнении. Каждый из них раскрывается либо с плюсом, либо с минусом, так что всего мы имеем четыре случая. Для описания этих четырех случаев выражения, стоящие под модулями приравняем к нулю. У нас получится два уравнения  $x = 1$  и  $a = x$ . На плоскости  $(x, a)$  это две прямые: вертикальная и наклонная. Они разбивают плоскость  $(x, a)$  на четыре области. В каждой из этих областей модули раскрываются с определенными знаками. Поэтому в каждой из областей изображением решения уравнения будет некоторая прямая. Уравнения всех этих четырех прямых нетрудно найти

$$a = \begin{cases} -x + 4, & x > 1 \text{ и } a > x, \\ 3x - 4, & x > 1 \text{ и } a < x, \\ x - 2, & x < 1 \text{ и } a < x, \\ x + 2, & x < 1 \text{ и } a > x. \end{cases}$$

Приведем рисунок этой ломаной. К рисунку ломаной добавлены еще отрезки двух прямых  $a = x$  и  $x = 1$ .

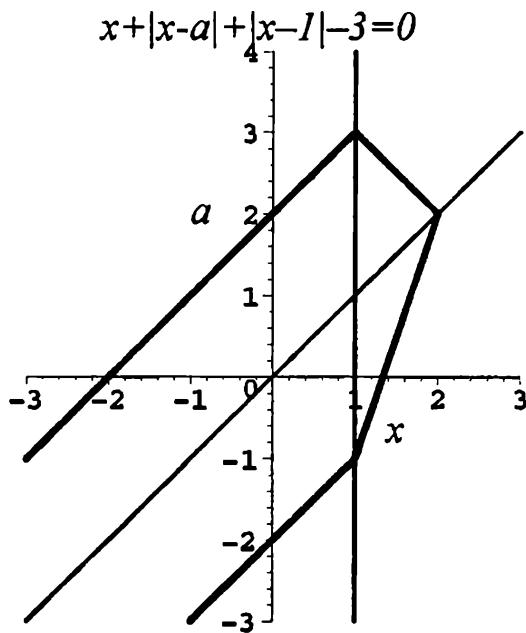


Рис.3. График уравнения  $x + |x - a| + |x - 1| = 3$ .

Эта ломаная является границей двух областей, на которые она разбивает плоскость переменных  $(x, a)$ . Одна из этих областей будет графическим изображением неравенства  $x + |x - a| + |x - 1| < 3$ . Выбрать эту

область можно с помощью проверки одной точки на попадание (или не попадание) в область. Например, если мы возьмем точку  $x = 0, a = 0$  и подставим в неравенство  $x + |x - a| + |x - 1| < 3$ , то приедем к верному числовому неравенству  $1 < 3$ . Таким образом точка  $(0, 0)$  лежит в области, которая будет изображением решения неравенства  $x + |x - a| + |x - 1| < 3$ .

Далее, графическим изображением интервала  $-1 < x < 1$  будет вертикальная полоса. Нам надо выбрать ту часть полосы, которая целиком лежит внутри области решений неравенства  $x + |x - a| + |x - 1| < 3$ . Эту часть полосы нетрудно найти (см. рисунок 4 ниже).

Значения  $a$ , ограничивающие эту полосу, легко вычисляются. Это  $-1$  и  $1$ . Таким образом мы приходим к ответу  $a \in [-1; 1]$ .

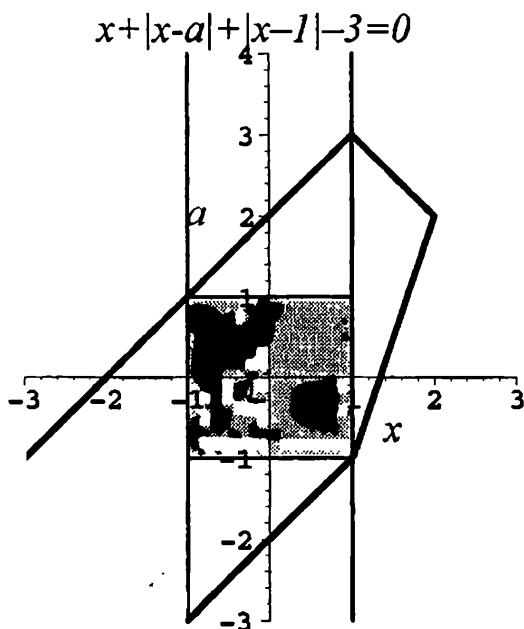


Рис.4. Изображение решений задачи из примера 3.

**Ответ:**  $[-1; 1]$

**Вычисления в Maple.** Сначала построим график уравнения  $x + |x - a| + |x - 1| = 3$ . По определению, это множество точек с координатами  $(x, a)$ , удовлетворяющих этому уравнению. Перепишем это уравнение в виде  $x + |x - a| + |x - 1| - 3 = 0$ . Левую часть этого уравнения введем в Maple как выражение f.

$$\begin{aligned} > f := x + \text{abs}(x - a) + \text{abs}(x - 1) - 3; \\ f := x + |-x + a| + |x - 1| - 3 \end{aligned}$$

Для построения графика этого уравнения надо из этого уравнения выразить  $a$  через  $x$ . Но параметр  $a$  находится под модулем. Следовательно, надо раскрывать модуль. Для этого надо рассмотреть два случая:  $x - a > 0$

и  $x - a < 0$ . Начнем со случая  $x - a > 0$ . Тогда  $|x - a| = x - a$  и левая часть рассматриваемого уравнения  $f=0$  примет вид.

```
> f1:=x+(x-a)+abs(x-1)-3;

$$f1 := 2x - a + |x - 1| - 3$$

```

Т.о. при  $x > a$  мы имеем уравнение  $f1 = 0$ . Выразим отсюда  $a$ . Для этого можно уравнение  $f1=0$  решить относительно  $a$ . В Maple за решение уравнений отвечает команда `solve`. Ее первым аргументом должно быть решаемое уравнение, или левая часть этого уравнение при условии, что в правой части стоит 0. Вторым аргументом должно быть имя неизвестной, относительно которой это уравнение решается.

```
> a1:=solve(f1,a);

$$a1 := 2x + |x - 1| - 3$$

```

Здесь мы нашли решение уравнения  $f1=0$  относительно  $a$  и найденное решение присвоили (как значение) переменной  $a1$ . В области  $x > a$  графиком уравнения  $f=0$  является график функции  $a1$ . Для построения графика этой функции надо найти значения переменной  $x$ , для которых график функции  $a1$  лежит в области  $x > a$ . Для этого найдем точку пересечения двух графиков функций:  $a = x$  и  $a = a1 \equiv 2x + |x - 1| - 3$ .

```
> solve(x=a1);

$$2$$

```

Это точка  $x = 2$ . Легко видеть, что график функции  $a1$  лежит в области  $x > a$  при  $x < 2$ . Теперь мы можем его построить.

```
> p1:=plot(a1,x=-3..2,view=[-3..3,-3..4],
> thickness=7,color=black);
```

Здесь с помощью опции `view` мы задали область видимости этого графика по обоим измерениям: горизонтальному и вертикальному.

```
> f2:=x-(x-a)+abs(x-1)-3;

$$f2 := a + |x - 1| - 3$$

```

Аналогичным образом рассматривается случай  $x < a$ .

```
> a2:=solve(f2,a);

$$a2 := -|x - 1| + 3$$

```

```
> solve(x=a2);

$$2$$

> p2:=plot(a2,x=-3..2,view=[-3..3,-3..4],
> thickness=7,color=black);
```

Добавим еще к рисунку графики прямой  $a = x$  и  $x = 1$ .

```
> p3:=plot(x,x=-3..4,view=[-3..3,-3..4],
> thickness=4,color=black);
> p4:=plot([1,a,a=-3..4],view=[-3..3,-3..4],
> thickness=4,color=black);
```

Теперь мы можем построить рисунок со всеми четырьмя графиками.

```
> plots[display]({p1,p2,p3,p4},
> title="x+|x-a|+|x-1|-3=0",titlefont=[TIMES,ITALIC,24],
> labels=[x,a],labelfont=[TIMES,ITALIC,24],
> axesfont=[COURIER,BOLD,18]);
```

Этот график приведен на рисунке 3.

Теперь перейдем к решению задачи. Для решения надо найти значения  $a$ , при которых полоса  $-1 < x < 1$  лежит в области  $x + |x - a| + |x - 1| - 3 < 0$ . Возьмем правую границу полосы  $x = 1$  и найдем точки пересечения этой прямой с границей области  $x + |x - a| + |x - 1| - 3 = 0$ .

```
> subs(x=1,f): eval(%);
                                         -2 + |-1 + a|
> solve(%);
                                         3, -1
```

Таких точек две:  $x = 1$ ,  $a = -1$  и  $x = 1$ ,  $a = 3$ .

Аналогичные вычисления проделаем с левой границей полосы  $x = -1$

```
> subs(x=-1,f): eval(%): solve(%);
                                         1, -3
```

Таким образом прямая  $x = -1$  пересекается с ломаной  $x + |x - a| + |x - 1| - 3 = 0$  в двух точках  $x = -1$ ,  $a = 1$  и  $x = -1$ ,  $a = -3$ .

Теперь легко видеть, что полоса  $-1 < x < 1$  лежит в области  $x + |x - a| + |x - 1| - 3 < 0$  при  $a \in [-1; 1]$ ;

Осталось построить рисунок 4. Сначала построим прямую  $x = -1$  и отрезки прямых  $a = -1$ ,  $a = 1$ .

```
> p5:=plot([-1,a,a=-3..4],view=[-3..3,-3..4],
> thickness=4,color=black):
> p6:=plot({[x,-1,x=-1..1],[x,1,x=-1..1]},view=[-3..3,-3..4],thickness=4,color=black):
```

Теперь зальем область  $-1 < a < 1$ ,  $-1 < x < 1$  серым цветом.

```
> p7:=plot(1,x=-1..1,filled=true,color=gray):
> p8:=plot(-1,x=-1..1,filled=true,color=gray):
```

И наконец построим график с изображением решения.

```
> plots[display]({p1,p2,p4,p5,p6,p7,p8},
> title="x+|x-a|+|x-1|-3=0",titlefont=[TIMES,ITALIC,24],
> labels=[x,a],labelfont=[TIMES,ITALIC,24],
> axesfont=[COURIER,BOLD,18]);
```

Именно этот график изображен на рисунке 4.

**Пример 4.** Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $4x - |3x - |x + a|| = 9|x - 3|$  имеет два корня.

**Решение.** Полезно сразу отметить, что при  $x < 0$  уравнение не имеет решений какими бы ни были значения  $a$ . Это сужает область исследований.

В качестве метода решения (как и в предыдущих примерах) предлагается построить график данного уравнения. По графику можно будет определить количество решений для каждого значения  $a$ . Эта задача трудна тем, что в ее формулировке участвуют много модулей, и поэтому, если их раскрывать бессистемно, то легко запутаться. Отметим, что поскольку при  $x < 0$  рассматриваемое уравнение не имеет решений, то график уравнения будет лежать в области  $x > 0$ .

Начнем с модуля  $|3x - |x+a||$ . Здесь имеется внешний и внутренний модули. Каждый из них может быть раскрыт двумя способами. В итоге получается четырех различных случая. Каждый из этих случаев реализуется (к сожалению). В самом деле, пусть  $x+a > 0$ . Тогда  $|3x - |x+a|| = |2x-a|$ . Полупрямая  $a = 2x$  (при  $x > 0$ ) попадает в область  $x+a > 0$ . Вот вам первые два случая. Их можно описать с помощью неравенств  $a > 2x$  и  $-x < a < 2x$ . При  $x+a < 0$  получаем  $|3x - |x+a|| = |4x+a|$ . Полупрямая  $a = -4x$  (при  $x > 0$ ) попадает в область  $x+a < 0$ , что дает еще два случая. Их можно описать неравенствами  $-4x < a < -x$  и  $a < -4x$ . Каждый из этих случаев придется рассматривать отдельно.

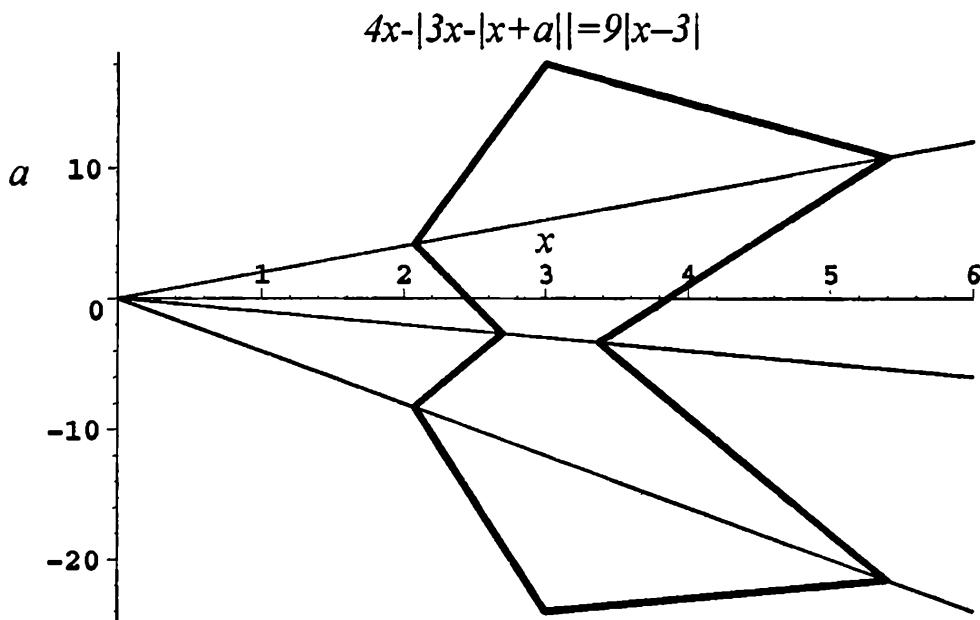


Рис.5. Изображение графика уравнения  $4x - |3x - |x + a|| = 9|x - 3|$ .

Соберем все эти результаты вместе. Итак, в области  $x > 0$  уравнение

$4x - |3x - |x + a|| = 9|x - 3|$  можно переписать в виде

$$\begin{cases} 6x - a = 9|x - 3|, & 2x < a, \\ 2x + a = 9|x - 3|, & -x < a < 2x, \\ -a = 9|x - 3|, & -4x < a < -x, \\ 8x + a = 9|x - 3|, & a < -4x. \end{cases}$$

Отсюда можно выразить  $a$  через  $x$  в каждой из областей и после этого – построить график решаемого уравнения как график функции

$$a = \begin{cases} 6x - 9|x - 3|, & 2x < a, \\ -2x + 9|x - 3|, & -x < a < 2x, \\ -9|x - 3|, & -4x < a < -x, \\ -8x + 9|x - 3|, & a < -4x. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рисунке 5.

Из графика мы видим, что для каждого значения  $a$  возможен один из трех случаев: рассматриваемое уравнение может не иметь решений, может иметь одно решение, или может иметь два решения. Если уравнение имеет одно решение, то этим решением будет  $x = 3$ . Подставляя  $x = 3$  в рассматриваемое уравнение, находим, что  $a = -24$ , или  $a = 18$ .

Из графика уравнения также видно, что при  $a \in (-24; 18)$  уравнение имеет два решения, а при  $a \notin (-24; 18)$  уравнение не имеет решений.

**Ответ:**  $a \in (-24; 18)$

**Вычисления в Maple.** Построим здесь график уравнения  $4x - |3x - |x + a|| = 9|x - 3|$  с помощью Maple.

Начнем со случая  $a > 2x$ . Тогда  $|3x - |x + a|| = a - 2x$ . Решаемое уравнение имеет вид .

```
> eq1:=4*x-(a-2*x)=9*abs(x-3);
eq1 := 6x - a = 9 |x - 3|
```

Выразим отсюда  $a$  через  $x$ .

```
> func1:=solve(eq1,{a});
func1 := {a = 6x - 9 |x - 3|}
```

Обратите внимание на то, что переменная, относительно которой решается уравнение, заключена в фигурные скобки. В этом случае результат возвращается не в виде выражения, а в виде равенства. В некоторых ситуациях такая форма результата удобнее.

Итак, график данного уравнения в рассматриваемом случае описывается как график функции  $a = 6x - 9|x - 3|$ . Осталось найти область значений переменной  $x$ . Границы этой области можно найти как точки

пересечения графика функции  $a = 6x - 9|x - 3|$  и прямой  $a = 2x$ . Это, конечно, система двух уравнений, но проще всего сразу свести эту систему к одному уравнению, подставляя  $a = 6x - 9|x - 3|$  в равенство  $a = 2x$ .

```
> subs(func1,a=2*x);
      6 x - 9 |x - 3| = 2 x
> sol1:=solve(%);
      sol1 :=  $\frac{27}{5}, \frac{27}{13}$ 
```

Для  $x$  получается два значения  $27/13$  и  $27/5$ . Таким образом  $x \in [\frac{27}{13}, \frac{27}{5}]$ . Теперь мы можем построить график.

```
> opts:=thickness=7,color=black:
> p1:=plot(subs(func1,a),x=sol1[2]..sol1[1],opts):
```

При построении графика мы отдельно создали переменную `opts`, куда поместили опции. А потом эту переменную поместили в команду `plot`. Дело в том, что эти опции будут использоваться в нескольких графиках, поэтому мы экономим на наборе. Команда `plot` умеет строить график выражения, а не равенства. Выражение мы получили с помощью команды `subs(func1,a)`. Наконец, границы области значений переменной  $x$  мы нашли с помощью выбора из множества `sol1` отдельных решений.

Посмотрите на рисунок 5. На нем изображены три наклонные прямые  $a = 2x$ ,  $a = -x$  и  $a = -4x$ . Они разбивают полуплоскость  $x > 0$  на четыре области. Мы построили график нашего уравнения в самой верхней области  $a > 2x$ .

Рассмотрим вторую сверху область  $-x < a < 2x$ . Все вычисления здесь почти аналогичны предыдущим.

```
> eq2:=4*x+(a-2*x)=9*abs(x-3);
      eq2 := 2 x + a = 9 |x - 3|
> func2:=solve(eq2,{a});
      func2 := {a = -2 x + 9 |x - 3|}
> subs(func2,a=-x);
      -2 x + 9 |x - 3| = -x
> sol2:=solve(%);
      sol2 :=  $\frac{27}{8}, \frac{27}{10}$ 
```

Единственное отличие в том, что для множества значений  $x$  мы получаем здесь два промежутка  $x \in [\frac{27}{13}, \frac{27}{10}]$  и  $x \in [\frac{27}{8}, \frac{27}{5}]$ . Поэтому здесь приходится строить два графика для каждого из этих промежутков.

```
> p2:=plot(subs(func2,a),x=sol1[2]..sol2[2],opts):
> p3:=plot(subs(func2,a),x=sol2[1]..sol1[1],opts):
```

В третьей сверху области  $-4x < a < -x$ . Все вычисления полностью аналогичны вычислениям из предыдущего случая.

```
> eq3:=4*x-(4*x+a)=9*abs(x-3);
eq3 := -a = 9 |x - 3|
> func3:=solve(eq3,{a});
func3 := {a = -9 |x - 3|}
> subs(func3,a=-4*x);
-9 |x - 3| = -4 x
> sol3:=solve(%);
sol3 :=  $\frac{27}{5}, \frac{27}{13}$ 
> p4:=plot(subs(func3,a),x=sol3[2]..sol2[2],opts):
> p5:=plot(subs(func3,a),x=sol2[1]..sol3[1],opts):
```

В последнем четвертом случае  $a < -4x$  все вычисления аналогичны вычислениям в первом случае.

```
> eq4:=4*x+(4*x+a)=9*abs(x-3);
eq4 := 8 x + a = 9 |x - 3|
> func4:=solve(eq4,{a});
func4 := {a = -8 x + 9 |x - 3|}
> p6:=plot(subs(func4,a),x=sol3[2]..sol3[1],opts):
```

График построен. Он состоит из 6 частей. Добавим к нему еще графики наклонных прямых  $a = 2x$ ,  $a = -x$  и  $a = -4x$ .

```
> p7:=plot(2*x,x=0..6,thickness=3,color=black):
> p8:=plot(-x,x=0..6,thickness=3,color=black):
> p9:=plot(-4*x,x=0..6,thickness=3,color=black):
```

Теперь все 9 графиков соберем вместе на одном изображении.

```
> design:=title="4x-|3x-|x+a||=9|x-3|",
> titlefont=[TIMES,ITALIC,24],labels=[x,a],
> labelfont=[TIMES,ITALIC,24],axesfont=[COURIER,BOLD,18]:
> plots[display]({p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7,p8,p9},design);
```

Этот график приведен на рисунке 5.

## Задачи, основанные на свойстве монотонности

Имеется широкий класс задач с параметром, при решении которых используется идея монотонности.

**Пример 5.** Найти все такие значения параметра  $a$ , для которых наименьшее значение функции  $y = -x + |x - 1| + |x + 1| + 2|x - a| - 4$  будет положительным.

**Решение.** Прямым решением этой задачи будет нахождение функции наименьшего значения. То есть надо для каждого значения  $a$  найти наименьшее значение данной функции  $y$ , которое будем обозначать через  $f_{\min}(a)$ . Это функция наименьшего значения.

Как искать? В описании функции присутствуют три модуля. Точки, в которых эти модули обращаются в ноль, надо нарисовать на числовой прямой. Тогда на числовой прямой мы получим четыре промежутка, в каждом из которых любой из модулей раскрывается с определенным знаком. Раскрывая эти модули, можно для каждого из построенных промежутков найти представление функции в виде линейного двучлена, графиком которого будет прямая. Таким образом на каждом из построенных промежутков графиком данной функции будет отрезок прямой. Но нас интересует не сама эта прямая, а только знак ее монотонности. Знак монотонности будет определяться угловым коэффициентом построенного двучлена.

Перейдем к конкретным вычислениям. Пусть  $a < -1$ . Тогда на числовой прямой мы имеем 4 промежутка:  $(-\infty; a)$ ,  $(a; -1)$ ,  $(-1; 1)$  и  $(1; \infty)$ . На первом интервале  $(-\infty; a)$  все модули раскрываются с минусами. Отсюда получаем, что угловой коэффициент линейного двучлена будет равен  $-5$  и, следовательно, функция  $y$  убывает. На интервале  $(a; -1)$  изменится знак раскрытия модуля  $|x - a|$ . Следовательно, угловой коэффициент двучлена увеличится на 4 и будет равен  $-1$ , то есть функция  $y$  все равно убывает. На интервале  $(-1; 1)$  изменится знак раскрытия модуля  $|x + 1|$ . Следовательно, угловой коэффициент двучлена увеличится на 2 и будет равен 1, то есть функция будет возрастать. На интервале  $(1; \infty)$  угловой коэффициент двучлена будет равен 3 и функция будет возрастать.

Таким образом точкой минимума будет  $x = -1$ . Вычисляя значение  $y$  при  $x = -1$  получаем, что  $f_{\min}(a) = 2|a + 1| - 1 = -2a - 3$  при  $a < -1$ . Аналогичным образом анализируются оставшиеся случаи  $-1 < a < 1$  и  $-1 < 1 < a$ . Это приводит к следующим выражениям для функции минимума

$$f_{\min}(a) = \begin{cases} -2a - 3, & a \leq -1, \\ -a - 2, & -1 < a \leq 1, \\ a - 4, & a > 1 \end{cases}$$

График этой функции нетрудно построить. Используем Maple. Сначала введем в Maple функцию минимального значения.

```
> fmin:=piecewise(a<=-1,-2*a-3,a<=1,-a-2,a-4);
```

$$f_{\min} := \begin{cases} -2a - 3 & a \leq -1 \\ -a - 2 & a \leq 1 \\ a - 4 & \text{otherwise} \end{cases}$$

И теперь построим график этой функции.

```
> plot(fmin, a=-2..5, thickness=7, color=black, labels=[a, f_min],  
> labelfont=[TIMES, ITALIC, 24], axesfont=[COURIER, BOLD, 18]);
```

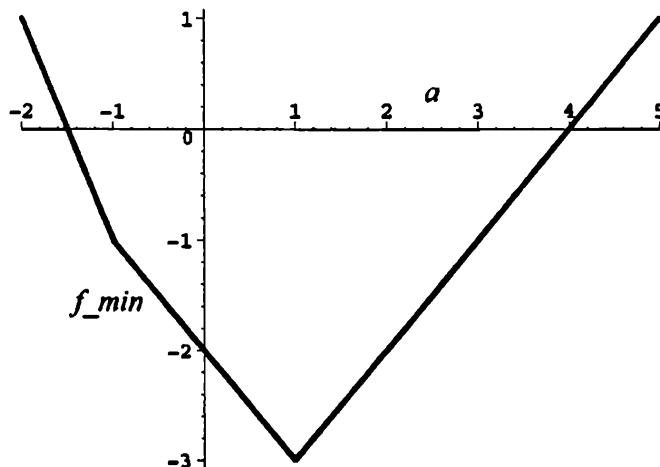


Рис.6. Изображение графика функции минимального значения для функции  $y = -x + |x - 1| + |x + 1| + 2|x - a| - 4$ .

Из графика видно, что  $f_{\min}(a) > 0$  при  $a \in (-\infty; -1, 5) \cup (4; \infty)$ . Таким образом

**Ответ:**  $a \in (-\infty; -1, 5) \cup (4; \infty)$

**Пример 6.** Найти все такие  $a$ , что наименьшее значение функции  $y = |x^2 - (a+1)x + a| + (a-1)|x+1|$  меньше 2.

**Решение.** Прежде все отметим, что выражение для функции может быть преобразовано к виду  $y = |x-1| \cdot |x-a| + (a-1)|x+1|$ . Прямое решение этой задачи основано на нахождении функции минимума  $f_{\min}(a)$ . В описании заданной функции имеется три модуля, обращающиеся в ноль при  $x = -1$ ,  $x = 1$  и  $x = a$ . Следовательно, на числовой прямой существует четыре области, в которых модули будут раскрываться с определенными знаками. Поскольку одна из таких точек  $x = a$  не является фиксированной, то приходит отдельно рассматривать случаи  $a < -1$ ,  $-1 < a < 1$  и  $a > 1$ .

Рассмотрим, например, случай  $a < -1$ . Тогда для заданной функции  $y$  получаем следующее представление

$$y = \begin{cases} x^2 - 2ax + 1, & x \leq a, \\ -x^2 + 2x - 2a + 1, & a < x \leq -1, \\ -x^2 + 2ax - 1, & -1 < x \leq 1, \\ x^2 - 2x + 2a - 1, & 1 < x. \end{cases}$$

Дифференцируя эту функцию, получим

$$y' = \begin{cases} 2x - 2a, & x \leq a, \\ -2x + 2, & a < x \leq -1, \\ -2x + 2a, & -1 < x \leq 1, \\ 2x - 2, & 1 < x. \end{cases}$$

На каждом из четырех интервалов  $(-\infty; a)$ ,  $(a; -1)$ ,  $(-1; 1)$  и  $(1; \infty)$  производная  $y'$  не обращается в ноль, следовательно, будет сохранять знак и, следовательно, функция  $y$  будет монотонной на каждом из этих 4 интервалов. Определяя знак этой монотонности, находим, что  $y$  имеет два локальных минимума. Один – в точке  $x = a$ , второй – в точке  $x = 1$ .

Находим  $y(a) = (a - 1)|a + 1|$ , но с учетом того, что  $a < -1$  получим  $y(a) = 1 - a^2$ . Далее находим  $y(1) = 2a - 2$ . Мы нашли значение функции  $y$  в двух локальных точках минимума. Теперь надо выбрать из них наименьшее значение. Поскольку  $1 - a^2 = 2a - 2$  при  $a = -3$  и  $a = 1$ , то  $1 - a^2 < 2a - 2$  при  $a < -3$  и  $a > 1$ . И  $2a - 2 < 1 - a^2$  при  $-3 < a < 1$ . Отсюда получаем, что в рассматриваемом случае  $a < -1$

$$f_{\min}(a) = \begin{cases} 1 - a^2, & a \leq -3, \\ 2a - 2, & -3 < a < -1. \end{cases}$$

Аналогичным образом можно проанализировать оставшиеся два случая  $-1 < a < 1$  и  $a > 1$ . Для этих оставшихся значений  $a$  функция наименьшего значения  $f_{\min}(a) = 2a - 2$ .

Осталось построить график функции  $f_{\min}(a)$  и по графику определить, что  $f_{\min}(a) < 2$  при  $a < 2$ .

Ответ:  $(-\infty; 2)$

## А теперь графическое решение

Обе приведенные выше задачи могут быть также решены графическим методом.

**Пример 7.** Найти все такие значения параметра  $a$ , для которых наименьшее значение функции  $y = -x + |x - 1| + |x + 1| + 2|x - a| - 4$  будет положительным.

**Решение.** Это та же самая задача, что и задача 5. Но здесь мы приведем еще одно ее решение. Это решение будет графическим. Возможность графического решения основана на переформулировке задачи. Вот эта переформулировка.

Если наименьшее значение функции  $y = y(x, a)$  при некотором  $a = a_0$  положительно, то график этой функции не пересекает ось  $Ox$  при этом  $a = a_0$ . Отсюда следует, что при этом  $a = a_0$  функция  $y = y(x, a)$  ни

при каком значении  $x$  не обращается в ноль. Это эквивалентно тому, что при этом  $a = a_0$  уравнение  $y(x, a) = 0$  не имеет решений. Последнее равносильно тому, что график уравнения  $y(x, a) = 0$  и график прямой  $a = a_0$  на плоскости переменных  $(x, a)$  не имеют общих точек.

Таким образом для решения задачи нам достаточно построить график уравнения  $-x + |x - 1| + |x + 1| + 2|x - a| - 4 = 0$  и найти все значения  $a_0$ , при которых прямая  $a = a_0$  не будет пересекать график этого уравнения.

График уравнения мы можем построить точно также, как и графики уравнений в предыдущих задачах. Всю плоскость  $(x, a)$  надо разбить на области прямыми  $x = -1$ ,  $x = 1$  и  $a = x$ . Получится 6 областей. В каждой из них надо раскрыть модули в уравнении с соответствующими знаками. Получится уравнение прямой. У прямой надо взять кусок, попадающий в рассматриваемую область. Приведем этот график.

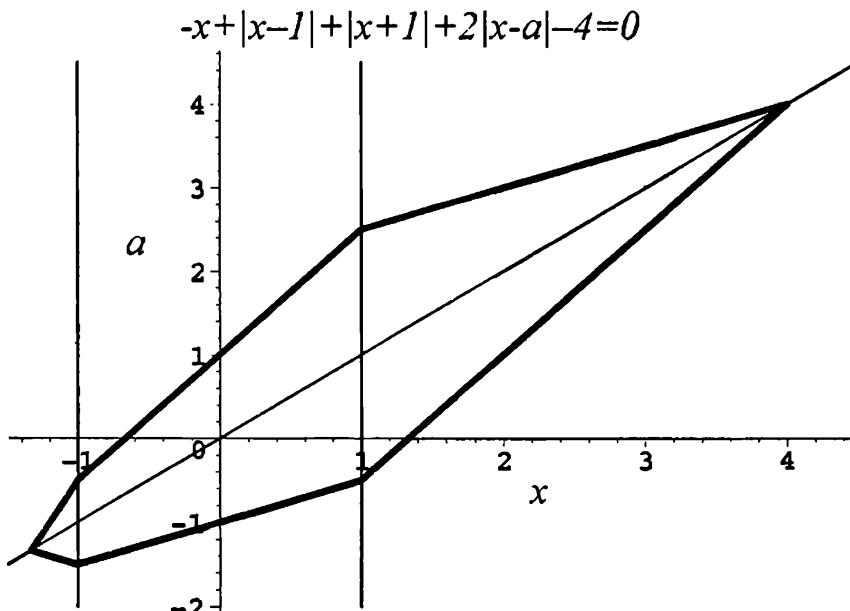


Рис.7. График уравнения  $-x + |x - 1| + |x + 1| + 2|x - a| - 4 = 0$ .

(Постройте этот график двумя способами: без Maple и с помощью Maple.) Ниже мы приводим команды Maple, с помощью которых был построен этот график.

Нас интересует самая верхняя и самая нижняя точки графика. Самая нижняя точка графика лежит на прямой  $x = -1$ . Подставляя  $x = -1$  в уравнение  $-x + |x - 1| + |x + 1| + 2|x - a| - 4 = 0$ , получим  $2|a + 1| - 1 = 0$ . У этого уравнения два решения  $a = -0,5$  и  $a = -1,5$ . Но нас интересует наименьшее. Из построенного графика следует, что при  $a < -1,5$  уравнение не имеет решений.

Найдем теперь верхнюю точку графика. Она лежит на прямой  $a = x$ . Подставляя  $x = a$  в уравнение  $-x + |x - 1| + |x + 1| + 2|x - a| - 4 = 0$ , получим

$-a + |a - 1| + |a + 1| - 4 = 0$ . У этого уравнения два решения  $a = -4/3$  и  $a = 4$ . Но нас интересует наибольшее. Из построенного графика следует, что при  $a > 4$  уравнение не имеет решений.

Ответ:  $a \in (-\infty; -1,5) \cup (4; \infty)$

### Вычисления в Maple.

```
> eq1:=-x+abs(x-1)+abs(x+1)+2*(a-x)-4=0;
> sol1:=solve(eq1,a);
> subs(a=x,eq1);
> bon1:=solve(%);
> p1:=plot(sol1,x=-4/3..4,thickness=7,color=black):
> eq2:=-x+abs(x-1)+abs(x+1)-2*(a-x)-4=0;
> sol2:=solve(eq2,a);
> subs(a=x,eq2);
> bon2:=solve(%);
> p2:=plot(sol2,x=-4/3..4,thickness=7,color=black):
> p3:=plot({[-1,a,a=-2..4.5],[1,a,a=-2..4.5]},
> thickness=3,color=black):
> p4:=plot(x,x=-1.5..4.5,thickness=3,color=black):
> design:=title="-x+|x-1|+|x+1|+2|x-a|-4=0",
> titlefont=[TIMES,ITALIC,24],labels=[x,a],
> labelfont=[TIMES,ITALIC,24],axesfont=[COURIER,BOLD,18]:
> plots[display]({p1,p2,p3,p4},design);
```

**Пример 8.** Найти все такие  $a$ , что наименьшее значение функции  $y = |x^2 - (a+1)x + a| + (a-1)|x+1|$  меньше 2.

**Решение.** Это та же самая задача, что и задача 6. Но здесь мы приведем ее графическое решение. Прежде все отметим, что выражение для функции может быть преобразовано к виду  $y = |x-1| \cdot |x-a| + (a-1)|x+1|$ .

Далее, рассуждая точно также, как и в предыдущей задаче можно показать, что наименьшее значение данной функции будет меньше 2 тогда и только тогда, когда уравнение

$$|x-1| \cdot |x-a| + (a-1)|x+1| = 2$$

имеет больше одного решения. А это уравнение в свою очередь будет иметь решение при некотором  $a = a_0$  тогда и только тогда, когда график этого уравнения и график прямой  $a = a_0$  пересекаются в нескольких точках.

Для построения графика уравнения надо плоскость переменных  $(x, a)$  разбить на 6 областей прямыми  $x = -1$ ,  $x = 1$  и  $a = x$  и раскрыть модули

в каждой из областей с определенными знаками. После этого можно в каждой из областей выразить  $a$  через  $x$ . Тогда получим

$$a = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}, & \text{если } x > 1, x > a, \text{ или} \\ & \text{если } -1 < x < 1, x < a; \\ \frac{1}{2} \left( x + \frac{3}{x} \right), & \text{если } -1 < x < 1, x > a \text{ или} \\ & \text{если } x > 1, x < a; \\ \frac{1}{2} \left( x - \frac{1}{x} \right), & \text{если } x < -1, x < a; \\ -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}, & \text{если } x < -1, x > a. \end{cases}$$

Теперь мы можем построить график данного уравнения

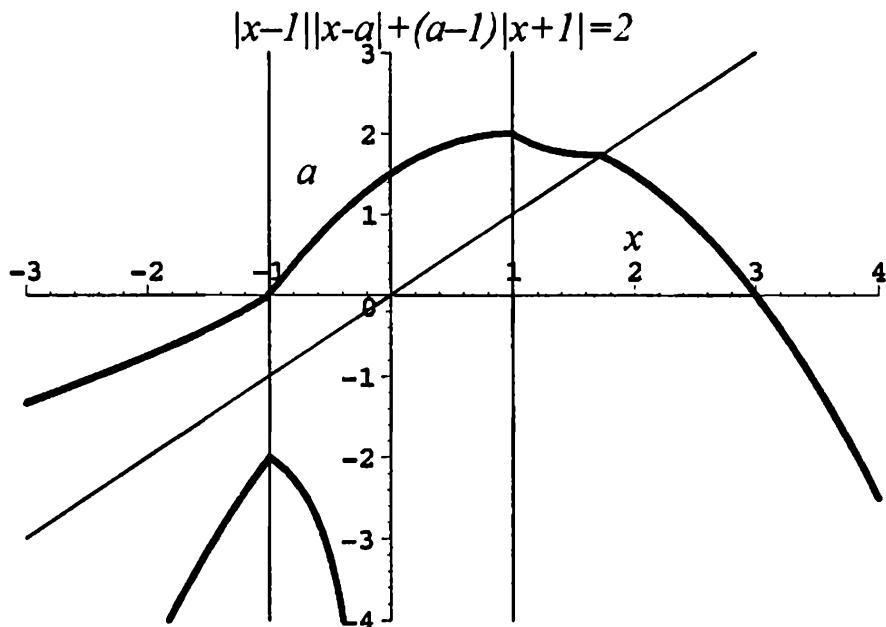


Рис.8. График уравнения  $|x - 1| \cdot |x - a| + (a - 1)|x + 1| = 2$ .

Из графика видно, что несколько решений существуют при  $a < 2$ .

**Ответ:**  $(-\infty; 2)$

**Вычисления в Maple.** Сначала рассмотрим уравнение  $|x - 1| \cdot |x - a| + (a - 1)|x + 1| = 2$  при  $a > x$ .

> `eq1:=abs(x-1)*(a-x)+(a-1)*abs(x+1)=2;`

$$eq1 := |x - 1| (a - x) + (a - 1) |x + 1| = 2$$

Решим это уравнение относительно  $a$ .

> `sol1:=solve(eq1,a);`

$$sol1 := \frac{|x - 1| |x + 1| + 2}{|x - 1| + |x + 1|}$$

Тут куча модулей в числителе и знаменателе, но их можно раскрыть на интервалах  $(-\infty; -1)$ ,  $(-1; 1)$  и  $(1; \infty)$ . Сделаем это.

```
> convert(sol1,piecewise);
> sol1:=expand(%);
```

$$sol1 := \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{x}{2} & x < -1 \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x^2 + x & -1 \leq x < 1 \\ \frac{3}{2}x + \frac{x}{2} & x \geq 1 \end{cases}$$

График уравнения  $|x - 1| \cdot (a - x) + (a - 1)|x + 1| = 2$  в плоскости  $(x, a)$  можно построить как график этой функции. Правда нам нужен не весь график, а только та часть, которая лежит в области  $a > x$ . Попробуйте построить этот график (вместе с прямой  $a = x$ ), например, на промежутке  $(-3; 3)$ . Вы увидите, что график пересекает прямую  $a = x$  в одной точке. Эту точку нетрудно найти.

```
> subs(a=sol1,a=x):
> bon1:=solve(%);
```

$$bon1 := \sqrt{3}$$

Итак, нужная нам часть графика лежит в области  $x < \sqrt{3}$ . Построим ее, например, на промежутке  $(-3; \sqrt{3})$  и сохраним в переменной p1.

```
> p1:=plot(sol1,x=-3..sqrt(3),thickness=7,color=black):
```

Теперь рассмотрим область  $a < x$ . Сначала все также, как и выше.

```
> eq2:=abs(x-1)*(x-a)+(a-1)*abs(x+1)=2;
eq2 := |x - 1| (x - a) + (a - 1) |x + 1| = 2
```

```
> sol2:=solve(eq2,a);
```

$$sol2 := \frac{|x - 1| x - |x + 1| - 2}{|x - 1| - |x + 1|}$$

```
> convert(sol2,piecewise):
```

```
> sol2:=expand(%);
```

$$sol2 := \begin{cases} -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2 + x & x < -1 \\ \frac{3}{2}x + \frac{x}{2} & -1 \leq x < 1 \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x^2 + x & x \geq 1 \end{cases}$$

```
> subs(a=sol2,a=x):
> bon2:=solve(%);
```

$$bon2 := \sqrt{3}$$

А вот теперь нужен эксперимент. Если вы будете строить график на промежутке  $(-3; \sqrt{3})$ , то получите куски графика как ниже прямой  $a = x$ , так и выше этой прямой. Нам надо найти те значения  $x$ , для которых график функции, обозначенной  $sol2$ , лежит ниже прямой  $a = x$ . Нетрудно понять, что нужные значения  $x$  лежат в промежутках  $(-\infty; 0)$  и  $(\sqrt{3}; \infty)$ . Для каждого из этих промежутков график придется строить отдельно.

```
> p2:=plot(sol2,x=-3..0,thickness=7,color=black,view=-4..3):
> p3:=plot(sol2,x=sqrt(3)..4,thickness=7,
> color=black,view=-4..3):
```

Построим теперь графики прямых  $a = x$ ,  $x = -1$  и  $x = 1$ .

```
> p4:=plot(x,x=-3..4,thickness=3,color=black):
> p5:=plot([-1,a,a=-4..3],thickness=3,color=black):
> p6:=plot([1,a,a=-4..3],thickness=3,color=black):
> design:=title="|x-1||x-a|+(a-1)|x+1|=2",
> titlefont=[TIMES,ITALIC,24],labels=[x,a],
> labelfont=[TIMES,ITALIC,24],axesfont=[COURIER,BOLD,18]:
```

И выведем это все на одном рисунке.

```
> plots[display]({p1,p2,p3,p4,p5,p6},design);
```

Вы увидите график, приведенный на рисунке 8.

## Задачи с квадратным трехчленом

Подобных задач много. Но мы ограничимся двумя видами задач.

**Пример 9.** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых из неравенства  $0 \leq x \leq 1$  следует неравенство

$$(a^2 + a - 2)x^2 - (a + 5)x - 2 \leq 0.$$

**Решение.** В переводе на математический язык данная формулировка задачи означает, что надо найти все такие значения  $a$ , при которых отрезок  $[0; 1]$  будет решением приведенного в условии неравенства. Особенность данного неравенства в том, что квадратный трехчлен из левой части неравенства имеет хорошие корни (дискриминант квадратного трехчлена сворачивается в полный квадрат)

$$x_1 = -\frac{1}{a-2}, \quad x_2 = \frac{2}{a-1}.$$

Поэтому левая часть неравенства может быть разложена на множители и, следовательно, само неравенство может быть переписано в виде

$$(ax + 2x + 1)(ax - x - 2) \leq 0.$$

Все решения этого неравенства по обоим переменным ( $x, a$ ) (то есть решением будем считать пару  $(x, a)$ , превращающую это неравенство в верное числовое неравенство) можно изобразить на плоскости переменных  $(x, a)$  в виде некоторых областей. Для построения изображений этих областей мы должны нарисовать их границы. Для этого данное неравенство заменим равенством  $(ax + 2x + 1)(ax - x - 2) = 0$ . Оно распадается на два равенства  $ax + 2x + 1 = 0$  и  $ax - x - 2 = 0$ . Графики двух этих равенств являются гиперболами и могут быть легко нарисованы.

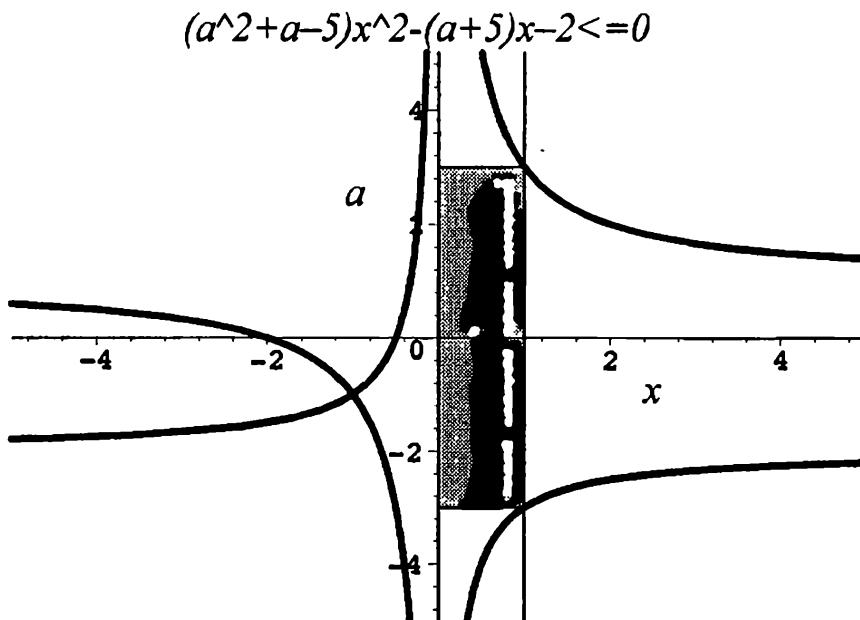


Рис.9. График к примеру 9.

Эти две гиперболические кривые разбивают плоскость на 6 областей. Из этих областей надо выбрать те, которые будут изображением решения данного неравенства. Обычно это делается методом пробных точек. То есть в каждой области надо выбрать по точке и прямой подстановкой в данное неравенство проверить будет ли эта пробная точка решением. Здесь, если мы возьмем точку  $x = 0, a = 0$  и подставим в данное неравенство, что получим верное числовое неравенство  $-2 \leq 0$ . Таким образом область, содержащая начало координат, состоит из точек, являющихся решениями данного неравенства.

Добавим к этой картинке полосу  $0 \leq x \leq 1$ . (На оси  $Ox$  изображением этого неравенства будет отрезок, а на плоскости переменных  $(x, a)$  – полоса.)

Нас интересуют значения  $a$ , при которых часть этой полосы целиком лежит в области решений. На рисунке видно, что эта часть полосы является прямоугольником, отвечающим значениям  $a \in [-3; 3]$ . Границы этого отрезка для  $a$  мы можем найти как точки пересечения границы области решений с прямой  $x = 1$ . Подставим  $x = 1$  в уравнение границы

$(ax+2x+1)(ax-x-2) = 0$ . Тогда получим  $a^2 - 9 = 0$ . Отсюда и находятся значения для  $a = \pm 3$ .

**Ответ:**  $[-3; 3]$

**Вычисления в Maple.** Я думаю, что график на рисунке 9 вы теперь сумеете построить сами. Но попробуйте залить каким-нибудь цветом области, являющиеся решением неравенства, приведенного в заголовке к графику. Это почти математическая задача.

**Пример 10.** Найдите все значения  $a$ , для каждого из которых неравенство  $ax^2 - 4x + 3a + 1 > 0$  выполняется для всех  $-1 < x < 0$ .

**Решение.** Как и в предыдущей задаче в переводе на более точный математический язык эта формулировка означает, что надо найти такие  $a$ , при которых интервал  $x \in (-1; 0)$  попадает во множество решений данного неравенства. Существует методика решения подобных задач, основанная на нахождении условий, задающих требуемое расположение корней квадратного трехчлена. Но здесь мы ограничимся графическим методом.

Сначала перепишем данное неравенство в виде  $a(x^2 + 3) > 4x - 1$ . Далее поделим обе части на  $x^2 + 3$ . Тогда получим эквивалентное неравенство  $a > \frac{4x-1}{x^2+3}$ . И далее найдем изображение решений этого неравенства. Для этого надо нарисовать график функции  $a = \frac{4x-1}{x^2+3}$ . Конечно, для этого придется привлекать исследование функции, основанное на вычислении производной. Но в подобных примерах коэффициенты должны быть подобраны так, чтобы нули производной вычислялись и имели хорошее представление. В данном примере производная

$$\left( \frac{4x-1}{x^2+3} \right)' = -2 \frac{2x^2 - x - 6}{(x^2 + 3)^2}$$

обращается в ноль при  $x = 2$  и  $x = -3/2$ .

После этого надо исследовать функцию  $a = \frac{4x-1}{x^2+3}$  на монотонность на интервалах  $(-\infty; -3/2)$ ,  $(-3/2; 2)$  и  $(2; \infty)$ . Найти значение функции в точке локального минимума  $x = -3/2$  и точке локального максимума  $x = 2$ . Показать, что при  $x$  стремящемся к бесконечности исследуемая функция стремится к нулю. Опуская эти исследования, сразу приведем изображение графика функции  $a = \frac{4x-1}{x^2+3}$  (см. рис.10).

Приведенная кривая делит плоскость на две области: область, лежащую выше кривой и область, лежащую ниже данной кривой. Очевидно, что решением неравенства  $a > \frac{4x-1}{x^2+3}$  будет область, лежащая выше кривой. Нас интересуют значения  $a$ , при которых часть полосы  $-1 < x < 1$  попадает в область решений. Легко находится с помощью приведенного ниже рисунка и нетрудных вычислений, что нужные значения  $a$  представляют собой отрезок  $[-1/3; \infty)$ .

Значение  $a = -1/3$  находится как вторая координата точки пересечения кривой  $ax^2 - 4x + 3a + 1 = 0$  и прямой  $x = 0$ .

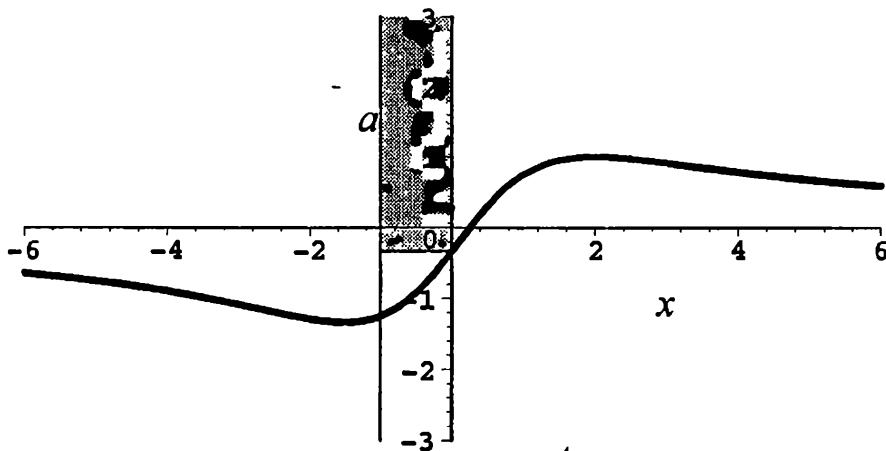


Рис.10. График к примеру 10.

Единственный момент, который следует здесь прокомментировать, это попадание в ответ граничного значения  $a = -1/3$ . Если не хотите ошибиться, то все граничные значения параметра исследуйте отдельно. В нашем примере граничным значением будет  $a = -1/3$ . Подставим это значение  $a$  в данное неравенство. Тогда получим  $-\frac{1}{3}x^2 - 4x > 0$ . Решением неравенства будет интервал  $(-12; 0)$ . Данный нам интервал  $(-1; 0)$  содержится в этом решении. Поэтому  $a = -1/3$  попадает в ответ.

**Ответ:**  $[-\frac{1}{3}; \infty)$

## И еще две задачи

**Пример 11.** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых общие решения неравенств

$$y + 2x \geq a, \quad \text{и} \quad y - x \geq 2a$$

являются решениями неравенства  $2y - x > a + 3$ .

**Решение.** При каждом фиксированном значении параметра  $a$  изображением решения неравенства  $y + 2x \geq a$  является полуплоскость с границей  $y + 2x = a$  на плоскости переменных  $(x, y)$ . Аналогичным образом изображением решения неравенства  $y - x \geq 2a$  является полуплоскость с границей  $y - x = 2a$ . Изображением решения системы неравенств

$$\begin{cases} y + 2x \geq a, \\ y - x \geq 2a \end{cases}$$

является пересечение этих плоскостей. Найти это пересечение этих плоскостей можно следующим образом. Надо нарисовать на плоскости  $(x, y)$

две прямые с уравнениями  $y + 2x = a$ ,  $y - x = 2a$ . Эти две прямые делят плоскость переменных  $(x, y)$  на четыре части (четыре угла). Один из этих углов и является изображением решения данной системы неравенств. Этот угол надо только выбрать.

На приведенном ниже рисунке приводится изображение этих двух прямых (для  $a = 2$ ) и, кроме этого, выбран угол, являющийся решением данной системы неравенств

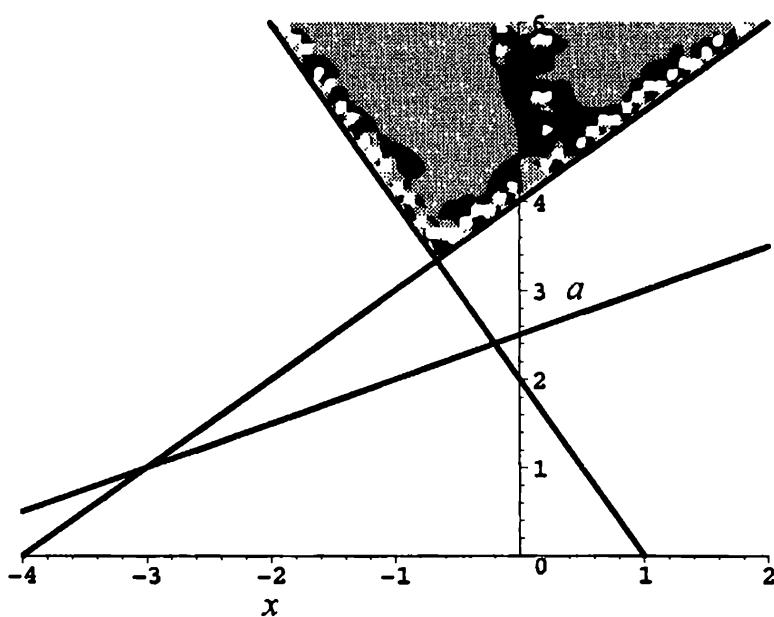


Рис.11. График к примеру 11.

Кроме этого приведено изображение решения третьего неравенства  $2y - x > a + 3$  для этого же  $a = 2$ . Из приведенного рисунка видно, что при рассмотренном случае  $a = 2$  каждое решение данной системы неравенств будет также решением третьего неравенства.

Если мы теперь начнем изменять  $a$ , то прямые на картинке также будут двигаться, при этом они будут двигаться параллельно самим себе. Неким пограничным случаем для этой динамически изменяющейся картинки будет случай, когда третья прямая  $2y - x = a + 3$  проходит через точку пересечения двух первых прямых. Координаты точки пересечения двух первых прямых легко найти  $(-a/3; 5a/3)$ . Подставляя эти координаты в уравнение третьей прямой, мы получим уравнение относительно  $a$ . Решая это уравнение, найдем  $a = 9/8$ . При этом значении  $a$  третья прямая проходит через точку пересечения двух первых прямых.

При  $a > 9/8$  угол, содержащий решения данной системы неравенств, будет лежать в полуплоскости, состоящей из решений третьего уравнения.

**Ответ:**  $(9/8; \infty)$

**Пример 12.** Найдите наименьшее значение выражения  $x + y$  на точках круга  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

**Решение.** Самое трудное в этой задаче – это ее переформулировка. В исходной формулировке задачи нет параметра. Но его можно ввести так, чтобы задача приобрела привычный вид. Будем обозначать значение выражения  $x + y$  через  $a$ . Тогда приведенная задача будет эквивалентна следующей задаче.

Найти наименьшее значение параметра  $a$ , при котором система, состоящая из уравнения  $x + y = a$  и неравенства  $x^2 + y^2 \leq 1$ , имеет решение.

После этой переформулировки уже нетрудно решить эту задачу. Сначала можно найти все значения  $a$ , при которых эта система имеет решения. А потом из этого множества значений  $a$  выбрать наименьшее значение.

Множество решений неравенства  $x^2 + y^2 \leq 1$  представляет собой круг радиуса 1 с центром в начале координат. При фиксированном  $a$  уравнение  $x + y = a$  является уравнением прямой. Система  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $x + y = a$  имеет решение в том случае, если прямая  $x + y = a$  имеет непустое пересечение с окружностью  $x^2 + y^2 = 1$ . По-другому, это будет в случае, когда система двух уравнений

$$\begin{cases} x + y = a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет решение. Исключая из системы  $y$ , получим  $2x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$ . Это уравнение имеет решение при  $a \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ . Наименьшее значение параметра  $a$  равно  $-\sqrt{2}$ .

Рассуждать можно было бы и на языке графиков. При изменении параметра  $a$  прямая  $x + y = a$  будет двигаться параллельно самой себе. Надо найти такое значение параметра  $a$ , при котором прямая  $x + y = a$  станет касательной к окружности  $x^2 + y^2 = 1$ .

Ответ:  $-\sqrt{2}$

# Эвристический путеводитель по методам решения задач в целых числах

А.А.Максютин

Анализ задачного материала по теме *решение задач в целых числах*, непосредственно связанной с тематикой задач С6, показывает, что существует некоторое подмножество задач (мы называем их *базовыми задачами*), которые неизбежно встают перед человеком, решающим любую задачу из названной темы. Представляется логичным выделить с максимальной полнотой перечень базовых задач, а также адекватные им универсальные и специальные математические учебные действия. Следующим шагом будет обоснование того, что построенный перечень базовых задач действительно является базисом в пространстве задач темы *решение задач в целых числах*. Фактически речь идет о проверки справедливости следующего утверждения: решение любой задачи данной темы представимо в виде цепочки последовательно разворачивающихся базовых задач (всех или некоторых), взятых в определенной последовательности. В изложении материала будем придерживаться намеченного плана.

## Базовые задачи по теме «Решение задач в целых числах»

- Б31.** Задача о делении целого числа  $a$  на целое число  $b$  с остатком (нахождение неполного частного  $c$  и остатка  $r$ , таких, что выполняется равенство:  $a = bc + r$ ,  $0 \leq r < b$ ). Способы действий: деление чисел с остатком, использование арифметики остатков, проверка чисел на четность и нечетность, рассуждение от противного.
- Б32.** Задача определения вида числа: простое или составное (способы действий: проверка признаков делимости на 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11; проверка условий теоремы: если натуральное число  $N$  не делится ни на одно из простых чисел, не превосходящих  $\lceil \sqrt{N} \rceil$ , т.е. на  $p \leq \lceil \sqrt{N} \rceil$ , то число  $N$  – простое).
- Б33.** Задача приведения натурального числа  $N$  к каноническому виду  $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$  (способы действий: разложение на множители, применение основной теоремы арифметики, гарантирующей единственность разложения с точностью до порядка множителей).
- Б34.** Задача нахождения НОК, НОД двух и более чисел (способы действий: использование основной теоремы арифметики, алгоритма Евклида).

- Б35.** Задача нахождения числа делителей произвольного натурального числа  $N$  (обратная задача нахождения числа  $N$  по числу его делителей). Способы действий: применение основной теоремы арифметики, правила умножения. Обратная задача: определение числа по количеству его делителей.
- Б36.** Задача нахождения целых решений линейных диофантовых уравнений с двумя неизвестными  $ax + by = c$ . Способы действий: нахождение (может быть, угадывание) частного решения и применение теоремы о виде общего решения; применение метода спуска.
- Б37.** Задача нахождения целых решений квадратичных диофантовых уравнений с двумя неизвестными  $ax^2 + bxy + cy^2 = d$ . Способы действий: разложение на множители левой части, рассмотрение уравнения как квадратного относительно одной из переменных с наложением дополнительных ограничений; частный прием: сведение к однородному уравнению в случае  $d = 0$ .
- Б38.** Задача нахождения целых решений диофантовых уравнений с двумя и более неизвестными различного вида (например, содержащих неизвестную под знаком показательной функции). Способы действий: рассуждение по выбранному модулю, применение арифметики остатков.
- Б39.** Задача нахождения сумм различных числовых последовательностей (суммы первых степеней первых  $n$  натуральных чисел, суммы вторых, третьих степеней первых  $n$  натуральных чисел, суммы прогрессий, суммирование дробей различного рода, обращение периодических дробей в рациональную дробь). Способы действий: применение аппарата прогрессий, уравнений, метода математической индукции, составление и решение рекуррентных соотношений.
- Б310.** Задача математического моделирования в виде диофантовых уравнений (неравенств) и их систем. Способы действий: знаково-символические действия, геометрические интерпретации и символически-образные переформулировки условия в комбинированных задачах с модулем, параметром).
- Б311.** Решение задачи о принадлежности данного числа данному числовому множеству ( $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ).

## Примеры решения задач в целых числах

**Пример 1.** Найдите последнюю цифру числа

$$1234567891011121314151617^{1920212223242526272831}.$$

**Решение.** Сначала докажем, что числа  $n^1$  и  $n^5$  (где  $n$  – произвольное натуральное число) оканчиваются на одну и ту же цифру. Это утверждение эквивалентно утверждению о делимости нацело  $(n^5 - n) : 10$ . Из разложения  $n^5 - n$  на множители

$$n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = (n - 1)n(n + 1)(n^2 + 1)$$

получаем делимость на 2.

Для доказательства делимости на 5, рассуждаем по модулю 5. В зависимости от остатков при делении на 5 все натуральные числа разбиваются на непересекающиеся классы чисел вида  $5k$ ,  $5k + 1$ ,  $5k + 2$ ,  $5k + 3$ ,  $5k + 4$ . Подставляя поочередно числа из каждого класса в разложение  $(n - 1)n(n + 1)(n^2 + 1)$ , видим, что всегда один из множителей будет кратен 5. Поскольку 2 и 5 взаимно простые, то делимость на 10 доказана. Значит  $n$  и  $n^5$  оканчиваются на одну и ту же цифру.

Аналогичным образом можно доказать ряд следующих утверждений.

- Все числа числового ряда  $n^1, n^5, n^9, \dots, n^{4k+1}$  оканчиваются на одну и ту же цифру.
- Все числа числового ряда  $n^2, n^6, n^{10}, \dots, n^{4k+2}$  оканчиваются на одну и ту же цифру.
- Все числа числового ряда  $n^3, n^7, n^{11}, \dots, n^{4k+3}$  оканчиваются на одну и ту же цифру.

Эти результаты приводят к следующему утверждению

- В числовом ряду степеней  $n^1, n^2, n^3, \dots, n^k, \dots$  последняя цифра любого числа повторяется с периодом 4.

Вернемся к рассматриваемой задаче. Для ее решения важен только остаток от деления показателя степени на 4, в решаемой задаче он равен 3. В основании степени для решения задачи имеет значение только разряд единиц, т.е. цифра 7. На основании доказанных утверждений задача сведена к следующей: на какую цифру оканчивается число  $7^3$ .

**Ответ:** 3. (Для решения были использованы задачи Б31, Б32.)

**Пример 2.** Натуральные числа  $n$  и  $m$  таковы, что и  $m^3 + n$  и  $m^3 + m$  делятся на  $n^2 + m^2$ . Найдите  $m$  и  $n$ .

**Решение.** Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что  $n \geq m$ . Если два числа делятся на третье, то сумма и разность этих двух чисел делятся на третье. Следовательно,

$$(m^3 + n) - (m^3 + m) \equiv n - m$$

неотрицательно и делится нацело на  $n^2 + m^2$ . Но  $n - m < n^2 + m^2$ , т.е. делимое меньше делителя. Это возможно лишь в одном случае, когда

$n - m = 0$ . Следовательно,  $n = m$ . Переформулируем условие задачи с учетом полученной информации. Натуральное число  $m$  таково, что  $m^3 + m$  делится нацело на  $2m^2$ . Найдите  $m$ . Таким образом число

$$\frac{m^3 + m}{2m^2} = \frac{1}{2} \left( m + \frac{1}{m} \right)$$

является натуральным. Это может быть лишь при  $m = 1$ . Но тогда и  $n = 1$ .

**Ответ:**  $m = n = 1$ . (Для решения была использована задача Б31.)

**Пример 3.** Пионервожатый попросил пионеров принести ему яблоки. Пионеры набрали по одинаковому количеству яблок, но по дороге назад пересорились, и каждый бросил в каждого по одному яблоку. Поэтому они принесли пионервожатому только 95 яблок. Сколько было пионеров в отряде и по сколько яблок они собрали первоначально?

**Решение.** Пусть было  $x$  пионеров и пусть каждый из них собрал по  $y$  яблок. Всего было собрано  $xy$  яблок. По условию задачи  $xy - x(x-1) = 95$ . Это диофантово уравнение. Перепишем его в виде  $x(y - x + 1) = 95$ . Число 95 можно разложить на простые множители четырьмя способами  $95 = 1 \cdot 95 = 95 \cdot 1 = 5 \cdot 19 = 19 \cdot 5$ . Тогда задача сводится к совокупности 4 систем уравнений. Три системы из этих четырех имеют целые решения.

**Ответ:**  $\{(5, 23), (19, 23), (95, 95)\}$ . (Использованы 2,3,7 базовые задачи.)

**Задача 1.** Решите уравнения в целых числах.

- a)  $xy = 3x + y$ .
- б)  $x^2 - 3xy + 2y^2 = 5$ .
- в)  $(x+y)(y-1) = 4$ .
- г)  $(x-3)(xy+5) = 5$ .
- д)  $x^2 + xy = 10$ .
- е)  $x^2 + 23 = y^2$ .

**Ответы.**

- а)  $\{(2, 6), (4, 4), (0, 0), (-2, 2)\}$
- б)  $\{(9, 4), (-3, -4), (3, 4), (-9, -4)\}$
- в)  $\{(-4, 5), (-1, -1), (2, 2), (2, -3), (-4, 0), (1, 3)\}$
- г)  $\{(4, 0), (2, -5), (-2, 3)\}$
- д) Указание.  $y = \frac{10}{x} - x$ , где  $x \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$

е) Указание.  $(y - x)(y + x) = 1 \cdot 23 = (-1) \cdot (-23) = 23 \cdot 1 = (-23) \cdot (-1)$   
Уравнение равносильно совокупности 4 систем.

**Пример 4.** Докажите, что при любом  $n \in \mathbb{N}$  числа вида а)  $3n + 2$ ; б)  $4n + 3$  не являются квадратами целого числа.

**Решение а).** Рассуждаем по модулю 3. Рассматривая остатки от деления натуральных чисел на 3, получаем, что натуральные числа разбиваются на три непересекающихся класса чисел вида  $3k$ ,  $3k + 1$ ,  $3k + 2$ . Квадрат любого числа из этих числовых классов при делении на 3 имеет остаток 0, или 1. Поскольку число  $3n + 2$  при делении на 3 дает остаток 2, то число  $3n + 2$  не может быть квадратом целого числа. Утверждение доказано.

**Решение б).** Решение аналогично. Надо рассматривать остатки от деления натуральных чисел на 4.

Отметим, что при решении была использована первая базовая задача.

В качестве самостоятельного упражнения убедитесь, что квадрат натурального числа не может оканчиваться цифрами 2,3,7,8.

**Пример 5.** Существует ли квадратный трехчлен с целыми коэффициентами, дискриминант которого равен 39?

**Решение.** Предположим, что дискриминант квадратного трехчлена  $ax^2 + bx + c$  с целыми коэффициентами равен 39. Тогда  $b^2 - 4ac = 39$ . Если рассматривать равенство  $b^2 - 4ac = 39$  как уравнение, то из сделанного предположения следует, что оно имеет решение в целых числах. Перепишем последнее уравнение в виде  $b^2 = 4(ac + 9) + 3$ . Но из примера 4 следует, что  $b$  не может быть целым числом. Это противоречит сделанному предположению. Отметим, что была использована задача Б31.

**Задача 2.** Докажите, что данные уравнения не имеют решений в целых числах.

- а)  $x^2 - 3y = 5$
- б)  $3x^2 - 9 = 4y^2$
- в)  $5n + 4 = m^2$
- г)  $x^3 - 3x - 1 = 0$

**Пример 6.** Пусть число  $p > 3$  является простым. Докажите, что а) имеет место представление  $p = 6k + 1$  или  $p = 6k - 1$  для некоторого  $k \in \mathbb{N}$ ; б)  $p^2 - 1$  кратно 24.

**Решение а).** Рассуждения проводим по модулю 6. Все натуральные числа распадаются на шесть классов  $\{6k\}$ ,  $\{6k + 1\}$ ,  $\{6k + 2\}$ ,  $\{6k + 3\}$ ,

$\{6k + 4\}$ ,  $\{6k + 5\}$ . Простое число  $p$  может попасть только либо в класс  $\{6k + 1\}$ , либо в класс  $\{6k + 5\}$ . Остальное очевидно.

**Решение 6).** Предположим, что  $p = 6k + 1$ , тогда  $p^2 - 1 = 12 \cdot k \cdot (3k + 1)$ . При четных  $k$  на 2 делится второй множитель, при нечетных  $k$  на 2 делится третий множитель. Случай  $p = 6k - 1$  (или  $p = 6k + 5$ ) рассматривается аналогично. Здесь была использована задача Б31.

**Пример 7.** Найдите НОД всех чисел вида  $p^2 - 1$ , где  $p$  пробегает множество всех простых чисел от 5 до 2003.

**Решение.** По доказанному в предыдущем примере все числа вида  $p^2 - 1$  делятся на 24, наименьшее из них равно 24 и не имеет делителей, больших, чем 24.

**Ответ:**  $\text{НОД}(p^2 - 1) = 24$ . Использована Б31 и эвристический прием, называемый *метод крайнего*.

**Пример 8.** Найдите такое наибольшее натуральное число  $n$ , что  $2009!$  нацело делится на  $2^n$ .

**Решение.** Сначала выясним, чему равен показатель степени двойки в каноническом разложении числа  $2009!$  на простые множители. Числа 2, 4, ..., 2008 содержат как минимум одну степень двойки, а таких чисел среди сомножителей будет  $\left[ \frac{2009}{2} \right]$ . Числа 4, 8, 12, ..., 2008 содержат как минимум две степени двойки, одна из которых уже учтена. Таких чисел среди сомножителей будет  $\left[ \frac{2009}{2^2} \right]$ . Числа 8, 16, 24, ..., 2008 содержат как минимум три степени двойки, две из которых уже учтены. Таких чисел среди сомножителей будет  $\left[ \frac{2009}{2^3} \right]$ . Продолжая рассуждения, получим сумму

$$\left[ \frac{2009}{2} \right] + \left[ \frac{2009}{2^2} \right] + \dots + \left[ \frac{2009}{2^{10}} \right] = 2001,$$

которая равна показателю степени простого числа 2 в каноническом разложении числа  $2009!$ . Здесь использованы задачи Б33, Б31.

**Пример 9.** Найдите количество нулей, которыми оканчивается десятичная запись числа  $2009!$ .

**Решение.** Выясним, каков показатель степени пятерки в каноническом разложении числа  $2009!$  на простые множители. Числа 5, 10, ..., 2005 содержат как минимум одну степень пятерки, а таких чисел среди сомножителей будет  $\left[ \frac{2009}{5} \right]$ . Числа 25, 50, 75, ..., 2000 содержат как минимум две степени пятерки, одна из которых уже учтена. Таких чисел среди сомножителей будет  $\left[ \frac{2009}{5^2} \right]$ . Числа 125, 250, 750, ..., 2000 содержат как

минимум три степени пятерки, две из которых уже учтены. Таких чисел среди сомножителей будет  $\left[ \frac{2009}{5^3} \right]$ . Продолжая эти рассуждения, получим сумму

$$\left[ \frac{2009}{5} \right] + \left[ \frac{2009}{5^2} \right] + \left[ \frac{2009}{5^3} \right] + \left[ \frac{2009}{5^4} \right] = 500,$$

которая равна показателю степени простого числа 5 в каноническом разложении числа  $2009!$ . Здесь использованы задачи Б33, Б31.

Имеющаяся на данный момент информация позволяет записать каноническое разложение числа  $2009!$  в виде

$$2009! = 2^{2001} \cdot 3^b \cdot 5^{500} \cdot 7^d \cdot 2003.$$

Показатели степени 3, 7 и других простых оснований вычисляются аналогично (сделайте это самостоятельно). Группируя 2 и 5 попарно, можем получить 500 таких пар, которые дадут 500 нулей в конце десятичной записи числа  $2009!$ .

Здесь использованы задачи Б31, Б33.

**Задача 3.** Может ли десятичная запись числа  $n!$  оканчиваться на

- а) 1000 нулей;
- б) 2008 нулей;
- в) 2009 нулей;
- г) 2010 нулей?

**Ответы.**

- а) да,  $n = 4005, 4006, 4007, 4008, 4009$ ;
- б) да;
- в) нет;
- г) да,  $n = 8050, 8051, 8052, 8053, 8054$ .

**Пример 10.** Найдите такое наибольшее простое число  $n$ , что число  $2009!$  делится на  $n^n$ .

**Решение.** С помощью рассуждений из предыдущих задач можно получить разложение

$$2009! = 2^{2001} \cdot 3^{1000} \cdot 5^{500} \cdot 7^{333} \cdot 11^{199} \cdot 13^{165} \cdot 17^{124} \cdot 19^{110} \cdot 23^{90} \cdot 29^{71} \cdot 31^{66} \cdot 37^{55} \cdot 41^{50} \cdot 43^{47} \cdot 47^{42} \cdot \dots \cdot 1999 \cdot 2003.$$

Рассмотрим последовательность показателей степеней у множителей в правой этого разложения 2001, 1000, 500, 333, ..., 1, 1. Она убывает от 2001 до 1. Рассмотрим последовательность оснований степеней 2, 3, 5, 7, ..., 1999, 2003. Она возрастает от 2 до 2003. Заметим, что в окрестности оснований 43 и 47 происходит любопытное изменение: если до этого момента показатели степени были больше соответствующего основания, то, начиная с 47 показатели становятся меньше своих оснований и продолжают уменьшаться. Причина убывания последовательности показателей кроется в способе их вычисления и простой арифметической закономерности: чем на большее делим, тем меньшее получаем. В силу различной монотонности последовательностей, ситуация, аналогичная той, которая сложилась в окрестности оснований 43 и 47 больше не повторится. Тогда ясно, что если  $n$  пробегает множество всех простых чисел от 2 до 43, то  $n^n$  является делителем числа 2009!. Наибольшим из  $n$  является число 43.

Здесь использована задача Б33.

**Пример 11.** Найдите число  $N$ , имеющее ровно 6 делителей, сумма которых равна 3500.

**Решение.** Согласно Б35 число делителей произвольного числа  $N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$  равно  $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1)$ . Каждый из множителей больше или равен 2. В условиях задачи это произведение равно 6. Для числа 6 имеется два подобных представления (с точностью до перестановки множителей)

$$6 = (5 + 1), \quad \text{или} \quad 6 = (1 + 1) \cdot (2 + 1).$$

Отсюда получаем два возможных структурных представления искомого числа  $N$

$$N = p^5, \quad \text{или} \quad N = p_1^2 \cdot p_2.$$

Рассмотрим первый случай  $N = p^5$ . Тогда делителями числа  $N$  будут числа 1,  $p$ ,  $p^2$ , ...,  $p^5$ . Тогда по условию задачи

$$1 + p + p^2 + \dots + p^5 = \frac{p^6 - 1}{p - 1} = 3500.$$

Таким образом искомое простое число  $p$  будет решением уравнения  $(p^6 - 1) - 3500(p - 1) = 0$ .

Это уравнение нетрудно исследовать на промежутке  $(0, \infty)$ . Можно, например, найти производную левой части уравнения. Производная обращается в ноль в одной единственной точке из интервала  $(3, 4)$  и это будет точка минимума. В точке минимума левая часть уравнения отрицательна, а в точках 0 и 5 – положительна. Поэтому на промежутке  $(0, 5)$  уравнение должно иметь два корня. Один корень, очевидно, равен

1. Дальше непосредственно проверяется, что числа 2, 3 и 4 корнями не будут. Следовательно, кроме 1, уравнение не имеет натуральных корней.

Рассмотрим теперь второй случай  $N = p_1^2 \cdot p_2$ . Все шесть делителей числа  $N$  в этом случае имеют вид  $1, p_1, p_2, p_1p_2, p_1^2, p_1^2p_2$ . Их сумма равна 3500, что приводит к уравнению

$$(p_1 + p_2) + p_1(p_1 + p_2 + p_1p_2) = 3499.$$

Далее можно рассуждать с помощью рассмотрения всех возможных комбинаций четных и нечетных  $p_1$  и  $p_2$ . Случай 1, когда оба  $p_1$  и  $p_2$  четны, невозможен, так как нет двух простых четных чисел. В случае 2, когда  $p_1$  нечетно, а  $p_2$  – четно, мы приходим к противоречию. Противоречие в том, что в уравнении  $(p_1 + p_2) + p_1(p_1 + p_2 + p_1p_2) = 3499$  левая часть будет четной, а правая – нечетна. Рассмотрим случай 3, когда  $p_1$  – четное число, а  $p_2$  – нечетное. Но тогда  $p_1 = 2$  и из уравнения находим, что  $p_2 = 499$ . В этом случае  $N = p_1^2 \cdot p_2 = 2^2 \cdot 499 = 1996$ . Наконец, в случае 4 оба числа  $p_1$  и  $p_2$  – нечетны. Простым перебором можно проверить, что этот случай невозможен.

**Ответ:** 1996

**Пример 12.** Верно ли, что  $(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 2009^3)$  нацело делится на  $(1 + 2 + 3 + \dots + 2009)$ ?

**Решение.** Решение задачи вытекает из формулы

$$(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2,$$

которую легко доказать методом математической индукции. Отметим, что здесь используются задачи Б39.

**Ответ:** Делится.

**Пример 13.** Процент учеников некоторого класса, повысивших в третьей четверти успеваемость, заключен в пределах от 2,9% до 3,1%. Определите минимально возможное число учеников в таком классе.

**Решение.** Математическая модель задачи сводится к диофантовому неравенству. Пусть  $m$  – число учеников, повысивших успеваемость,  $n$  – общее число учеников ( $n, m \in \mathbb{N}$ ). По условию имеет место неравенство  $\frac{29}{1000} < \frac{m}{n} < \frac{31}{1000}$ . Отсюда следует неравенство  $\frac{1000}{31} < \frac{n}{m} < \frac{1000}{29}$ , которое может быть переписано в виде  $\frac{1000}{31}m < n < \frac{1000}{29}m$ .

Ясно, что функции, стоящие в левой и в правой частях двойного неравенства, возрастают с ростом  $m$ . Поэтому достаточно проверять значения  $m$ , начиная с наименьших. При  $m = 1$  последнее неравенство примет вид  $32,2 < n < 34,4$ . Этому неравенству удовлетворяют  $n = 33$  и  $n = 34$ . Наименьшее значение  $n$  равно 33. Здесь использовалась задача Б310 и свойства числовых неравенств.

**Ответ:** 33

**Пример 14.** Среди обыкновенных дробей с положительными знаменателями, расположенными между числами  $\frac{96}{35}$  и  $\frac{97}{36}$  найдите такую, знаменатель которой минимален.

**Решение.** Математическая модель задачи сводится к диофантовому неравенству. Пусть дробь  $\frac{m}{n}$  удовлетворяет условию задачи. Тогда  $m, n \in \mathbb{N}$ , имеет место неравенство  $\frac{97}{36} < \frac{m}{n} < \frac{96}{35}$  и  $n$  – минимально.

Последнее неравенство можно переписать в виде  $\frac{35}{96} < \frac{n}{m} < \frac{36}{97}$ , откуда следует  $\frac{35}{96}m < n < \frac{36}{97}m$ . Нам надо найти наименьшее значение  $m$ , при котором в интервал  $(\frac{35}{96}m, \frac{36}{97}m)$  попадает натуральное число. Тогда это натуральное число и будет искомым значением  $n$ .

Далее надо проводить численные эксперименты, подставляя поочередно значения  $m = 1, m = 2$  и т.д. в последнее неравенство. Надо следить за тем, содержит ли полученный интервал целое число. Наблюдения позволяют выдвинуть гипотезу, что начиная с  $m = 3$  целая часть границ интервала сохраняет постоянное значение для трех последовательных значений  $m$ , что позволит уменьшить число вычислительных проб. При  $m = 19$  получим первый интервал, содержащий целое число 7. Второй такой интервал получим при  $m = 27$ , он содержит второе целое число 10. Искомая дробь имеет вид  $\frac{19}{7}$ . Была использована задача Б310.

**Ответ:**  $\frac{19}{7}$

**Задача 4.** Мальчик и девочка измерили одно и то же расстояние в 143 м шагами. Так как длины их шагов различны, то их следы совпали 20 раз. Шаг девочки 55 см. Найдите длину шага мальчика.

**Ответ:** 65. (Исп. Б31,2,4.)

**Пример 15.** При каких целых значениях  $a, b, c$  произведение

$$(3a - 9b + c + 5)(2a + 3b - 7c + 1)(a + 6b + 4c + 2)$$

нечетно?

**Решение.** Ни при каких. Сумма множителей равна  $6a + 4 = 2(3a + 2)$ , т.е. четна для любых целых  $a, b, c$ . Поэтому случай трех нечетных множителей невозможен, а именно он дает нечетное произведение. Произведение четно для любых целых  $a, b, c$ .

**Пример 16.** Докажите, что сумма и разность любых двух целых чисел имеют одинаковую четность.

**Решение.** Способ 1. Докажем, что  $a+b$  и  $a-b$ , где  $a, b \in \mathbb{Z}$  имеют одинаковую четность. Перебирая четыре случая, когда  $a$  и  $b$  оба четны, оба нечетны,  $a$  и  $b$  имеют различную четность, убеждаемся в справедливости утверждения.

**Решение.** Способ 2.  $(a+b) + (a-b) = 2a$  – число четное, т.е. слагаемые  $a+b$  и  $a-b$  могут быть только одинаковой четности.

**Пример 17.** Решите уравнение  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{25}$  в натуральных числах, при условии, что  $a > b$ .

**Решение.** Выразим одну переменную через другую  $a = 25 + \frac{625}{b-25}$ . Так как по условию  $a$  и  $b$  – целые числа, то  $b-25$  должно быть делителем 625. Множество целых делителей числа 625 описывается как  $\{\pm 1, \pm 5, \pm 25, \pm 125, \pm 625\}$ . Перебирая все эти варианты значений для  $b-25$ , учитывая, что  $a, b \in \mathbb{N}$  и  $a > b$ , находим, что  $a = 150, b = 30$ , или  $a = 650, b = 26$ .

**Ответ:**  $a = 150, b = 30$ , или  $a = 650, b = 26$ .

**Пример 18.** Можно ли решить в нечетных натуральных числах уравнение  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1$ ?

**Решение.** Данное уравнение можно переписать в виде  $bcd + acd + abd + abc = abcd$ . В левой части равенства стоит сумма четырех нечетных чисел, сумма их четна. В правой части – произведение четырех нечетных чисел, оно нечетно. Равенство невозможно.

**Задача 5.** Пусть  $x_0, y_0$  – какое-либо частное решение диофантина уравнения  $ax + by = c$ . Докажите, что  $x = x_0 + bt$ ,  $y = y_0 - at$  является решением данного уравнения при любом  $t \in \mathbb{Z}$ . Докажите, что любое решение данного уравнения можно представить в таком виде. (Таким образом, получена формула общего решения диофантина уравнения вида  $ax + by = c$ ).

**Задача 6.** Найдите все решения диофантина уравнения:

- а)  $3x + 5y = 13$ ;
- б)  $7x - 3y = 11$ ;
- в)  $5x - 4y = 44$ ;
- г)  $11x - 5y = 73$ .

Для каждого из полученных решений найдите такие, при которых  $|x - y|$ ,  $|x + y|$ ,  $xy$  принимают наибольшие или наименьшие значения.

**Решение а)**  $x_0 = 1, y_0 = 2$  – частное решение уравнения  $3x + 5y = 13$ . Тогда  $x = 1 + 5t, y = 2 - 3t$ , где  $t \in \mathbb{Z}$  – общее решение этого уравнения.

Так как  $|x - y| = |8t - 1|$ , то  $\min(|x - y|) = 1$  при  $t = 0$ . Отсюда  $x = 1, y = 2$ .

Так как  $|x + y| = |2t + 3|$ , то  $\min(|x + y|) = 1$  при  $t = -1$ , или при  $t = -2$ . Отсюда  $x = -4, y = 5$ , или  $x = -9, y = 8$ .

Далее  $xy = -15t^2 + 7t + 2$ . Наибольшее значение этого квадратного трехчлена достигается при  $t = -\frac{7}{30}$ . Но  $t$  должно быть целым. Легко видеть, что при этом условии наибольшее значение достигается при  $t = 0$ . Оно равно 2. Отсюда получаем, что  $x = 1$ ,  $y = 2$ .

**Задача 7.** Укажите

- а) 2;
- б) 102;
- в) 2000

последовательных натуральных чисел, среди которых нет ни одного точного квадрата. Является ли решение единственным?

**Указание.** Определите число натуральных чисел между двумя соседними квадратами  $n^2$  и  $(n+1)^2$ .

**Задача 8.** Найдите

- а) двузначное число;
- б) трехзначное число,

обладающее наибольшим числом делителей.

**Ответ:** а) 72; б) 864.

**Пример 19.** Можно ли решить в целых числах уравнение  $x^2 + px + q = 0$ , если  $p$  и  $q$  – нечетные числа?

**Решение.** Пусть уравнение  $x^2 + px + q = 0$  имеет четный корень  $x$ . Тогда  $x^2$  – четное число,  $px$  – четное число,  $(x^2 + px)$  – четное число. Последнее число не может быть равно нечетному числу  $-q$ . Следовательно, этот случай невозможен.

Пусть теперь  $x^2 + px + q = 0$  имеет нечетный корень  $x$ . Тогда  $x^2$  – нечетное число,  $px$  – нечетное число, а  $(x^2 + px)$  – четное число и оно не может быть равно нечетному числу  $-q$ . Следовательно, этот случай также невозможен.

Следовательно, уравнение не имеет решений в целых числах.

**Пример 20.** Найдите все целые  $a$  и  $b$ , при которых многочлен  $y = x^2 + ax + b$  принимает при всех целых  $x$

- а) четные значения;
- б) нечетные значения.

**Решение а).** Запишем многочлен в виде  $y = x(x + a) + b$ . Далее рассуждаем по модулю 2. При  $x = 2n$ , значения  $y$  будут четными при всех целых  $a$ , и четных  $b$ . При  $x = 2n + 1$  и четном  $b$  значения  $y$  будут четными при нечетном  $a$ .

**Ответ а):**  $a$  – нечетно,  $b$  – четно.

**Решение б).** Аналогичным образом, при  $x = 2n$  значения  $y = (4n^2 + 2an) + b$  будут нечетными при нечетном  $b$ . При  $x = 2n + 1$  значения  $y = (2n + 1)^2 + 2an + a + b = ((2n)^2 + a(2n) + b) + (2n + 1) + a$  будут нечетными при нечетном  $a$ .

**Ответ:**  $a$  и  $b$  – нечетные.

**Пример 21.** Докажите, что не существует многогранника, у которого 2009 граней – треугольники, а остальные – четырехугольники и шестиугольники.

**Решение.** Нарушен закон сохранения четности. Число сторон всех граней многогранника четно (они соединяются попарно), а здесь число сторон всех граней равно  $2009 \cdot 3 + 4x + 6y$ , т.е. нечетно.

**Пример 22.** Рассмотрим все пятизначные числа, получаемые перестановкой цифр числа 12357. а) Докажите, что сумма всех таких чисел (включая исходное число) делится на 11111. б) Докажите, что аналогичная сумма для числа 23578 не делится на 111.

**Решение.** а) Сумма цифр равна  $1+2+3+5+7=18$ . Всего перестановок  $5! = 120$ . Складывая столбиком 120 слагаемых, получим над каждым разрядом одну и ту же комбинацию цифр  $18 \cdot 24 = 432$ . Таким образом искомая сумма состоит из 432 единиц, 432 десятков, 432 сотен, 432 тысяч и 432 десятков тысяч. Такое число равно  $432 \cdot (1+10+100+1000+10000) = 432 \cdot 11111$ .

б) Решение аналогично решению а).

**Пример 23.** Пусть  $m$  и  $n$  – натуральные числа, причем  $\frac{m}{n}$  – правильная несократимая дробь. На какие натуральные числа можно сократить дробь  $\frac{2n-m}{3n+2m}$ , если известно, что она сократима?

**Решение.** Так как по условию  $\frac{m}{n}$  – правильная дробь, то  $m < n$ . Отсюда следует, что  $2n - m > 0$ . Так как дробь  $\frac{2n-m}{3n+2m}$  сократима, например, на натуральное число  $p > 1$ , то найдутся такие  $a, b \in \mathbb{N}$ , что  $2n - m = p \cdot a$ ,  $3n + 2m = p \cdot b$ . Отсюда получаем, что  $7n = p(2a + b)$ ,  $7m = p(2b - 3a)$ . Таким образом  $7n$  и  $7m$  делятся на  $p$ . Если  $7$  не делится на  $p$ , то  $n$  и  $m$  делятся на  $p$ . Но это противоречит несократимости дроби  $\frac{m}{n}$ . Поэтому  $7$  делится на  $p$ . Отсюда следует, что  $p = 7$ . Таким образом дробь  $\frac{2n-m}{3n+2m}$  сократима на  $7$ .

**Ответ:** Дробь сократима на 7.

**Задача 9.** Пусть  $m$  и  $n$  – натуральные числа, причем  $\frac{m}{n}$  – правильная несократимая дробь. На какие натуральные числа можно сократить дробь  $\frac{3n-m}{5n+2m}$ , если известно, что она сократима?

**Ответ:** на 11.

**Пример 24.** Решите уравнение  $2^x - 3^y = 1$  в натуральных числах.

**Решение.** Рассмотрим случай  $x = 1$ . Тогда  $y = 0$ . Поскольку 0 не является натуральным числом, то в этом случае рассматриваемое уравнение не имеет решений. Рассмотрим теперь случай  $x = 2$ . Тогда  $y = 1$ . Итак мы нашли решение  $x = 2, y = 1$ . Пусть теперь  $x \geq 3$ . Перепишем уравнение в виде  $2^x = 3^y + 1$ . Левая часть этого уравнения делится на 8. Тогда и правая часть будет делиться на 8.

Рассмотрим отдельно случаи четного и нечетного  $y$ . Пусть сначала  $y = 2k+1$ . Тогда уравнение примет вид  $2^x = 3 \cdot 9^k + 1$ , или  $2^x = 3 \cdot (8+1)^k + 1$ . С помощью формулы бинома Ньютона получаем соотношение  $(8+1)^k = 8 \cdot l + 1$  для некоторого  $l \in \mathbb{N}$ . Теперь решаемое уравнение может быть переписано в виде  $2^x = 24 \cdot l + 4$ . Но правая часть этого равенства на 8 не делится. Поэтому  $y$  не может быть нечетным.

Пусть теперь  $y = 2k$ . Тогда уравнение принимает вид  $2^x = 9^k + 1$ . Это уравнение перепишем в виде  $2^x = (8+1)^k + 1$ . С помощью представления  $(8+1)^k = 8 \cdot l + 1$  запишем последнее уравнение в виде  $2^x = 8l + 2$ . Но правая часть этого равенства на 8 не делится. Поэтому  $y$  не может быть четным.

Таким образом единственным решением рассматриваемого уравнения будет решение  $x = 2, y = 1$ .

**Ответ:**  $x = 2, y = 1$ .

**Задача 10.** Решите уравнение  $2^a + 3^b = 5^c$  в натуральных числах.

**Ответ:**  $a = 1, b = 1, c = 1$ .

## Содержание

Введение . . . . .	3
Вариант №1 . . . . .	5
Вариант №2 . . . . .	8
Вариант №3 . . . . .	11
Вариант №4 . . . . .	14
Вариант №5 . . . . .	17
Вариант №6 . . . . .	20
Вариант №7 . . . . .	23
Вариант №8 . . . . .	26
Вариант №9 . . . . .	29
Вариант №10 . . . . .	32
Вариант №11 . . . . .	35
Вариант №12 . . . . .	38
Вариант №13 . . . . .	41
Вариант №14 . . . . .	44
Вариант №15 . . . . .	47
Вариант №16 . . . . .	50
Ответы к задачам из вариантов №1 – №16	53
Дополнительные задачи . . . . .	57
Ответы на дополнительные задачи . . . . .	76
Графический метод решения задач с па- раметром . . . . .	81
Эвристический путеводитель по методам решения задач в целых числах . . . . .	110

**Государственное образовательное учреждение дополнительного  
профессионального образования (повышения квалификации)  
специалистов**  
**Самарский областной институт повышения квалификации и  
переподготовки работников образования**

Подписано в печать 12.01.2010 г. Формат 60x84  $\frac{1}{16}$  д.л.  
Объем 7,8 п.л. Тираж 1500 экз. Печать оперативная.  
Заказ № 608

**Отпечатано в типографии ГОУ СИПКРО**

**443111, г.Самара, Московское шоссе, д.125-А.**