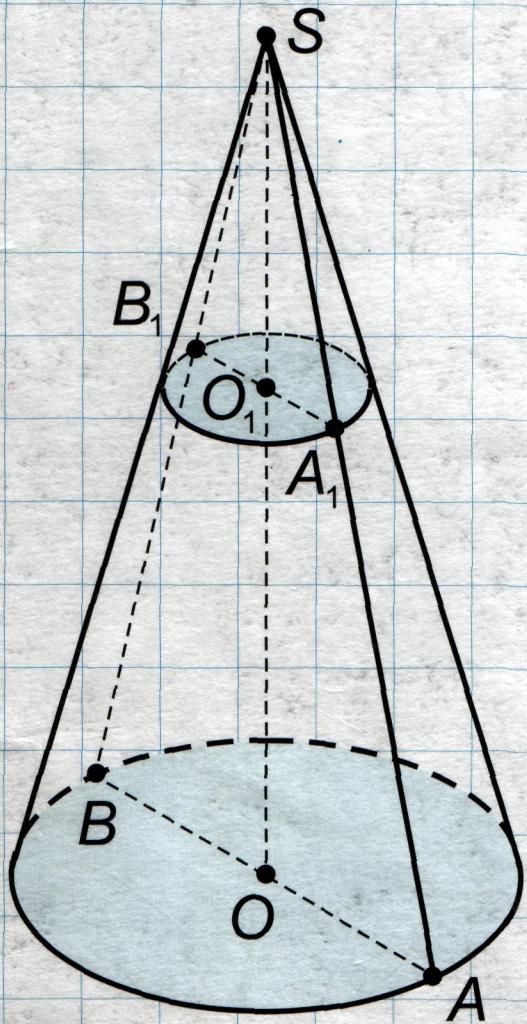


ГЕОМЕТРИЯ В ТАБЛИЦАХ

по новой программе



**10-11
КЛАСС**

*Роева Т.Г.
Хроленко Н.Ф.*

Т.Г. Роева, Н.Ф. Хроленко

ГЕОМЕТРИЯ В ТАБЛИЦАХ

**10-11
классы**

Учебное пособие

Согласовано с программой
Министерства образования и науки Украины

Харьков
2002

**УДК 373.167.1:514+514(075.3)
ББК 22.14 я 721
Р 62**

Роева Т.Г., Хроленко Н.Ф. Геометрия в таблицах. 10-11 класс: Учеб. пособие. –
Х.: Країна мрій™, 2002. – 152 с.

Пособие содержит основные теоретические вопросы курса геометрии 10-11 классов в соответствии с программой. Рассмотрены решения типовых задач каждой темы. Подобраны тренировочные упражнения, самостоятельные и контрольные работы ко всем разделам. Самостоятельные и контрольные работы имеют три уровня сложности. К большинству задач **даны ответы**. В рубрике «Страница абитуриента» приведены решения задач повышенной сложности, это поможет подготовиться к вступительным экзаменам.

Пособие адресовано учащимся и учителям общеобразовательных школ, абитуриентам.

Посібник містить основні теоретичні питання курсу геометрії 10-11 класів відповідно до програми. Розглянуті розв'язання типових задач кожної теми. Підібрані тренувальні вправи, **самостійні** і контрольні роботи до всіх розділів. Самостійні та контрольні роботи мають три рівні складності. До більшості задач надані відповіді. В рубриці "Сторінка абитурієнта" подані розв'язання задач підвищеної складності, що допоможе підготуватися до вступних іспитів.

Посібник адресований учням та учителям загальноосвітніх шкіл, абитурієнтам.

**Учебное издание
IV возрастная группа
Роева Татьяна Григорьевна
Хроленко Наталья Федоровна
Геометрия в таблицах
10-11 классы**

Редактор Томашевская Н.В.
Компьютерная верстка Аскерова И.В., Евлахов В.Г., Цовма И.Н.
Дизайн обложки Терлецкий А.В.
Корректор Ольховская М.А.

Подписано к печати 2.07.2002г. Формат 60x90/8
Бумага офсет. Печать офсет.

Издатель Халимон Е.В.
Регистр. свид. №961 от 19.06.2002г
61146, г. Харьков, а/я 2656, тел. 58-50-70

ISBN 966-8220-12-9

© Роева Т.Г., 2002
© Хроленко Н.Ф., 2002
© Терлецкий А.В., худож. оформл., 2002
© Країна мрій™, 2002

10 класс

§1. Введение в стереометрию

§2. Параллельность
в пространстве

§3. Перпендикулярность прямых
и плоскостей

§4. Декартовы координаты
и векторы в пространстве

4

8

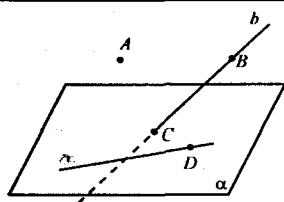
29

43

§1. Введение в стереометрию

Стереометрия – это раздел геометрии, в котором изучаются фигуры в пространстве.

Основными фигурами стереометрии являются точка, прямая, плоскость:



точки: A, B, C, D ;
прямые: a, b ;
плоскость: α .

Аксиомы стереометрии

Аксиомы стереометрии – это основные свойства основных фигур стереометрии. Точка и прямая – это основные фигуры планиметрии, поэтому в стереометрии справедливы аксиомы планиметрии.

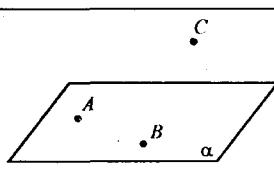
Аксиомы планиметрии I.

I₁. Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.

I₂. Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.

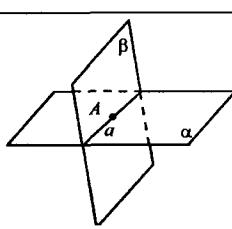
Аксиомы стереометрии (C) – это основные свойства плоскостей в пространстве.

C₁. Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.



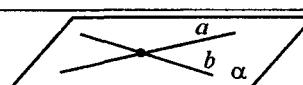
$A \in \alpha; B \in \alpha;$
 $C \notin \alpha$.

C₂. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.



$\alpha \cap \beta; a \in \alpha; a \in \beta;$
 a – прямая
пересечения
плоскостей α и β .

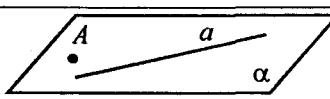
C₃. Если две различные прямые пересекаются, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.



$\alpha \cap \beta, a \in \alpha; b \in \alpha;$
 α – единственная.

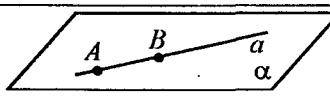
Следствия из аксиом стереометрии

Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.



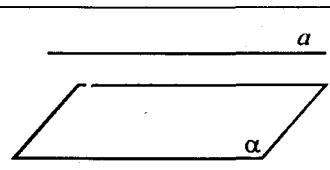
$A \notin \alpha; A, a \in \alpha;$
 α – единственная.

Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит этой плоскости.



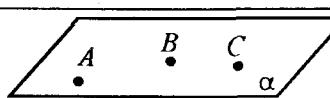
$A \in \alpha; B \in \alpha; A \in a;$
 $B \in a$, то $a \in \alpha$.

Плоскость и не лежащая на ней прямая либо не пересекаются, либо пересекаются в одной точке.



$a \notin \alpha; a \cap \alpha; A \in a; A \in \alpha;$
 A – единственная.

Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.



$A, B, C \notin \alpha; A, B, C \in \alpha;$
 α – единственная.

УЧЕНИЧЕСКАЯ СТРАНИЧКА



Часто в стереометрических задачах для доказательства используют метод от противного. Доказывая задачу методом от противного, рассуждают по алгоритму:

1. Допускают обратное тому, что требуется доказать.
2. Анализируют следствие, вытекающее из допущенного.
3. Устанавливают противоречие: с условием задачи, с известными теоремами и аксиомами и т.д.
4. Формулируют вывод: допущенное неверно, а верно то, что требуется доказать.

Задача 1. Доказать, что если прямые AB и CD не лежат в плоскости, то прямые AC и BD также не лежат в плоскости.

Дано: $AB \notin \alpha$, $CD \notin \alpha$. Доказать: $AC \notin \alpha$, $BD \notin \alpha$.

Доказательство.

Используем метод от противного.

1. Допустим, что прямые AC и BD лежат в одной плоскости α .
2. Тогда точки этих прямых лежат в плоскости α , т.е. $A, B, C, D \in \alpha$. Значит, прямые AB и CD лежат в плоскости α (т.к. две их точки лежат в плоскости, то и сами прямые лежат в плоскости).
3. Получим противоречие условию задачи (AB и CD не лежат в одной плоскости).
4. Вывод: допущенное неверно, а верно то, что прямые AC и BD не лежат в одной плоскости.

Задача 2. Точка C лежит на прямой AB , точка D не лежит на прямой AB . Доказать, что плоскость ABD и плоскость CDB совпадают.

Доказательство.

Докажем методом от противного:

1. Допустим, плоскость ABD и плоскость CDB не совпадают.
2. Тогда точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости.
3. Получим противоречие: по условию задачи, $D \notin AB$, тогда через точку D и прямую AB проходит единственная плоскость, а так как $C \in AB$, то все точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.
4. Вывод: допущенное неверно, а верно то, что плоскости ABD и CDB совпадают.

Задача 3. Точки A, B, C не лежат на одной прямой. $M \in AB$; $K \in AC$; $X \in MK$. Доказать, что точка X лежит в плоскости ABC .

Доказательство.

Прямые AB и AC имеют общую точку A , значит, $AB \cap AC$. Тогда они задают плоскость ABC (аксиома C_3), значит, все точки этих прямых лежат в плоскости ABC , т.е. $M \in (ABC)$ и $K \in (ABC)$, следовательно, прямая MK лежит в плоскости ABC (следствие из аксиом). $X \in MK$, значит, $X \in (ABC)$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. На рис. 1 изображена треугольная призма:

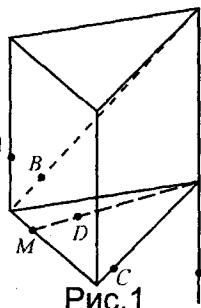


Рис.1

а) какие из точек A, B, C, D, M, F лежат в плоскости нижнего основания призмы?

б) изображение точек A, D и C , а также точек A, B и F лежат на одной прямой. Лежат ли эти точки на одной прямой в действительности?

в) имеют ли общие точки прямые AB и DM ; DM и BC ?

г) назвать прямые, которые имеют общие точки;

д) назвать прямые, которые не пересекаются.

2. На рис. 2 изображена призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, на поверхности которой отмечены точки K, L, M, N :

а) пересекаются ли отрезки AD_1 и A_1B или их продолжения?

б) лежат ли в одной плоскости точки $M, N, D? A, D, D_1$ и $M?$

A, B, C и $K? A, D, K$ и $L?$

3. Почему на ровном полу стол с тремя ножками стоит всегда устойчиво, а с четырьмя – не всегда?

4. Доказать, что четырехугольник лежит в одной плоскости, если его диагонали пересекаются или если пересекаются продолжения двух его несмежных сторон.

5. Даны три точки: A, B и C . Сколько плоскостей можно провести через эти точки, если $AB = 5 \text{ дм}, BC = 7 \text{ дм}, AC = 12 \text{ см}$?

6. Плоскости α и β имеют общую точку. Пересекает ли прямая AB , лежащая в плоскости α , плоскость β ? При каком условии?

7. Прямая a проходит через точку, которая является общей для плоскостей α и β . Как расположена прямая a относительно плоскостей α и β ?

8. Даны две пересекающиеся прямые a и b . Точки A и A_1 лежат на прямой a , а точки B и B_1 – на прямой b . Доказать, что прямые AB и A_1B_1 лежат в одной плоскости.

9. Верно ли, что все прямые, пересекающие данную прямую и проходящие через данную точку вне прямой, лежат в одной плоскости?

10. Верно ли, что три прямые, проходящие через одну точку, могут не лежать в одной плоскости?

11. Даны плоскость α и четырехугольник $ABCD$. Может ли плоскость α принадлежать:

а) только одна вершина? б) только две вершины? в) только три вершины?

12. Каждая ли точка дуги окружности принадлежит плоскости α , если известно, что этой плоскости принадлежат:

а) две различные точки дуги? б) три различные точки дуги?

13. Три плоскости, взятые попарно, пересекаются по прямым a, b, c . Доказать, что если все три плоскости не имеют общей точки, то прямые a, b, c попарно не пересекаются.

14. Даны две прямые в пространстве, не лежащие в одной плоскости. Через каждую из них проведена плоскость, пересекающая вторую прямую. Доказать, что прямая пересечения этих плоскостей пересекает каждую из данных прямых.

15. Плоскости α и β пересекаются по прямой a . Через точку A прямой a проведена плоскость γ , не содержащая прямую a . Доказать, что плоскость γ пересекает плоскости α и β по двум разным прямым.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-1-1



В - I	7 баллов	В - II
1. Сколько можно провести различных плоскостей через любые три точки? (Ответ объяснить.)	1. Сколько можно провести различных плоскостей через любые четыре точки? (Ответ объяснить.)	
2. Прямые a и b пересекаются в точке O . Прямые c и d , не проходящие через точку O , пересекают каждую из прямых a и b . Доказать, что прямые c и d лежат в одной плоскости.	2. Даны прямая a и не лежащая на ней точка B . Через точку B проведены три прямые, пересекающие прямую a . Доказать, что все эти прямые лежат в одной плоскости.	

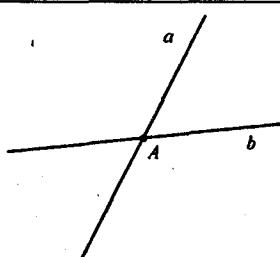
В - III	9 баллов	В - IV
1. Можно ли провести две различные плоскости через две точки? (Ответ объяснить.)	1. Можно ли провести две различные плоскости через любые три точки? (Ответ объяснить.)	
2. Прямые a , b и c проходят через точку S . Плоскость, не проходящая через точку S , пересекает прямые a , b и c в точках, не лежащих на одной прямой. Доказать, что прямые a , b и c не лежат в одной плоскости.	2. Данна плоскость и три прямые AB , BC , AC , пересекающие её в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Доказать, что точки A_1 , B_1 , C_1 лежат на одной прямой.	

В - V	12 баллов	В - VI
1. Через точку пересечения прямых AB и AC проведена прямая d , не лежащая с ними в одной плоскости. Доказать, что прямые d и BC не пересекаются. 2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Пересекаются ли плоскости AB_1D_1 и A_1C_1C ? (Ответ объяснить.)	1. Прямые m и n не лежат в одной плоскости. Прямые a и b пересекают каждую из прямых m и n . Доказать, что прямые a и b не пересекаются. 2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Точка M – середина отрезка B_1C_1 . Точка N – середина отрезка D_1C_1 , K – середина DC . Пересекаются ли плоскости MNK и $A_1B_1C_1$? (Ответ объяснить.)	

§2. Параллельность в пространстве

Взаимное размещение прямых в пространстве

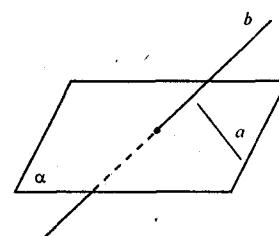
Две различные прямые в пространстве либо пересекаются, либо параллельны, либо скрещиваются.



$A \in a; A \in b;$
 $a \cap b;$
 a пересекает b ;
 единственная общая точка A .



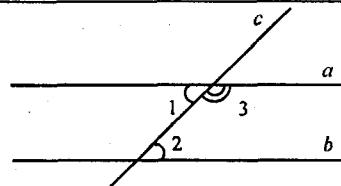
$a \not\sim b; a \parallel b;$
 a параллельна b ;
 нет общих точек.



$a \not\sim b, a \not\parallel b;$
 a не пересекает b ;
 a не параллельна b ;
 нет общих точек;
 a и b — скрещивающиеся.

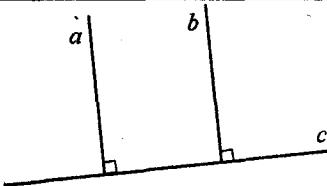
Признаки параллельности прямых

1. Если внутренние накрест лежащие углы, образованные двумя прямыми и секущей, равны или сумма внутренних односторонних углов равна 180° , то прямые параллельны.



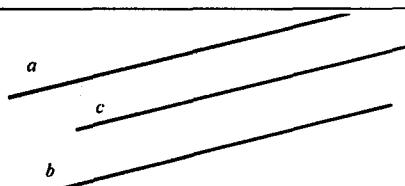
$\angle 1 = \angle 2$ (внутренние накрест лежащие);
 $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ (внутренние односторонние);
 $a \parallel b, c$ — секущая.

2. Две прямые, перпендикулярные третьей прямой, — параллельны.



Если $a \perp c; b \perp c$, то $a \parallel b$.

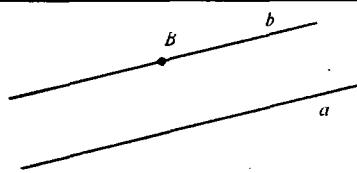
3. Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.



Если $a \parallel c, b \parallel c$, то $a \parallel b$.

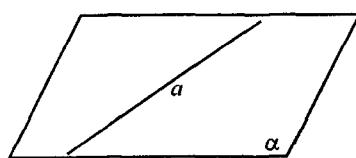
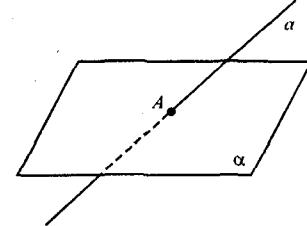
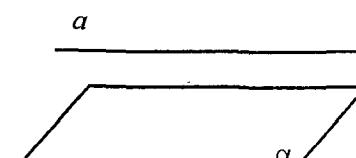
Свойство параллельных прямых

Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную данной, и только одну.



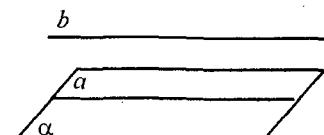
$B \notin a; B \in b; b \parallel a; b$ — единственная.

Взаимное размещение прямой и плоскости

Прямая принадлежит плоскости.	Прямая не принадлежит плоскости, пересекает её.	Прямая не лежит в плоскости, не пересекает её.
 <p>$a \in \alpha$, множество общих точек, лежащих на прямой.</p>	 <p>$a \cap \alpha, A \in a, A \in \alpha$, единственная общая точка A.</p>	 <p>$a \notin \alpha, a \nparallel \alpha, a \parallel \alpha$, прямая и плоскость параллельны, нет общих точек.</p>

Признак параллельности прямой и плоскости

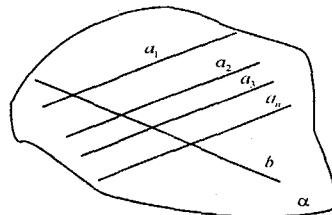
Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.



$$b \notin \alpha; a \in \alpha; b \parallel a, \text{то } b \parallel \alpha.$$

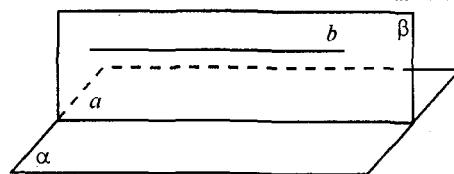
Свойства параллельных прямой и плоскости

Все параллельные между собой прямые, которые пересекают заданную прямую, лежат в одной плоскости. (Доказательство смотри в «Ученической страничке».)



$$a_1 \parallel a_2 \parallel a_3 \parallel \dots \parallel a_n; a_1 \cap b, a_2 \cap b \dots a_n \cap b; \\ a_1 \in \alpha, a_2 \in \alpha \dots a_n \in \alpha \quad b \in \alpha.$$

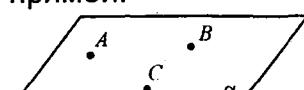
Если через прямую, параллельную плоскости, проходит другая плоскость, пересекающая данную, то прямая пересечения плоскостей параллельна первой прямой.



$$b \notin \alpha, b \parallel \alpha, b \in \beta; \beta \cap \alpha, a \in \alpha, a \in \beta; \\ a \parallel b.$$

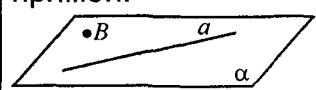
Способы задания плоскости

Тремя точками, не лежащими на одной прямой.



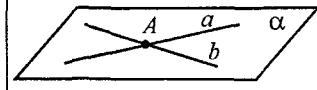
$$A, B, C \notin a; A, B, C \text{ задают плоскость } \alpha.$$

Прямой и точкой, не лежащей на этой прямой.



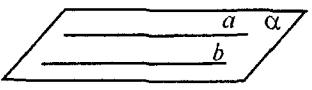
$$B \notin a; B \text{ и } a \text{ задают плоскость } \alpha.$$

Двумя пересекающимися прямыми.



$$a \cap b, a \text{ и } b \text{ задают плоскость } \alpha; \\ A — \text{точка их пересечения.}$$

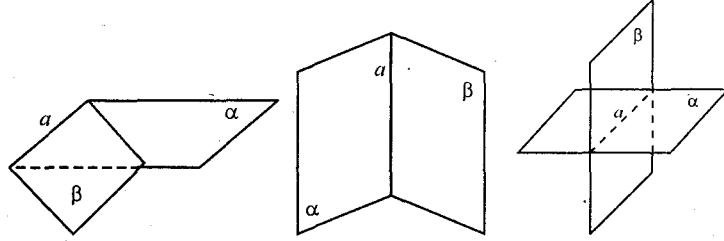
Двумя параллельными прямыми.



$$a \parallel b; a \text{ и } b \text{ задают плоскость } \alpha.$$

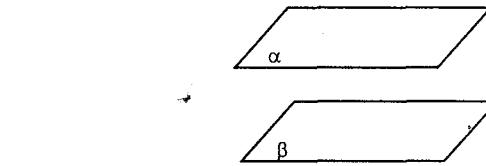
Взаимное размещение плоскостей

Если две плоскости в пространстве пересекаются, то они имеют множество общих точек, лежащих на прямой их пересечения.



$$\alpha \cap \beta; a \in \alpha; a \in \beta; \\ a — \text{прямая пересечения } \alpha \text{ и } \beta.$$

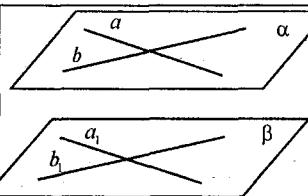
Если две плоскости в пространстве не пересекаются, то они параллельны и не имеют общих точек.



$$\alpha \not\cap \beta, \alpha \parallel \beta; \alpha \text{ и } \beta \text{ не имеют общих точек.}$$

Признак параллельности плоскостей

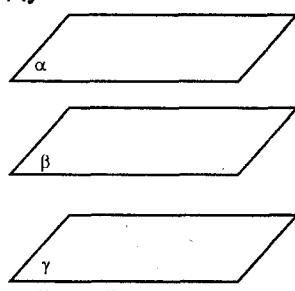
Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.



Если $a \parallel a_1, b \parallel b_1$,
 $a \cap b$ и лежат в α ,
 $a_1 \cap b_1$ лежат в β ;
то $\alpha \parallel \beta$.

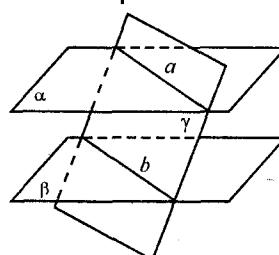
Свойства параллельных плоскостей

Если две различные плоскости параллельны третьей, то они параллельны между собой.



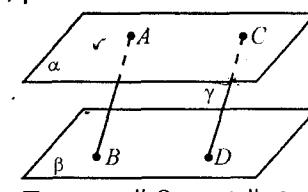
$$(\alpha \parallel \beta, \gamma \parallel \beta) \Rightarrow (\alpha \parallel \gamma).$$

Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны.



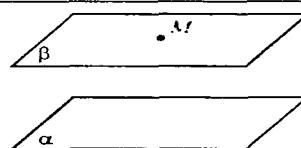
$$\text{Если } \gamma \cap \alpha \text{ по } a, \gamma \cap \beta \text{ по } b, \alpha \parallel \beta, \text{ то } a \parallel b.$$

Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.



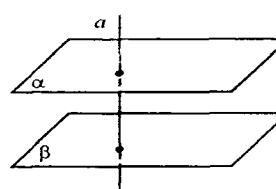
$$\text{Если } \alpha \parallel \beta, AB \parallel CD \\ (A \in \alpha; C \in \alpha; B \in \beta; \\ D \in \beta), \text{ то } AB = CD.$$

Через точку вне плоскости можно провести плоскость, параллельную данной плоскости, и только одну.



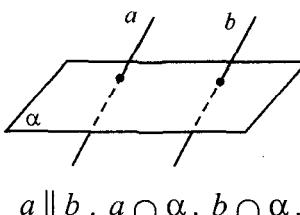
$$M \notin \alpha, M \in \beta; \alpha \parallel \beta, \beta — \text{единственная.}$$

Если прямая пересекает одну из параллельных плоскостей, то она пересекает и вторую плоскость. (Доказательство смотри в «Ученической страничке».)



$$\alpha \parallel \beta; a \cap \alpha, a \cap \beta.$$

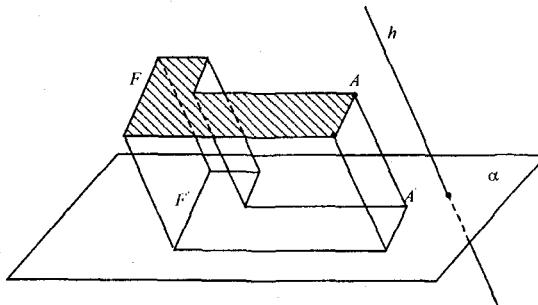
Если одна из двух параллельных прямых пересекает плоскость, то и вторая прямая пересекает эту плоскость.



$$a \parallel b, a \cap \alpha, b \cap \alpha.$$

Изображение пространственных фигур на плоскости

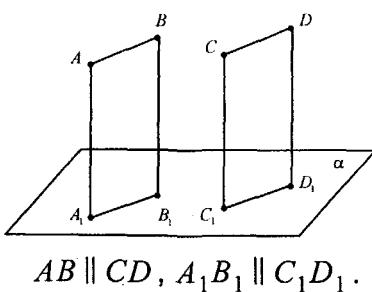
Для изображения пространственных фигур на плоскости пользуются методом параллельного проектирования.



h — направление проектирования;
фигура F' — изображение фигуры F
при проектировании на плоскость α
в направлении h .

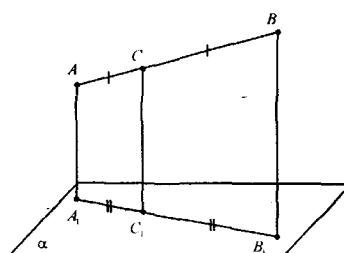
Свойства изображения фигур на плоскости

- При параллельном проектировании прямые проектируются в прямые, отрезки — в отрезки.
- При параллельном проектировании параллельность отрезков сохраняется.



$$AB \parallel CD, A_1B_1 \parallel C_1D_1.$$

- При параллельном проектировании отношение отрезков одной прямой или параллельных прямых сохраняется. Середина отрезка при изображении его на плоскости тоже является серединой.
- При параллельном проектировании величина угла и отношение длин непараллельных отрезков не сохраняется.
- При параллельном проектировании общая точка двух фигур является общей точкой их проекций.



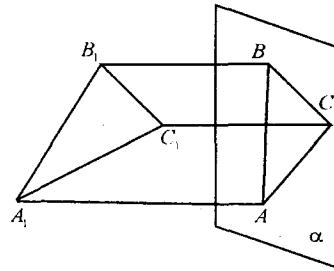
$$\frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1}, AC = BC, A_1C_1 \neq B_1C_1.$$

Изображение пирамиды, призмы, цилиндра или конуса начинают с изображения их основания — многоугольника или круга. Выполняя изображения фигур, нужно придерживаться правил и требований черчения. Использовать сплошные линии разной толщины, пунктирные и штрихпунктирные линии.

Изображения должны быть правильными, полными, наглядными и простыми в выполнении.

1. Изображение треугольника.

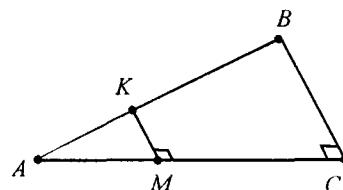
Любой треугольник (прямоугольный, равнобедренный, правильный) изображается произвольным треугольником в удобном расположении на рисунке.



ΔABC — изображение $\Delta A_1B_1C_1$ на плоскость α .

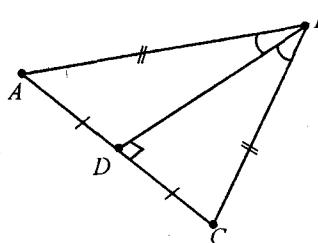
Если $\Delta A_1B_1C_1$ — прямоугольный, то изображение направлений двух его высот (катетов) задано. Произвольно изображаются высота, опущенная на гипотенузу, и центр вписанной окружности.

Изображение перпендикуляра, опущенного из заданной точки гипотенузы на какой-либо катет, является отрезком, параллельным второму катету.



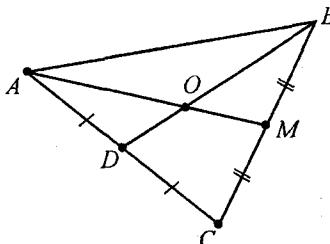
$\angle C = 90^\circ$, AB — гипотенуза,
 $K \in AB$, $KM \perp AC$, $KM \parallel BC$.

Если $\Delta A_1B_1C_1$ — равнобедренный, то изображение медианы B_1D_1 является изображением высоты и биссектрисы $\Delta A_1B_1C_1$. Изображение центра вписанной и описанной окружностей принадлежат BD .



$AB = BC$,
 BD — медиана (биссектриса, высота).

Если $\Delta A_1B_1C_1$ — правильный, то центры вписанной и описанной окружностей совпадают и лежат в точке пересечения медиан. Поэтому построение изображения этого треугольника не может быть произвольным.



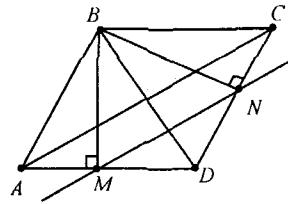
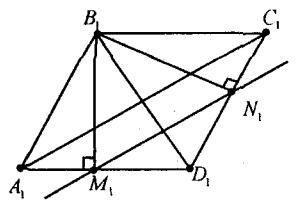
AM и BD — медианы (биссектрисы, высоты), O — центр вписанной и описанной окружностей.

2. Изображение параллелограмма.

Любой заданный параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ (включая прямоугольник, квадрат, ромб) может быть изображен произвольным параллелограммом $ABCD$.

На изображении параллелограмма общего вида изображения двух его высот, опущенных из одной вершины, можно построить произвольно. Причем высоты, опущенные из вершины острого угла параллелограмма-оригинала, лежат вне параллелограмма, а высоты, опущенные из вершины тупого угла, — внутри него.

Если $A_1B_1C_1D_1$ — ромб, то на изображении определяется пара взаимно перпендикулярных прямых — это диагонали $ABCD$. Поэтому произвольно можно построить изображение лишь одной высоты из данной вершины ромба на его сторону. При изображении второй высоты ромба учитывают, что основания этих высот лежат на прямой, параллельной диагонали ромба. Аналогично изображаются перпендикуляры, опущенные на стороны ромба из любой точки его диагонали.



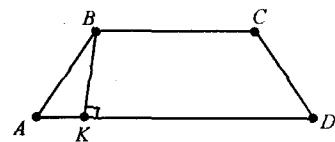
$ABCD$ — изображение ромба $A_1B_1C_1D_1$;
 BM и BN — изображение высот ромба B_1M_1 и B_1N_1 , $MN \parallel AC$.

Если $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат, то его изображение $ABCD$ (произвольный параллелограмм), причем изображения высот, биссектрис, углов, перпендикуляров к сторонам строить произвольно нельзя.

3. Изображение трапеции

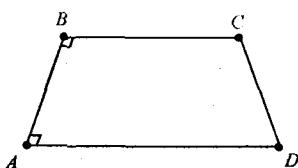
Любая трапеция $A_1B_1C_1D_1$ (в том числе и равнобокая, прямоугольная) может быть изображена произвольной трапецией $ABCD$.

Если $A_1B_1C_1D_1$ — трапеция общего вида, то изображение её высоты и одного из перпендикуляров, опущенных из точки основания на боковые стороны, можно строить произвольно.



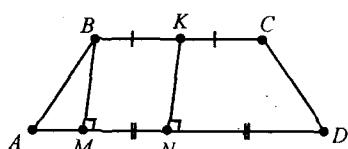
$ABCD$ — изображение трапеции $A_1B_1C_1D_1$,
 BK — высота.

Если $A_1B_1C_1D_1$ — прямоугольная трапеция, то $C_1B_1 \perp A_1B_1$, изображение высоты трапеции уже задано на рисунке, поэтому произвольно может быть изображен лишь перпендикуляр к наклонной боковой стороне.



$ABCD$ — изображение прямоугольной трапеции $A_1B_1C_1D_1$, $CB \perp AB$.

Если $A_1B_1C_1D_1$ — равнобокая трапеция (имеет ось симметрии), то изображением высоты является отрезок, соединяющий середины оснований или ему параллельный.



$$BK = KC; AN = DN;$$

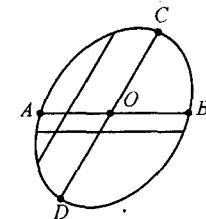
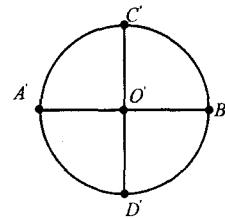
KN — изображение оси симметрии $A_1B_1C_1D_1$;
 $KN \perp AD$; $BM \perp AD$; BM и KN — изображение высот трапеции $A_1B_1C_1D_1$.

4. Изображение окружности

Параллельной проекцией окружности является **эллипс**.

Центром окружности на изображении является точка пересечения сопряженных диаметров эллипса.

Два диаметра окружности (эллипса) называются **сопряженными**, если каждый из них делит пополам все хорды, параллельные второму диаметру.



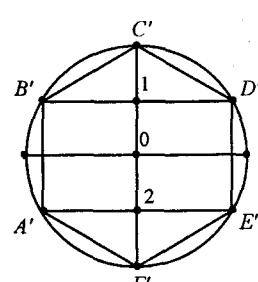
данная окружность; эллипс — изображение данной окружности: $AB \perp CD$; AB и CD — сопряженные диаметры, O — изображение центра окружности является центром эллипса.

5. Изображение правильного шестиугольника

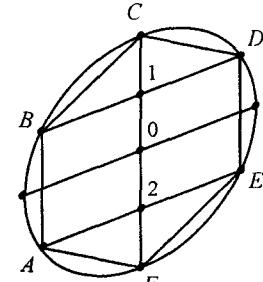
У правильного шестиугольника противоположные стороны попарно параллельны и сторона шестиугольника равна радиусу описанной около него окружности; хорды, соединяющие симметричные относительно диаметра вершины и центр окружности, делят этот диаметр на четыре равные части.

Этот факт используется при параллельном проектировании правильного шестиугольника.

Две вершины — концы одного диаметра эллипса. Делим этот диаметр на четыре равные части и через точки деления 1, 0, 2 проводим прямые, параллельные диаметру, сопряженному данному.



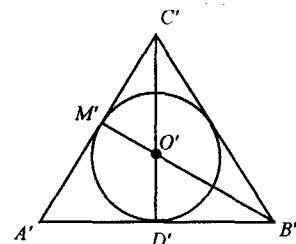
$A'B'C'D'E'F'$ — правильный шестиугольник.



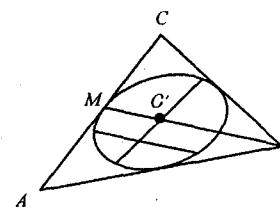
$ABCDEF$ — изображение правильного шестиугольника.

Изображение n -угольников и их комбинаций с окружностью

1. Изображение правильного треугольника, описанного около окружности.

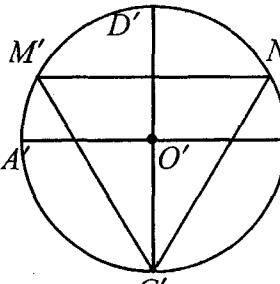


O' — точка пересечения медиан, биссектрис, высот $\Delta A'B'C'$;
 $O'M'$ — радиус вписанной окружности.

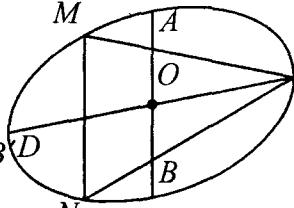


ΔABC — изображение правильного $\Delta A'B'C'$; O — изображение центра вписанной в $\Delta A'B'C'$ окружности.

2. Изображение правильного треугольника, вписанного в окружность.

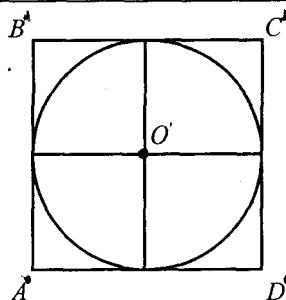


O' — точка пересечения медиан, биссектрис $\Delta M'N'C'$.
 $A'B' \perp C'D'$; $O'C'$ — радиус окружности.

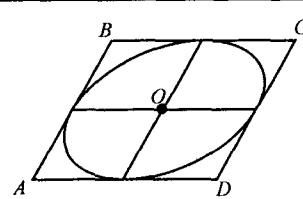


ΔMNC — изображение правильного $\Delta M'N'C'$; O — изображение центра окружности, описанной около $\Delta M'N'C'$; OC — изображение радиуса окружности.
 AB и CD — сопряженные диаметры.

3. Изображение квадрата, описанного около окружности

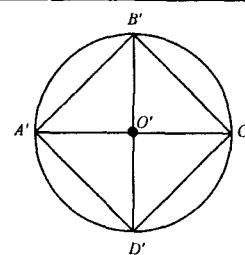


$A'B'C'D'$ — квадрат, описанный около окружности; O' — центр окружности (точка пересечения диагоналей).

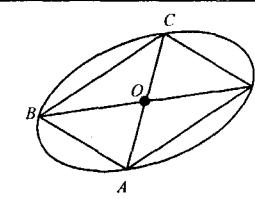


$A'B'C'D'$ — изображение квадрата;
 $A'B'C'D'$ — квадрат, вписанный в окружность; O — изображение центра окружности, вписанной в квадрат.

4. Изображение квадрата, вписанного в окружность

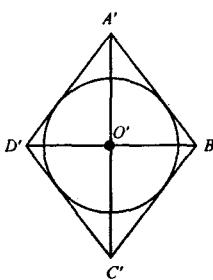


$A'B'C'D'$ — квадрат, вписанный в окружность; O' — центр окружности; $O'C'$, $O'B'$, $O'A'$, $O'D'$ — радиусы окружности.

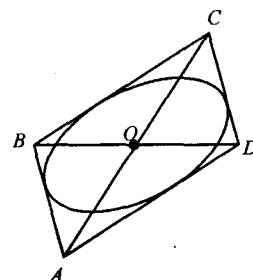


$A'B'C'D'$ — изображение квадрата, вписанного в окружность; O — изображение окружности; $OC = OB = OD = OA$, так как являются изображением радиуса окружности.

5. Изображение ромба, описанного около окружности.



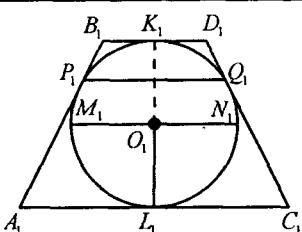
$A'B'C'D'$ — ромб, описанный около окружности; O' — центр окружности (точка пересечения диагоналей).



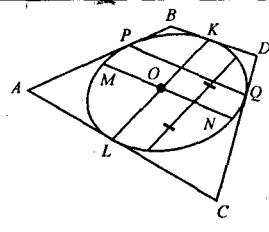
$A'B'C'D'$ — изображение ромба;
 O — изображение центра окружности, вписанной в ромб.

Вписать ромб в окружность можно, только если он является квадратом, этот случай уже рассматривался выше.

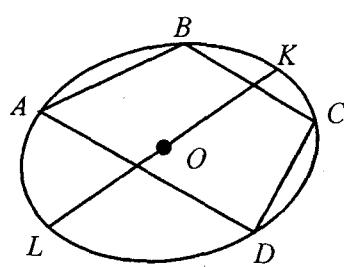
6. Изображение трапеции и окружностей, вписанной в неё и описанной около неё



$A'B'C'D'$ — равнобокая трапеция, в которую вписана окружность; K_1L_1 — диаметр; O_1 — центр окружности.



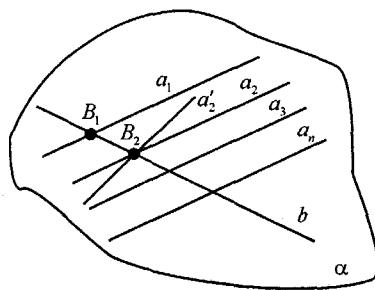
$A'B'C'D'$ — изображение трапеции;
 $A'B'C'D'$; K, L, O — середины BD , AC и KL ; O — изображение центра вписанной в трапецию окружности.



$A'B'C'D'$ — изображение вписанной в окружность трапеции $A'B'C'D'$, которая всегда является равнобокой.

УЧЕНИЧЕСКАЯ СТРАНИЧКА

1. Доказать, что все параллельные между собой прямые, пересекающие данную прямую, лежат в одной плоскости.



Дано: $a_1 \parallel a_2 \parallel \dots \parallel a_n$, $a_1 \cap b, a_2 \cap b \dots a_n \cap b$.

Доказать: $a_1, a_2 \dots a_n, b \in \alpha$.

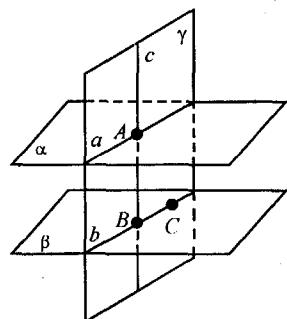
Доказательство.

Прямые a_1 и b задают плоскость α , т.к. $a_1 \cap b, a_2 \cap b = B_2$.

Через точку B_2 проведем прямую a'_2 , параллельную прямой a_1 . В плоскости α такая прямая — единственная, значит, a_2 и a'_2 совпадают, т.е. $a_2 \in \alpha$.

Аналогичные рассуждения доказывают, что $a_3 \dots a_n$ тоже лежат в плоскости α .

2. Доказать, что если прямая пересекает одну из параллельных плоскостей, то она пересекает и вторую плоскость.



Дано: $\alpha \parallel \beta$; $c \cap \alpha$. Доказать: $c \cap \beta$.

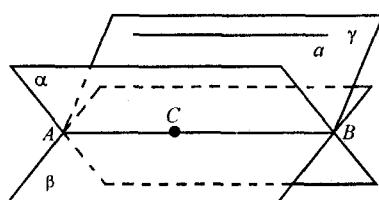
Доказательство.

Выберем в плоскости β произвольную точку и зададим плоскость γ точкой C и прямой c . Плоскость γ пересекает α по прямой a , причем точка A — это точка пересечения прямой c с плоскостью α . Плоскость γ пересекает β по прямой b ($C \in b$).

Прямые a и b лежат в плоскости γ и не пересекаются, т.к.

не пересекаются плоскости α и β , которым они принадлежат, значит, $a \parallel b$. Но так как $c \cap a$, то $c \cap b$ в точке B ($B \in \beta$), значит, прямая c пересекает плоскость β .

3. Плоскости α и β пересекаются по прямой AB . Прямая a параллельна как плоскости α , так и плоскости β . Доказать, что прямая a параллельна прямой AB .



Дано: $\alpha \cap \beta$ по прямой AB , $a \parallel \alpha$, $a \parallel \beta$.

Доказать: $a \parallel AB$.

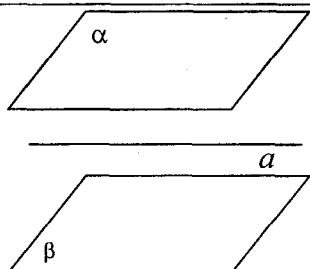
Доказательство.

Выберем произвольную точку C , лежащую на прямой AB .

Зададим плоскость γ , содержащую прямую a и точку C .

Тогда $\gamma \cap \alpha$ по прямой c и $\gamma \cap \beta$ по прямой c' . Так как $a \parallel \alpha$, то $a \parallel c$ и $a \parallel \beta$, то $a \parallel c'$. Значит, через точку C в плоскости γ проходят c и c' , параллельные прямой a . Тогда прямые c и c' совпадают. Так как прямая $c \in \alpha$ и $c \in \beta$, то она совпадает с прямой AB . То есть, $a \parallel AB$.

4. Доказать, что если плоскость и прямая, ей не принадлежащая, параллельны одной и той же плоскости, то они параллельны между собой.

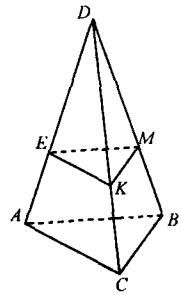


Дано: $a \notin \alpha$, $a \parallel \beta$, $\alpha \parallel \beta$. Доказать: $a \parallel \alpha$, $a \parallel \beta$.

Доказательство.

Докажем методом от противного. Допустим, что прямая a пересекает плоскость α . Так как $\alpha \parallel \beta$, то прямая a пересекает плоскость β . Это противоречит условию. Вывод: $a \parallel \alpha$ и $a \parallel \beta$.

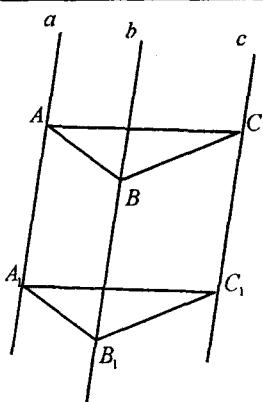
5. Дано: $\frac{DE}{DA} = \frac{DK}{DC} = \frac{DM}{DB}$. Доказать: $(EKM) \parallel (ABC)$.



Доказательство.

Рассмотрим $\angle ADC$. Так как $\frac{DE}{DA} = \frac{DK}{DC}$, то $EK \parallel AC$ (теорема Фалеса). Аналогично доказывается, что $KM \parallel CB$, тогда $EK \cap KM$ и $AC \cap CB$ и соответственно параллельны, значит, $(EKM) \parallel (ABC)$ по признаку параллельности плоскостей.

6. Прямые a, b, c не лежат в одной плоскости и параллельны друг другу. $AB \parallel A_1B_1$ и $BC \parallel B_1C_1$. Доказать, что $AC = A_1C_1$.



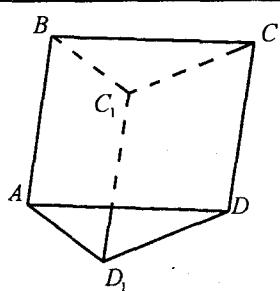
Дано: $a \parallel b \parallel c$, $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$.

Доказать: $AC = A_1C_1$.

Доказательство.

Рассмотрим плоскости ABC и $A_1B_1C_1$. $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$, так как $(AB \cap BC) \in (ABC)$, $(A_1B_1 \cap B_1C_1) \in (A_1B_1C_1)$ и, по условию, соответственно параллельны. $AC \parallel A_1C_1$, так как $AC \in (ABC)$ и $A_1C_1 \in (A_1B_1C_1)$ и AC и A_1C_1 принадлежат плоскости AA_1C_1C . Тогда AA_1C_1C — параллелограмм, AC и A_1C_1 — противолежащие стороны. $AC = A_1C_1$.

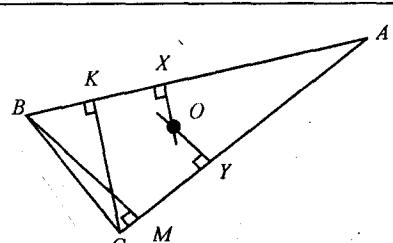
7. Параллелограммы $ABCD$ и ABC_1D_1 лежат в разных плоскостях. Доказать, что четырехугольник CDD_1C_1 — параллелограмм.



Доказательство.

- 1) $AB \parallel CD$, $AB = DC$, так как $ABCD$ — параллелограмм.
- 2) $AB \parallel D_1C_1$, $AB = D_1C_1$, так как ABC_1D_1 — параллелограмм.
- 3) Следовательно, $DC \parallel D_1C_1$ и $DC = D_1C_1$, то есть CDD_1C_1 — параллелограмм.

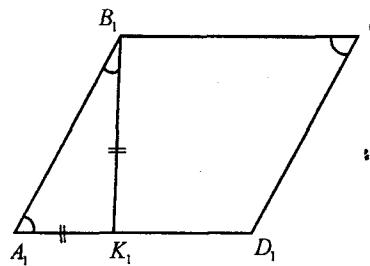
8. Дано изображение треугольника и двух его высот. Построить изображение центра окружности, описанной около этого треугольника.



Решение.

Пусть ΔABC — проекция некоторого треугольника. BM и CK — проекции его высот. Центр окружности, описанной около треугольника, совпадает с точкой пересечения серединных перпендикуляров, тогда изображением серединных перпендикуляров будут отрезки XO и YO , так как X — середина AB и Y — середина AC , а $XO \parallel KC$ и $YO \parallel BM$. Точка O — изображение центра описанной около треугольника окружности.

9. Построить на изображении ромба изображение его высоты, если угол ромба равен 45° .



Решение.

Пусть $A_1B_1C_1D_1$ — ромб, $\angle A_1 = 45^\circ$, B_1K_1 — высота.

$\triangle A_1B_1K_1$ — равнобедренный ($A_1K_1 = B_1K_1$), прямоугольный ($\angle B_1K_1A_1 = 90^\circ$).

Тогда $A_1K_1 : A_1D_1 = A_1K_1 : A_1B_1 = 1 : \sqrt{2}$.

$(A_1K_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}; A_1D_1 = a)$. Если $ABCD$ — изображение ромба,

то на стороне AD параллелограмма $ABCD$ нужно выбрать точку K , чтобы выполнялось отношение $AK : AD = 1 : \sqrt{2}$.

Построение.

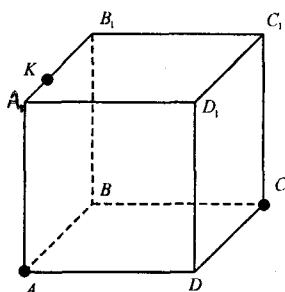
1) На отрезке AD как на диаметре строим полуокружность с центром в точке O .

2) $OP \perp AD$ и OP пересекает окружность в точке P .

3) Строим окружность с центром в точке A и радиусом OP , пересекающую AD в точке K .

BK — изображение высоты ромба, так как $AK = 1$ и $AP = 1$, $AD = \sqrt{2}$ $AK : AD = 1 : \sqrt{2}$.

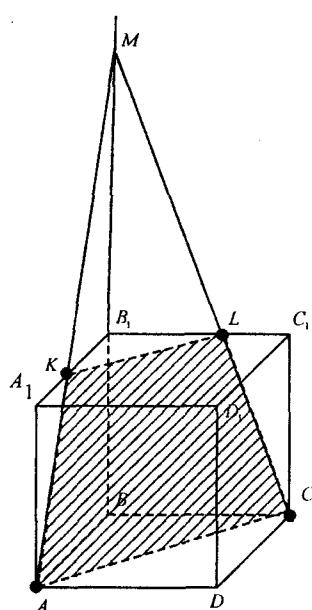
10. Построить сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершины A, C и точку K , взятую на ребре A_1B_1 . Установить вид сечения.



Решение.

Так как плоскость сечения проходит через точки A и C , то она пересекает плоскость $ABCD$ по прямой AC ($ABCD \parallel (A_1B_1C_1D_1)$), значит, плоскость сечения пересекает плоскость $A_1B_1C_1D_1$ по прямой, параллельной прямой AC и проходящей через точку K . Отсюда проводим $KL \parallel AC$ ($L \in B_1C_1$). $AKLC$ — искомое сечение.

Многоугольник $AKLC$ — равнобокая трапеция: $AC \parallel KL$ (AC и KL — основания трапеции); $KL = CL$. (Продолжим AK и CL до пересечения, получим $\triangle ABM = \triangle CBM$. Они прямоугольные, $AB = CB$, BM — общий катет.) Отсюда $AM = CM$. Поэтому $\triangle AMC$ — равнобедренный, так как $KL \parallel AC$, $\triangle KML$ — равнобедренный, то есть $KM = LM$. Отсюда следует: $AK = CL$.



ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Параллельные прямые в пространстве

1. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 1):

а) найти несколько отрезков, параллельных отрезкам CC_1 ;

$A_1B_1; B_1C_1; A_1C_1$;

б) найти несколько прямых, скрещивающихся с прямой AA_1 ,

AB, BC, A_1C_1, BD .

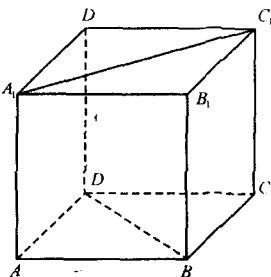


Рис. 1

2. Точка B отрезка AB лежит в плоскости α . Через точку A проведена прямая, пересекающая плоскость α в точке A_1 (рис. 2).

Через середину отрезка AB (точку C) проведена прямая c , параллельная AA_1 :

а) построить точку C_1 пересечения прямой c и плоскости α ;

б) вычислить CC_1 , если $AA_1 = 22 \text{ см}$.

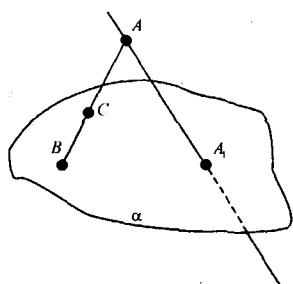


Рис. 2

3. Отрезок AB не имеет общих точек с плоскостью α . Через его концы проведены параллельные прямые, которые пересекают плоскость α в точках A_1 и B_1 . Точка K — середина отрезка AB (рис. 3):

а) построить точку пересечения прямой, которая проходит через точку K и параллельна прямым AA_1, BB_1 и плоскости α ;

б) вычислить длину отрезка KK_1 , если $AA_1 = 10 \text{ см}$,
 $BB_1 = 6 \text{ см}$.

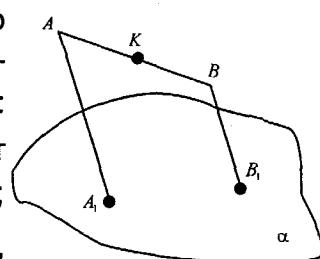


Рис. 3

4. Параллелограмм $ABCD$ и треугольник ABC_1 лежат в разных плоскостях. Каково взаимное размещение прямых (рис. 4):

а) AC_1 и BD ;

б) C_1B и AD ;

в) CC_1 и AD ;

г) AC_1 и BD ?

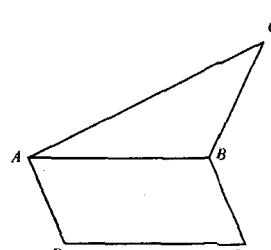


Рис. 4

5. Через конец отрезка AB проведена плоскость α , а через конец B и точку C отрезка AB проведены параллельные прямые, которые пересекают плоскость в точках B_1 и C_1 (рис. 5).

Найти: а) BB_1 , если $AC = 3 \text{ см}$, $AB = 6 \text{ см}$, $CC_1 = 4 \text{ см}$;

б) CC_1 , если $AC = 14 \text{ см}$, $AB = 18 \text{ см}$, $BB_1 = 9 \text{ см}$;

в) AB , если $AC = 2 \text{ см}$, $CC_1 = 4 \text{ см}$, $BB_1 = 6 \text{ см}$.

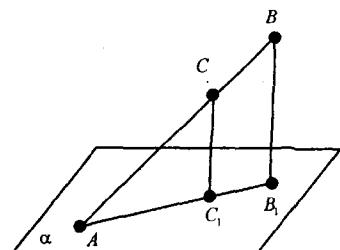


Рис. 5

6. Равные прямоугольники $ABCD$ и $ABMK$ лежат в разных плоскостях (рис. 6):

а) найти длину ломаной $ACBKA$, если $CD = 8 \text{ см}$, $BM = 6 \text{ см}$;

б) верно ли утверждение, что прямые AC и BK параллельны?

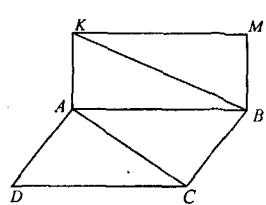


Рис. 6

7. Отрезок AB , равный 16 см, лежит в плоскости α . Точка C не лежит в этой плоскости. K и M — середины отрезков AC и BC (рис. 7):

- может ли прямая KM иметь общие точки с плоскостью α ? (Ответ объяснить.);
- вычислить расстояние между точками K и M .

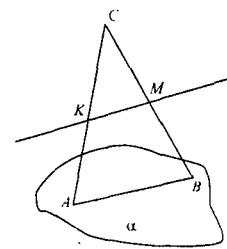


Рис. 7

8. Отрезок KM , равный 10 см, параллелен плоскости α . Через его концы проведены параллельные прямые, пересекающие α в точках K_1 и M_1 (рис. 8):

- как расположены прямые KM и K_1M_1 ?
- найти расстояние между точками K_1 , M_1 ;
- вычислить площадь четырехугольника KMM_1K_1 , если $KK_1 = 8$ см, $\angle KMM_1 = 30^\circ$.

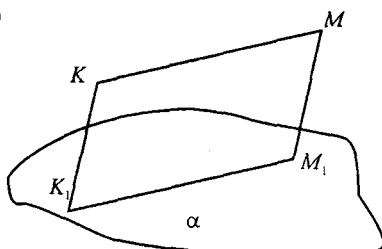


Рис. 8

Параллельность прямой и плоскости

9. Через точку K стороны AC треугольника ABC проведена плоскость α , параллельная прямой AB (рис. 9):

- как расположены прямые AB и KM (M — точка пересечения прямой BC и плоскости α)?
- вычислить длину отрезка KM , если $AK = 4$ см, $KC = 6$ см, $AB = 5$ см.

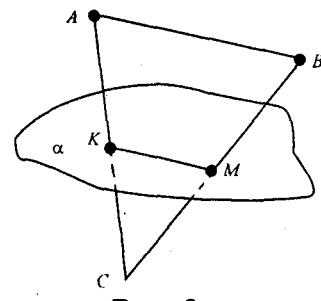


Рис. 9

10. Отрезок AB параллелен плоскости α , через его концы проведены параллельные прямые. Прямая, проходящая через точку B , пересекает плоскость в точке B_1 (рис. 10):

- построить точку пересечения второй прямой с плоскостью α (точку A_1);
- вычислить периметр четырехугольника ABB_1A_1 , если $AB:BB_1 = 5:2$, $AB - BB_1 = 9$ см.

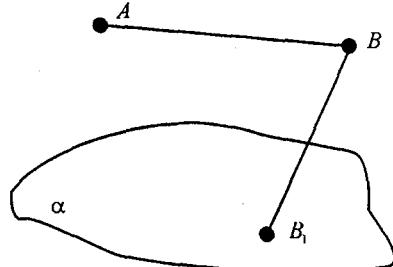


Рис. 10

11. Через точку K стороны AC треугольника ABC проведена плоскость α , параллельная прямой AB (рис. 11):

- построить точку пересечения плоскости α и стороны BC (точку M);
- вычислить длину отрезка KM , если $KM + AB = 26$ см, $CK:KA = 4:5$.

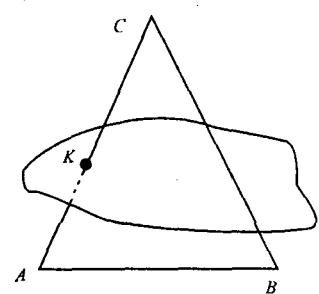


Рис. 11

12. В плоскости α , пересекающейся с плоскостью β по прямой c , проведена прямая a , параллельная c . В плоскости β проведена прямая b , пересекающая прямую c (рис. 12):

- могут ли прямые a и b иметь общие точки?
- доказать, что a и b — скрещивающиеся прямые.

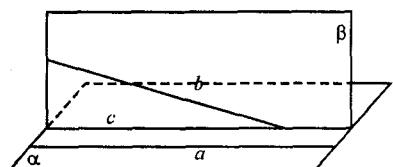


Рис. 12

13. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. K и M — середины отрезков BD и CD (рис. 13):

- имеют ли общие точки прямая KM и плоскость, в которой лежат точки A, B и C ?
- вычислить периметр треугольника AKM , если расстояние между любой парой данных точек равно 8 см.

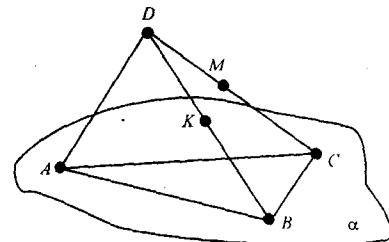


Рис. 13

14. Через точку K стороны AD параллелограмма $ABCD$ проведена плоскость α , параллельная прямой DC (рис. 14):

- на какие фигуры делит плоскость α данный параллелограмм? (Ответ объяснить.)
- вычислить длины отрезков, на которые делит плоскость α диагональ BD , если $DK = 6$ см, $AK = 8$ см, $BD = 21$ см.

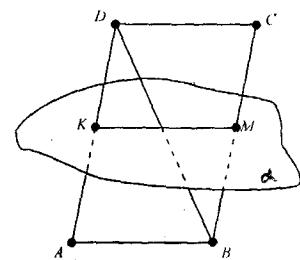


Рис. 14

15. Прямая a параллельна плоскости α . Верно ли утверждение, что любая прямая плоскости α параллельна прямой a ?

16. Верно ли утверждение, что две прямые, параллельные одной плоскости, параллельны?

17. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 15):

- построить отрезок, являющийся пересечением грани ABB_1A_1 и плоскости α , в которой лежит прямая CC_1 , а точка K — середина AB ;
- построить сечение куба плоскостью α ;
- вычислить периметр построенного сечения, если ребро куба равно 20 см.

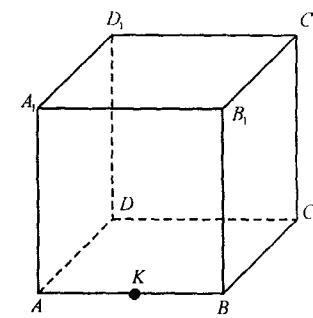


Рис. 15

18. Дан треугольник ABC и плоскость α , которая параллельна прямой AB , пересекает сторону AC в точке D , а сторону BC — в точке K (рис. 16).

Вычислить:

- AB , если $DC = 8$ см, $AC = 24$ см, $DK = 6$ см;
- DK , если $AB = 6,8$ см, $CD = 4,3$ см, $AC = 8,6$ см;
- AB , если $AC = a$, $DC = b$, $DK = c$;
- DK , если $AD = a$, $AC = b$, $AB = c$.

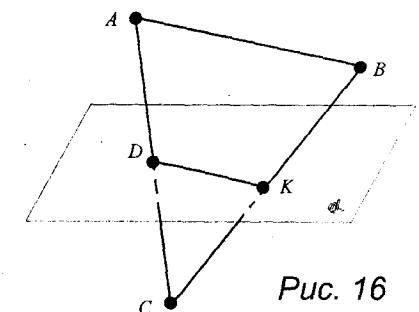


Рис. 16

19. $ABCD$ — параллелограмм. Плоскость α проходит через его вершины A и B и не проходит через вершину C . Доказать, что $CD \parallel \alpha$.

20. Плоскость α и не лежащая в ней прямая a параллельны одной и той же прямой b . Доказать, что прямая a и плоскость α параллельны.

21. Плоскость α параллельна стороне BC треугольника ABC и проходит через середину стороны AB . Доказать, что плоскость α проходит также через середину стороны AC .

22. Доказать, что середины сторон пространственного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

23. Доказать, что все прямые, пересекающие одну из двух скрещивающихся прямых, параллельные другой, лежат в одной плоскости.

24. Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник. Через боковое ребро, соединяющее вершины прямых углов оснований и середину гипотенузы нижнего основания, проведена плоскость. Доказать, что линия пересечения этой плоскости с боковой гранью параллельна указанному боковому ребру.

25. Через середины двух ребер основания правильной треугольной пирамиды проведена плоскость параллельно боковому ребру. Доказать, что эта плоскость пересекает две боковые грани пирамиды по прямым, параллельным между собой.

Параллельность плоскостей

26. Точки A и B расположены в одной из параллельных плоскостей, C и D — в другой. Отрезки AC и BD пересекаются в точке M ; $BD = 15 \text{ см}$, $AB = 4 \text{ см}$, $DC = 6 \text{ см}$ (рис. 17):

- как расположены прямые AB и CD ? (Ответ объяснить);
- вычислить длину отрезка DM .

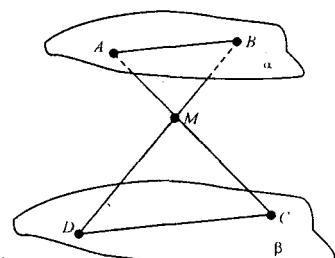


Рис. 17

27. Через точку O , расположенную между параллельными плоскостями α и β , проведены две прямые, которые пересекают плоскости в точках A и A_1 , B и B_1 (рис. 18):

- как расположены прямые AB и A_1B_1 ? (Ответ объяснить);
- найти длину отрезка A_1B_1 , если $AB = 18 \text{ см}$,
 $AO:OA_1 = 3:5$.

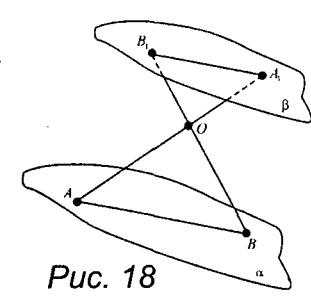


Рис. 18

28. Два луча с началом в точке A пересекают одну из параллельных плоскостей в точках A_1, B_1 , а другую — в точках A_2, B_2 (рис. 19):

- как расположены прямые A_1B_1 и A_2B_2 ? (Ответ объяснить);
- вычислить AB_1 , если $A_1B_1 = 4 \text{ см}$, $A_2B_2 = 16 \text{ см}$, $B_1B_2 = 15 \text{ см}$.

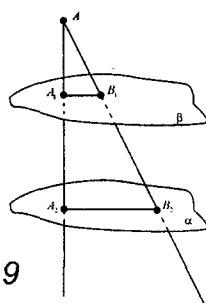


Рис. 19

29. Лучи MK и MP пересекают плоскость α , параллельную плоскости β , в точках A и B , а один из них пересекает плоскость α в точке A_1 (рис. 20):

- построить точку B_1 пересечения плоскости α и луча MP ;
- вычислить A_1B_1 , если $MA:AA_1 = 3:4$, $AB = 6 \text{ см}$.

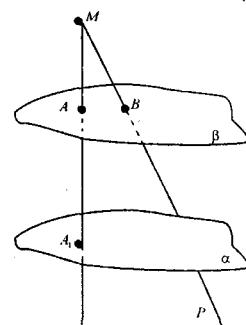


Рис. 20

30. Плоскости α и β параллельны. Отрезок AB расположен в плоскости α . Через его концы и точку K , лежащую между плоскостями, проведены прямые. Одна из них пересекает плоскость β в точке B_1 (рис. 21):

- построить точку пересечения прямой AK и плоскости α (точку A_1);
- вычислить AA_1 и BB_1 , если $A_1B_1:AB = 3:4$, $AK = 6 \text{ см}$, $BK = 12 \text{ см}$.

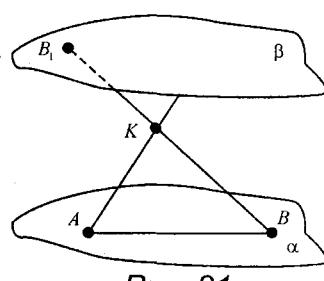


Рис. 21

31. Через точки B_1 и B_2 стороны AB равностороннего треугольника ABC проведены плоскости α и β , параллельные прямой BC (рис. 22):
 а) на какие фигуры делится этот треугольник плоскостями α и β ?
 б) вычислить периметры этих фигур, если $AC = 18 \text{ см}$ и $AB_1 = B_1B_2 = B_2B$.

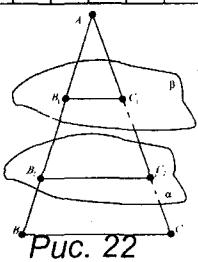


Рис. 22

32. Плоскость α параллельна плоскости, в которой лежит квадрат $ABCD$. Через вершины квадрата проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1, C_1 и D_1 (рис. 23):

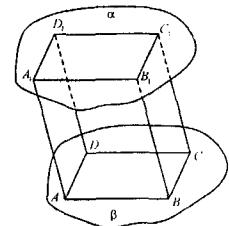


Рис. 23

33. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости, K, M, P — середины отрезков AB, AC, AD (рис. 24):

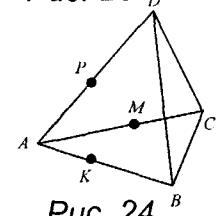


Рис. 24

- а) доказать, что плоскости DBC и KMP параллельны;
 б) вычислить периметр четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$, если $AB = 12 \text{ см}$, $BC = 8 \text{ см}$, $DC = 6 \text{ см}$.

34. Плоскости α и β параллельны. Верно ли, что любая прямая плоскости α параллельна плоскости β ? (Ответ объяснить.)

35. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 24 см. Точка K — середина ребра BB_1 . Через точку K проведена плоскость α , параллельная плоскости BC_1A_1 :

- а) построить отрезок, лежащий в плоскости α и в грани ABB_1A_1 ;
 б) построить сечение куба плоскостью α .

36. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка K — середина ребра AB . Построить сечение куба плоскостью, которая содержит точку K и параллельна плоскости BB_1D_1D .

37. Параллельные плоскости α и β пересечены плоскостью γ , линии их пересечения — прямые a и b . В плоскости γ проведена прямая c , пересекающая прямую b :

- а) могут ли прямые a и c лежать в одной плоскости? (Ответ объяснить.);
 б) построить линию пересечения плоскости, содержащей некоторую точку прямой a и прямую c , с плоскостями α и β . Верно ли, что две плоскости, параллельные одной прямой, параллельны?

38. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки M, P, K (рис. 25).

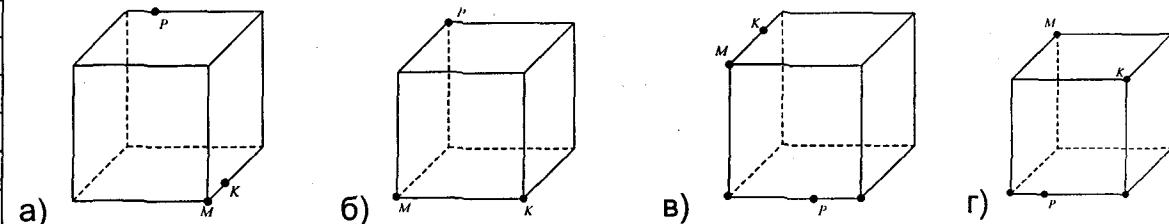


Рис. 25

Построения нужно выполнять с помощью линейки и угольника так, как строят параллельные прямые.

39. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки M, K, P (рис. 26).

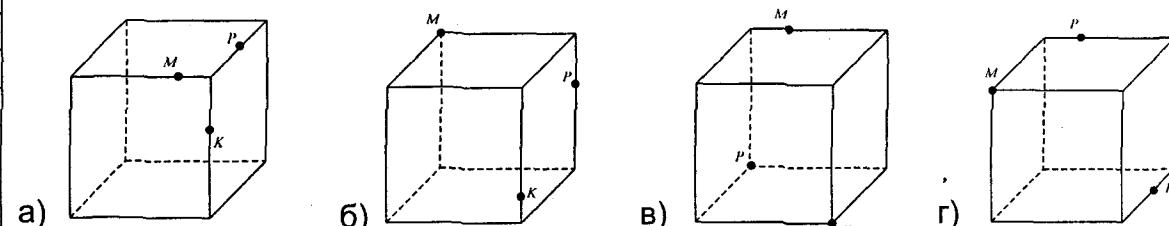
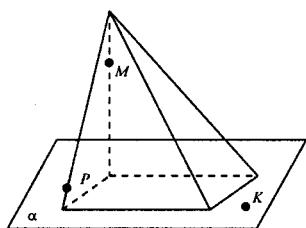


Рис. 26

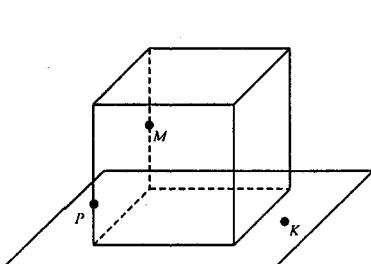
40. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через данные точки, и определить, какие фигуры получились в сечении:

а) C_1, K, D ; б) C_1, K, C , где точка K — середина A_1B_1 .

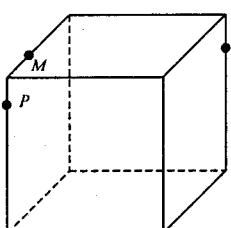
41. Построить сечение многогранника плоскостью, проходящей через точки M, P, K (рис. 27):



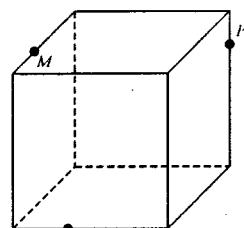
а) точка K
принадлежит
плоскости α ;



б) точка K принадлежит
плоскости α ;



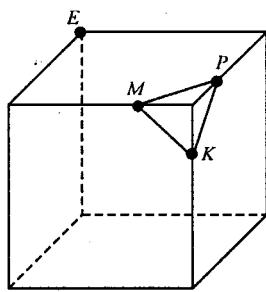
в)



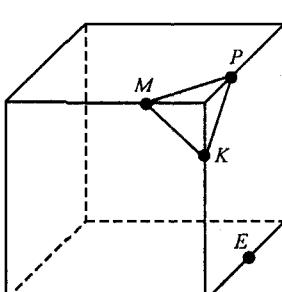
г)

Рис. 27

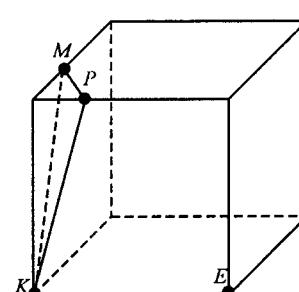
42. Построить сечение многогранника плоскостью, проходящей через точку E и параллельной плоскости MPK (рис. 28).



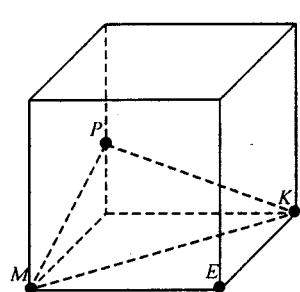
а)



б)



в)



г)

Рис. 28

Изображение пространственных фигур

43. Треугольник $A_1B_1C_1$ — проекция равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$). Построить проекцию биссектрисы треугольника, проведенной из вершины A .

44. Треугольник $A_1B_1C_1$ — проекция равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$). Построить проекцию перпендикуляра, проведенного из середины боковой стороны до основания треугольника.

45. Параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ — проекция ромба $ABCD$. Точка K — середина AB . Построить проекцию перпендикуляра, проведенного из точки K до диагонали AC .

46. Построить проекцию прямоугольника $ABCD$, зная проекции его вершин A, B и точки пересечения диагоналей — O ; точки A_1, B_1, O_1 .

47. Параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ — проекция квадрата $ABCD$. Построить проекцию перпендикуляра, проведенного из точки пересечения диагоналей квадрата до стороны AD .

48. Треугольник $A_1B_1C_1$ — проекция равностороннего треугольника ABC . Построить проекцию перпендикуляров, проведенных из произвольной точки на стороне AB до двух других сторон.

49. Построить на изображении ромба изображение его высоты, если угол ромба равен 60° .

50. Точки A и B принадлежат внутренним областям боковых смежных граней четырехугольной призмы. Построить точку пересечения прямой AB с плоскостью нижнего основания.

51. Точки M и N принадлежат внутренним областям смежных боковых граней треугольной призмы. Построить точку пересечения прямой MN с плоскостью нижнего основания.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-2-1

Тема. Параллельность прямых в пространстве



В - I

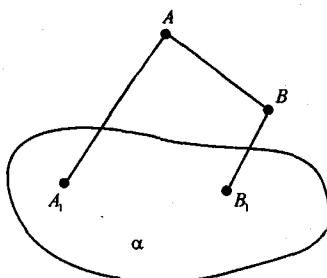
7 баллов

Концы отрезка AB лежат по одну сторону относительно плоскости α . Через точки A и B проведены параллельные прямые, которые пересекают плоскость α в точках A_1 и B_1 :

a) построить точку пересечения прямой AB и плоскости α (точку O);

б) вычислить AA_1 и BB_1 , если

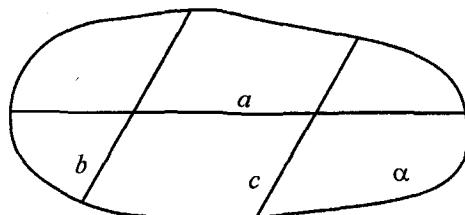
$$A_1B_1 : B_1O = 3:2; AA_1 + BB_1 = 35 \text{ ед.}$$



В - II

9 баллов

Пересекающиеся прямые a и b лежат в плоскости α . Прямая c параллельна прямой b и пересекает a . Доказать, что прямая c лежит в плоскости α .



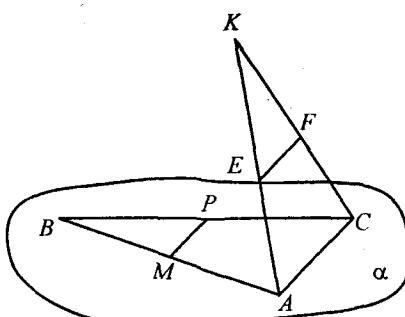
В - III

10 баллов

Точка K расположена вне плоскости треугольника ABC , E и F — середины отрезков KA и KC :

а) доказать, что отрезок EF равен и параллелен средней линии треугольника ABC (MP);

б) как расположены прямые EM и FP ?
(Ответ объяснить.)



В - IV

12 баллов

Точка K не лежит в плоскости трапеции $ABCD$. Через середины отрезков KA и KB проведена прямая EF ($AB \parallel CD$):

а) доказать, что прямые EF и CD параллельны;

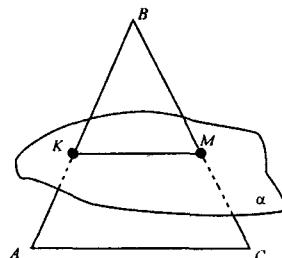
б) определить вид четырехугольника $DCFE$, если $AB : DC = 2:1$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-2-2

Тема. Параллельность прямой и плоскости

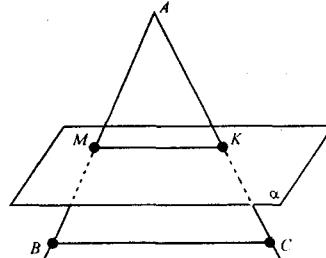
B - I

Дан треугольник ABC . Плоскость α пересекает его стороны AB и BC соответственно в их серединах K и M . Доказать, что прямая AC параллельна плоскости α .



B - II

Плоскость α пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках M и K так, что $\angle AMK = \angle ABC$. Доказать, что прямая BC параллельна плоскости α .



B - III

Плоскость α пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках M и K так, что $AM = \frac{1}{3}AB$, $AK = \frac{1}{3}AC$. Доказать, что прямая BC параллельна плоскости α .

Дан треугольник ABC . Плоскость α , которая параллельна прямой AC , пересекает сторону AB в точке K , а сторону BC в точке M . Доказать, что прямая KM параллельна прямой AC .

B - IV

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-2-3

Тема. Параллельность плоскостей

B - I

7 баллов

B - II

9 баллов

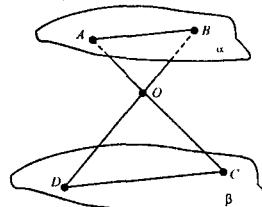
B - III

10 баллов

B - IV

12 баллов

1. Дано: $\alpha \parallel \beta$; $A, B \in \alpha$; $C, D \in \beta$; $AC \cap BD = O$.



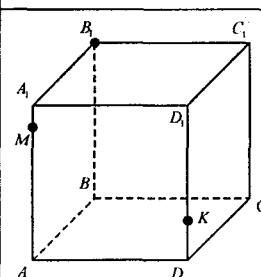
Найти AO , если
 $AB = 3\text{ см}$,
 $DC = 4\text{ см}$,
 $OC = 8\text{ см}$.

Найти OD , если
 $AB = 2\text{ см}$,
 $DC = 4\text{ см}$,
 $OB = 5\text{ см}$.

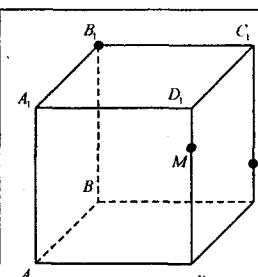
Найти AB , если
 $DC = 7,4\text{ см}$,
 $AO = 2,9\text{ см}$,
 $OC = 5,8\text{ см}$.

Найти DC , если
 $AB = 2,9\text{ см}$,
 $OB = 4,3\text{ см}$,
 $OD = 8,6\text{ см}$.

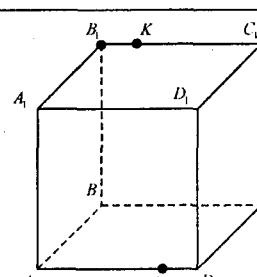
2. Построить сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки B_1, M, K , если:



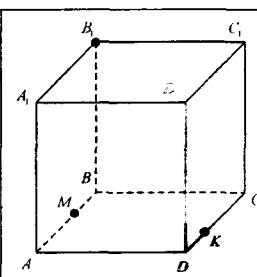
$M \in AA_1$ и $K \in DD_1$.



$M \in DD_1$ и $K \in CC_1$.



$M \in AD$ и $K \in B_1C_1$.



$M \in AB$ и $K \in DC$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-2-4

Тема. Изображение пространственных фигур. Построение сечений

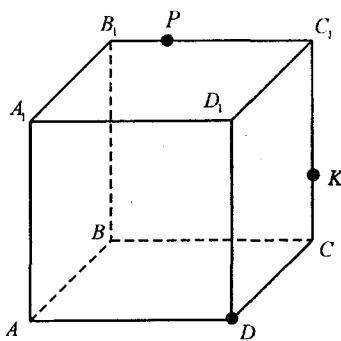


B - I

7 баллов

1. Треугольник $A_1B_1C_1$ — проекция равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$). Построить проекцию высоты треугольника, проведенной из вершины B .

2. Построить сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершину D и точки P и K , лежащие соответственно на ребрах B_1C_1 и CC_1 .

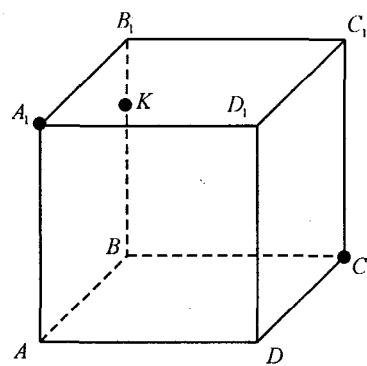


B - II

9 баллов

1. Параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ — проекция квадрата $ABCD$. Построить проекцию перпендикуляра, проведенного из точки пересечения диагоналей квадрата к стороне AB .

2. Построить сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершины A_1 и C и точку K , лежащую на ребре BB_1 .

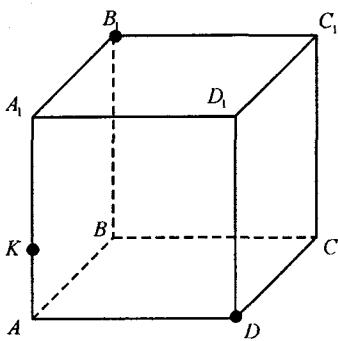


B - III

10 баллов

1. Построить проекцию правильного треугольника ABC , зная проекции его вершины B и середин K и P сторон AB и AC : B_1, K_1 и P_1 .

2. Построить сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершины D и B_1 и точку K , лежащую на ребре AA_1 .

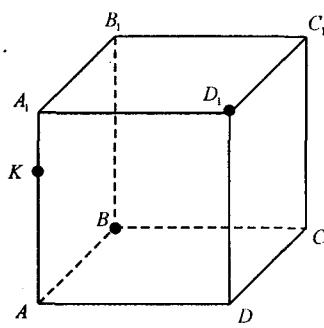


B - IV

12 баллов

1. Построить проекцию квадрата $ABCD$, зная проекции его вершин A и B и точки пересечения диагоналей — O : точки A_1, B_1 и O_1 .

2. Построить сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершины B и D_1 и точку K , лежащую на ребре AA_1 .



КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА К-2-1

Тема. Параллельные прямые и плоскости



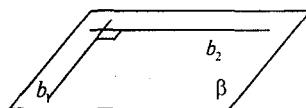
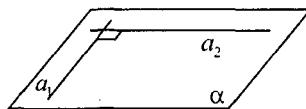
В - I	7 баллов	В - II	9 баллов
1. Могут ли скрещивающиеся прямые a и b быть параллельными прямой c ? (Ответ объяснить.)	1. Как расположены отрезки, по которым секущая плоскость пересекает плоскости граней ABB_1A_1 и DCC_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$? (Ответ объяснить.)		
2. Точка K не лежит в плоскости прямоугольника $ABCD$. Как расположена прямая CD по отношению к плоскости ABK ? (Ответ объяснить.)	2. Прямые AB и CD скрещиваются. Доказать, что через середину отрезка AC можно провести плоскость, параллельную прямым AB и CD , и только одну.		
3. Доказать, что все прямые, пересекающие две данные параллельные прямые, лежат в одной плоскости.	3. Дан треугольник ABC . Плоскость, параллельная прямой AB , пересекает сторону AC в точке E , а сторону BC — в точке F . Точка E делит отрезок AC в отношении 3:7, считая от точки C . Найти длину отрезка EF , если $AB = 20\text{дм}$.		
4. Построить сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через ребра AB и D_1C_1 .	4. Дан равносторонний треугольник ABC . Построить проекцию этого треугольника и его высот на плоскость α .		
В - III	10 баллов	В - IV	12 баллов
1. Даны скрещивающиеся прямые a , b и прямая c , не параллельная прямой a . Провести прямую, пересекающую обе скрещивающиеся прямые a и b так, чтобы она была параллельна прямой c . Всегда ли это возможно? (Ответ объяснить.)	1. Даны скрещивающиеся прямые a , b и прямая c , не параллельная прямой b . Провести прямую, пересекающую обе скрещивающиеся прямые a и b так, чтобы она была параллельна прямой c . Всегда ли это возможно? (Ответ объяснить.)		
2. Через концы отрезка AB и его середину O проведены параллельные прямые, пересекающие некоторую плоскость β в точках A_1, B_1 и O_1 соответственно. Известно, что $AA_1 = 3,4 \text{ дм}$, $BB_1 = 5,6 \text{ дм}$. Найти длину отрезка OO_1 , если отрезок AB пересекает плоскость β .	2. Через концы отрезка AB и его середину O проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1 и O_1 соответственно. Известно, что $AA_1 = 5 \text{ м}$, $OO_1 = 4 \text{ м}$. Найти длину отрезка BB_1 , если отрезок AB не пересекает плоскость α .		
3. Даны параллельные плоскости α и β . Через вершины треугольника ABC , лежащего в плоскости α , проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость β в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найти медиану треугольника $A_1B_1C_1$, проведенную к стороне A_1B_1 , если $AB = 12 \text{ дм}$, $BC = 10 \text{ дм}$, $AC = 10 \text{ дм}$.	3. Даны две параллельные плоскости β и γ . Через вершины треугольника BCD , лежащего в плоскости β , проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость γ в точках B_1, C_1 и D_1 соответственно. Найти биссектрису треугольника $B_1C_1D_1$, проведенную к стороне B_1C_1 , если $BC = 10 \text{ м}$, $BD = 13 \text{ м}$, $CD = 13 \text{ м}$.		
4. Треугольник $A_1B_1C_1$ является параллельной проекцией правильного треугольника ABC на плоскость α . Построить проекции биссектрис треугольника ABC .	4. Треугольник $A_1B_1C_1$ является параллельной проекцией равностороннего треугольника ABC на плоскость α . Построить проекции на плоскость α прямых, перпендикулярных сторонам треугольника ABC , проведенных через точку M , взятую на стороне треугольника ABC .		

§3. Перпендикулярность прямых и плоскостей

Перпендикулярность прямых в пространстве

Определение. Так же как и на плоскости, две прямые называются **перпендикулярными**, если они пересекаются под прямым углом.

Признак. Если две пересекающиеся прямые параллельны соответственно двум перпендикулярным прямым, то они тоже перпендикулярны.

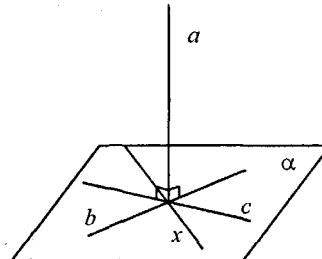


$$(a_1 \parallel b_1, a_2 \parallel b_2, a_1 \perp a_2) \Rightarrow b_1 \perp b_2.$$

Перпендикулярность прямой и плоскости

Определение. Прямая, пересекающая плоскость, называется **перпендикулярной** этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости и проходящей через точку пересечения.

Признак. Если прямая перпендикулярна двум прямым, лежащим в плоскости и пересекающимися, то она перпендикулярна данной плоскости.



$$(a \perp \alpha) \Leftrightarrow (a \perp x);$$

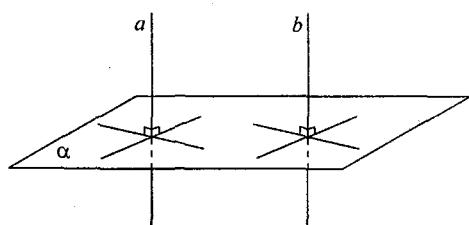
$$(a \perp b \text{ и } a \perp c) \Rightarrow a \perp \alpha;$$

x — любая прямая плоскости α .

Свойства прямой и плоскости, перпендикулярных между собой

Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны между собой.

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна заданной плоскости, то и вторая прямая перпендикулярна этой плоскости.

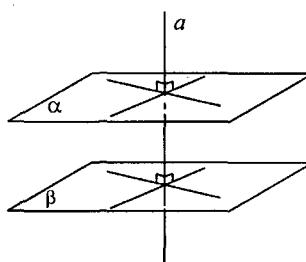


$$(a \perp \alpha \text{ и } b \perp \alpha) \Rightarrow a \parallel b;$$

$$(a \parallel b \text{ и } a \perp \alpha) \Rightarrow b \perp \alpha.$$

Прямая, перпендикулярная одной из двух параллельных плоскостей, перпендикулярна и второй плоскости.

Две плоскости, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны между собой.



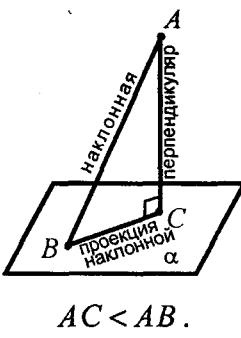
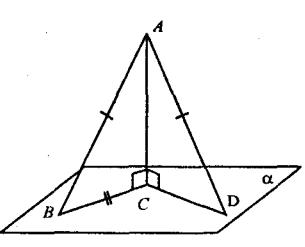
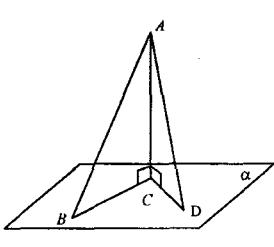
$$(\alpha \parallel \beta \text{ и } a \perp \alpha) \Rightarrow a \perp \beta;$$

$$(\alpha \perp a \text{ и } \beta \perp a) \Rightarrow \alpha \parallel \beta.$$

Перпендикуляр и наклонная

Перпендикуляром, опущенным из данной точки на данную плоскость, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости. Конец этого отрезка, лежащего в плоскости, называется **основанием перпендикуляра**.

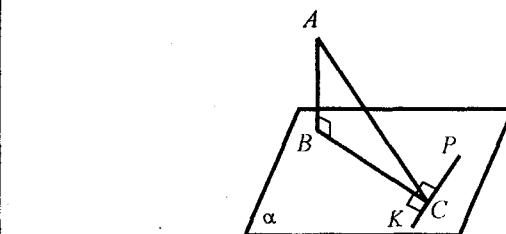
Наклонной, проведенной из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и не являющийся перпендикуляром к плоскости. Конец отрезка, лежащего в плоскости, называется **основанием наклонной**. Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки, называется **проекцией наклонной**.

<p>Перпендикуляр короче произвольной наклонной, проведенной к плоскости из той же точки.</p>  <p>$AC < AB$.</p>	<p>У равных наклонных, проведенных к плоскости из одной точки, проекции равны, и наоборот.</p>  <p>Если $AB = AD$, то $CB = CD$. Если $CB = CD$, то $AB = AD$.</p>	<p>Из двух наклонных, проведенных к плоскости из одной точки, больше та, у которой проекция больше, и наоборот.</p>  <p>Если $CB > CD$, то $AB > AD$. Если $AB > AD$, то $CB > CD$.</p>
---	---	--

Теорема о трёх перпендикулярах (имеет два утверждения: прямое и обратное)

Если прямая, лежащая в плоскости и проходящая через основание наклонной, перпендикулярна проекции наклонной, то она перпендикулярна и самой наклонной.

Если прямая, лежащая в плоскости и проходящая через основание наклонной, перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.

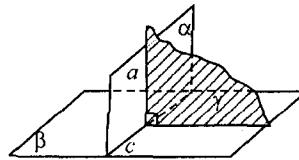


AB — перпендикуляр, AC — наклонная,
 BC — проекция наклонной AC на плоскость α ,
 KP — прямая на плоскости α .

- 1) Если $KP \perp BC$, то $KP \perp AC$.
- 2) Если $KP \perp AC$, то $KP \perp BC$.

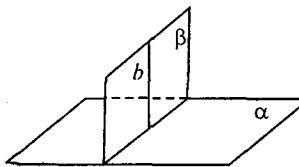
Перпендикулярность двух плоскостей

Определение. Две пересекающиеся плоскости называются **перпендикулярными**, если третья плоскость, перпендикулярная прямой пересечения этих плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым.



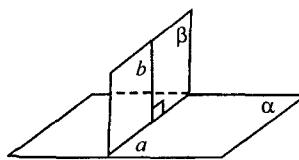
Если α пересекает β по прямой c , $\gamma \perp c$, γ пересекает α по прямой a , γ пересекает β по прямой b , $a \perp b$, $a \perp b$, то $\alpha \perp \beta$.

Признак. Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.



Если $b \perp \alpha$ и β проходит через b , то $\beta \perp \alpha$.

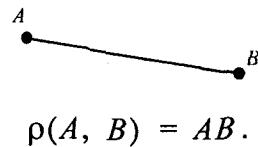
Свойство. Если прямая, лежащая в одной из двух перпендикулярных плоскостей, перпендикулярна линии их пересечения, то она перпендикулярна и другой плоскости.



Если $\beta \perp \alpha$, β пересекает α по a и $b \perp a$ (b лежит в β), то $b \perp \alpha$.

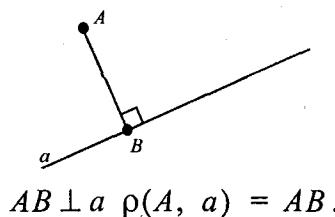
Расстояние в пространстве (ρ — расстояние)

Расстояние между двумя точками равно длине отрезка, соединяющего эти точки.



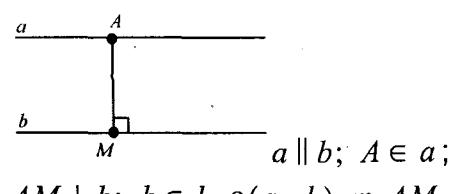
$$\rho(A, B) = AB.$$

Расстояние от точки до прямой — это длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на прямую.



$$AB \perp a \quad \rho(A, a) = AB.$$

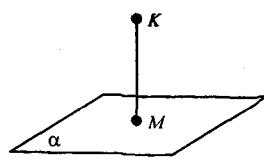
Расстояние между параллельными прямыми — это расстояние от какой-нибудь точки одной прямой до другой.



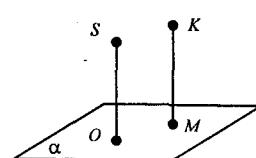
$$a \parallel b; A \in a; \\ AM \perp b; b \in b \quad \rho(a, b) = AM.$$

Расстояние от точки до плоскости — это длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.

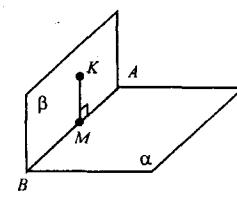
Проводим $KM \perp \alpha$ ($M \in \alpha$). $KM = \rho(K; \alpha)$.



$SO \perp \alpha$. Проводим $KM \parallel SO$. Тогда $KM \perp \alpha$ и $KM = \rho(K; \alpha)$.



Проводим через точку K плоскость $\beta \perp \alpha$ (β пересекает α по AB). Проводим $KM \perp AB$. Тогда $KM \perp \alpha$ и $KM = \rho(K; \alpha)$.



Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью

Расстоянием от прямой до параллельной ей плоскости называется расстояние от произвольной точки этой прямой до плоскости.

$$a \parallel \alpha, \quad A \in a, \quad \rho(a; \alpha) = \rho(A; \alpha).$$

Выбираем на прямой a произвольную точку A и находим расстояние от этой точки до плоскости α .

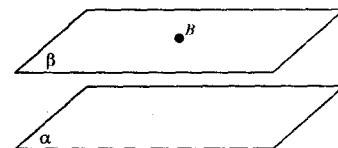


Расстояние между параллельными плоскостями

Расстоянием между двумя параллельными плоскостями называется расстояние от произвольной точки одной плоскости до второй плоскости.

$$\beta \parallel \alpha, \quad B \in \beta, \quad \rho(\beta; \alpha) = \rho(B; \alpha).$$

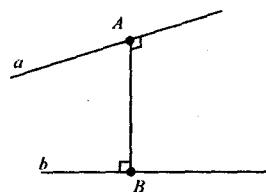
Выбираем в плоскости β произвольную точку B и находим расстояние от этой точки до плоскости α .



Расстояние между скрещивающимися прямыми

Общим перпендикуляром к двум скрещивающимся прямым называется отрезок с концами на этих прямых, перпендикулярный каждой из них.

Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра. Она равна расстоянию между параллельными плоскостями, которые проходят через эти прямые.

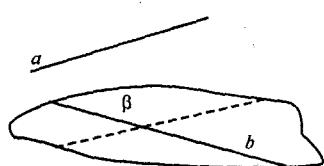


$$AB \perp a, AB \perp b; \quad \rho(a; b) = AB.$$

Прямые a и b — скрещивающиеся.

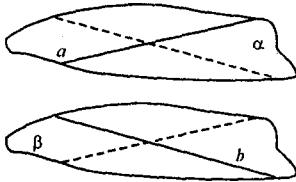
Способы вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми

Проводим через прямую b плоскость $\beta \parallel a$.



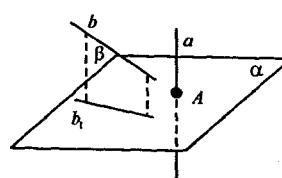
$$\rho(a; b) = \rho(a; \beta).$$

Проводим через прямые a и b параллельные плоскости $\alpha \parallel \beta$.



$$\rho(a; b) = \rho(\alpha; \beta).$$

Проводим плоскость $\alpha \perp a$ и проектируем прямые a и b на эту плоскость: $a \rightarrow A, b \rightarrow b_1$.

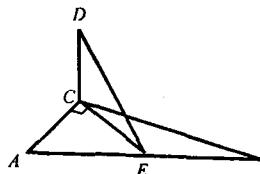


$$\rho(a; b) = \rho(A; b_1).$$

УЧЕНИЧЕСКАЯ СТРАНИЧКА.



1. Отрезок CD длиной l лежит вне плоскости прямоугольного треугольника ACB и перпендикулярен его катетам AC и BC . Найти расстояние от точки D до середины гипотенузы E , если $AC = b$, $BC = a$.



Дано: ΔACB ; $\angle ACB = 90^\circ$; $AC = b$; $BC = a$; $AE = BE$;

$CD \perp (ACB)$; $CD = l$; $CD \perp AC$; $CD \perp CB$.

Найти: $\rho(D;E)$ (ρ — расстояние).

Решение.

Соединим точки C и E ; D и E . Так как $CD \perp AC$ и $CD \perp CB$, то $CD \perp (ABC)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

Из ΔABC : $\angle ACB = 90^\circ$. По условию, $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$; E — центр описанной окружности

$AE = BE = CE = \frac{1}{2}AB$; $CE = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$. Из ΔDCE : $\angle DCE = 90^\circ$; $DC \perp (ABC)$; $DC \perp CE$

(по определению прямой, перпендикулярной плоскости). По теореме Пифагора,

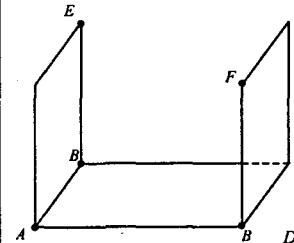
$$DE = \sqrt{CD^2 + CE^2}, DE = \sqrt{l^2 + \frac{a^2 + b^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4l^2 + a^2 + b^2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{4l^2 + a^2 + b^2}$.

2. $ABCD$ — параллелограмм. BE и FD — перпендикуляры к плоскости ABC .

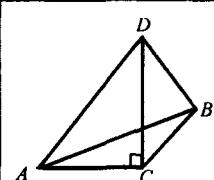
Доказать, что плоскости ABE и DFC параллельны.

Решение.



Так как $BE \perp (ABC)$ и $DF \perp (ABC)$, то $BE \parallel DF$ по свойству двух прямых, перпендикулярных плоскости. $AB \parallel DC$ — как противоположные стороны параллелограмма. $\left. \begin{array}{l} AB \parallel DC \\ BE \parallel DF \end{array} \right\} \Rightarrow (ABE) \parallel (DFC)$ по признаку параллельности двух плоскостей.

3. Отрезок CD перпендикулярен плоскости треугольника ABC , $\angle ACB = 90^\circ$; $DC = 7 \text{ см}$, $DA = DB = 11 \text{ см}$. Найти длину гипотенузы AB .



Решение.

1) $CD \perp (ABC)$. DA и DB — наклонные, CA и CB — их проекции на плоскость ABC . Так как $DA = DB$, то $CA = CB$.

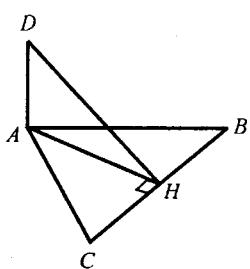
2) ΔADC : $\angle DCA = 90^\circ$ ($DC \perp (ABC)$; следовательно, $DC \perp AC$).

$$AC = \sqrt{AD^2 - DC^2}; AC = \sqrt{121 - 49} = \sqrt{72} (\text{см}).$$

$$3) \Delta ACB: \angle ACB = 90^\circ; AC = CB; AB = AC \cdot \sqrt{2}; AB = \sqrt{72} \cdot \sqrt{2} = 12 (\text{см}).$$

Ответ: 12 см.

4. В равнобедренном ΔABC основание $BC = 12$ см, боковая сторона равна 10 см. Из вершины A проведен перпендикуляр AD к плоскости ABC , $AD = 6$ см. Найти расстояние от точки D до стороны BC .



Решение.

1) Проведем AH — медиану в ΔABC к основанию BC ($AC = AB$).

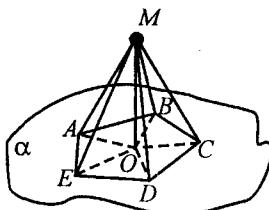
$CH = \frac{1}{2}BC$; $AH \perp BC$. Соединим точки D и H , $AD \perp (ABC)$, AH — проекция наклонной DH на плоскость ABC . Так как $BC \perp AH$, то $BC \perp DH$ по теореме о трех перпендикулярах; DH — искомое расстояние.

2) Из ΔACH : $\angle AHC = 90^\circ$; $AH = \sqrt{AC^2 - CH^2}$; $AH = \sqrt{100 - 36} = 8$ (см).

3) Из ΔADH : $\angle DAH = 90^\circ$; $DA \perp (ABC)$, $DA \perp AH$; $DH = \sqrt{DA^2 + AH^2}$; $DH = \sqrt{36 + 64} = 10$ (см).

Ответ: 10 см.

5. Если точка равноудалена от всех вершин многоугольника, то она проектируется на его плоскость в центр описанного круга.



Дано: $MA = MB = MC = MD = ME$, $MO \perp \alpha$.

Доказать: O — центр описанного круга.

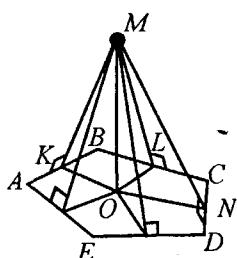
Анализ. Мы докажем, что O — центр описанного круга, если докажем, что точка O равноудалена от вершин A, B, C, \dots . Для этого проведем отрезки OA, OB, OC, \dots и сравним их.

Доказательство.

$OA = OB = OC = \dots$ (как проекции равных наклонных MA, MB, \dots), следовательно, O — центр описанного круга.

Если данная точка принадлежит плоскости многоугольника, то она проектируется в себя.

6. Доказать, что если точка равноудалена от всех сторон выпуклого многоугольника, то она проектируется на его плоскость в центр вписанного круга.



Дано: $MK \perp AB$, $ML \perp BC$, $MN \perp CD, \dots$,

$MK = ML = MN = \dots$, $MO \perp ABCDE \dots$

Доказать: O — центр вписанного круга.

Анализ. Мы докажем, что O — центр вписанного круга, если докажем, что точка O равноудалена от всех сторон многоугольника $ABCDE \dots$.

Доказательство.

Проведем отрезки OK, OL, ON, \dots

1) $OK \perp AB$, $OL \perp BC$, $ON \perp CD, \dots$ (обратная теорема о трех перпендикулярах);

2) $OK = OL = ON = \dots$ (как проекции равных наклонных MK, ML, \dots);

3) окружность $O(OK)$ по доказанному пройдет через точки K, L, \dots , а стороны многоугольника $ABCDE$ будут касательными, то есть O — центр вписанного круга.

Примечание. Если данная точка принадлежит плоскости многоугольника, то она проектируется в себя.

**Формулы зависимости стороны многоугольника
и радиусов описанной около него и вписанной в него окружностей**

R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности.

Правильный треугольник $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, a — сторона правильного треугольника.

Прямоугольный треугольник $R = \frac{c}{2}$, $r = \frac{a+b-c}{2}$, a, b — катеты, c — гипотенуза.

Произвольный треугольник $R = \frac{abc}{4S}$; $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$, $r = \frac{S}{p}$, $p = \frac{a+b+c}{2}$ (полупериметр),
 a, b, c — стороны треугольника, S — его площадь.

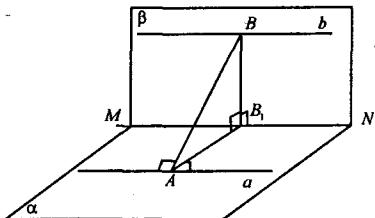
Квадрат $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $r = \frac{a}{2}$, a — сторона квадрата.

Правильный шестиугольник $R = a$, $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, a — сторона правильного шестиугольника.

Прямоугольник $R = \frac{d}{2}$, d — диагональ прямоугольника.

7. Две взаимно перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой MN . Прямая a принадлежит плоскости α и параллельна MN , прямая b принадлежит плоскости β и параллельна MN . Расстояние от a до MN равно 45 мм, а от b до MN — 60 мм. Найти расстояние между прямыми a и b .

Решение.



1) $(b \parallel MN, a \parallel MN) \Rightarrow a \parallel b$.

2) $B \in b$; $BB_1 \perp MN$; BB_1 — расстояние от прямой MN до B ;
 $BB_1 = 60$ мм. По теореме о прямой, лежащей в одной из двух перпендикулярных плоскостей и перпендикулярной линии их пересечения, $BB_1 \perp \alpha$.

3) $B_1A \perp a$, B_1A — расстояние от a до MN , $B_1A = 45$ мм.

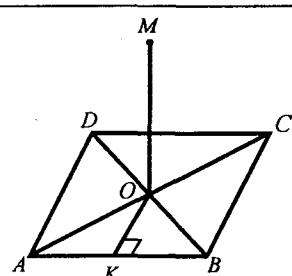
4) Соединим точки A и B . AB_1 — проекция наклонной AB на плоскость α . Так как $a \perp AB_1$, то $a \perp AB$ по теореме о трех перпендикулярах; AB — искомое расстояние.

5) Из ΔBB_1A : $\angle BB_1A = 90^\circ$ ($BB_1 \perp \alpha$, $BB_1 \perp AB_1$);

по теореме Пифагора $AB = \sqrt{BB_1^2 + AB_1^2}$; $AB = \sqrt{45^2 + 60^2} = \sqrt{5625} = 75$ (мм).

Ответ: 75 мм.

8. Через O — точку пересечения диагоналей квадрата $ABCD$ проведен перпендикуляр MO к его плоскости; $AD = 2a$. Найти расстояние между прямыми AB и MO .



Решение.

$AB \subset (\text{ABC})$, $MO \cap (\text{ABC}) = O$; $O \notin AB$.

Следовательно, AB и MO — скрещивающиеся прямые.
 KO — средняя линия ΔABD ; $KO \parallel AD$.

Так как $AB \perp AD$, то $AB \perp KO$
 $MO \perp (\text{ABC})$, следовательно, $MO \perp KO$ } — KO общий перпендикуляр скрещивающихся прямых AB и MO .

KO — искомое расстояние. $KO = \frac{1}{2}AD$; $KO = a$.

Ответ: a .

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ



1. Прямая BS образует прямые углы со сторонами AB и BC равностороннего треугольника ABC , BD — высота этого треугольника. Найти отрезок DS , если $AC = 2\text{ м}$, $BS = 1\text{ м}$.
2. Из точки M проведены к плоскости α наклонные MA и MB и перпендикуляр MC , равный a . Угол между каждой наклонной и перпендикуляром 45° .
Найти: а) площадь треугольника ABC , если проекции наклонных перпендикулярны; б) угол между наклонными.
3. Точка M одинаково удалена от всех вершин правильного треугольника ABC и удалена от его плоскости на 6 см . Найти расстояние от точки M до вершин треугольника, если его сторона равна $8\sqrt{3}\text{ см}$.
4. Точка, равноудаленная от всех вершин прямоугольника, находится на расстоянии 8 см от его плоскости. Найти расстояние от этой точки до вершин прямоугольника, если его меньшая сторона равна 8 см , а диагональ образует с большей стороной угол 30° .
5. В треугольнике ABC $AB = AC = 12\text{ м}$, высота $AF = 9\text{ м}$. Точка M удалена от каждой вершины треугольника ABC на 10 м . Найти расстояние от точки M до плоскости треугольника ABC .
6. В треугольнике ABC $\angle A = 45^\circ$, $BC = 12\text{ см}$. Точка M удалена от его плоскости на 6 см и находится на одинаковом расстоянии от всех вершин треугольника. Найти длины MA , MB и MC .
7. Через вершину D прямоугольника $ABCD$ проведен к его плоскости перпендикуляр DK .
Доказать, что $\angle KAB = \angle KCB = 90^\circ$.
8. Отрезок MC перпендикулярен плоскости равностороннего ΔABC
(рис. 1). Провести через точку M перпендикуляр к прямой AB .

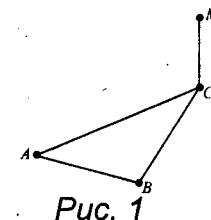


Рис. 1

9. Отрезок MD перпендикулярен плоскости прямоугольника $ABCD$.
Провести через точку M перпендикуляры к прямым BC и AB (рис. 2).

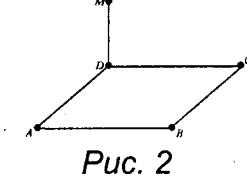


Рис. 2

10. Отрезок MN перпендикулярен плоскости равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$; точка N лежит на AC). Провести через точку M перпендикуляр к прямой BC (рис. 3).

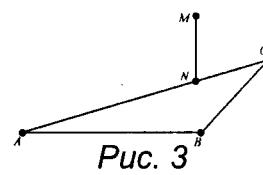


Рис. 3

11. Отрезок MD перпендикулярен плоскости равнобокой трапеции $ABCD$ ($AB = CD$). Провести через точку M перпендикуляр к прямой BC (рис. 4).

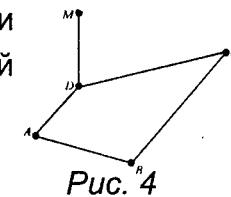


Рис. 4

12. К плоскости квадрата $ABCD$ проведен перпендикуляр BM длиной 4 дм . $AB = 2\text{ дм}$. Найти расстояние от точки M до сторон и диагоналей квадрата.
13. Через точку O пересечения диагоналей ромба к его плоскости проведен перпендикуляр OK длиной 5 см . Найти расстояние от точки K до каждой стороны ромба, если диагонали ромба равны 40 см и 30 см .

14. Отрезок EF является средней линией прямоугольного треугольника ABC ($\angle ACB = 90^\circ$). Через точку E проведен перпендикуляр ME к плоскости этого треугольника. Доказать, что: а) $MF \perp AC$; б) $MC = MA$.

15. Площадь ромба $36\sqrt{2} \text{ см}^2$, один из его углов 135° . Найти расстояние от точки, удаленной от каждой стороны ромба на 5 см , до его плоскости.

16. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10 см , а основание 12 см . Точка M удалена от каждой его стороны на 5 см . Найти: а) расстояние от точки M до плоскости треугольника; б) площадь круга, вписанного в треугольник.

17. Точка M одинаково удалена от сторон правильного шестиугольника, сторона которого равна 6 см . Расстояние от точки M до плоскости шестиугольника равно $3\sqrt{6} \text{ см}$. Найти расстояние от точки M до каждой стороны шестиугольника.

18. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 20 см . Найти расстояние между прямыми: а) AA_1 и BC ; б) BC и D_1C_1 ; в) A_1D_1 и B_1C (рис. 5).

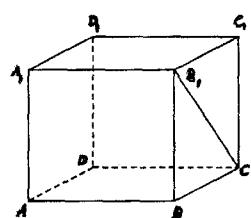


Рис. 5

19. Прямоугольники $ABCD$ и $ABMK$ лежат в разных плоскостях.

Сумма их периметров равна 46 см , $AK = 6 \text{ см}$, $BC = 5 \text{ см}$.

Найти расстояние между прямыми AK и BC (рис. 6).

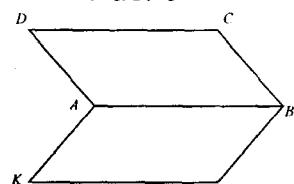


Рис. 6

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-3-1

Тема. Параллельность прямой и плоскости. Параллельность и перпендикулярность

B-I	7баллов	B-II	9баллов
1. Через центр O окружности с радиусом r проведена прямая OP , перпендикулярная плоскости окружности. Найти расстояние от точки P до точки A , лежащей на окружности, если $OP = 2 \text{ см}$, $r = 6 \text{ см}$.	1. Через точку O пересечения диагоналей квадрата со стороной 4 см проведена прямая OM , перпендикулярная плоскости квадрата. Найти расстояние от точки M до вершин квадрата, если $OM = 2\sqrt{2} \text{ см}$.		
2. Дан прямоугольник $ABCD$. Через прямую CD проведена плоскость α , перпендикулярная прямой BC . Доказать, что $AD \perp \alpha$.	2. Дан прямоугольник $ABCD$. Через вершину прямоугольника D проведена прямая d , перпендикулярная прямой CD . Доказать, что прямая AB перпендикулярна плоскости прямых d и AD .		
B-III	10баллов	B-IV	12баллов
1. Через середину O стороны AB равностороннего треугольника ABC со стороной 2 см проведена прямая OK , перпендикулярная плоскости треугольника. Найти расстояние от точки K до вершин треугольника ABC , если $OK = 1 \text{ см}$.	1. Через центр окружности проведена прямая a , перпендикулярная плоскости окружности. Доказать, что любая точка прямой a равноудалена от всех точек данной окружности.		
2. Дан квадрат $ABCD$. Через вершину квадрата проведена прямая a , перпендикулярная прямой AD . Доказать, что прямая BC перпендикулярна плоскости прямых a и AB .	2. Дан ромб $ABCD$. Через вершину C ромба проведена прямая c , перпендикулярная прямым AC и CD . Доказать, что прямая BD перпендикулярна плоскости прямых c и AC .		

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-3-2

Тема. Перпендикуляр и наклонная.

Свойство точки, равноудаленной от вершин многоугольника

B-I	7баллов	B-II	9баллов
1. К плоскости квадрата $ABCD$ проведен перпендикуляр DM , равный 12 см. Сторона квадрата равна 5 см. Найти: а) длины проекций наклонных MA , MB и MC ; б) длины наклонных.	1. Через середину гипотенузы прямоугольного треугольника ABC проведен к его плоскости перпендикуляр KO . Доказать, что наклонные KA , KB и KC равны. Найти длины проекций этих наклонных на плоскость треугольника, если $AC = BC = 6 \text{ см}$.		
2. Точка M находится на расстоянии 10 см от вершины равностороннего треугольника со стороной $6\sqrt{3}$ см. Найти расстояние от точки M до плоскости треугольника.	2. Точка M удалена от каждой вершины квадрата на 10 дм. Найти расстояние от точки M до плоскости квадрата, если его сторона равна $6\sqrt{2}$ дм.		

B-III	10 баллов	B-IV	12 баллов
1. Из точки M к плоскости проведены наклонные MA и MB длиной 10 см и 17 см. Найти расстояние от точки M до плоскости, если длины проекций пропорциональны числам 2 и 5.			1. Из точки A проведены к плоскости наклонные AB и AC длиной 12 см и 18 см. Найти длины проекций наклонных, если одна из них на 10 см больше другой.
2. Точка M удалена от каждой вершины прямоугольника на 10 дм. Найти расстояние от точки M до плоскости прямоугольника, если его стороны равны 8 дм и $4\sqrt{5}$ дм.			2. Катеты прямоугольного треугольника равны 42 см и 56 см. На каком расстоянии от плоскости треугольника находится точка, равноудаленная от каждой из вершин треугольника на 125 см?

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-3-3

Тема. Теорема о трёх перпендикулярах

B-I	7 баллов	B-II	9 баллов
1. Отрезок MA перпендикулярен плоскости равнобедренного ΔABC ; $AB = AC$. Провести через точку M перпендикуляр к прямой BC .			1. Отрезок MC перпендикулярен плоскости квадрата $ABCD$. Провести через точку M перпендикуляр к прямой BD .
2. К плоскости прямоугольного ΔABC ($\angle C = 90^\circ$) проведен перпендикуляр PB . $PA = 13$ см, $\angle B = 30^\circ$, $AC = 5$ см. Найти расстояние от точки P :			2. Сторона правильного ΔABC равна $2\sqrt{3}$ см. К плоскости треугольника проведен перпендикуляр AK длиной 4 см. Найти расстояние от точки K до стороны BC .
а) до прямой AC ; б) до плоскости треугольника ABC .			
B-III	10 баллов	B-IV	12 баллов
1. Отрезок MA перпендикулярен плоскости ромба $ABCD$. Провести через точку M перпендикуляр к прямой BD .			1. Отрезок MN перпендикулярен плоскости прямоугольного треугольника ABC (точка N лежит на гипотенузе AB). Провести через точку M перпендикуляры к прямым AC и BC .
2. Катеты прямоугольного треугольника ABC равны 9 см и 16 см. Через середину гипотенузы — точку O проведен перпендикуляр к плоскости треугольника длиной 6 см. Найти расстояния от концов перпендикуляра до катетов и вершины прямого угла треугольника.			2. Катет AC прямоугольного треугольника равен a , угол B равен φ . Через вершину прямого угла проведен к плоскости этого треугольника перпендикуляр MC длиной a . Найти расстояния от его концов до гипотенузы.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-3-4



Тема. Свойство точки, равноудаленной от сторон многоугольника

В-I	7 баллов	В-II	9 баллов
1. Точка K удалена от каждой стороны правильного треугольника на 30 см, а от его плоскости — на 18 см. Найти: а) длину радиуса окружности, вписанной в данный треугольник; б) длину стороны треугольника.		1. Точка M удалена от каждой стороны ромба на 20 см. Его диагонали равны 30 см и 40 см. Найти расстояние от точки M до плоскости ромба.	
2. Точка M одинаково удалена от всех сторон треугольника ABC , у которого $AB = 6\text{ см}$, $BC = 10\text{ см}$, $AC = 14\text{ см}$. Расстояние от точки M до плоскости треугольника равно 1 см. Найти расстояние от точки M до сторон треугольника.		2. Стороны треугольника равны 7 см, 24 см и 25 см. Точка M удалена от каждой его стороны на 5 см. Найти расстояние от точки M до плоскости этого треугольника.	
В-III	10 баллов	В-IV	12 баллов
1. Точка M удалена от каждой стороны прямоугольного треугольника на 5 см. Его катеты равны 9 см и 12 см. Найти расстояние от точки M до плоскости этого треугольника.		1. Сторона ромба $ABCD$ равна 20 см, площадь его равна 320 см^2 . Точка M удалена от плоскости ромба на 15 см и одинаково удалена от его сторон. Найти расстояние от точки M до сторон ромба.	
2. Прямоугольная трапеция с острым углом в 45° и большей боковой стороной, равной $6\sqrt{2}\text{ дм}$, расположена на плоскости α . На расстоянии 4 дм от плоскости α находится точка, равноудаленная от всех сторон трапеции. Найти расстояние от этой точки до сторон трапеции.		2. Точка, одинаково удаленная от всех сторон равнобокой трапеции, находится на расстоянии 3 см от её плоскости. Периметр трапеции равен 48 см, а острый угол 60° . Найти расстояние от этой точки до сторон трапеции.	

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-3-5

Тема. Перпендикулярность плоскостей



B-I	7 баллов	B-II	9 баллов
1. Прямые a , b и c , проходящие через точку O , попарно перпендикулярны. Доказать, что плоскость, проходящая через прямые a и b , перпендикулярна плоскости, проходящей через прямые a и c .	1. Через каждую из диагоналей квадрата проведена плоскость, перпендикулярная второй его диагонали. Доказать, что эти плоскости перпендикулярны.		
2. Из точек P и Q , лежащих в двух перпендикулярных плоскостях, проведены перпендикуляры PP_1 и QQ_1 на прямую пересечения плоскостей. Найти длину отрезка PQ_1 , если $P_1Q_1 = 2 \text{ см}$, $PP_1 = 3 \text{ см}$, $QQ_1 = 6 \text{ см}$.	2. Плоскости равнобедренных треугольников ABC и ABD с основаниями AB перпендикулярны. Найти расстояние между их вершинами C и D , если $AB = 5 \text{ см}$, $AC = 6 \text{ см}$, $AD = 8 \text{ см}$.		
B-III	10 баллов	B-IV	12 баллов
1. Через каждую из диагоналей ромба проведена плоскость, перпендикулярная второй его диагонали. Доказать, что эти плоскости перпендикулярны.	1. Плоскости α , β и γ попарно перпендикулярны. Доказать, что прямые, по которым пересекаются каждые две из этих плоскостей, тоже попарно перпендикулярны.		
2. Плоскости равностороннего треугольника ABC и квадрата $BCDE$ перпендикулярны. Найти расстояние между их вершинами A и D , если высота треугольника ABC равна 3 дм.	2. Плоскости прямоугольных треугольников ACD и BCD с прямыми углами C и D перпендикулярны. Найти расстояние между точками A и B , если $CD = a$, $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 60^\circ$.		

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-3-6

Тема. Расстояние между скрещивающимися прямыми



B-I	7 баллов	B-II	9 баллов
К плоскости квадрата $ABCD$ проведен перпендикуляр KD . Сторона квадрата равна 5 см. Найти расстояние между прямыми: а) AB и KD ; б) KD и AC .	K плоскости равнобедренного треугольника ABC проведен перпендикуляр AK . Площадь треугольника ABC равна 48 см^2 , $BC = 16 \text{ см}$, $AK = 6 \text{ см}$, $AB = AC$. Найти расстояние: а) между прямыми AK и BC ; б) от точки K до прямой BC .		
B-III	10 баллов	B-IV	12 баллов
Через вершину C прямого угла треугольника ABC проведена прямая a , перпендикулярная его плоскости. $AC = 15 \text{ см}$, $BC = 20 \text{ см}$. Найти расстояние между прямыми a и AB .	Через вершину острого угла C ромба $ABCD$ проведена прямая a , перпендикулярная его плоскости. $AB = m$, $\angle A = \alpha$. Найти расстояние между прямыми: а) a и AD ; б) AB и a .		

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА К-3-1

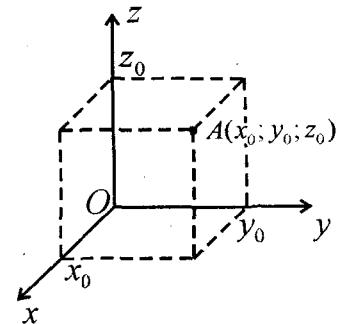
B-I	7 баллов	B-II	9 баллов
1. Отрезок длиной 13 см не пересекает плоскость. Концы отрезка удалены от плоскости на 2 см и 7 см. Найти длину проекции отрезка на плоскость.	1. Концы отрезка, не пересекающего плоскость, удалены от неё на 3 см и 11 см. Проекция отрезка на плоскость равна 15 см. Найти длину отрезка.		
2. Из точки A на плоскость α проведен перпендикуляр $AO = 5$ см и две наклонные $AB = AC = 6$ см. Угол между ними равен 60° , а между их проекциями — 90° . Найти расстояние от точки A до плоскости α .	2. Из точки A на плоскость α проведены две наклонные $AB = AC = 6$ см. Угол между ними равен 60° , а между их проекциями — 90° . Найти расстояние от точки A до плоскости α .		
3. Из вершины B прямоугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 5$ см, $BC = 10$ см к его плоскости проведен перпендикуляр $BM = 5$ см. Найти расстояние от точки M до прямых CD и CA .	3. Из вершины C прямоугольника $ABCP$ со сторонами 6 см и 12 см к его плоскости проведен перпендикуляр $CM = 6$ см. Найти расстояние от точки M до прямых BP и BA .		
B-III	10 баллов	B-IV	12 баллов
1. Отрезок длиной 17 см не пересекает плоскость. Концы отрезка удалены от плоскости на 4 см и 12 см. Найти длину проекции отрезка на плоскость.	1. Концы отрезка, не пересекающего плоскость, удалены от неё на 3 см и 8 см. Проекция отрезка на плоскость равна 12 см. Найти длину отрезка.		
2. Из точки, находящейся на расстоянии 5 см от плоскости α , проведены две наклонные на плоскость, образующие между собой угол 60° , а с перпендикуляром к плоскости — угол 45° . Найти расстояние между основаниями наклонных.	2. Из точки, которая находится на расстоянии 6 см от плоскости, проведены две наклонные. Найти расстояние между основаниями наклонных, если угол между наклонной и её проекцией равен 30° , а между проекциями — 120° .		
3. Из вершины P прямоугольника $ABCP$ со сторонами 8 см и 16 см к его плоскости проведен перпендикуляр $PM = 8$ см. Найти расстояние от точки M до прямых AB и AC .	3. Из вершины A прямоугольника $ABCP$ со сторонами 7 см и 14 см к его плоскости проведен перпендикуляр $AM = 7$ см. Найти расстояние от точки M до прямых PC и PB .		

§4. Декартовы координаты и векторы в пространстве

Оси координат:

ось x – ось абсцисс, ось y – ось ординат, ось z – ось аппликат.

Точка O – начало координат. Произвольной точке пространства ставят в соответствие три числа: абсциссу x_0 , ординату y_0 и аппликату z_0 . Эти числа называются декартовыми координатами заданной точки.



Расстояние между двумя точками: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Координаты середины отрезка

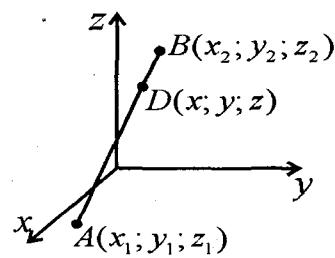
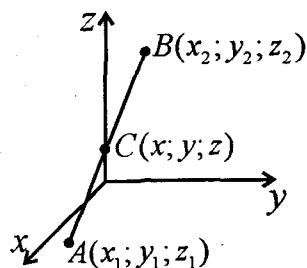
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}, z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Координаты точки, делящей отрезок в

заданном отношении

Если $\frac{AD}{DB} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, то $x = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}x_1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}x_2$,

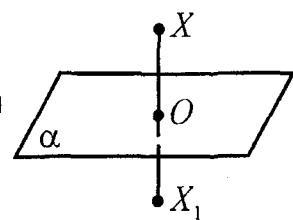
$$y = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}y_1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}y_2, z = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}z_1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}z_2.$$



Преобразование фигуры F в фигуру F_1 называется **движением**, если оно сохраняет расстояние между точками, т. е. переводит любые две точки A и B фигуры F в точки A_1 и B_1 фигуры F_1 так, что $AB = A_1B_1$.

Симметрия относительно плоскости

Пусть α – произвольная фиксированная плоскость. Из точки X опускают перпендикуляр на плоскость α (O – точка пересечения его с плоскостью α) и на его продолжении за точку O откладывается отрезок OX_1 , равный OX . Точки X и X_1 называют



симметричными относительно плоскости α .

Преобразование фигуры F в F_1 , при котором каждая точка X фигуры F переходит в точку X_1 , симметричную X относительно плоскости α , называется **преобразованием симметрии относительно плоскости α** . При этом фигуры F и F_1 называются **симметричными относительно плоскости α** .

На рисунке 1 изображены две сферы, симметричные относительно плоскости α .

Если преобразование симметрии относительно плоскости переводит фигуру в себя, то фигура называется **симметричной относительно плоскости α** , а плоскость α называется **плоскостью симметрии**.

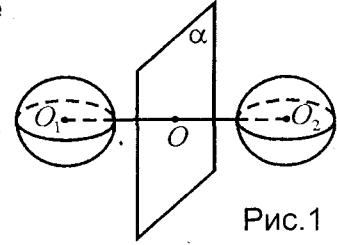


Рис.1

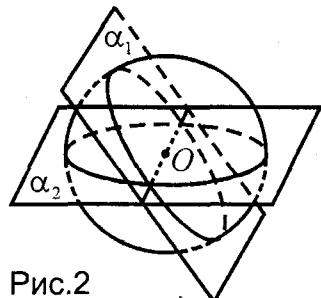


Рис.2

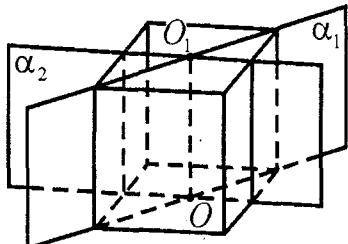


Рис.3

На рисунке 2 изображены две плоскости симметрии сферы. Заметим, что у сферы таких плоскостей симметрии бесконечное множество. У куба также имеются плоскости симметрии. На рисунке 3 изображены две из них.

Параллельным переносом в пространстве называется такое преобразование, при котором произвольная точка $(x; y; z)$ фигуры F переходит в точку $(x + a; y + b; z + c)$, где a, b и c – постоянные. Параллельный перенос в пространстве задается формулами $x_1 = x + a, y_1 = y + b, z_1 = z + c$.

На рисунке 4 призма $ABC A_1 B_1 C_1$ при параллельном переносе переходит в призму $A' B' C' A'_1 B'_1 C'_1$.

Сформулируем некоторые свойства параллельного переноса:

1. Параллельный перенос есть движение.
2. При параллельном переносе точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и то же расстояние.
3. При параллельном переносе прямая переходит в параллельную прямую (или в себя).
4. Каковы бы ни были две точки A и A_1 , существует, и притом единственный, параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку A_1 .
5. При параллельном переносе в пространстве каждая плоскость переходит либо в себя, либо в параллельную ей плоскость.

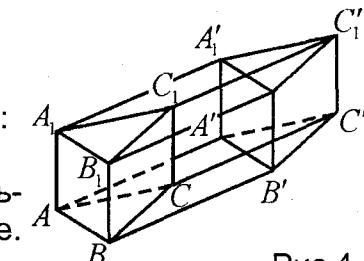


Рис.4

Гомотетия. Пусть F – данная фигура и O – фиксированная точка (рис. 5). Проведем через произвольную точку X фигуры F луч OX и отложим на нем отрезок OX_1 , равный kOX , где k – положительное число. Преобразование фигуры F , при котором каждая ее точка X переходит в точку X_1 , построенную указанным способом, называется **гомотетией относительно центра O** . Число k называется **коэффициентом гомотетии**. Фигуры F и F_1 называются **гомотетичными**.

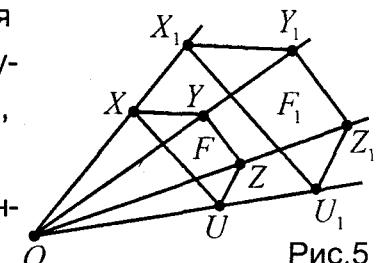


Рис.5

Рис.6

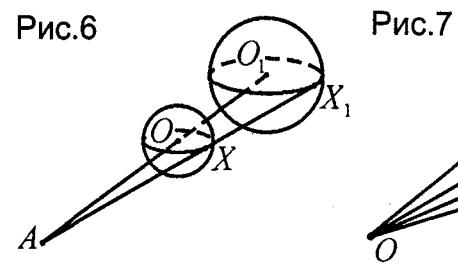
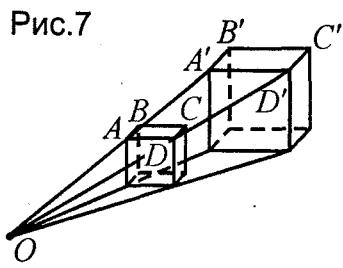


Рис.7



На рисунке 5 четырехугольник $X_1 Y_1 Z_1 U_1$ гомотетичен четырехугольнику $XYZU$ с центром гомотетии O и коэффициентом гомотетии $k = 2$.

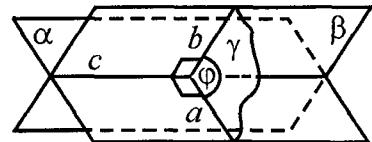
Преобразования подобия. Преобразование фигуры в фигуру называется преобразованием подобия, если при этом преобразовании расстояния между точками изменяются (увеличиваются или уменьшаются) в одно и то же число раз. Это значит, что если произвольные точки A и B фигуры F при этом преобразовании переходят в точки A_1 и B_1 фигуры F_1 , то $A_1B_1 = kAB$, где $k > 0$.

Число k называется **коэффициентом подобия** ($k > 0$). При $k = 1$ преобразование подобия является **движением**.

Углом между плоскостями α и β , которые пересекаются по прямой c , называется угол между прямыми, по которым третья плоскость γ , перпендикулярная линии пересечения, пересекает плоскости α и β .

Угол между параллельными плоскостями считается равным 0° .

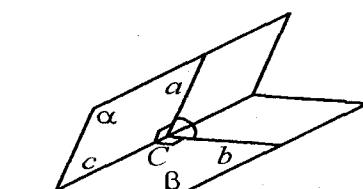
Угол между плоскостями не превышает 90° .



$$\alpha \times \beta = c; \gamma \perp c; \gamma \times \alpha = a; \\ \gamma \times \beta = b; \angle(\alpha, \beta) = \angle(a, b).$$

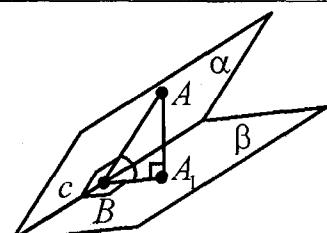
Способы построения:

a) на прямой c пересечения плоскостей α и β выбираем точку C ; через C в плоскостях α и β проводим прямые a и b , перпендикулярные c . Угол между прямыми a и b равен углу между плоскостями.



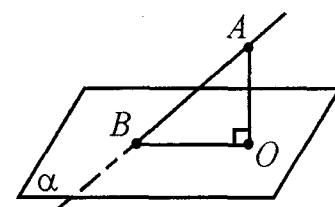
$$\alpha \times \beta = c; \angle(\alpha, \beta) = \angle(a, b); \\ C \in c; a \perp c; b \perp c; a \subset \alpha; \\ b \subset \beta.$$

б) возьмем точку $A \in \alpha; A \notin c$; опустим из неё перпендикуляры на прямую c и плоскость β : $AB \perp c; AA_1 \perp \beta$. Соединим точки B и A_1 : $A_1B \perp c$ по теореме о трёх перпендикулярах; \angleABA_1 – угол между плоскостями α и β по определению.



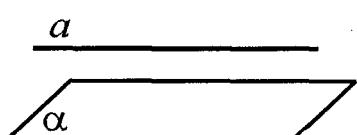
Углом между прямой и плоскостью, которая её пересекает, называется угол между этой прямой и её проекцией на плоскость.

Для построения проекции прямой a на плоскость α достаточно найти две точки проекции: например, точку пересечения прямой a и плоскости α и основание любого перпендикуляра, опущенного из второй точки прямой a на плоскость.



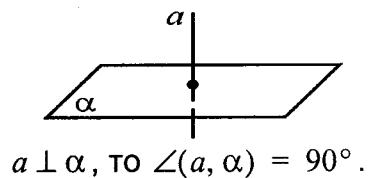
$AO \perp \alpha$, BO – проекция AB на плоскость α ;
 $\angle ABO$ – угол между прямой AB и плоскостью α .

Угол между параллельными прямой и плоскостью считается равным 0° .



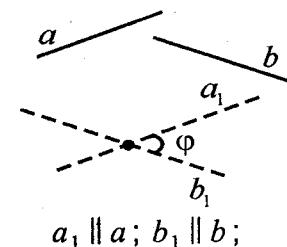
Если $a \parallel \alpha$ (a лежит в α),
то $\angle(a, \alpha) = 0$.

Угол между перпендикулярными прямой и плоскостью равен 90° .



$$a \perp \alpha, \text{то } \angle(a, \alpha) = 90^\circ.$$

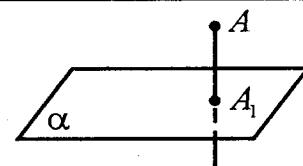
Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между прямыми, которые пересекаются и параллельны данным скрещивающимися прямыми.
Если угол между скрещивающимися прямыми равен 90° , то они называются **перпендикулярными**.



$$\begin{aligned} a_1 &\parallel a; b_1 \parallel b; \\ \angle(a; b) &= \angle(a_1; b_1) = \varphi \\ (\text{меньший из смежных углов}); \\ 0^\circ < \angle(a; b) &\leq 90^\circ. \end{aligned}$$

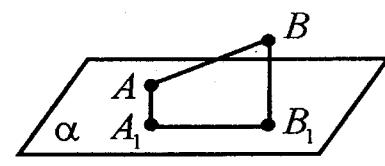
Площадь ортогональной проекции

Ортогональной проекцией точки на плоскость называется основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость.



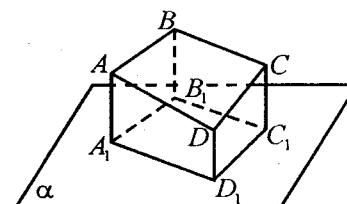
$$\begin{aligned} AA_1 &\perp \alpha; AA_1 \times \alpha = A_1; \\ A_1 &- \text{проекция } A \text{ на плоскость } \alpha. \end{aligned}$$

Проекцией отрезка на плоскость называется отрезок, соединяющий проекции его концов.



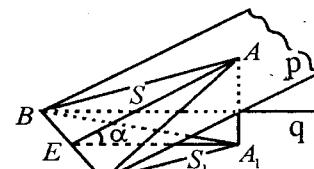
$$A_1B_1 - \text{проекция отрезка } AB \text{ на плоскость } \alpha.$$

Проекцией многоугольника на плоскость называется фигура, ограниченная проекциями сторон многоугольника на эту плоскость.



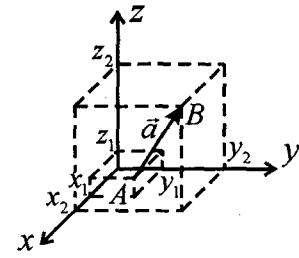
$$A, B, C, D, - \text{проекция четырехугольника на плоскость } \alpha$$

Площадь ортогональной проекции многоугольника равна произведению его площади на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции.



$$S_1 = S \cos \alpha$$

Вектором называется направленный отрезок: $\vec{AB} = \vec{a}$.



Координатами вектора называются разности координат конца и начала вектора.

$$\vec{a}(a_1; a_2; a_3), \text{ где } a_1 = x_2 - x_1, \\ a_2 = y_2 - y_1, a_3 = z_2 - z_1.$$

Координаты вектора не изменяются при параллельном переносе. У равных векторов координаты равны.

$$\vec{a}(a_1; a_2; a_3) = \vec{b}(b_1; b_2; b_3) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$$

Модулем (абсолютной величиной) вектора называется длина отрезка, которым задается вектор:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Нулевым вектором называется вектор, конец которого совпадает с началом. На рисунках такой вектор изображается точкой и обозначается $\vec{0}$. Модуль нулевого вектора равен нулю, а его направление не определено.

Коллинеарными векторами называются векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых. (Нулевой вектор считается коллинеарным произвольному вектору).

Виды коллинеарных векторов

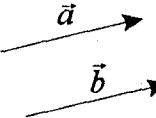
сонаравленные



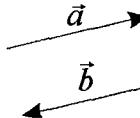
противоположно направленные



равные



противоположные



Если \vec{a} и \vec{b} коллинеарны, то $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3}$ (соответствующие координаты пропорциональны).

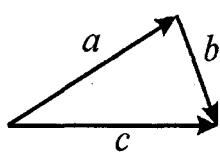
Действия с векторами

Суммой векторов $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ в пространстве называется вектор $\vec{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$.

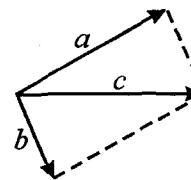
Сложение двух векторов

Сумма двух векторов находится с помощью правила треугольника или правила параллелограмма: $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$.

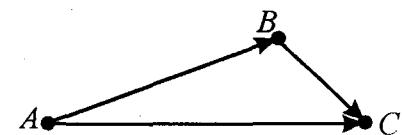
Правило треугольника



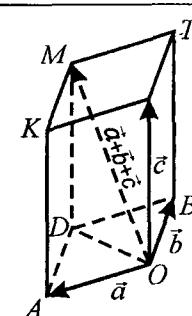
Правило параллелограмма



Для произвольных трех точек A, B, C имеет место равенство: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.



Сумма трех векторов, непараллельных одной плоскости, находится по правилу параллелепипеда:



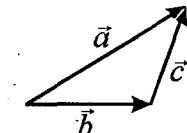
$$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}.$$

Разностью векторов $\bar{a}(a_1; a_2; a_3)$ и $\bar{b}(b_1; b_2; b_3)$ в пространстве называется вектор $\bar{c}(a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$.

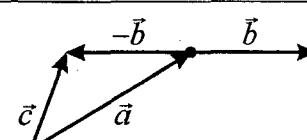
Вычитание векторов

Разность двух векторов \bar{a} и \bar{b} – это такой вектор \bar{c} , который в сумме с вектором \bar{b} дает вектор \bar{a} :

$$\bar{b} + \bar{c} = \bar{a} \Rightarrow \bar{c} = \bar{a} - \bar{b}.$$



Вектор \bar{c} можно найти также, прибавляя к вектору \bar{a} вектор $-\bar{b}$, противоположный вектору \bar{b} : $\bar{c} = \bar{a} + (-\bar{b})$.

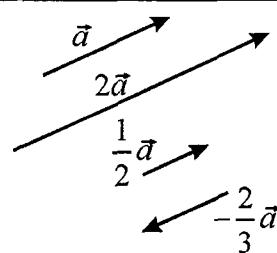


Произведением вектора $\bar{a}(a_1; a_2; a_3)$ на число λ называется вектор $(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$.

Умножение вектора на число

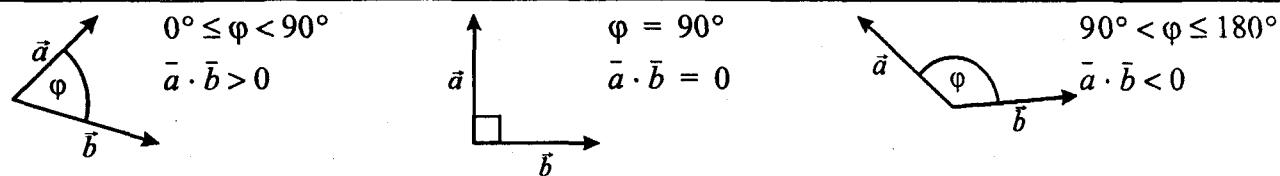
Произведение вектора \bar{a} на число λ – это коллинеарный ему вектор $\lambda\bar{a}$, сонаправленный с вектором \bar{a} , если $\lambda > 0$, и направленный противоположно к нему, если $\lambda < 0$.

Если $\lambda = 0$, то $\lambda\bar{a} = \bar{0}$. Модуль вектора $\lambda\bar{a}$: $|\lambda\bar{a}| = |\lambda||\bar{a}|$.



Скалярным произведением векторов $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ в пространстве называется число $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$:

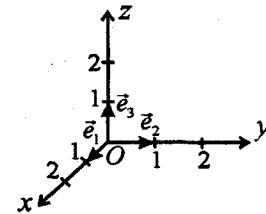
1) $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$; 2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$; 3) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ – условие перпендикулярности двух векторов. $\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$



Единичные векторы – это векторы, модули которых – единицы.

Координатные векторы (орты) направлены вдоль осей координат. Модули этих векторов равны 1.

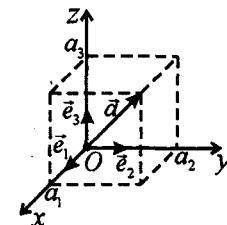
$$\vec{e}_1(1;0;0), \vec{e}_2(0;1;0), \vec{e}_3(0;0;1).$$



Произвольный вектор \vec{a} можно разложить единственным способом по координатным векторам.

$$\vec{a}(a_1; a_2; a_3) = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3.$$

Коэффициенты разложения a_i являются проекциями вектора \vec{a} на оси координат.



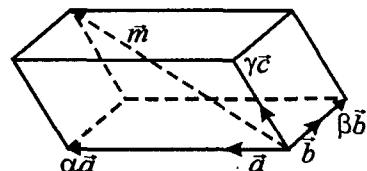
Разложение вектора в пространстве по трем некомпланарным векторам

Компланарными называются векторы, параллельные одной и той же плоскости.

\vec{m} – произвольный вектор пространства,

\vec{a}, \vec{b} и \vec{c} – некомпланарны (то есть непараллельны одной плоскости) векторы.

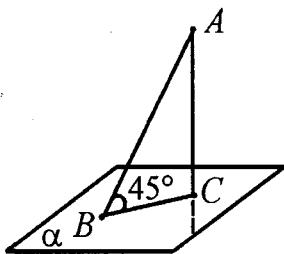
Всегда существует разложение: $\vec{m} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ (α, β и γ – единственные).



УЧЕНИЧЕСКАЯ СТРАНИЧКА

1. Наклонная равна a и образует с плоскостью угол 45° . Найти её проекцию на плоскость.

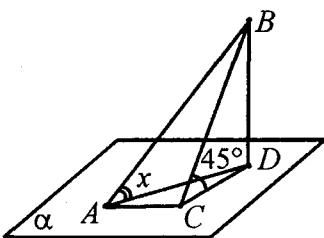
Решение.



Из точки A проведем перпендикуляр AC на плоскость α и соединим точки C и B . $AC \perp \alpha$, AB – наклонная, CB – проекция наклонной AB на плоскость. $\angle ABC = 45^\circ$. Из $\triangle ABC$: $\angle ACB = 90^\circ$ ($AC \perp \alpha$, $AC \perp BC$), $BC = AB \cos \angle ABC$; $BC = a \cos 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

2. Катет AC равнобедренного прямоугольного $\triangle ABC$ лежит в плоскости α , а катет BC образует с ней угол 45° . Найти угол, который образует гипотенуза AB с плоскостью α .



Решение.

1) Проведем $BD \perp \alpha$; CD – проекция катета CB на плоскость α , $\angle BCD = 45^\circ$; AD – проекция гипотенузы AB ; $\angle BAD$ – искомый угол.

2) $\triangle ABC$: $\angle ACB = 90^\circ$; $AC = BC$.

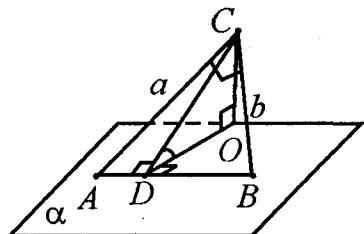
Обозначим BC через a . $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

3) $\triangle BCD$: $\angle BDC = 90^\circ$ ($BD \perp \alpha$; $BD \perp DC$); $BD = CB \sin \angle BCD$; $BD = a \sin 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

4) $\triangle ABD$: $\angle BDA = 90^\circ$; $\sin \angle BAD = \frac{BD}{AB} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$; следовательно, $\angle BAD = 30^\circ$.

Ответ: 30° .

3. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b . Найти расстояние от вершины прямого угла до плоскости, проходящей через гипотенузу и образующий угол 30° с плоскостью треугольника.



Решение

Проведем $CO \perp AB$; CD – искомое расстояние; DO – проекция наклонной CD на плоскость α . По теореме о трех перпендикулярах, $DO \perp AB$. Тогда $\angle CDO = 30^\circ$ – угол между плоскостями $\triangle ABC$ и α . $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CD$;

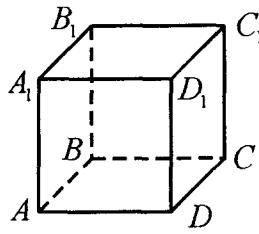
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot CB; \text{ отсюда } AB \cdot CD = AC \cdot CB; CD = \frac{AC \cdot CB}{AB}; CD = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$\text{Из } \triangle DCO: CO = \frac{1}{2}DC; CO = \frac{1}{2} \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{ab}{2\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Найти угол между прямыми AA_1 и DC .

Решение.



1) Прямые AA_1 и DC – скрещивающиеся ($DC \subset (ABC)$, $AA_1 \times (ABC) = A$, $A \notin DC$).

2) $DD_1 \parallel AA_1$.

3) $\angle D_1DC = 90^\circ$ – искомый угол.

Ответ: 90° .

5. Найти площадь ортогональной проекции треугольника со сторонами 13 см, 14 см, 15 см на плоскость α , образующую с плоскостью треугольника угол 60° .

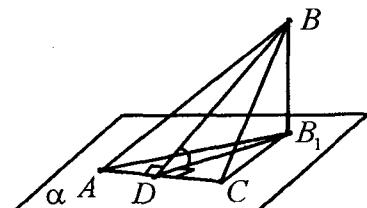
Решение.

$$S_1 = S \cos \varphi; S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; p = \frac{a+b+c}{2}; p = \frac{13+14+15}{2} = 21 \text{ (см);}$$

$$S = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84 \text{ (см}^2\text{)}; S = 84 \cdot \cos 60^\circ = 42 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: $42 \text{ (см}^2\text{)}$.

6. Ортогональной проекцией треугольника ABC на плоскость α является треугольник AB_1C . Высота BD треугольника ABC образует с плоскостью α угол 60° . Найти площадь треугольника AB_1C , если $AC = 5 \text{ см}$, $BD = 6 \text{ см}$.



Решение.

$BB_1 \perp \alpha$, B_1D – проекция высоты BD ΔABC на плоскость α .

$\angle BDB_1 = 60^\circ$ – угол между высотой BD и плоскостью α .

Поскольку $AC \perp BD$, то, по теореме о трех перпендикулярах, $AC \perp DB_1$; $\angle BDB_1$ – угол между плоскостями α и (ABC) .

$$S_{AB_1C} = S_{ABC} \cdot \cos \angle BDB_1; S_{AB_1C} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 7,5 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: $7,5 \text{ (см}^2\text{)}$.

7. На оси аппликат найти точку A , равноудаленную от точек $M(-2;3;5)$ и $N(3;-5;1)$.

Решение

Пусть точка A имеет координаты $A(0;0;z)$. По условию, $AM = AN$, откуда $AM^2 = AN^2$.

Так как $AM^2 = 4 + 9 + (z-5)^2$, $AN^2 = 9 + 25 + (z-1)^2$, то $13 + (z-5)^2 = 34 + (z-1)^2$;

$8z = 3; z = \frac{3}{8}$. Следовательно, $A\left(0;0;\frac{3}{8}\right)$.

Ответ: $A\left(0;0;\frac{3}{8}\right)$.

8. Точка $M(2;6;3)$ – середина отрезка, концы которого находятся на оси Ox и в плоскости yz . Найти координаты концов и длину отрезка.

Произвольная точка, лежащая на оси Ox , имеет координаты $(x;0;0)$; произвольная точка, лежащая в плоскости yz , имеет координаты $(0;y;z)$. Пусть точка $M(2;6;3)$ является серединой отрезка, концами которого являются точки $A(x;0;0)$, $B(0;y;z)$.

Тогда: $2 = \frac{x+0}{2}$, $6 = \frac{0+y}{2}$, $3 = \frac{0+z}{2}$, откуда $x = 4$, $y = 12$, $z = 6$. Получим

$$A(4;0;0), B(0;12;6), AB = \sqrt{(-4)^2 + 12^2 + 6^2} = 14.$$

Ответ: $A(4;0;0)$, $B(0;12;6)$, $AB = 14$.

9. Концы отрезка $A(5;-2;1)$ и $B(5;3;6)$. Найти точку, симметричную середине отрезка относительно плоскости xz .

Пусть серединой отрезка AB является точка $M(x;y;z)$. Найдем ее координаты по формулам $x = \frac{x_1+x_2}{2}$, $y = \frac{y_1+y_2}{2}$, $z = \frac{z_1+z_2}{2}$, где x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 – координаты концов: $x = \frac{5+5}{2} = 5$; $y = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}$; $z = \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2}$. Следовательно, $M(5;0,5;3,5)$.

Тогда симметричной точке M относительно плоскости xz является точка $M_1 = (5;-0,5;3,5)$.

Ответ: $M_1 = (5;-0,5;3,5)$.

10. При параллельном переносе точка $A(2;1;-1)$ переходит в точку $A_1(1;-1;0)$.

В какую точку переходит точка M , симметричная точке A относительно плоскости xy ?

Пусть параллельный перенос, который переводит точку A в точку A_1 , задается формулами $x' = x+a$, $y' = y+b$, $z' = z+c$. Подставив вместо x , y , z координаты точки A , а вместо x' , y' , z' – координаты точки A_1 , найдем числа a , b , c . $1 = 2+a$, $-1 = 1+b$, $0 = -1+c$, откуда $a = -1$, $b = -2$, $c = 1$. Следовательно, $x' = x-1$, $y' = y+2$, $z' = z+1$ – формулы заданного параллельного переноса.

При симметрии относительно плоскости xy точка $A(2;1;-1)$ переходит в точку $M(2;1;1)$. Заданный параллельный перенос точку M переведет в точку M_1 , координаты которой $x_1 = 2-1 = 1$, $y_1 = 1-2 = -1$, $z_1 = 1+1 = 2$.

Следовательно, точка M перейдет в точку $M_1(1;-1;2)$.

Ответ: $M_1(1;-1;2)$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

- На оси x найти точку, равноудаленную от точек $B(3;-2;4)$ и $C(0;5;-1)$.
- Даны вершины параллелограмма $ABCD$: $A(-3;-6;-1)$, $B(-1;2;-3)$, $C(3;1;1)$. Найти координаты четвертой вершины.
- При некотором параллельном переносе точка $M(4;-2;0)$ переходит в точку $K(-1;3;4)$. В какую точку перейдет при этом параллельном переносе точка $P(2;1;-3)$?



4. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ является ромбом, если $A(2;3;4)$, $B(4;-2;2)$, $C(0;-1;-2)$, $D(-2;4;0)$.
5. Известны координаты вершин треугольника ABC : $A(0;3;4)$, $B(4;-1;2)$, $C(1;1;2)$. Найти длину его медианы, проведенной через вершину C .
6. Стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 см и $6\sqrt{3} \text{ см}$. К плоскости прямоугольника через точку пересечения его диагоналей проведен перпендикуляр OK длиной 6 см . Найти углы между плоскостью прямоугольника и прямыми KA , KB , KC и KD .
7. К плоскости α проведены наклонные MA , MB и перпендикуляр MO . Углы между MB , MA и плоскостью α равны соответственно 30° и 45° . $MO = 15 \text{ см}$. Найти длины наклонной MA и проекции наклонной MB на плоскость α .
8. Через середину гипотенузы прямоугольного треугольника ABC проведен к его плоскости перпендикуляр KO длиной $8,5 \text{ см}$; $BC = 8 \text{ см}$, $AC = 15 \text{ см}$. Найти углы между наклонными KA , KB , KC и плоскостью треугольника.
9. Через вершину M равностороннего треугольника MPK проведен к его плоскости перпендикуляр MC . Угол между прямой CK и плоскостью треугольника равен 60° . $PK = 24 \text{ см}$. Найти длины перпендикуляра MC и наклонной CP .
10. Через вершину тупого угла ромба $ABCD$ проведен к его плоскости перпендикуляр DK длиной a . $AB = a$, $\angle A = 60^\circ$. Найти: а) углы между плоскостью ромба и прямыми AK , BK , CK ; б) угол между прямой AC и плоскостью DKB .
11. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вычислить угол между плоскостями:
а) ADD_1 и ABC ; б) DCC_1 и ABC ;
в) ABC и A_1DC ; г) ABB_1 и A_1DC .
12. Угол между плоскостями α и β равен 60° . Точка A , лежащая в плоскости α , удалена от β на 12 см . Вычислить расстояние:
а) от точки A до линии пересечения плоскостей;
б) от проекции точки A на плоскость β до линии пересечения плоскостей.
13. Через вершину D квадрата $ABCD$ проведен к его плоскости перпендикуляр DK , равный 10 см . Угол между плоскостями ABC и KBC равен 45° . Найти площадь: а) квадрата $ABCD$;
б) треугольника BCK .
14. Через вершину острого угла прямоугольного треугольника ABC проведен перпендикуляр AD к его плоскости; $AD = 6 \text{ см}$, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$. Угол между плоскостями BCD и ABC равен 60° . Вычислить: а) угол между плоскостями BAD и CAD ;
б) длины наклонных DC и DB .
15. Через центр правильного треугольника ABC проведен к его плоскости перпендикуляр MO . $AB = a\sqrt{3}$. Угол между прямой MA и плоскостью треугольника равен 45° . Вычислить угол между плоскостями:
а) AMO и BMO ;
б) BMC и ABC .
16. Плоскости равносторонних треугольников ABC и ABD перпендикулярны. Вычислить угол между:
а) прямой DC и плоскостью ABC ;
б) плоскостями ADC и BDC .

17. Прямоугольник $ABCD$ и прямоугольный треугольник DCK лежат в разных плоскостях. Вершина K проектируется в точку B . $BK = 4 \text{ см}$, $AB = 4\sqrt{2} \text{ см}$, $AD = 4 \text{ см}$.

Найти: а) угол между прямыми DK и AB ;

б) угол между прямыми KC и AD ;

в) расстояние между прямыми AB и KC .

18. Через середину стороны AD квадрата $ABCD$ проведен к его плоскости перпендикуляр KE длиной a ; $AB = 2a$.

Найти угол между прямыми:

а) AK и DC ;

б) AB и KC .

19. Через катет равнобедренного прямоугольного треугольника, равный a , проведена плоскость α . Угол между плоскостью треугольника и плоскостью α равен 45° .

Найти длины проекций сторон данного треугольника на плоскость α .

20. Сторона AB квадрата $ABCD$ лежит в плоскости α . Прямая DC удалена от этой плоскости на 18 см ; $BC = 36 \text{ см}$. Вычислить:

а) угол между плоскостью квадрата и плоскостью α ;

б) площадь проекции квадрата $ABCD$ на плоскость α .

21. Через вершину D тупого угла ромба $ABCD$ проведен к его плоскости перпендикуляр DM длиной $9,6 \text{ см}$. Диагонали ромба равны 12 см и 16 см .

Вычислить углы между плоскостями:

а) ABC и MBC ;

б) AMD и CDM .

22. Через центр O квадрата $ABCD$ проведен к его плоскости перпендикуляр KO .

Угол между прямой KC и плоскостью квадрата равен 60° ; $AB = 18 \text{ см}$.

Вычислить угол между плоскостями:

а) AKC и DKC ;

б) ABC и BKC .

23. Точки $A(3;1;8)$, $B(4;7;1)$, $C(3;5;-8)$ – вершины параллелограмма $ABCD$. Найти координаты вершины D .

24. В треугольнике ABC точка $N(1;3;4)$ – середина BC , $P(2;7;-1)$ – середина AC .

Найти координаты вектора \vec{AB} .

25. При каких α и β вектор $\vec{a} = (3;-1;\alpha)$ перпендикулярен вектору $\vec{b} = (2;\beta;1)$,

если $|\vec{b}| = 3$?

26. Даны три точки $A(2;1;-1)$, $B(3;2;-1)$, $C(3;1;0)$. Найти величину угла между векторами \vec{AB} и \vec{AC} .

27. В призме $ABCA_1B_1C_1$ точка M лежит на отрезке B_1C_1 так, что $\frac{B_1M}{B_1C_1} = \frac{2}{3}$.

Разложить вектор \vec{AM} на векторы \vec{AB} , \vec{AC} , $\vec{AA_1}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-4-1

В-I	7 баллов	В-II
1. Найти координаты точки, лежащей на оси x и равноудаленной от точек $A(1;3;2)$ и $B(-2;1;4)$.	1. Найти координаты точки, которая принадлежит оси y и равноудалена от точек $A(4;-1;3)$ и $B(1;3;0)$.	
В-III	9 баллов	В-IV
1. Найти координаты точки, которая принадлежит оси z и равноудалена от точек $A(1;-2;6)$ и $B(-1;2;5)$.	1. Доказать, что треугольник с вершинами $A(4;2;10)$; $B(10;-2;8)$; $C(-2;0;6)$ – равнобедренный.	
2. Задайте с помощью формул параллельный перенос, при котором точка $M(-2;0;4)$ переходит в точку, симметричную ей относительно начала координат.	2. Задать с помощью формул параллельный перенос, при котором точка $A(2;4;6)$ переходит в точку, симметричную ей относительно плоскости xy .	2. Задайте с помощью формул параллельный перенос, при котором точка $B(-1;-2;3)$ переходит в точку, симметричную ей относительно оси y .

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-4-2

В-I	7 баллов	В-II
1. Из вершины B квадрата $ABCD$ проведен к его плоскости перпендикуляр BM . Прямая AM образует с плоскостью квадрата угол 45° . Найти угол между прямой MD и плоскостью квадрата, если сторона $AB = 8 \text{ см}$.	1. Из вершины C прямоугольника $ABCD$, у которого $AB = 16 \text{ см}$, $BC = 12 \text{ см}$, проведен к плоскости перпендикуляр CK . Прямая BK образует с плоскостью прямоугольника угол 30° . Найти угол между прямой AK и плоскостью прямоугольника.	
2. Через основание AC равнобедренного $\triangle ABC$, у которого $AB = BC = 20 \text{ см}$, проведена плоскость α , образующая с плоскостью треугольника угол 30° . Расстояние от вершины B до плоскости α равно 8 см . Найти площадь $\triangle ABC$.	2. Через катет AC прямоугольного треугольника ABC , гипотенуза которого $AB = 30 \text{ см}$, проведена плоскость α , образующая с плоскостью треугольника угол 45° . Расстояние от вершины B до плоскости α равно 15 см . Найти площадь $\triangle ABC$.	
3. Треугольник со сторонами 12 см , 17 см и 25 см проектируется на плоскость, которая образует с плоскостью треугольника угол 60° . Найти площадь ортогональной проекции этого треугольника.	3. Ортогональной проекцией треугольника, площадь которого 180 см^2 , на плоскость является треугольник со сторонами 12 см , 17 см и 25 см . Найти угол между плоскостями этих треугольников.	

B-III	9 баллов	B-IV
1. Из вершины A прямоугольного равнобедренного треугольника ABC , $\angle C = 90^\circ$, $AC = CB = 6$ см, проведен к плоскости треугольника перпендикуляр AD . Прямая DC образует с плоскостью треугольника угол 45° . Найти угол между прямой DM и плоскостью треугольника, если M – середина катета BC .	1. Из вершины прямого угла C равнобедренного прямоугольного треугольника ABC , у которого $AC = CB = 12$ см, проведен к плоскости треугольника перпендикуляр CP . Прямая BP образует с плоскостью треугольника угол 60° . Найти угол между прямой MP и плоскостью треугольника, если M – середина гипотенузы AB .	
2. Через сторону AB равностороннего треугольника ABC проведена плоскость α , образующая с плоскостью треугольника угол 60° . Расстояние от вершины C до плоскости α равно 9 см. Найти площадь треугольника ABC .	2. Через гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC проведена плоскость α , образующая с плоскостью треугольника угол 30° . Расстояние от вершины C до плоскости α равно 2 см. Найти площадь треугольника ABC , если известно, что $\angle A = 60^\circ$.	
3. Ортогональной проекцией треугольника с площадью 84 см^2 на плоскость является треугольник со сторонами 7 см, 17 см, 18 см. Найти угол между плоскостями этих треугольников.	3. Ортогональной проекцией треугольника с площадью 360 см^2 на плоскость является треугольник со сторонами 13 см, 30 см, 37 см. Чему равен угол между плоскостями этих треугольников?	

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-4-3

Тема. Векторы

B-I	7 баллов	B-II
1. Даны векторы $\bar{a}(1;2;-2)$, $\bar{b}(2;5;1)$. Найти абсолютную величину вектора $3\bar{a} - 2\bar{b}$.	1. Даны векторы $\bar{m}(6;2;-2)$, $\bar{n}(1;4;5)$. Найти абсолютную величину вектора $\bar{m} - 2\bar{n}$.	
2. Даны точки $A(3;2;-1)$, $B(0;-1;2)$, $C(1;2;-4)$. Найти точку $D(x;y;z)$ так, что $\overline{AB} = \overline{CD}$.	2. Даны точки $A(m;1;3)$, $B(-2;n;0)$, $C(3;4;p)$, $D(5;-1;1)$. Найти m , n , p , если известно, что $\overline{BA} = \overline{DC}$.	
3. Найти косинус угла A треугольника ABC , если $A(2;-1;3)$, $B(-2;0;1)$, $C(0;-2;3)$.	3. Найти косинус угла B треугольника ABC , если $A(0;2;-1)$, $B(1;-2;0)$, $C(1;0;2)$.	

B-III	9 баллов	B-IV
1. Даны векторы $\bar{b}(0;-3;3)$, $\bar{c}(1;2;-2)$. Найти абсолютную величину вектора $4\bar{b} + 3\bar{c}$.	1. Даны векторы $\bar{a}(-1;1;-4)$, $\bar{b}(0;-2;-4)$. Найти абсолютную величину вектора $2\bar{a} - \bar{b}$.	
2. Даны точки $A(2;1;3)$, $B(5;2;1)$, $C(-1;2;4)$. Найти точку $D(x;y;6)$, если известно, что векторы \overline{AB} и \overline{DC} – коллинеарные.	2. Даны точки $M(m;-1;2)$, $N(1;n;3)$, $P(-4;2;6)$, $K(1;3;5)$. Найти m и n , если известно, что векторы \overline{MN} и \overline{PK} – коллинеарные.	
3. Найти косинус угла D параллелограмма $ABCD$, если $A(2;1;3)$, $B(0;0;0)$, $C(-4;1;-1)$, $D(-2;2;2)$.	3. Найти косинус угла D параллелограмма $ABCD$, если $A(4;2;-2)$, $B(1;-2;0)$, $C(0;0;0)$, $D(3;4;-2)$.	

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-4-4

B-I	7 баллов	B-II
1. Через вершину прямого угла C равнобедренного прямоугольного треугольника ABC , у которого гипotenуза $AB = 8$ см, проведен к плоскости треугольника перпендикуляр CP , а точка P соединена с вершинами A и B . Плоскости треугольников APB и ABC образуют между собой угол 60° . Найти: длину перпендикуляра CP ; площадь ΔAPB ; угол между прямой AP и плоскостью ΔABC .	1. Через вершину B равнобедренного ΔABC , у которого $AC = 30$ см, $AB = BC = 25$ см, к его плоскости проведен перпендикуляр BD , а точка D соединена с вершинами A и C . Плоскости треугольников ADC и ABC образуют между собой угол 45° . Найти: длину перпендикуляра BD ; площадь ΔADC ; угол между прямой CD и плоскостью ΔABC .	
2. Даны точки $A(-1;7;2)$, $B(-1;3;4)$, $C(1;2;9)$. Найти абсолютную величину вектора $\bar{m} = \overline{AB} + 2\overline{BC}$.	2. Даны точки $M(1;0;-8)$, $K(-1;8;4)$, $P(2;9;12)$. Найти абсолютную величину вектора $\bar{c} = \frac{1}{2}\overline{MK} + \overline{KP}$.	

B-III	9 баллов	B-IV
1. Через вершину B квадрата $ABCD$ со стороной, равной 6 см, проведен перпендикуляр BM к его плоскости, а точка M соединена с вершинами A и C . Плоскость треугольника AMC образует с плоскостью квадрата угол 45° . Найти: длину перпендикуляра BM ; площадь ΔAMC ; угол между прямой AM и плоскостью квадрата.	1. Через вершину A равностороннего ΔABC со стороной 6 см проведен к его плоскости перпендикуляр AK , а точка K соединена с вершинами B и C . Плоскости треугольников CKB и ABC образуют между собой угол 30° . Найти: длину перпендикуляра AK ; площадь ΔCKB ; угол между прямой KB и плоскостью ΔABC .	
2. Даны точки $A(3;-1;0)$, $B(-1;3;-14)$, $C(1;-1;-4)$. Найти абсолютную величину вектора $\bar{n} = \overline{AC} - 2\overline{BC}$.	2. Даны точки $M(-4;0;8)$, $K(0;8;-12)$, $P(4;13;-20)$. Найти абсолютную величину вектора $\bar{a} = 0,5\overline{MK} - \overline{PK}$.	

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-4-5

В-I	7 баллов	В-II
<p>1. Из вершины B квадрата $ABCD$ проведен к его плоскости перпендикуляр BM. Прямая AM образует с плоскостью квадрата угол 45°. Найти угол между прямой MD и плоскостью квадрата, если сторона $AB = 8 \text{ см}$.</p>	<p>1. Из вершины C прямоугольника $ABCD$, у которого $AB = 16 \text{ см}$, $BC = 12 \text{ см}$, проведен к его плоскости перпендикуляр CK. Прямая BK образует с плоскостью прямоугольника угол 30°. Найти угол между прямой AK и плоскостью прямоугольника.</p>	
<p>2. Через основание AC равнобедренного ΔABC, у которого $AB = BC = 20 \text{ см}$, проведена плоскость α, образующая с плоскостью треугольника угол 30°. Расстояние от вершины B до плоскости α равно 8 см. Найти площадь ΔABC.</p>	<p>2. Через катет AC прямоугольного ΔABC, гипотенуза которого $AB = 30 \text{ см}$, проведена плоскость α, образующая с плоскостью треугольника угол 45°. Расстояние от вершины B до плоскости α равно 15 см. Найти площадь ΔABC.</p>	
В-III	9 баллов	В-IV
<p>Из вершины A прямоугольного равнобедренного ΔABC, у которого угол C – прямой и $AC = CB = 6 \text{ см}$, проведен к плоскости треугольника перпендикуляр AD. Прямая DC образует с плоскостью треугольника угол 45°. Найти угол между прямой DM и плоскостью треугольника, если M – середина катета BC.</p>	<p>1. Из вершины прямого угла C равнобедренного прямоугольного ΔABC, у которого $AC = CB = 12 \text{ см}$, проведен к плоскости треугольника перпендикуляр CP. Прямая BP образует с плоскостью треугольника угол 60°. Найти угол между прямой MP и плоскостью треугольника, если M – середина гипotenузы AB.</p>	
<p>2. Через сторону AB равностороннего треугольника ABC проведена плоскость α, образующая с плоскостью треугольника угол 60°. Расстояние от вершины C до плоскости α равно 9 см. Найти площадь треугольника ABC.</p>	<p>2. Через гипotenузу AB прямоугольного треугольника ABC проведена плоскость α, образующая с плоскостью треугольника угол 30°. Расстояние от вершины C до плоскости α равно 2 см. Найти площадь треугольника ABC, если известно, что $\angle A = 60^\circ$.</p>	

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА К-4-1



В-I	7 баллов	В-II
1. Из точки, удаленной от плоскости на расстояние 18 см, проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы по 60° , угол между проекциями наклонных — прямой. Найти расстояние между основаниями наклонных.	1. Из точки, удаленной от плоскости на расстояние 12 см, проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы 30° , а между собой — прямой угол. Найти расстояние между основаниями наклонных.	
2. Доказать, что четырехугольник с вершинами $A(4;2;1)$, $B(3;-1;0)$, $C(-6;-2;5)$, $D(-5;1;6)$ — параллелограмм.	2. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами $A(3;5;4)$, $B(5;0;2)$, $C(1;1;-2)$, $D(-1;6;0)$ — ромб.	
В-III	9 баллов	В-IV
1. Из точки O пересечения диагоналей ромба $ABCD$ проведен к его плоскости перпендикуляр $OM = 8$ см. Прямые MC и MD образуют с плоскостью ромба соответственно углы 30° и 45° . Найти сторону ромба.	1. Из точки, удаленной от плоскости на расстояние 6 см, проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы по 30° . Угол между проекциями наклонных равен 120° . Найти расстояние между основаниями наклонных.	
2. Доказать, что четырехугольник $MNKP$ с вершинами $M(-3;2;0)$, $N(1;-6;0)$, $K(7;-4;2)$, $P(3;4;+2)$ — параллелограмм.	2. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами $A(2;1;2)$, $B(4;-4;0)$, $C(0;-3;-4)$, $D(-2;2;-2)$ — ромб.	

Ответы
Тренировочные упражнения

§ 1. 5. Множество $A, B, C \in \alpha$. 12. а) Нет; б) Да.

§ 4. 5. (6,5; 2; -6). 23. D (2; -1; -1). 24. AB (-2; -8; 10). 25. $\alpha_1 = -8, \beta_1 = -2,$

$$\alpha_2 = -4, \beta_2 = 2. 26. \frac{\pi}{3}. 27. \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}.$$

Контрольные работы

K-2-1. В-II. 3. 6 дм. В-III. 1. Не всегда. 2. $OO_1 = 1,1$ дм. 3. 8 дм. В-IV. 1. Не всегда.

2. $BB_1 = 3$ м. 3. 12 м.

K-3-1. В-I. 1. 12 см. 2. $10\sqrt{2}$ см. В-II. 1. 289 см.

11 класс

§1. Многогранники. Призма

§2. Пирамиды

§3. Тела вращения. Поверхности
и объёмы тел вращения

§4. Комбинации
геометрических тел

Страницка абитуриента

62

77

97

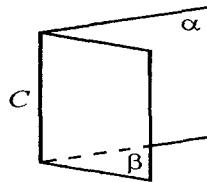
114

135

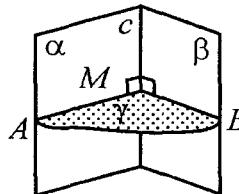
§ 1. Многогранники. Призма

Двугранный угол. Линейный угол двугранного угла

Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей прямой, которая их ограничивает. Полуплоскости α и β – грани двугранного угла. C – ребро двугранного угла.

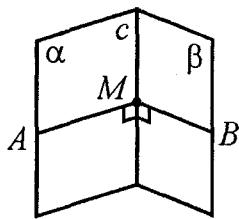


Линейным углом двугранного угла называется угол между лучами, по которым плоскость, перпендикулярная ребру двугранного угла, пересекает его грани. Плоскость линейного угла перпендикулярна каждой грани двугранного угла.



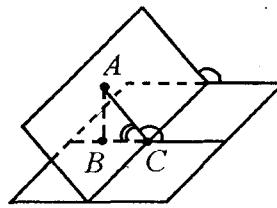
$$\gamma \perp C; \gamma \cap \alpha = AM; \\ \gamma \cap \beta = MB; \\ \angle AMB - \text{линейный} \\ \text{угол}; 0 \leq AMB \leq 180^\circ.$$

Способы построения линейного угла:
1) На ребре выбирается точка, через нее в гранях проводятся лучи, перпендикулярные ребру. Угол, образованный этими лучами, и будет искомым линейным углом.



$$M \in c; \\ MA \perp c \text{ (в грани } \alpha); \\ MB \perp c \text{ (в грани } \beta); \\ \angle AMB - \text{линейный}.$$

2) В одной из граней берется точка A , из нее опускается перпендикуляр AB на другую грань и AC – на ребро. Тогда или угол ACB , или смежный с ним и будет линейным углом.

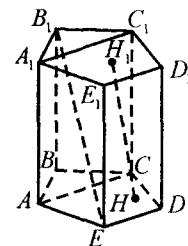


ПРИЗМА

Призмой называется многогранник, состоящий из двух плоских многоугольников, лежащих в разных плоскостях и совмещающихся параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников.

Элементы призмы

1. Основания призмы $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$.
2. Боковые грани AA_1B_1B , BB_1C_1C , ...
3. Боковые ребра AA_1 , BB_1 , ...
4. Вершины призмы A , B , ...
5. Высоты призмы H_1H (расстояние между плоскостями ее оснований).
6. Диагональ призмы B_1E (отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани).
7. Диагональное сечение AA_1C_1C (сечение призмы плоскостью, проходящей через два боковых ребра призмы, не принадлежащих одной грани).
8. Перпендикулярное сечение призмы – сечение призмы плоскостью, перпендикулярной боковым ребрам (или их продолжениям).



Свойства

1. Основания призмы равны и параллельны.
2. Боковые ребра равны и параллельны.
3. Боковые грани – параллелограммы.

Виды призм

1. Прямая призма – призма, у которой боковые ребра перпендикулярны основаниям (рис. 1).

Свойства прямой призмы:

a) $H_{\text{прямой}} = AA = BB = \dots$ Высота прямой призмы равна боковому ребру.

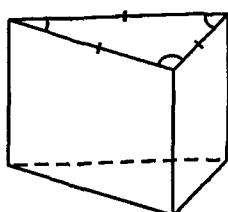
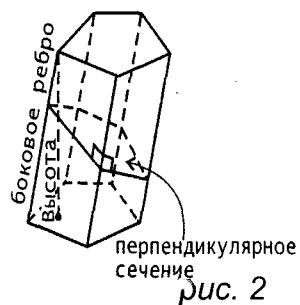
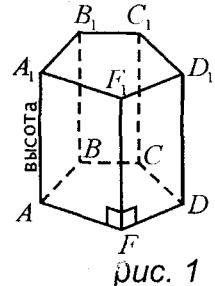
б) Боковые грани прямой призмы – прямоугольники.

ABB_1A_1 – прямоугольник, BCC_1B_1 – прямоугольник, ...

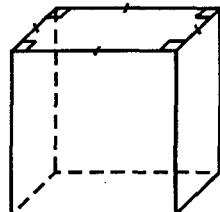
2. Наклонная призма – призма, у которой боковые ребра не перпендикулярны плоскостям оснований (рис. 2).

3. Правильная призма – прямая призма, в основании которой лежит правильный многоугольник. У такой призмы все боковые грани – равные прямоугольники.

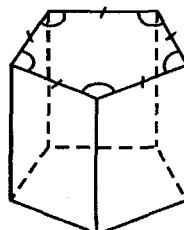
4. Треугольная, четырехугольная, ..., n -угольная призма – в основании призмы лежит треугольник, четырехугольник, ..., n -угольник.



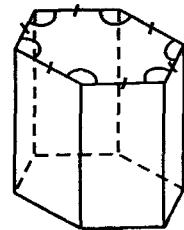
треугольная



четырехугольная



пятиугольная



шестиугольная

ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ И ОБЪЕМ ПРИЗМЫ

	Наклонная призма	Прямая призма
Боковая поверхность	$S_{\text{бок.}} = P_{\text{пер.}} \cdot l$, где $P_{\text{пер.}}$ – периметр перпендикулярного сечения, l – длина бокового ребра.	$S_{\text{бок.}} = P_{\text{осн.}} \cdot H$, где $P_{\text{осн.}}$ – периметр основания, H – высота.
Полная поверхность	$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2 \cdot S_{\text{осн.}}$	$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2 \cdot S_{\text{осн.}}$
Объем	$V = S_{\text{пер.}} \cdot l$; $V = S_{\text{осн.}} \cdot H$, где $S_{\text{пер.}}$ – площадь перпендикулярного сечения, l – боковое ребро.	$V = S_{\text{осн.}} \cdot H$, где $S_{\text{осн.}}$ – площадь основания призмы, H – высота.

ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

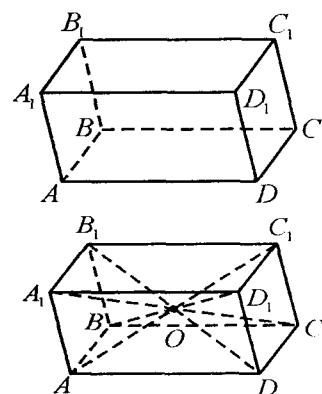
Параллелепипедом называется призма, в основании которой лежит параллелограмм.

Свойства

- У параллелепипеда все грани – параллелограммы.
- У параллелепипеда противоположные грани параллельны и равны.
- Все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.

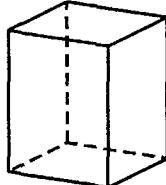
O – середина A_1C , BD_1 , AC_1 , B_1D .

O – центр симметрии параллелепипеда.

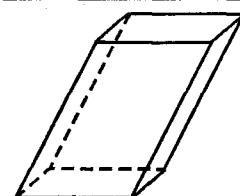


Виды параллелепипедов

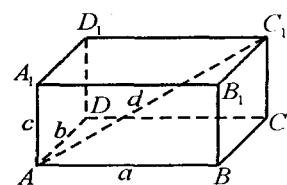
1. Прямой параллелепипед – параллелепипед, у которого боковые ребра перпендикулярны плоскостям оснований. У прямого параллелепипеда четыре боковые грани – прямоугольники, а два основания – параллелограммы.



2. Наклонный параллелепипед – параллелепипед, у которого боковые ребра не перпендикулярны плоскостям оснований. У наклонного параллелепипеда все шесть граней – параллелограммы.



3. Прямоугольный параллелепипед – прямой параллелепипед, у которого основанием является прямоугольник. Три ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, называются его измерениями.



Свойства прямоугольного параллелепипеда

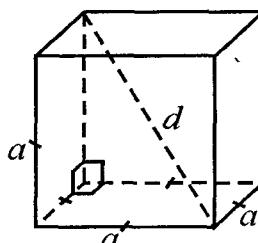
- У прямоугольного параллелепипеда все грани – прямоугольники.
- В прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали равен сумме квадратов трех его измерений. $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ ($AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$).
- В прямоугольном параллелепипеде все 4 диагонали равны между собой.
- $V_{\text{прямоуг. парал.}} = AB \cdot AD \cdot AA_1 = abc$.
- $S_{\text{бок.}} = P_{\text{осн.}} \cdot AA_1 = 2(AB + AD) \cdot AA_1 = 2(a + b)c$; $S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}}$.

КУБ

Кубом называется прямоугольный параллелепипед, у которого все ребра равны.

Свойства

- У куба все грани – квадраты.
- $d = a\sqrt{3}$ ($d^2 = a^2 + a^2 + a^2$, где a – ребро куба, d – диагональ куба).
- $V_{\text{куба}} = a^3$.
- $S_{\text{бок. куба}} = 4a^2$; $S_{\text{полн. куба}} = 6a^2$.



УЧЕНИЧЕСКАЯ СТРАНИЧКА



ПОСТРОЕНИЕ СЕЧЕНИЙ МНОГОГРАННИКОВ

Построить сечение означает начертить многоугольник в плоскости сечения, по которому эта плоскость пересекает грани многогранника.

Следом сечения на указанной плоскости называется прямая пересечения этой плоскости с плоскостью сечения.

Основные правила построения сечений

1. Если даны (или уже построены) две точки плоскости сечения на одной грани многогранника, то след сечения в этой плоскости – прямая, проходящая через эти точки.
2. Если дана (или уже построена) прямая пересечения плоскости сечения с основанием многогранника (след на основании) и есть точка, принадлежащая определенной боковой грани, то нужно определить точку пересечения данного следа с этой боковой гранью (она является точкой пересечения данного следа с общей прямой основания и данной боковой грани).
3. Точку пересечения плоскости сечения с основанием можно определить как точку пересечения какой-либо прямой в плоскости сечения с ее проекцией на плоскость основания.

Способы построения сечений

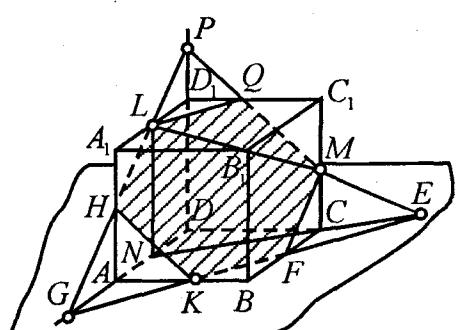
Способ соответствия состоит в том, что для построения сечения нужно сначала построить те точки нижнего основания многогранника, которые взаимно однозначно соответствуют точкам искомого сечения.

Способ следов состоит в том, что на плоскости нижнего основания (иногда на какой-то другой плоскости) выполняется построение следов (линий и точек пересечения секущей плоскости, некоторых прямых). С помощью этих следов легко выполняется построение точек пересечения секущей плоскости с ребрами многогранника и линий пересечения секущей плоскости с гранями многогранника.

1. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через три заданные точки K , L , M , лежащие на ребрах, которые не пересекаются.

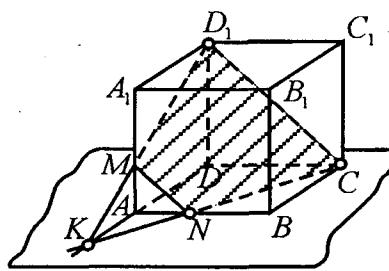
Решение

Опустим из заданной точки L перпендикуляр LN на ребро AD . Проведем прямые LM и NC до их пересечения в точке E (обе эти прямые лежат в одной плоскости, которая определяется тремя точками L , M , N , и не параллельны, а значит, обязательно пересекутся в некоторой точке E).



Проведем прямую EK до пересечения с прямыми BC и AD соответственно в точках F и G . Проведем прямую GL до пересечения с прямыми AA_1 и DD_1 в точках H и P . Точку P соединим с заданной точкой M и на пересечении PM с ребром D_1C_1 получим точку Q . Точки L , Q , M , F , K , H последовательно соединим. Фигура $LQMFHK$ – искомое сечение.

2. Построить сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через три заданные точки N, C, D_1 .



Решение

Следы сечения на гранях $ABCD$ и CC_1D_1D получаем, соединяя точки N и C , C и D . Для построения следов на гранях ABB_1A_1 и ADD_1A_1 продолжаем прямые CN и DA до их пересечения в точке K . Точка K лежит на продолжении ребра AD , а значит, и на грани ADD_1A_1 .

Соединим точки K и D_1 . Прямая KD_1 обязательно пересечет ребро AA_1 , которое также лежит на грани ADD_1A_1 . Полученную при пересечении прямых AA_1 и KD_1 точку M соединим с точками N и D_1 , NCD_1M – искомое сечение.

3. Построить сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 1) плоскостью, проходящей через точки E, P, K его ребер.

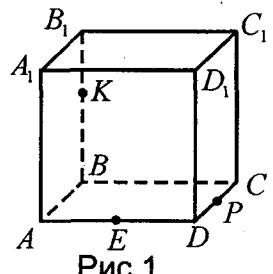


Рис.1

Решение.

Пусть α – плоскость, определяемая точками E, P, K . Для построения искомого сечения нужно построить пересечения плоскости α с гранями данного куба. Для построения линии пересечения двух плоскостей достаточно знать две общие точки этих плоскостей. Плоскость α с плоскостью грани $ABCD$ пересекается по прямой EP (рис.2). Итак, определилась одна сторона сечения – отрезок EP . Прямая EP пересекает плоскость грани BB_1C_1C в точке M (рис. 2).

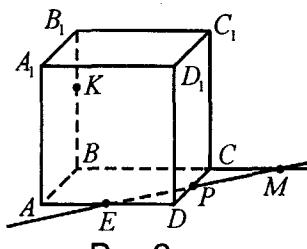
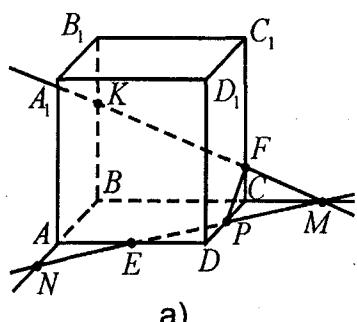


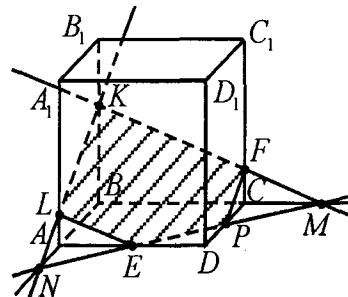
Рис.2

Теперь определены две точки, принадлежащие плоскости α и плоскости грани BB_1C_1C . Это точки M и K . Строим прямую KM пересечения этих плоскостей. Определились еще две стороны искомого сечения – отрезки KF и FP . Прямая EP пересекает плоскость AA_1B_1B в точке N . Определены, таким образом, две точки, принадлежащие плоскости α и плоскости грани AA_1B_1B . Это точки N и K . Строим прямую NK пересечения этих плоскостей (рис. 3а). Прямая NK пересекает ребро AA_1 куба в точке L . Определены стороны KL и LE искомого сечения.

Сечение куба плоскостью α полностью построено. Это пятиугольник $EPFKL$ (рис. 3б).



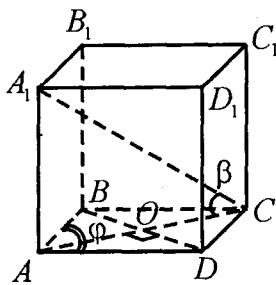
а)



б)

4. Основание прямого параллелепипеда – ромб со стороной a , угол между плоскостями боковых граней φ , большая диагональ параллелепипеда наклонена к плоскости основания под углом β . Найти объем параллелепипеда.

Решение.



$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямой параллелепипед, основание которого – ромб $ABCD$. $AD = a$, AC и BD – его диагонали, O – точка их пересечения, $AC > BD$ ($\angle BAD < \angle ABC$). AA_1 – высота параллелепипеда $AA_1 \perp (ABC)$. Следовательно, $AA_1 \perp AB$, $AA_1 \perp AD$, $\angle BAD$ – угол между плоскостями боковых граней, $\angle BAD = \varphi$. AC – проекция диагонали A_1C . $\angle A_1CA = \beta$. $V = S_{\text{осн.}} \cdot H$, $H = AA_1$, $S_{\text{осн.}} = AD^2 \sin \angle BAD$, $V = AD^2 \sin \angle BAD \cdot AA_1$.

ΔAOD : по свойству диагоналей ромба $\angle AOD = 90^\circ$; $\angle OAD = \frac{\varphi}{2}$; $AC = 2AO$;

$AO = AD \cos \angle OAD$; $AO = a \cos \frac{\varphi}{2}$; $AC = 2a \cos \frac{\varphi}{2}$; ΔA_1AC ; $\angle A_1AC = 90^\circ$;

$A_1A = AC \operatorname{tg} \angle A_1CA$; $AA_1 = 2a \cos \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \beta$. $V = a^2 \sin \varphi \cdot 2a \cos \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \beta = 2a^3 \sin \varphi \cos \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \beta$.

Ответ: $2a^3 \sin \varphi \cos \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \beta$.

5. В основании прямой призмы лежит равнобокая трапеция с боковой стороной c и острым углом α . Диагонали этой трапеции взаимно перпендикулярны. Диагональ призмы образует с плоскостью основания угол γ . Определить объем призмы.

Решение.

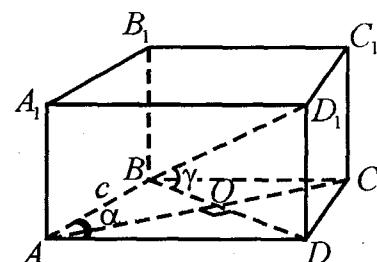
Пусть в основании прямой призмы лежит трапеция $ABCD$, $AB = CD = c$, $\angle A = \angle D = \alpha < 90^\circ$, $AC \perp BD$, $\angle D_1BD = \gamma$.

Поскольку $\Delta ABD = \Delta DCA$ ($AB = CD$, AD – общая, $\angle BAD = \angle CDA$), то $BD = AC$ и $\angle BDA = \angle CAD$.

Пусть O – точка пересечения диагоналей трапеции.

Тогда AOD – равнобедренный прямоугольный треугольник и, значит, $\angle BDA = 45^\circ$.

Из ΔBAD : $\frac{AB}{\sin 45^\circ} = \frac{BD}{\sin \alpha}$; $BD = \sqrt{2}c \cdot \sin \alpha$.



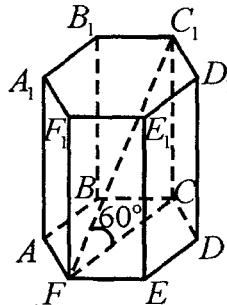
Находим площадь основания: $S = \frac{1}{2}BD \cdot AC \cdot \sin 90^\circ = \frac{1}{2}BD^2 = c^2 \cdot \sin^2 \alpha$.

Из ΔD_1DB ($\angle D = 90^\circ$): $H = D_1D = BD \cdot \operatorname{tg} \gamma = \sqrt{2}c \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \gamma$.

Следовательно, $V = S_{\text{осн.}} \cdot H = c^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sqrt{2}c \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \gamma = \sqrt{2}c^3 \cdot \sin^3 \alpha \cdot \operatorname{tg} \gamma$.

Ответ: $\sqrt{2}c^3 \cdot \sin^3 \alpha \cdot \operatorname{tg} \gamma$.

6. В правильной шестиугольной призме большая диагональ равна $4\sqrt{3}$ см и наклонена к основанию под углом 60° . Найти площадь полной поверхности призмы.



Решение.

В шестиугольной призме $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ большая диагональ $A_1C_1 = 4\sqrt{3}$ см – большая диагональ. Тогда FC – большая диагональ основания призмы. По условию, $\angle C_1FC = 60^\circ$.

Из $\triangle C_1CF$ ($\angle C = 90^\circ$): $FC = C_1F \cdot \cos \angle F = 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}$ (см);

$C_1C = C_1F \cdot \sin \angle F = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$ (см). Известно, что тремя

большими диагоналями правильный шестиугольник разбивается на шесть равных равносторонних треугольников, сторона которых равна половине диагонали:

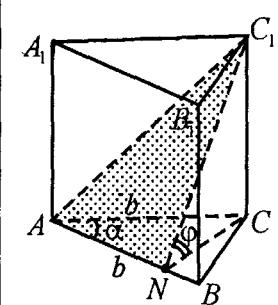
$AB = \frac{FC}{2} = \sqrt{3}$ см. Поэтому $S_{\text{осн.}} = 6 \cdot AB^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ (см 2). $P = 6 \cdot AB = 6\sqrt{3}$ см,

$S_{\text{б.}} = P \cdot CC_1 = 6\sqrt{3} \cdot 6 = 36\sqrt{3}$ (см 2). $S_{\text{п.}} = 2S_{\text{осн.}} + S_{\text{б.}} = 9\sqrt{3} + 36\sqrt{3} = 45\sqrt{3}$ (см 2).

Ответ: $45\sqrt{3}$ см 2 .

7. Основание прямой призмы – треугольник, две стороны которого равны b , а угол между ними – α . Через одну из данных сторон основания и противоположную вершину второго основания призмы проведено сечение, образующее с основанием призмы угол ϕ . Найти объем призмы.

Решение.



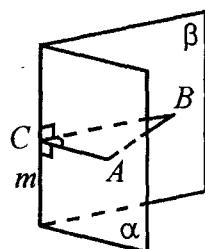
Пусть основанием прямой призмы $ABC A_1B_1C_1$ является треугольник ABC , в котором $AB = AC = b$, $\angle A = \alpha$. Сечение призмы проведем через сторону AB одного основания и вершину C_1 – другого. Проведем дальше $CN \perp AB$. По теореме о трех перпендикулярах, $C_1N \perp AB$ и, согласно условию, $\angle C_1NC = \phi$.

Из $\triangle ANC$ ($\angle N = 90^\circ$): $CN = AC \cdot \sin \angle A = b \sin \alpha$. Из $\triangle CC_1N$ ($\angle C = 90^\circ$): $CC_1 = H = CN \cdot \tan \angle N = b \sin \alpha \cdot \tan \phi$. Тогда

$$S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2}b^2 \sin \alpha \quad V = S_{\text{осн.}} \cdot H = \frac{1}{2}b^2 \sin \alpha \cdot b \sin \alpha \cdot \tan \phi = \frac{1}{2}b^3 \sin^2 \alpha \tan \phi.$$

Ответ: $\frac{1}{2}b^3 \sin^2 \alpha \tan \phi$.

8. На грани двугранного угла в 45° дана точка, лежащая от ребра на расстоянии a . Найти расстояние от этой точки до другой грани.



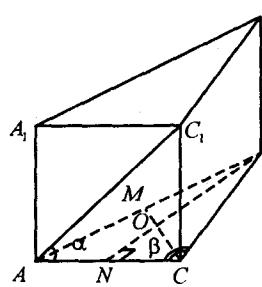
Решение.

$B \in \beta$, $BC \perp m$, $C \in m$, $BC = a$. Проведем $BA \perp \alpha$. По теореме о трех перпендикулярах, $CA \perp m$. Тогда $\angle BCA$ – линейный угол данного двугранного угла. $\angle BCA = 45^\circ$. Из $\triangle BCA$: $\angle BAC = 90^\circ$ имеем $BA = BC \sin \angle BCA$, $BA = a \sin 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

9. В основании прямой призмы лежит равнобедренный треугольник с углом β при основании и радиусом вписанной окружности r . Диагональ боковой грани, содержащей основание этого треугольника, образует с плоскостью основания призмы угол α . Определить объем призмы.

Решение.



Пусть в основании прямой призмы лежит треугольник ABC , $AB = BC$, $\angle ACB = \beta$, $\angle C_1AC = \alpha$. Центр O окружности, вписанной в $\triangle ABC$, является точкой пересечения биссектрис BN и CM . В равнобедренном треугольнике биссектриса BN является его высотой (и медианой). Так как $ON \perp AC$, то ON является радиусом вписанной окружности и $ON = r$.

Из $\triangle ONC$ ($\angle N = 90^\circ$, $\angle C = \frac{\beta}{2}$): $NC = r \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$. Из $\triangle BNC$:

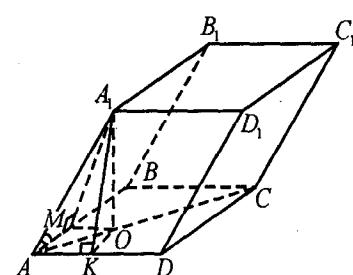
$$BN = NC \cdot \operatorname{tg} \beta = r \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \beta. S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} AC \cdot BN = NC \cdot BN = r^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \beta.$$

Из $\triangle AC_1C$: $H = CC_1 = AC \operatorname{tg} \alpha = 2NC \cdot \operatorname{tg} \alpha = 2r \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \alpha$.

$$\text{Тогда } V = S_{\text{осн.}} \cdot H = r^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \beta \cdot 2r \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \alpha = 2r^3 \cdot \operatorname{ctg}^3 \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Ответ: $2r^3 \cdot \operatorname{ctg}^3 \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

10. Основанием наклонного параллелепипеда является квадрат со стороной a , а боковые грани – ромбы с острыми углами по 60° . Найти объем параллелепипеда.



Из точки A опустим перпендикуляры на основания и стороны основания: $A_1O \perp (ABC)$; $A_1K \perp AD$; $A_1M \perp AB$.

KO и MO – проекции наклонных A_1K и A_1M .

По теореме о трех перпендикулярах, $AD \perp KO$, $AB \perp MO$.

Из равенства прямоугольных треугольников A_1KA и A_1MA (по гипotenузе и острому углу) следует: $AK = AM$.

Прямоугольные треугольники AKO и AMO равны по катету $AK = AM$ и общей гипотенузе AO . Отсюда $\angle OAK = \angle OAM$, следовательно, AO – биссектриса $\angle BAD$.

Из $\triangle A_1AK$: $\angle A_1KA = 90^\circ$; $A_1A = a$; $\angle A_1AK = 60^\circ$; $AK = a \cos 60^\circ = \frac{a}{2}$;

$A_1K = a \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Из $\triangle AKO$: $\angle AKO = 90^\circ$; $\angle OAK = \angle AOK = 45^\circ$; $AK = KO$.

Из $\triangle A_1OK$: $\angle A_1OK = 90^\circ$; $A_1O = \sqrt{A_1K^2 - KO^2}$; $A_1O = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot H; V = AD^2 \cdot A_1O; V = a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\frac{a^3 \sqrt{2}}{2}$.

Примечание. При решении этой задачи мы доказали: если ребро наклонной призмы образует равные углы со сторонами основания, то это ребро проектируется на прямую, содержащую биссектрису угла, образованного этими сторонами основания.

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ



1. Дан двугранный угол в 60° . Точка A одной его грани удалена на 12 см от другой. Найти расстояние от точки A до ребра данного двугранного угла.
2. Внутри двугранного угла дана точка M , которая лежит от каждой грани на расстоянии 2 дм. Найти расстояние от точки M до ребра двугранного угла, если угол между перпендикулярами, опущенными из точки M на его грани, равен 120° .
3. Внутри двугранного угла, который равен 120° , дана точка, которая удалена от каждой грани на 6 дм. Найти расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из точки на каждую грань.
4. Построить сечение треугольной призмы $ABC A_1 B_1 C_1$ плоскостью, проходящей через вершины A , B и середину ребра $A_1 C_1$.
5. Данна четырехугольная призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и на ее боковых ребрах точки $K \in BB_1$, $P \in DD_1$ (рис.1). Описать по рисунку, как можно построить сечение данной призмы через точки K , P , C_1 .
6. Построить сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через выделенные точки (рис.2).
7. а) В основании параллелепипеда лежит квадрат. Боковое ребро AA_1 образует равные углы со сторонами AB и AD основания. Построить линейные углы двугранных углов при сторонах основания AB и AD .
- б) В основании параллелепипеда лежит ромб $ABCD$ с острым углом при вершине A . Боковое ребро AA_1 образует равные углы со сторонами AB и AD основания. Построить ортогональную проекцию ребра AA_1 на плоскость основания.
8. а) Дан прямой параллелепипед. Построить угол наклона его большей диагонали к плоскостям боковых граней.
- б) Построить углы наклона диагонали прямоугольного параллелепипеда к его граням.
9. а) Ребро куба равно a . Определить площадь сечения, проходящего через диагонали двух смежных его граней.
- б) Ребро куба равно a . Определить площадь сечения, проходящего через диагонали параллельных граней.
10. Построить сечение призмы плоскостью, проходящей через точки, указанные на рисунках.

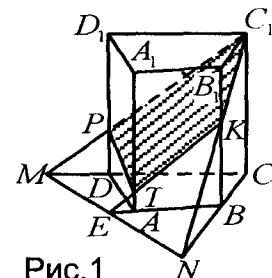


Рис.1

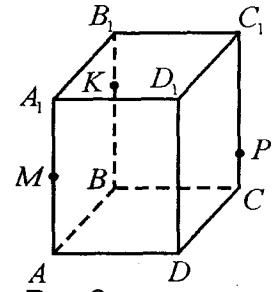


Рис.2

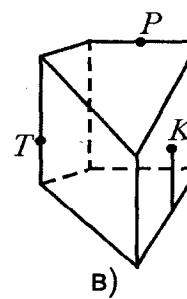
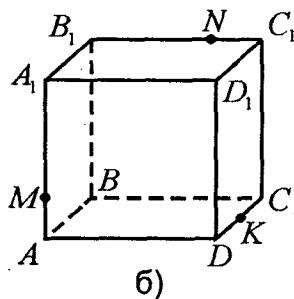
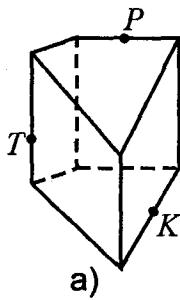


Рис.3

11. Диагональ куба равна $5\sqrt{3}$ см. Вычислить его объем.

12. Площадь боковой грани правильной треугольной призмы 48 см^2 , а периметр основания 12 см. Найти боковое ребро призмы.

13. Площадь диагонального сечения правильной четырехугольной призмы равна $10\sqrt{2} \text{ см}^2$, ее высота 2 см. Определить полную поверхность призмы.
14. В прямоугольном параллелепипеде высота равна 8 дм, а стороны основания равны 7 дм и 24 дм. Определить площадь диагонального сечения.
15. Найти объем правильной шестиугольной призмы, в которой наибольшая диагональ равна d , а боковые грани – квадраты.
16. Две боковые грани наклонной треугольной призмы образуют угол 60° , расстояния от их общего ребра до остальных боковых ребер равны 5 см и 10 см, боковое ребро равно 8 см. Найти площадь боковой поверхности призмы.
17. Основание прямой призмы – треугольник со сторонами 5 см, 5 см и 6 см, диагональ меньшей боковой грани составляет угол 45° с большей боковой гранью (рис.4). Найти объем призмы.
18. Стороны основания прямого параллелепипеда 6 см и 4 см, угол между ними равен 60° . Диагональ большей грани равна 10 см. Найти площадь полной поверхности параллелепипеда.
19. Основанием прямой призмы служит треугольник, стороны которого 5 см, 5 см, 6 см; высота призмы равна большей высоте этого треугольника. Найти площадь полной поверхности призмы.
20. Стороны основания прямого параллелепипеда, равные 7 см и $\sqrt{18}$ см, образуют угол 45° , меньшая диагональ параллелепипеда составляет угол в 45° с плоскостью основания (рис.5). Найти объем параллелепипеда.
21. Основание прямой призмы – треугольник со сторонами 5 см и 3 см и углом 120° между ними. Большая из площадей боковых граней равна 35 см^2 (рис.6). Найти объем призмы.
22. Диагональ прямоугольного параллелепипеда, равная 12 см, составляет угол 30° с плоскостью боковой грани и угол 45° с боковым ребром (рис.7). Найти объем параллелепипеда.
23. Основанием прямой призмы является равнобокая трапеция, в которую можно вписать окружность. Боковая сторона основания равна a , а острый угол ϕ . Расстояние между параллельными и неравными ребрами верхнего и нижнего оснований равно b . Вычислить объем призмы.
24. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна a . Диагональ призмы образует с плоскостью боковой грани угол β . Найти объем призмы.
25. Диагональ прямоугольного параллелепипеда наклонена к плоскости основания под углом α . Угол между диагоналями основания равен β . Определить объем данного параллелепипеда, если его высота равна H .
26. Основанием прямой призмы является равнобедренный треугольник с углом β при вершине и радиусом описанной окружности R . Диагональ грани, проходящей через боковую сторону треугольника, наклонена к плоскости основания под углом ϕ . Определить объем призмы.
27. В основании прямой призмы лежит треугольник с углами α и β . Диагональ боковой грани, содержащей сторону, для которой данные углы являются прилежащими, равна l и образует с плоскостью основания угол ϕ . Определить объем призмы.

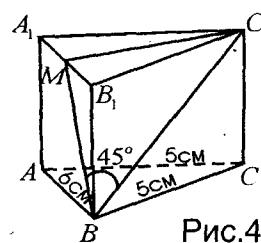


Рис.4

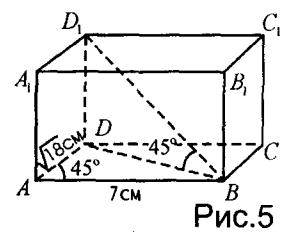


Рис.5

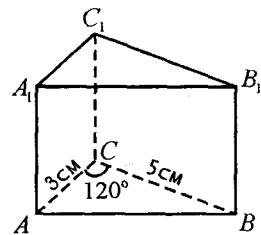


Рис.6

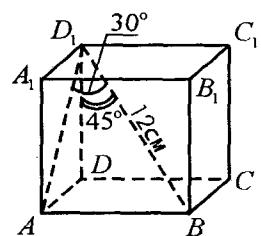


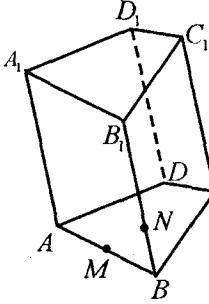
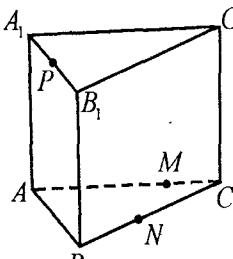
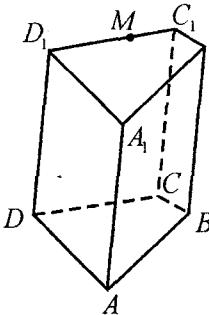
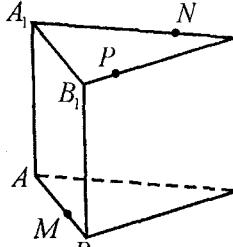
Рис.7

28. В основании прямой призмы лежит ромб с большей диагональю d . Большая диагональ призмы наклонена к плоскости основания под углом α , а диагональ боковой грани – под углом β . Определить боковую поверхность призмы.
29. В правильной четырехугольной призме диагональ боковой грани наклонена к плоскости основания под углом β . Определить площадь полной поверхности, если площадь основания равна Q . Вычислить, если $Q = 36 \text{ см}^2$, $\beta = 60^\circ$.
30. В основании прямой призмы лежит ромб. Через большую диагональ нижнего основания и вершину тупого угла верхнего основания проведено сечение, образующее с плоскостью нижнего основания угол α . Сечением является треугольник с углом β при вершине верхнего основания и площадью S . Определить объем призмы. Вычислить, если $S = 36 \text{ см}^2$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$.
31. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с углом α . Площадь боковой грани, содержащей гипotenузу этого треугольника, равна S , а ее диагональ наклонена к плоскости основания под углом β . Определить объем данной призмы. Вычислить, если $S = 36 \text{ см}^2$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$.
32. Основание наклонного параллелепипеда – квадрат со стороной a . Одна из вершин второго основания проектируется в центр этого квадрата. Высота параллелепипеда равна H . Найти боковую поверхность параллелепипеда.
33. В основании прямой призмы лежит равнобокая трапеция с тупым углом β . Диагонали этой трапеции перпендикулярны к боковым сторонам. Диагональ призмы равна l и образует с плоскостью основания угол γ . Определить объем призмы.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-1-1

В-І	7 баллов	В-ІІ
1. Точка, лежащая между гранями двугранного угла, равного 60° , удалена от них на расстояние 3 см. Найти расстояние от этой точки до ребра двугранного угла.	1. Точка, лежащая между гранями двугранного угла, равного 120° , равноудалена от них и удалена от ребра на 8 см. Найти расстояние от заданной точки до грани.	
2. Основанием прямой призмы служит ромб. Диагонали призмы равны 8 см и 5 см, высота равна 2 см. Найти сторону основания.	2. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна a . Диагональ призмы наклонена к плоскости боковой грани под углом 30° . Найти высоту призмы и угол наклона диагонали призмы к плоскости основания.	
В-ІІІ	9 баллов	В-ІV
1. На гранях двугранного угла взяты две точки, которые удалены от ребра двугранного угла на 6 см и 10 см. Одна из этих точек удалена от другой грани на 7,5 см. Найти расстояние от второй точки до противоположной грани двугранного угла.	1. Две точки лежат на грани двугранного угла и удалены от второй грани на 48 см и 60 см. Одна из этих точек удалена от ребра двугранного угла на 50 см. Найти расстояние от второй точки до ребра двугранного угла.	
2. Боковое ребро наклонной призмы наклонено к плоскости основания под углом в 30° , высота призмы равна 15 см. Определить длину бокового ребра.	2. Каждое из ребер правильной шестиугольной призмы равно a . Найти диагонали призмы.	

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-1-2

В-I	7 баллов	В-II
 <p>Построить сечение четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершину D_1 и точки M и N, соответственно принадлежащие ребрам AB и BB_1.</p>		 <p>Построить сечение треугольной призмы $ABC A_1 B_1 C_1$ плоскостью, проходящей через точки $M \in AC, N \in BC, P \in A_1 B_1$.</p>
В-III	9 баллов	В-IV
 <p>Дана четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которой ребра AB и DC непараллельны. Построить ее сечение плоскостью, проходящей через ребро AB и точку M, принадлежащую ребру D_1C_1.</p>		 <p>Построить сечение треугольной призмы $ABC A_1 B_1 C_1$ плоскостью, проходящей через точки $M \in AB, N \in A_1 C_1$ и $P \in B_1 C_1$, причем $NP \parallel A_1 B_1$.</p>

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-1-3

В-I	7 баллов	В-II
1. В основании прямой призмы $ABC A_1 B_1 C_1$ лежит прямоугольный треугольник ACB ($\angle C = 90^\circ$), $AC = 4$, $BC = 3$. Через сторону AC и вершину B_1 проведена плоскость $\angle B_1 AC = 60^\circ$. Найти площадь боковой поверхности призмы.	1. В основании прямой призмы $ABC A_1 B_1 C_1$ лежит прямоугольный треугольник ACB ($\angle C = 90^\circ$). Через сторону BC и вершину A_1 проведена плоскость, $AC = 5$, $\angle BA_1 C = 30^\circ$, $A_1 B = 10$. Найти площадь боковой поверхности призмы.	
2. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 4 см и 6 см, боковое ребро – 12 см. Найти диагонали параллелепипеда и угол наклона диагонали к плоскости основания.	2. Стороны основания и диагональ прямоугольного параллелепипеда равны соответственно 8 см, 9 см и 17 см. Найти высоту параллелепипеда и угол между диагональю и плоскостью основания.	
В-III	9 баллов	В-IV
1. В правильной треугольной призме диагональ боковой грани равна d и образует с плоскостью основания угол α . Определить боковую поверхность призмы.	1. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна l и образует с плоскостью основания угол β . Определить боковую поверхность призмы.	
2. Основанием прямого параллелепипеда является ромб со стороной a и острым углом α . Угол между большей диагональю параллелепипеда и плоскостью основания равен β . Найти полную поверхность параллелепипеда.	2. Основанием прямого параллелепипеда является ромб со стороной a . Угол между большей диагональю и стороной – β . Меньшая диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол α . Найти боковую поверхность параллелепипеда.	

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-1-4



В-I	7 баллов	В-II
1. Основанием прямой призмы является треугольник со сторонами 5 см, 5 см и 8 см. Меньшая диагональ боковых граней наклонена к основанию под углом 45° . Вычислить объем призмы.	1. Основанием прямой призмы является ромб с углом 60° . Большая ее диагональ равна 12 см и наклонена к основанию под углом 45° . Вычислить объем призмы.	
2. Основанием наклонной призмы является параллелограмм, стороны которого равны 6 дм и 7 дм, а один из углов 45° . Боковое ребро призмы равно 8 дм и наклонено к плоскости основания под углом 45° . Вычислить объем призмы.	2. Боковые ребра треугольной призмы равны по 20 см, а расстояние между ними – 10 см, 12 см и 18 см. Вычислить объем призмы.	
В-III	9 баллов	В-IV
1. Наибольшая диагональ правильной шестиугольной призмы равна 24 см. Она наклонена к плоскости основания под углом 60° . Вычислить объем призмы.	1. Основанием прямой призмы является треугольник, стороны которого равны 8 см, 15 см и 17 см. Угол между плоскостью, содержащей меньшую сторону нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания, и плоскостью основания равен 60° . Вычислить объем призмы.	
2. Основанием призмы является правильный треугольник. Ортогональной проекцией одной из вершин верхнего основания является центр нижнего основания. Боковое ребро призмы равно 6 см и наклонено к плоскости основания под углом 60° . Вычислить объем призмы.	2. Основанием призмы является правильный треугольник. Радиус окружности, описанной около него, равен 24 см. Боковые грани призмы – квадраты. Вычислить объем призмы.	

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА К-1-1



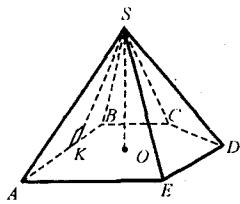
В-I	7 баллов	В-II
1. Боковая грань правильной треугольной призмы – квадрат, диагональ которого равна $2\sqrt{2}$ см. Вычислить периметр основания призмы.	1. Боковая грань правильной треугольной призмы – квадрат, площадь которого равна 64 см ² . Вычислить периметр основания призмы.	
В-III	9 баллов	В-IV
1. В основании прямой призмы лежит равнобедренный треугольник с углом α при вершине и радиусом описанной окружности R . Диагональ боковой грани, содержащей основание этого треугольника, образует с плоскостью основания угол β . Определить высоту призмы. 2. В основании прямой призмы лежит ромб с острым углом φ и высотой h . Меньшая диагональ призмы образует с боковым ребром угол α . Определить боковую поверхность призмы.	1. В основании прямой призмы лежит равнобедренный треугольник с углом α при основании и радиусом вписанной окружности r . Диагональ боковой грани, содержащей боковую сторону этого треугольника, образует с плоскостью основания угол β . Определить высоту призмы. 2. В основании прямой призмы лежит ромб с тупым углом α и площадью S . Определить полную поверхность этой призмы, если диагональ боковой грани наклонена к плоскости основания под углом φ .	

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА К-1-2

В-I	7 баллов	В-II
<p>1. В основании прямой призмы лежит равнобедренный треугольник с боковой стороной 10 см и медианой, проведенной к основанию, 8 см. Вычислить объем пирамиды, если диагональ большей боковой грани равна 13 см.</p> <p>2. Меньшая сторона основания прямоугольного параллелепипеда равна a, диагональ большей боковой грани равна d и образует с плоскостью основания угол β. Найти объем параллелепипеда.</p>	<p>1. В основании прямой призмы лежит равнобедренный треугольник с основанием 12 см и боковой стороной 10 см. Вычислить объем этой призмы, если диагональ меньшей боковой грани равна 26 см.</p> <p>2. В основании прямой призмы лежит прямоугольник, диагональ которого образует с одной из его сторон угол α. Диагональ призмы l образует с плоскостью основания угол β. Определить объем призмы.</p>	
В-III	9 баллов	В-IV
<p>1. В основании прямой призмы лежит равнобокая трапеция с острым углом 60° и боковой стороной 4 см. Диагонали трапеции являются биссектрисами острых углов. Диагональ призмы наклонена к плоскости основания под углом 45°. Найти объем призмы.</p> <p>2. Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α. Диагональ боковой грани, содержащей катет, противолежащий углу α, образует с плоскостью основания угол β. Найти объем призмы.</p>	<p>1. В основании прямой призмы лежит прямоугольная трапеция с тупым углом 120° и меньшим основанием 3 см. Диагональ трапеции является биссектрисой острого угла. Большая диагональ призмы образует с плоскостью основания угол 45°. Найти объем призмы.</p> <p>2. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник с катетом a и прилежащим к нему углом α. Диагональ боковой грани, содержащей гипотенузу, образует с плоскостью основания угол β. Найти объем призмы.</p>	

§2. Пирамида

Пирамидой называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника (основания пирамиды), точки, не лежащей в плоскости основания (вершины пирамиды), и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания.



$SABCDE$ — пирамида,

$ABCDE$ — основание пирамиды, S — вершина пирамиды,

SO — высота пирамиды ($SO = H$, $SO \perp (ABCDE)$),

SK — высота боковой грани ($SK \perp AB$, $SK = h$).

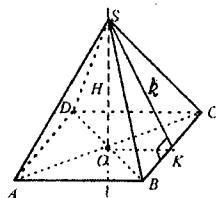
Элементы пирамиды

1. Высота пирамиды:	перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания.	
2. Боковые грани:	ΔASB , ΔSBC , ΔSDC , ΔSDE , ΔSAE .	
3. Боковые ребра:	SA , SB , SC , SD , SE .	
4. Боковая поверхность пирамиды равна сумме площадей боковых граней пирамиды.	5. Полная поверхность пирамиды равна сумме боковой поверхности пирамиды и площади основания пирамиды.	6. Объем пирамиды равен произведению одной третьей площади основания пирамиды на ее высоту.
$S_{\text{бок.}} = S_{SAB} + S_{SBC} + S_{SCD} + S_{SDE} + S_{SEA}$	$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}}$	$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H$

Правильная пирамида

Пирамида называется **правильной**, если ее основание является правильным n -угольником, а основание высоты пирамиды совпадает с центром этого n -угольника.

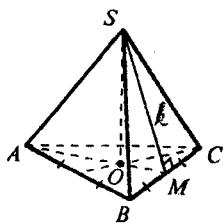
Осью правильной пирамиды называется прямая, содержащая высоту пирамиды. **Апофемой правильной пирамиды** называется высота боковой грани.



H — высота,
 SO — ось,
 k — апофема,

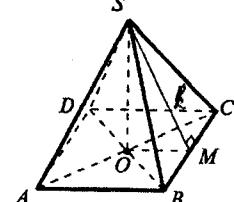
Некоторые виды правильных пирамид

Треугольная



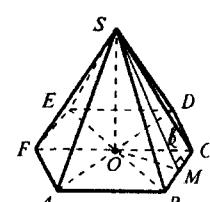
$\triangle ABC$ — правильный;
 O — точка пересечения медиан (высот и биссектрис), центр вписанной и описанной окружностей.

Четырехугольная



$ABCD$ — квадрат;
 O — точка пересечения диагоналей.

Шестиугольная



$ABCDEF$ — правильный шестиугольник;
 O — точка пересечения диагоналей AD , BE и FC .

Основные соотношения правильной пирамиды

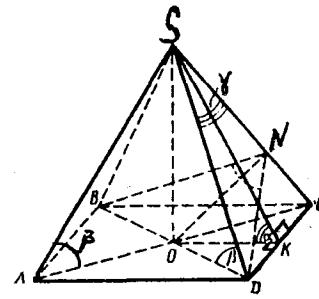
$SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида; $AB = BC = CD = DA = a$ — сторона основания; $\angle CDA = \angle DAB = \angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$; $SA = SB = SC = SD = l$ — боковое ребро; $SO = H$ — высота; $SK = k$ — апофема.

$\angle SKO = \alpha$ — линейный угол двугранного угла при основании (угол наклона боковой грани к плоскости основания); $\angle SAO = \beta$ — угол наклона бокового ребра к плоскости основания. Все боковые ребра равны и одинаково наклонены к основанию; $\angle DSC = \gamma$ — плоский угол при вершине боковой грани;

$AO = R$ — радиус окружности, описанной около основания;

$OK = r$ — радиус окружности, вписанной в основание; $ON \perp SC$ $\angle BND = \varphi$ — линейный угол двугранного угла при боковом ребре SC ;

$\Delta SAB = \Delta SBC = \Delta SCD = \Delta SDA$ — боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками и одинаково наклонены к основанию.



$SO \perp (ABCD)$; $SK \perp DC$; $OK \perp DC$.

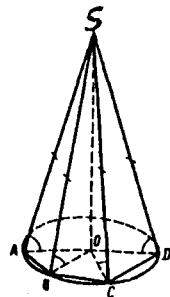
$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot SK = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot k,$$

$S_{\text{бок}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \alpha}$, ($\angle SKO = \alpha$ — угол наклона боковых граней к основанию); $S_{\text{бок}} = S_{\text{бок гр}} \cdot n$, (n — число граней);

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}; V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H.$$

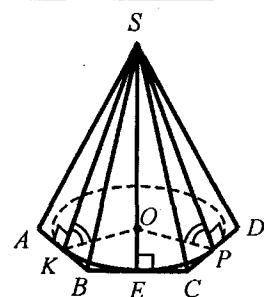
Положение высоты в некоторых видах пирамид

1. Если все боковые ребра пирамиды равны или равнонаклонены к плоскости основания, то вершина пирамиды проектируется в центр описанной около основания окружности.



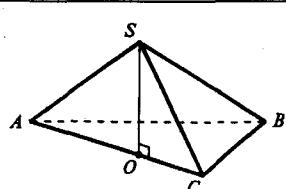
если $SA = SB = SC = \dots$ или $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \dots$, то $SO \perp (ABC)$, O — центр описанной окружности.

2. Если все боковые грани пирамиды наклонены к основанию под одним и тем же углом или все высоты боковых граней равны, то высота пирамиды проектируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды.



$SK \perp AB$, $SE \perp BC$, $SP \perp CD \dots$; $\angle SKO = \angle SEO = \angle SPO = \dots$, то O — центр вписанной окружности.

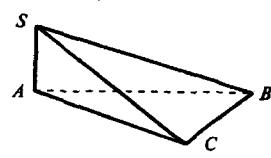
3. Если только одна боковая грань пирамиды перпендикулярна плоскости основания, то высотой пирамиды является высота этой боковой грани.



$(ASC) \perp (ABC)$, $SO \perp AC$.
 $SO \in (ASC)$

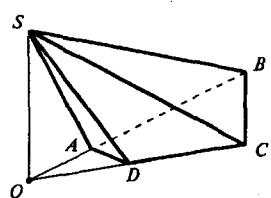
SO — высота пирамиды.

4. Если две смежные боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания, то высотой пирамиды будет их общее боковое ребро.



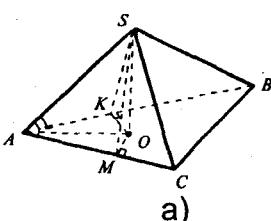
$(SAB) \perp (ABC)$,
 $(SAC) \perp (ABC)$, $SA \perp (ABC)$
 SA — высота пирамиды.

5. Если две несмежные боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания, то высотой пирамиды будет отрезок прямой, по которой пересекаются плоскости этих граней.

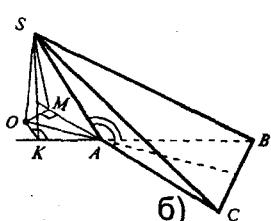


$(SAB) \perp (ABC)$, $(SDC) \perp (ABC)$,
 $(SAB) \cap (SDC)$ по прямой SO
 $SO \perp (ABC)$, SO — высота пирамиды.

6. Если только две боковые грани пирамиды (или наклонной призмы) одинаково наклонены к основанию или общее боковое ребро этих граней образует равные углы со смежными с ними сторонами основания, то это общее боковое ребро проектируется на прямую, содержащую биссектрису угла между смежными с этим ребром сторонами основания (и обратно).



a) $\angle SKO = \angle SMO$ или
 $\angle SAB = \angle SAC$ и $SO \perp (ABC)$
 SO — высота;
 AO — биссектриса $\angle BAC$.



б) AO — прямая, содержащая биссектрису $\angle BAC$.

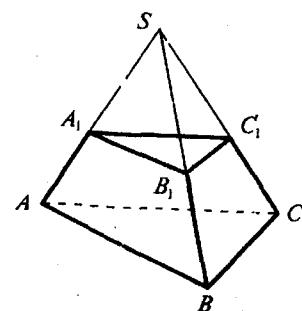
Усеченная пирамида

Образование усеченной пирамиды

Если задана пирамида $SABC$ и проведена плоскость $A_1B_1C_1$, параллельная основанию пирамиды ($(A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$), то эта плоскость отсекает от заданной пирамиды пирамиду $SA_1B_1C_1$, подобную данной.

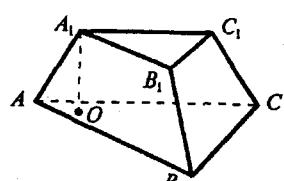
(С коэффициентом подобия $k = \frac{SA_1}{SA} = \frac{A_1B_1}{AB}$.)

Другая часть заданной пирамиды — многогранник $ABCA_1B_1C_1$ — называется усеченной пирамидой.



ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ — основания;
 $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$ AA_1C_1C ;
 CC_1B_1B , BB_1A_1A — боковые грани (трапеции).

Высотой усеченной пирамиды называется расстояние между плоскостями ее оснований.



$A_1O \perp (ABC)$, $A_1O = H$

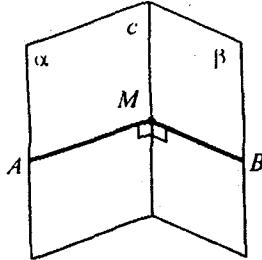
$$V_{\text{усеч. пир.}} = \frac{1}{3}H(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2})$$

(S_1 и S_2 — площади оснований).

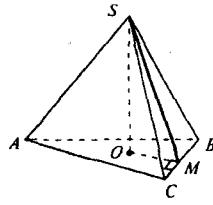


УЧЕНИЧЕСКАЯ СТРАНИЧКА

Практические приемы построения линейного угла двугранного угла

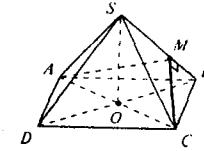


$M \in c$
 $MA \perp c$ (в грани α),
 $MB \perp c$ (в грани β).



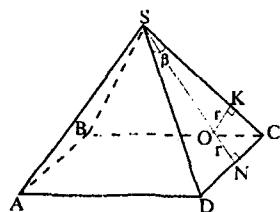
$SO \perp (ABC)$;
 $(SO — высота пирамиды).$

Проводим $OM \perp BC$ и соединяем точки S и M . Тогда $SM \perp BC$ (по теореме о трех перпендикулярах), поэтому $\angle SMO$ — линейный угол двугранного угла при ребре BC .



$SABCD$ — правильная пирамида. Проводим $CM \perp SB$ и соединяем точки A и M . Тогда $\triangle AMB = \triangle CMV$ (по двум сторонам и углу между ними), следовательно, $\angle AMB = \angle CMB = 90^\circ$, т. е. $AM \perp SB$ и $\angle AMC$ — линейный угол двугранного угла при ребре SB .

1. В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен β . Определить боковую поверхность пирамиды, если радиус окружности, вписанной в боковую грань, равен r . Вычислить, если $r = 6$ см, $\beta = 60^\circ$.



Пусть $SABCD$ — данная правильная пирамида. Боковыми гранями правильной пирамиды являются равные между собой равнобедренные треугольники. По условию, $\angle DCS = \beta$. Проведем апофему SN грани DSC . Эта апофема является одновременно биссектрисой треугольника DSC , следовательно, центр O вписанной окружности лежит на SN . Так как $ON \perp CD$, то ON является радиусом данной окружности, $ON = r$.

Пусть K — точка касания окружности к ребру SC . Тогда $OK \perp SC$ и $OK = r$. Из $\triangle SOK$ ($\angle K = 90^\circ$, $\angle S = \frac{\beta}{2}$): $SO = \frac{OK}{\sin \angle S} = \frac{r}{\sin \left(\frac{\beta}{2}\right)}$.

$$SN = SO + ON = \frac{r}{\sin \left(\frac{\beta}{2}\right)} + r = r \cdot \frac{1 + \sin \left(\frac{\beta}{2}\right)}{\sin \left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

$$\text{Из } \triangle SND (\angle N = 90^\circ); DN = SN \cdot \tan \angle S = r \cdot \frac{1 + \sin \left(\frac{\beta}{2}\right)}{\sin \left(\frac{\beta}{2}\right)} \cdot \tan \frac{\beta}{2} = r \cdot \frac{1 + \sin \left(\frac{\beta}{2}\right)}{\cos \left(\frac{\beta}{2}\right)}.$$

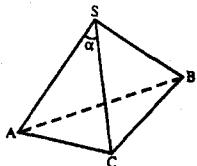
Учитывая, что $DN = NC$, находим:

$$S_6 = 4S_{\triangle DSC} = 4 \cdot \frac{DC \cdot SN}{2} = 4DN \cdot SN = 4r \cdot \frac{1 + \sin \left(\frac{\beta}{2}\right)}{\cos \left(\frac{\beta}{2}\right)} \cdot r \cdot \frac{1 + \sin \left(\frac{\beta}{2}\right)}{\sin \left(\frac{\beta}{2}\right)} = 8r^2 \frac{\left(1 + \sin \frac{\beta}{2}\right)^2}{\sin \beta}.$$

$$\text{При } r = 6 \text{ см, } \beta = 60^\circ: S_6 = 8 \cdot 6^2 \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 432\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

$$\text{Ответ: } 8r^2 \frac{\left(1 + \sin \frac{\beta}{2}\right)^2}{\sin \beta}; 432\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

2. В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α . Определить площадь боковой поверхности пирамиды, если радиус окружности, описанной около боковой грани, равен R .



Пусть $SABC$ — данная правильная треугольная пирамида, $\angle ASC = \alpha$, R — радиус окружности, описанной около боковой грани.

$$S_{\text{бок.}} = 3 \cdot S_{\triangle ASC} = 3 \cdot \frac{1}{2} SA \cdot SC \cdot \sin \alpha = \frac{3}{2} SA^2 \cdot \sin \alpha. \text{ Боковое}$$

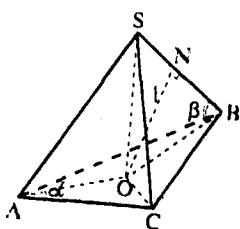
ребро SA найдем из $\triangle ASC$ по следствию из теоремы синусов.

Так как в этом треугольнике $\angle C = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle S) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, то $\frac{SA}{\sin \angle C} = 2R$;

$$SA = 2R \cdot \sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 2R \cdot \cos \frac{\alpha}{2}. \text{ Значит, } S_{\text{бок.}} = \frac{3}{2} \left(2R \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2 \sin \alpha = 6R^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha.$$

Ответ: $6R^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha$.

3. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с углом α при основании. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом β . Определить объем пирамиды, если расстояние от основания высоты до бокового ребра равно l .



Пусть $SABC$ — данная пирамида, $AB = BC$, $\angle CAB = \alpha$. Проведем высоту SO . Проекциями боковых ребер SA , SB , SC являются соответственно отрезки OA , OB , OC . По условию, $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \beta$. Треугольники SAO , SBO , SCO имеют общий катет SO и равные острые углы. Поэтому $\triangle SAO \sim \triangle SBO \sim \triangle SCO$. У равных прямоугольных треугольников высоты, проведенные к гипотенузам, равны.

Это значит, что расстояния от точки O до боковых ребер равны. Проведем из точки O перпендикуляр ON к ребру SB . По условию, $ON = l$. Из $\triangle DON$ ($\angle N = 90^\circ$):

$$OB = \frac{ON}{\sin \angle B} = \frac{l}{\sin \beta}. \text{ Из } \triangle SOB (\angle O = 90^\circ): H = SO = OB \cdot \tan \angle B = \frac{l}{\sin \beta} \cdot \tan \beta = \frac{l}{\cos \beta}.$$

Так как $OA = OC = OB$ (это следует из равенства треугольников SAO , SBO , SCO), то точка O является центром окружности, описанной около треугольника ABC , а OB является радиусом этой окружности. По следствию из теоремы синусов для $\triangle ABC$:

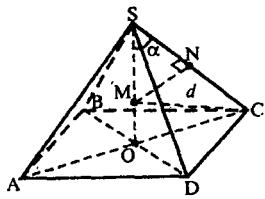
$$\frac{BC}{\sin \alpha} = 2OB; BC = 2OB \sin \alpha = \frac{2l \sin \alpha}{\sin \beta}. \text{ Так как в треугольнике } ABC AB = BC \text{ и}$$

$$\angle B = 180^\circ - 2\alpha, \text{ то } S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin(180^\circ - 2\alpha) = \frac{1}{2} \left(\frac{2l \sin \alpha}{\sin \beta}\right)^2 \sin 2\alpha = \frac{2l^2 \sin^2 \alpha \sin 2\alpha}{\sin^2 \beta}.$$

$$\text{Тогда } V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{2l^2 \sin^2 \alpha \sin 2\alpha}{\sin^2 \beta} \cdot \frac{l}{\cos \beta} = \frac{4l^3 \sin^2 \alpha \sin 2\alpha}{3 \sin \beta \cos \beta}.$$

Примечание. Если в некоторой пирамиде все боковые ребра равны или если они образуют с плоскостью основания один и тот же угол, то расстояния от основания высоты пирамиды до боковых ребер равны между собой.

4. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро образует с высотой пирамиды угол α . Перпендикуляр, проведенный к середине бокового ребра, пересекает высоту пирамиды в точке, находящейся на расстоянии d от вершины основания. Определить объем пирамиды.



MN — серединный перпендикуляр к ребру SC ($M \in SO$); $CM = d$, $\angle SCO = \alpha$. Так как M — точка серединного перпендикуляра к ребру SC , то $MS = MC = d$.

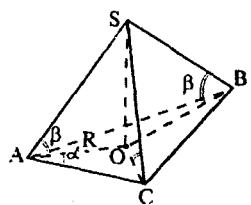
Из ΔSNM : $SN = d \cdot \cos \alpha$. $SC = 2d \cdot \cos \alpha$. Из ΔSOC :

$$OC = 2d \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha = d \cdot \sin 2\alpha; H = SO = 2d \cdot \cos^2 \alpha.$$

$$S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2}(2 \cdot OC)^2 = 2d^2 \cdot \sin^2 2\alpha. V = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot H = \frac{4}{3}d^3 \sin^2 2\alpha \cdot \cos^2 \alpha.$$

Пирамиды, в которых боковые ребра наклонены к основанию под одним и тем же углом

5. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с углом α при основании и радиусом описанной окружности R . Определить объем пирамиды, если все боковые ребра ее образуют с плоскостью основания угол β .



Пусть $SABC$ — данная пирамида, $\angle CAB = \angle ACB = \alpha$. Проведем высоту SO пирамиды. Тогда OA, OB, OC — проекции боковых ребер на плоскость основания. По условию, $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \beta$. Прямоугольные треугольники SAO, SBO и SCO имеют общий катет SO и равные острые углы, следовательно, равны между собой. Тогда $OA = OB = OC$, то есть точка O является центром окружности, описанной около

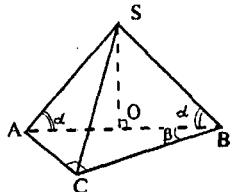
треугольника ABC . По условию, $OA = R$. Объем пирамиды $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}}H$. Из ΔSAO ($\angle O = 90^\circ$): $H = SO = R \operatorname{tg} \beta$. Из треугольника ABC по следствию из теоремы синусов находим: $\frac{AB}{\sin \alpha} = 2R$; $AB = 2R \sin \alpha$.

$$\text{Тогда: } S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \cdot (2R \sin \alpha)^2 \cdot \sin(180^\circ - 2\alpha) = 2R^2 \sin^2 \alpha \cdot \sin 2\alpha;$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 2R^2 \sin^2 \alpha \cdot \sin 2\alpha \cdot R \operatorname{tg} \beta = \frac{2}{3}R^3 \sin^2 \alpha \cdot \sin 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

$$\text{Ответ: } \frac{2}{3}R^3 \sin^2 \alpha \cdot \sin 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

6. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с углом β и радиусом вписанной окружности r . Определить объем пирамиды, если все ее боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом α .



Пусть $SABC$ — данная пирамида, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = \beta$, SO — высота пирамиды, $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \alpha$. Обозначим $AB = x$. Тогда $AC = x \cdot \sin \beta$; $BC = x \cdot \cos \beta$. Площадь основания $S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{4}x^2 \sin 2\beta$. С другой стороны, $S = p \cdot r$, где

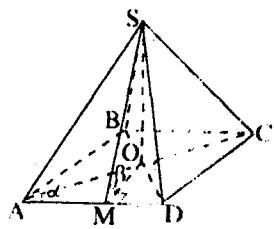
$$p = \frac{1}{2}x \cdot (1 + \cos \beta + \sin \beta) — полупериметр. Тогда \frac{1}{4}x^2 \sin 2\beta = \frac{1}{2}x \cdot (1 + \cos \beta + \sin \beta) \cdot r,$$

$$\text{откуда } x = \frac{2r(1 + \cos \beta + \sin \beta)}{\sin 2\beta}. \text{ Точка } O \text{ является центром окружности, описанной около прямоугольного } \triangle ABC, \text{ то есть является серединой гипотенузы. Из } \Delta ASO: H = SO = \frac{1}{2}x \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\text{Тогда } V = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}}H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}x^2 \sin 2\beta \cdot \frac{1}{2}x \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{x^3}{24} \cdot \sin 2\beta \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{r^3(1 + \cos \beta + \sin \beta)^3 \operatorname{tg} \alpha}{3 \sin^2 2\beta}.$$

Пирамиды, в которых боковые грани наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом

7. В основании пирамиды лежит ромб с острым углом α . Все боковые грани пирамиды образуют с плоскостью основания угол β . Определить полную поверхность пирамиды, если ее высота равна H .



Пусть $SABCD$ — данная пирамида, $ABCD$ — ромб, $\angle BAD = \alpha$, $SO = H$ — высота пирамиды. Точка O — центр окружности, вписанной в ромб, и точка пересечения его диагоналей. Проведем $SM \perp AD$ ($M \in AD$). Тогда $OM \perp AD$ и, по условию, $\angle SMO = \beta$. Из $\triangle SMO$: $OM = H \operatorname{ctg} \beta$. Из $\triangle AOM$ ($\angle M = 90^\circ$, $\angle A = \frac{\alpha}{2}$):

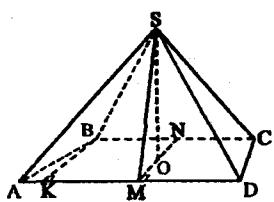
$$AO = \frac{OM}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{H \cdot \operatorname{ctg} \beta}{\sin \frac{\alpha}{2}}. \text{ Из } \triangle AOD (\angle O = 90^\circ): OD = AO \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{H \cdot \operatorname{ctg} \beta}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{H \cdot \operatorname{ctg} \beta}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{Тогда } S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 2AO \cdot 2OD = 2 \cdot \frac{H \cdot \operatorname{ctg} \beta}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{H \cdot \operatorname{ctg} \beta}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{4H^2 \operatorname{ctg}^2 \beta}{\sin \alpha}$$

Так как $S_{\text{бок.}} = \frac{S_{\text{осн.}}}{\cos \beta}$,

$$\text{то } S_{\text{п.}} = S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.}} = S_{\text{осн.}} + \frac{S_{\text{осн.}}}{\cos \beta} = \frac{1 + \cos \beta}{\cos \beta} \cdot S_{\text{осн.}} = \frac{4H^2 \operatorname{ctg}^2 \beta (1 + \cos \beta)}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

8. В основании пирамиды лежит равнобокая трапеция с тупым углом β . Все двугранные углы при основании пирамиды равны γ . Высоты боковых граней, проведенных из вершин пирамиды, равны h . Определить объем пирамиды.

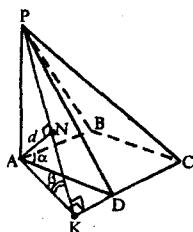


$BC \parallel AD$, $AB = CD$, $\angle ABC = \beta$, $SM \perp AD$, $SM = h$, SO — высота пирамиды, $\angle SMO = \gamma$. Из $\triangle SMO$: $H = h \cdot \sin \gamma$, $OM = h \cdot \cos \gamma$. O — центр окружности, вписанной в трапецию. BK — высота трапеции. $BK = 2OM = 2h \cdot \cos \gamma$. Из $\triangle ABK$ ($\angle K = 90^\circ$, $\angle A = 180^\circ - \beta$): $AB = \frac{2h \cdot \cos \gamma}{\sin \beta}$.

$$S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot BK = \frac{1}{2}(2AB) \cdot BK = \frac{4h^2 \cdot \cos^2 \gamma}{\sin \beta}. V = \frac{4h^3 \cdot \cos^2 \gamma \cdot \sin \gamma}{3 \sin \beta}$$

Пирамиды, в которых две смежные боковые грани перпендикулярны плоскости основания

9. Основание пирамиды — ромб с острым углом α . Две боковые грани пирамиды, содержащие стороны этого угла, перпендикулярны основанию. Две другие боковые грани наклонены к нему под углом β , а расстояние от основания высоты пирамиды до этих граней равно d . Определить объем пирамиды.



Пусть $PABCD$ — данная пирамида, $ABCD$ — ромб, $\angle DAB = \alpha < 90^\circ$. Тогда, по условию задачи, перпендикулярными плоскостями основания являются грани PAD и PAB , а значит, и прямая PA их пересечения. Поэтому отрезок PA — высота пирамиды. Проведем высоту PK грани PDC . По теореме о трех перпендикулярах, $AK \perp CD$. По условию задачи, $\angle PKA = \beta$.

Проведем из точки A перпендикуляр AN к грани PDC ; $AN = d$.

Покажем, что точка N принадлежит высоте PK грани PDC . Действительно, прямая CD перпендикулярна высоте PK и ее проекции AK на плоскость основания. Поэтому прямая CD перпендикулярна плоскости PKA . Так как плоскость PDC содержит прямую CD , то она также перпендикулярна плоскости PKA . Тогда перпендикуляр AN к плоскости PDC лежит в плоскости PKA и поэтому его основание N принадлежит высоте PK .

Из ΔANK ($\angle N = 90^\circ$): $AK = \frac{d}{\sin \beta}$. Из ΔPAK ($\angle A = 90^\circ$):

$$H = PA = AK \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{d}{\sin \beta} \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{d}{\cos \beta}. \text{ Так как } AB \parallel CD, \text{ то } \angle ADK = \alpha.$$

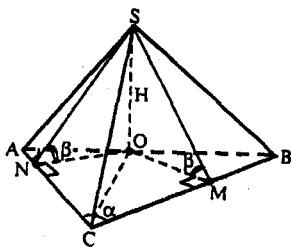
Из ΔAKD ($\angle K = 90^\circ$): $AD = \frac{AK}{\sin \alpha} = \frac{d}{\sin \beta \sin \alpha}$. Тогда $S_{\text{осн.}} = AD^2 \sin \alpha = \frac{d^2}{\sin^2 \beta \sin \alpha}$.

$$\text{Следовательно, } V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{d^2}{\sin^2 \beta \sin \alpha} \cdot \frac{d}{\cos \beta} = \frac{d^3}{3 \sin^2 \beta \cos \beta \sin \alpha}.$$

Ответ: $\frac{d^3}{3 \sin^2 \beta \cos \beta \sin \alpha}$.

Пирамиды, в которых одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания

10. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с углом α при основании. Боковая грань, содержащая боковую сторону этого треугольника, перпендикулярна основанию, а две другие — наклонены к нему под углом β . Высота пирамиды равен H . Определить объем пирамиды.



Пусть $SABC$ — данная пирамида, SO — ее высота, $SO = H$, $AB = BC$, $\angle CAB = \alpha$, $(SAB) \perp (ABC)$. Проведем высоты SM и SN граней SBC и SAC . Тогда OM и ON — проекции этих высот на плоскость основания и поэтому углы SMO и SNO являются линейными углами двугранных углов при ребрах BC и AC . По условию задачи, $\angle SMO = \angle SNO = \beta$.

Объем пирамиды $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H$. Так как боковая грань SAB перпендикулярна плоскости основания, то основание O высоты пирамиды принадлежит прямой AB . Из равенства прямоугольных треугольников SOM и SON (SO — общий катет, $\angle M = \angle N$) следует, что $OM = ON$. Из равенства прямоугольных треугольников OMC и ONC (OC — общая гипотенуза, $OM = ON$) имеем: $\angle OCM = \angle OCN$. Следовательно, CO — биссектриса треугольника ACB .

Из ΔSON ($\angle O = 90^\circ$): $OH = H \cdot \operatorname{ctg} \beta$. Из ΔDON ($\angle N = 90^\circ$): $AO = \frac{ON}{\sin \alpha} = \frac{H \operatorname{ctg} \beta}{\sin \alpha}$.

Из ΔOMB ($\angle M = 90^\circ$, $\angle B = 180^\circ - 2\alpha$): $OB = \frac{OM}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} = \frac{H \operatorname{ctg} \beta}{\sin 2\alpha}$.

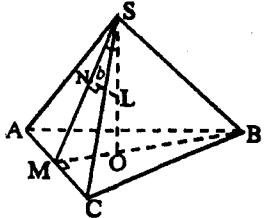
Тогда $AB = AO + OB = \frac{H \operatorname{ctg} \beta}{\sin \alpha} + \frac{H \operatorname{ctg} \beta}{\sin 2\alpha} = \frac{H \operatorname{ctg} \beta(2 \cos \alpha + 1)}{\sin 2\alpha}$.

$$S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin(180^\circ - 2\alpha) = \frac{1}{2} AB^2 \cdot \sin 2\alpha = \frac{H^2 \operatorname{ctg}^2 \beta (2 \cos \alpha + 1)^2}{2 \sin 2\alpha}.$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H = \frac{H^3 (1 + 2 \cos \alpha)^2}{6 \operatorname{tg}^2 \beta \sin 2\alpha}.$$

Пирамиды, в которых задан перпендикуляр, проведенный из некоторой точки к боковой грани

11. В правильной треугольной пирамиде высота образует с плоскостью боковой грани угол β . Расстояние от середины высоты до боковой грани равно b . Определить объем пирамиды.



Пусть $SABC$ — данная пирамида, SO — ее высота, точка L — середина высоты, LN — перпендикуляр, проведенный из точки L к грани SAC , $LN = b$. Покажем, что точка N принадлежит апофеме SM грани SAC . Действительно, прямая AC перпендикулярна апофеме SM и ее проекции OM на плоскость основания. Поэтому прямая AC перпендикулярна плоскости SOM .

Так как плоскость SAC содержит прямую AC , то она также перпендикулярна плоскости SOM . Тогда перпендикуляр LN к плоскости SAC лежит в плоскости SOM . Он является перпендикуляром, проведенным из середины катета прямоугольного треугольника SOM к гипотенузе SM , следовательно, его основание N принадлежит апофеме SM . Из перпендикулярности плоскостей SOM и SAC следует, что проекцией прямой SO на плоскость SAC является прямая SM . Поэтому, по условию, $\angle MSO = \beta$.

Объем пирамиды $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot H$. Из $\triangle SNL$ ($\angle N = 90^\circ$): $SL = \frac{b}{\sin \beta}$.

$H = SO = 2SL = \frac{2b}{\sin \beta}$. Из $\triangle SOM$ ($\angle O = 90^\circ$): $OM = SO \cdot \tan \beta = \frac{2b}{\sin \beta} \cdot \tan \beta = \frac{2b}{\cos \beta}$.

Так как точка O — центр треугольника ABC , то $BM = 3OM = \frac{6b}{\cos \beta}$. Из $\triangle ABM$

($\angle M = 90^\circ$): $AM = BM \cdot \cot 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}b}{\cos \beta}$. В правильном треугольнике высота BM

является медианой. Поэтому $S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2}AC \cdot BM = AM \cdot BM = \frac{2\sqrt{3}b}{\cos \beta} \cdot \frac{6b}{\cos^2 \beta} = \frac{12\sqrt{3}b^2}{\cos^2 \beta}$.

Следовательно, $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{12\sqrt{3}b^2}{\cos^2 \beta} \cdot \frac{2b}{\sin \beta} = \frac{8\sqrt{3}b^3}{\cos^2 \beta \cdot \sin \beta}$.

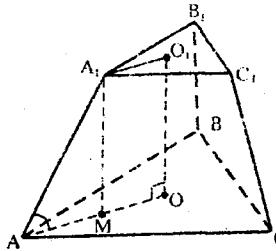
Ответ: $\frac{8\sqrt{3}b^3}{\cos^2 \beta \cdot \sin \beta}$.

Примечание. Если в произвольной пирамиде из некоторой точки ее высоты опустить перпендикуляр к боковой грани, то основание этого перпендикуляра лежит на высоте данной грани, проведенной из вершины пирамиды.

Усеченные пирамиды

$$V = \frac{1}{3}H(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2) \quad (S_1 \text{ и } S_2 \text{ — площади оснований, } H \text{ — высота}).$$

12. Стороны оснований правильной усеченной треугольной пирамиды относятся как 1:2, высота пирамиды равна 3 см, боковое ребро образует с большим основанием угол 45° . Найти площади оснований пирамиды.



Пусть $ABC A_1 B_1 C_1$ — данная правильная усеченная пирамида, $A_1 C_1 : AC = 1 : 2$, O и O_1 — центры оснований. Тогда $O_1 O$ — высота пирамиды, $OO_1 = 3$ см. Плоскость AOO_1 проходит через вершину полной пирамиды и поэтому содержит боковое ребро $A_1 A$ усеченной пирамиды, откуда следует, что $AA_1 O_1 O$ — плоский четырехугольник.

Кроме того, эта плоскость пересекает параллельные плоскости оснований пирамиды по прямым $A_1 O_1$ и AO и содержит ее высоту, следовательно, $A_1 O_1 \parallel AO$ и $AO \perp O_1 O$.

Таким образом, $AA_1 O_1 O$ — прямоугольная трапеция. Проведем высоту $A_1 M$ этой трапеции. Так как $A_1 M \parallel O_1 O$, то $A_1 M \perp (ABC)$. Тогда отрезок MA является проекцией бокового ребра $A_1 A$ на плоскость ABC . По условию, $\angle A_1 AM = 45^\circ$.

Из $\Delta A_1 MA$ ($\angle M = 90^\circ$): $AM = A_1 M \cdot \operatorname{ctg} 45^\circ = O_1 O \cdot 1 = 3$ см. Треугольники $A_1 B_1 C_1$ и ABC подобны и поэтому отношение радиусов $O_1 A_1$ и OA окружностей, описанных около этих треугольников, равно отношению сторон: $O_1 A_1 : OA = 1 : 2$; $OA = 2 \cdot O_1 A_1$. Учитывая, что $O_1 A_1 = OM$, имеем: $OA = 2 \cdot OM$. Значит, точка M — середина отрезка OA . Следовательно, $OA = 2AM = 6$ см.

Находим площадь большего основания через радиус OA описанной окружности:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4} OA^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot 6^2 = 27\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Так как $A_1 C_1 : AC = 1 : 2$, то $S_{\Delta A_1 B_1 C_1} = \frac{1}{4} S_{\Delta ABC} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$ (см²).

Ответ: $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ см² и $27\sqrt{3}$ см².

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. $PABC$ – пирамида, основание которой – правильный треугольник. Какой из отмеченные углов является линейным углом двугранного угла с ребром AC , если:

- a) D – середина отрезка AC , $PB \perp (ABC)$ (рис. 1);
- б) M – середина отрезка AC , $ON \parallel BM$ и $PO \perp (ABC)$ (рис. 2)?

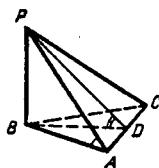


Рис. 1

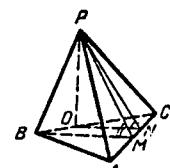


Рис. 2

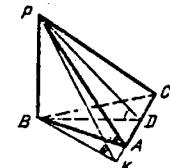


Рис. 3

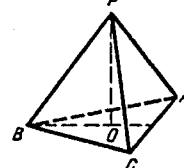


Рис. 4

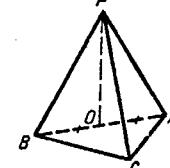


Рис. 5

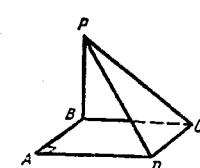


Рис. 6

2. $PABC$ – пирамида; D – середина отрезка AC , $PB \perp (ABC)$ (рис. 3). Каким должен быть треугольник ABC , чтобы линейным углом двугранного угла с ребром AC являлся угол PDB ; угол PAB ; угол PKB ?

3. Построить линейный угол двугранного угла с ребром AC , если в пирамиде $PABC$:

- а) $\triangle ABC$ – правильный, O – точка пересечения медиан, $PO \perp (ABC)$ (рис. 4);
- б) $\triangle ABC$ – правильный, O – середина отрезка AB , $PO \perp (ABC)$ (рис. 5).

4. Дан прямоугольник $ABCD$ и точка P вне его плоскости. Построить линейный угол двугранного угла с ребром DC , если:

- а) $BP \perp (ABC)$ (рис. 6);
- б) точка O принадлежит отрезку AB , $PO \perp (ABC)$ (рис. 7);
- в) O – точка пересечения диагоналей, $PO \perp (ABC)$ (рис. 8).

5. Дан ромб $ABCD$; прямая $PC \perp (ABC)$. Построить линейный угол двугранного угла с ребром BD (рис. 9).

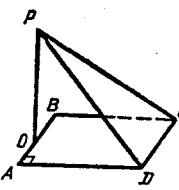


Рис. 7

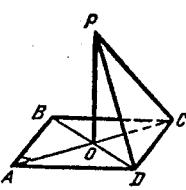


Рис. 8

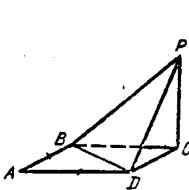


Рис. 9

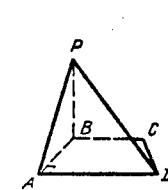


Рис. 10

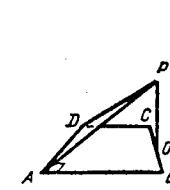


Рис. 11

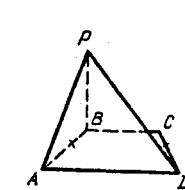


Рис. 12

6. Построить линейный угол двугранного угла с ребром AD , если:

- а) $ABCD$ – трапеция, $\angle BAD = 90^\circ$, $PB \perp (ABC)$ (рис. 10);
- б) $ABCD$ – трапеция, $\angle BAD = 90^\circ$, точка O принадлежит отрезку BC , $PO \perp (ABC)$ (рис. 11);
- в) $ABCD$ – равнобокая трапеция, $BP \perp (ABC)$ (рис. 12);
- г) $ABCD$ – равнобокая трапеция, $PC \perp (ABC)$ (рис. 13).

7. Данна пирамида $PABC$. Найти величину двугранного угла с ребром AC , если:

- а) $PB \perp (ABC)$, $\angle C = 90^\circ$, $BC = PB = 4$ см (рис. 14);
- б) $\triangle ABC$ – правильный, $AB = 6$ см, O – точка пересечения медиан, $OP \perp (ABC)$, $OP = 4$ см (рис. 4);
- в) $\triangle ABC$ – правильный, точка O – середина отрезка AB , $AB = 6$ см, $OP \perp (ABC)$, $OP = 4$ см (рис. 5).

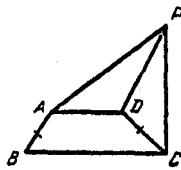


Рис. 13

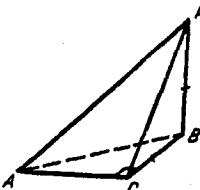


Рис. 14

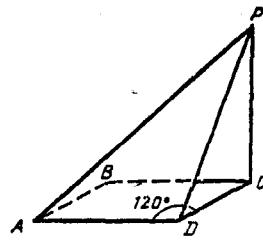


Рис. 15

8. $ABCD$ – прямоугольник, $BD = 4\sqrt{3}$ см, $PB \perp (ABC)$, $PB = 6$ см, двугранный угол с ребром DC равен 60° . Найти стороны прямоугольника (рис. 6).
9. $ABCD$ – прямоугольник, его площадь 48 см 2 , $DC = 4$ см, $PO \perp (ABC)$, $PO = 6$ см. Найти величину двугранного угла с ребром DC (рис. 8).
10. $ABCD$ – ромб, $BD = 4$ см, $PC \perp (ABC)$, $PC = 8$ см. Двугранный угол с ребром BD равен 45° . Найти площадь ромба (рис. 9).
11. В параллелограмме $ABCD$ $\angle ADC = 120^\circ$, $AD = 8$ см, $DC = 6$ см, $PC \perp (ABC)$, $PC = 9$ см (рис. 15). Найти величину двугранного угла с ребром AD и площадь параллелограмма.
12. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 3 см. Боковая грань наклонена к плоскости основания под углом 45° . Найти сторону основания пирамиды.
13. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна $6\sqrt{3}$, а высота 3. Найти:
- длину бокового ребра и угол наклона этого ребра к плоскости основания;
 - двугранный угол между плоскостями боковой грани и основанием.
14. В основании пирамиды $MABCD$ – прямоугольник $ABCD$, $MA \perp (ABC)$, $AC = 5$, $DC = 4$. Двугранный угол между (MDC) и (ADC) равен 60° . Найти:
- длину MC и угол наклона MC к плоскости ABC ;
 - площади ΔMDC , ΔCBM , ΔAMB .
15. В основании пирамиды лежит прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см. Все боковые ребра пирамиды равны 13 см. Найти высоту этой пирамиды.
16. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник, основание которого 12 см, боковая сторона 10 см. Высоты всех боковых граней равны 5 см. Вычислить высоту пирамиды.
17. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 6 см. Все боковые ребра пирамиды равны 13 см. Высота пирамиды равна 12 см. Вычислить второй катет этого треугольника.
18. По данной стороне основания a и боковому ребру b определить высоту правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.
19. По данной стороне основания a и высоте H определить апофему правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.
20. Основанием пирамиды является параллелограмм, стороны которого равны 3 см и 7 см, а одна из диагоналей 6 см; высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 4 см. Определить боковые ребра пирамиды.
21. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник, у которого основание равно 12 см, а боковая сторона 10 см. Боковые грани образуют с основанием равные двугранные углы, каждый из которых равен 45° . Определить высоту этой пирамиды.

22. Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см; каждое боковое ребро равно 13 см. Определить высоту пирамиды.
23. По стороне основания a и высоте H определить полную поверхность правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.
24. В правильной четырехугольной пирамиде боковая поверхность равна $14,76 \text{ м}^2$, а полная поверхность 18 м^2 . Определить сторону основания и высоту пирамиды.
25. Определить боковую поверхность правильной треугольной пирамиды, если сторона основания равна a и боковое ребро образует с плоскостью основания угол 45° .
26. Определить боковую поверхность правильной шестиугольной пирамиды, если сторона основания равна a , а боковая грань равновелика с диагональным сечением, проведенным через диаметр основания.
27. Основанием пирамиды является параллелограмм со сторонами 20 см и 36 см, и площадью 360 см^2 ; высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 12 см. Определить боковую поверхность пирамиды.
28. В основании пирамиды – равнобедренный треугольник, у которого одна сторона равна 40 см, а две других по 25 см. Высота пирамиды проходит через вершину угла, образованного равными сторонами основания, и равна 8 см. Определить боковую поверхность этой пирамиды.
29. Основанием пирамиды является треугольник со сторонами: 13 см, 14 см, 15 см. Боковое ребро, лежащее против средней по размеру стороны основания, перпендикулярно плоскости основания и равно 16 см. Определить полную поверхность этой пирамиды.
30. Основанием пирамиды является правильный шестиугольник со стороной a ; одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно стороне основания. Определить боковую поверхность этой пирамиды.
31. Основанием пирамиды является равносторонний треугольник со стороной a ; одна из боковых граней (также равносторонний треугольник) перпендикулярна плоскости основания. Определить боковую поверхность этой пирамиды.
32. Плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды равен α . Определить полную поверхность пирамиды, если боковое ребро равно b .
33. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро образует со стороной основания угол β . Определить боковую поверхность пирамиды, если радиус окружности, вписанной в боковую грань, равен r .
34. В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α . Определить боковую поверхность пирамиды, если радиус окружности, описанной около боковой грани, равен R .
35. В правильной четырехугольной пирамиде расстояние от основания высоты до середины бокового ребра равно b . Определить объем пирамиды, если ее боковые ребра образуют с плоскостью основания угол β .
36. Расстояние от основания высоты правильной четырехугольной пирамиды до ее бокового ребра равно a , а боковое ребро образует с плоскостью основания угол β . Найти боковое ребро пирамиды.
37. Найти боковое ребро правильной треугольной пирамиды, высота которой равна H , а двугранный угол при стороне основания равен α .
38. В правильной треугольной пирамиде высота образует с плоскостью боковой грани угол β . Расстояние от середины высоты до боковой грани равно b . Определить объем пирамиды.

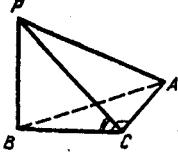
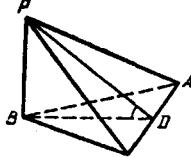
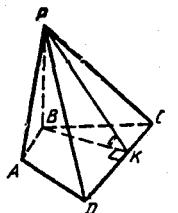
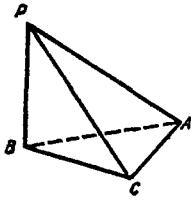
39. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α . Определить полную поверхность пирамиды, если расстояние от основания ее высоты до боковой грани равно d .
40. В правильной четырехугольной пирамиде боковая грань образует с плоскостью основания угол α . Отрезок, соединяющий середину высоты пирамиды с серединой апофемы, равен a . Определить объем пирамиды.
41. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро образует с плоскостью основания угол β . Определить объем пирамиды, если радиус окружности, вписанной в ее основание, равен r .
42. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с основанием a и углом α при вершине. Все боковые ребра пирамиды образуют с ее высотой угол γ . Определить объем пирамиды.
43. Основанием пирамиды является прямоугольник с углом γ между диагоналями. Все боковые ребра пирамиды равны l и наклонены к плоскости основания под углом β . Определить объем пирамиды.
44. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с углом β при основании и радиусом вписанной окружности r . Все боковые ребра пирамиды образуют с ее высотой угол γ . Определить объем пирамиды.
45. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с углом β , радиус вписанной в него окружности равен r . Определить объем пирамиды, если все ее боковые ребра наклонены к основанию под углом α .
46. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с углом β . Все боковые грани пирамиды образуют с плоскостью основания угол α . Определить боковую поверхность пирамиды, если ее высота равна H .
47. В правильной треугольной пирамиде боковая грань образует с плоскостью основания угол α . Определить объем пирамиды, если радиус окружности, описанной около ее основания, равен R .
48. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с гипotenузой c и острым углом α . Все двугранные углы при основании пирамиды равны γ . Определить объем пирамиды.
49. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с боковой стороной b и углом β при вершине. Все двугранные углы при основании пирамиды равны γ . Определить объем пирамиды.
50. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с радиусом описанной окружности R и острым углом α . Все двугранные углы при основании пирамиды равны γ . Определить боковую поверхность пирамиды.
51. Основанием пирамиды является ромб с большей диагональю d и острым углом α . Все двугранные углы при основании пирамиды равны β . Определить объем пирамиды.
52. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с основанием a и углом β при основании. Основанием высоты пирамиды является точка пересечения медианы этого треугольника, проведенной к основанию, и биссектрисы угла при его основании. Перпендикуляр, проведенный из вершины пирамиды к боковой стороне данного треугольника, образует с плоскостью основания пирамиды угол γ . Определить боковую поверхность пирамиды.

53. Основанием пирамиды является правильный треугольник со сторонами a . Две боковые грани пирамиды перпендикулярны основанию, а третья наклонена к нему под углом β . Определить боковую поверхность пирамиды.
54. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с углом β при основании, радиус вписанной в него окружности равен r . Две неравные боковые грани перпендикулярны основанию, а третья наклонена к нему под углом α . Определить объем пирамиды.
55. В основании пирамиды лежит правильный треугольник. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны основанию, а третья образует с высотой пирамиды угол γ . Расстояние от середины высоты пирамиды до третьей боковой грани равно l . Определить объем пирамиды.
56. Основание пирамиды – квадрат со стороной a . Две смежные боковые грани пирамиды перпендикулярны основанию, а две другие наклонены к нему под углом α . Найти боковую поверхность пирамиды.
57. Основание пирамиды – равнобедренный треугольник с углом α при основании. Две боковые грани пирамиды, содержащие стороны этого угла, перпендикулярны основанию, а третья наклонена к нему под углом β . Расстояние от основания высоты пирамиды до третьей боковой грани равно l . Найти объем пирамиды.
58. Основание пирамиды – ромб с тупым углом β . Две боковые грани пирамиды, содержащие стороны этого угла, перпендикулярны основанию. Две другие боковые грани наклонены к нему под углом α , а расстояние от середины высоты пирамиды до этих граней равно d . Определить объем пирамиды.
59. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник ABC с основанием $AC = 70$ см, боковой стороной $AB = 37$ см. Ребро пирамиды, проходящее через вершину B , перпендикулярно плоскости основания и равно 16 см. Вычислить боковую поверхность пирамиды.
60. Основание пирамиды – прямоугольный треугольник с острым углом β . Высота этого треугольника, проведенная к гипотенузе, равна H . Боковая грань, содержащая катет, прилежащий к данному углу, перпендикулярна основанию, а две другие наклонены к нему под углом α . Найти объем пирамиды.
61. Основанием пирамиды является правильный треугольник, площадь которого равна S . Одна боковая грань пирамиды перпендикулярна основанию, а две другие наклонены к нему под углом α . Определить объем пирамиды.
62. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α . Боковая грань, содержащая гипотенузу, перпендикулярна основанию, а две другие наклонены к нему под углом β . Определить объем пирамиды.
63. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с боковой стороной b и углом β при вершине. Боковая грань, содержащая основание этого треугольника, перпендикулярна основанию, а две другие наклонены к нему под углом α . Определить объем пирамиды.
64. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом β . Боковая грань, содержащая гипотенузу, перпендикулярна плоскости основания, а две другие наклонены к плоскости основания под углом α . Определить боковую поверхность пирамиды.

65. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с углом α при вершине. Боковая грань, содержащая основание этого треугольника, перпендикулярна плоскости основания пирамиды, а две другие – наклонены к плоскости основания под углом β . Определить объем пирамиды, если ее высота равна H .
66. В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α . Определить полную поверхность пирамиды, если расстояние от основания ее высоты до боковой грани равно a .
67. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α . Определить полную поверхность пирамиды, если расстояние от основания ее высоты до боковой грани равно d .
68. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с углом β при вершине. Две боковые грани пирамиды, содержащие стороны этого угла, перпендикулярны плоскости основания, а третья наклонена к нему под углом α . Расстояние от основания высоты пирамиды до третьей боковой грани равно d . Определить объем пирамиды.
69. Диагонали оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 6 см и 2 см, а двугранный угол при ребре большего основания – 60° . Найти площадь боковой поверхности усеченной пирамиды.
70. В правильной усеченной треугольной пирамиде сторона нижнего основания равна 15 см, а боковое ребро длиной 8 см наклонено под углом 30° к основанию пирамиды. Найти объем усеченной пирамиды.
71. Определить полную поверхность правильной треугольной усеченной пирамиды, боковое ребро равно 10 см, а стороны оснований – 18 см и 6 см.
72. Стороны оснований правильной усеченной треугольной пирамиды равны 2 см и 6 см. Боковая грань образует с большим основанием угол 60° . Найти высоту пирамиды.
73. Стороны оснований правильной усеченной треугольной пирамиды – 4 дм и 1 дм, а боковое ребро – 2 дм. Найти высоту пирамиды.
74. Найти объем правильной четырехугольной усеченной пирамиды, стороны оснований которой равны 4 дм и 8 дм, а диагональ – 11 дм.
75. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде сторона верхнего основания равна 3 см, а боковое ребро длиной 5 см наклонено к большему основанию под углом 45° . Найти объем усеченной пирамиды.
76. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 4 см, стороны оснований – 2 см и 8 см. Найти площадь диагонального сечения.
77. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 7 см. Стороны оснований 10 см и 2 см. Определить боковое ребро пирамиды.
78. Определить высоту правильных усеченных пирамид: треугольной, четырехугольной, шестиугольной, если дано боковое ребро c и стороны a и b нижнего и верхнего оснований.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-2-1

Тема. Пирамида. Свойства пирамиды

В-I	7 баллов	В-II	9 баллов		
1. $PABC$ – пирамида; $\angle ACB = 90^\circ$, $PB \perp (ABC)$. Доказать, что угол PCB – линейный угол двугранного угла с ребром AC .			1. $PABC$ – пирамида; $AB = BC$, D – середина отрезка AC , $PB \perp (ABC)$. Доказать, что угол PDB – линейный угол двугранного угла с ребром AC .		
					
2. Высота правильной четырехугольной пирамиды 7 см, а сторона основания 8 см. Найти боковое ребро пирамиды.			2. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро, равное 5 см, составляет с плоскостью основания угол 45° . Найти тангенс угла наклона боковой грани к плоскости основания.		
В-III	10 баллов	В-IV	12 баллов		
1. $PABCD$ – пирамида; $PB \perp (ABC)$, $BK \perp DC$. Доказать, что угол PKB – линейный угол двугранного угла с ребром CD .			1. Построить линейный угол двугранного угла с ребром AC , если в пирамиде $PABC$ $AB = BC$, $PB \perp (ABC)$.		
					
2. Боковая грань правильной четырехугольной пирамиды наклонена к плоскости основания под углом 60° . Площадь основания пирамиды 16 см^2 . Найти апофему пирамиды.			2. Найти сторону основания правильной четырехугольной пирамиды, если ее боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 45° , а площадь диагонального сечения равна 36 см^2 .		

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-2-2

Тема. Свойства пирамиды

В-І	В-ІІ
V в основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, катеты которого 6 см и 8 см. Все боковые ребра пирамиды равны 13 см. Вычислить высоту пирамиды.	V в основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с углом α . Все боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания угол ϕ . Высота пирамиды равна H . Определить площадь основания пирамиды.
В-ІІІ	В-ІV
V в основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с углом α . Все боковые ребра пирамиды равны b и наклонены к плоскости ее основания под углом ϕ . Определить площадь основания пирамиды.	V в основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с углом α . Высоты всех боковых граней равны H и образуют с плоскостью основания пирамиды угол ϕ . Найти площадь основания пирамиды.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-2-3

Тема. Поверхность пирамиды

В-І	В-ІІ
V боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно b , а плоский угол при ее вершине равен ϕ . Найти боковую поверхность пирамиды.	V расстояние от высоты правильной четырехугольной пирамиды до ее боковой грани равно d , а двугранный угол при основании α . Найти боковую поверхность пирамиды.
В-ІІІ	В-ІV
V основанием пирамиды является ромб с острым углом α и радиусом вписанной окружности r . Все двугранные углы при основании пирамиды равны γ . Определить полную поверхность пирамиды.	V основанием пирамиды является ромб с тупым углом β . Все двугранные углы при основании пирамиды равны γ . Высота пирамиды равна H . Определить полную поверхность пирамиды.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-2-4

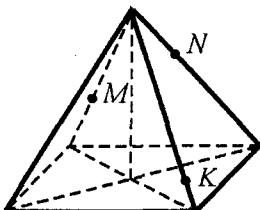
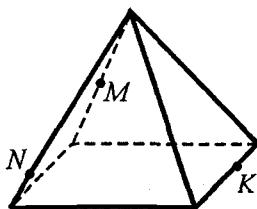
Тема. Объем пирамиды

В-І	В-ІІ
V найти объем правильной четырехугольной пирамиды, если ее боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 45° , а площадь диагонального сечения равна Q .	V основанием пирамиды является треугольник со сторонами a , a и b . Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60° . Найти объем пирамиды.
В-ІІІ	В-ІV
V боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды составляет с основанием угол α , а середина его удалена от основания на расстояние a . Найти объем пирамиды.	V в основании пирамиды лежит прямоугольник, площадь которого равна S ; боковые ребра пирамиды равны и образуют с плоскостью основания угол 45° . Угол между диагоналями основания равен 60° . Найти объем пирамиды.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА К-2-1



В-I	В-II
<p>1. Площадь боковой грани правильной четырехугольной пирамиды равна 48 см^2, а периметр основания 16 см. Вычислить апофему пирамиды.</p> <p>2. Стороны основания треугольной пирамиды равны 9 см, 12 см, 15 см, вершина пирамиды удалена от всех сторон основания на одинаковое расстояние, равное 5 см. Найти высоту пирамиды.</p>	<p>1. Боковая грань правильной четырехугольной пирамиды – правильный треугольник, высота которого равна $2\sqrt{3}$ см. Вычислить периметр основания пирамиды.</p> <p>2. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с острым углом α при вершине. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом ϕ. Высота пирамиды равна H. Найти площадь основания пирамиды.</p>
В-III	В-IV
<p>1. Стороны основания треугольной пирамиды равны 6 см, 6 см и 8 см; боковые ребра равны и длина каждого 9 см. Найти высоту пирамиды.</p> <p>2. Расстояние от основания высоты правильной четырехугольной пирамиды до ее бокового ребра равно a, а ее боковое ребро образует с плоскостью основания угол β. Найти боковое ребро пирамиды.</p> <p>3. Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки M, N, K.</p>	<p>1. Основанием пирамиды является треугольник со сторонами $3\sqrt{10}$ см, $3\sqrt{10}$ см и 6 см. Все боковые ребра наклонены к основанию под углом 30°. Найти высоту пирамиды.</p> <p>2. Диагональ основания правильной четырехугольной пирамиды равна m, а двугранный угол при ребре основания α. Определить площадь боковой грани пирамиды.</p> <p>3. Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки M, N, K.</p>



КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА К-2-2

В-I	В-II
<p>1. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 4 см, а сторона основания 6 см. Найти боковую поверхность пирамиды.</p> <p>2. Основанием пирамиды $MABCD$ является квадрат $ABCD$ со стороной 6 см. Ребро MB является высотой пирамиды и равно 8 см. Найти площадь полной поверхности пирамиды.</p>	<p>1. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 12 см, а апофема боковой грани 15 см. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.</p> <p>2. Найти площадь боковой поверхности пирамиды $SABCD$, если ее основание квадрат $ABCD$ со стороной a, боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания и равно b.</p>
В-III	В-IV
<p>1. В правильной четырехугольной пирамиде высота 12 см, а сторона основания 10 см. Найти площадь поверхности пирамиды.</p> <p>2. Найти площадь боковой поверхности пирамиды $SABCD$, если ее основание – квадрат $ABCD$ со стороной a, грани SAB и SAD перпендикулярны плоскости основания и высота равна b.</p>	<p>1. Определить площадь полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды, если ее высота 9 м, а апофема 18 м.</p> <p>2. Найти площадь боковой поверхности пирамиды $SABCD$, если ее основание квадрат $ABCD$ со стороной a, все боковые грани – прямоугольные треугольники, а высота пирамиды b.</p>

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА К-2-3

В-I	В-II
<p>1. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипotenузой c и острым углом α. Все боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания кугол γ. Определить объем пирамиды.</p> <p>2. Основанием пирамиды является квадрат. Две смежные боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие наклонены к нему под углом β. Высота пирамиды равна H. Определить боковую поверхность пирамиды.</p>	<p>1. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с острым углом β. Все боковые ребра пирамиды равны l и образуют с ее высотой угол α. Определить объем пирамиды.</p> <p>2. Основанием пирамиды является квадрат со стороной a. Две смежные боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания, а две другие наклонены к нему под углом α. Определить боковую поверхность пирамиды.</p>
В-III	В-IV
<p>1. В основании пирамиды лежит равнобокая трапеция с тупым углом β и большим основанием a. Диагональ трапеции является биссектрисой тупого угла. Все боковые ребра пирамиды образуют с ее высотой угол γ. Определить объем пирамиды.</p> <p>2. В основании пирамиды лежит ромб с острым углом α. Две боковые грани пирамиды, содержащие стороны этого угла, перпендикулярны плоскости основания, а две другие – наклонены к нему под углом β. Высота пирамиды равна H. Определить боковую поверхность пирамиды.</p>	<p>1. В основании пирамиды лежит равнобокая трапеция с боковой стороной c и острым углом α. Диагональ трапеции является биссектрисой острого угла. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом γ. Определить объем пирамиды.</p> <p>2. В основании пирамиды лежит ромб со стороной a и тупым углом β. Две боковые грани пирамиды, содержащие стороны этого угла, перпендикулярны плоскости основания, а две другие наклонены к нему под углом α. Определить боковую поверхность пирамиды.</p>

§3. Тела вращения.

Поверхности и объемы тел вращения

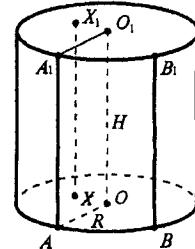
Цилиндр

Цилиндром (круговым цилиндром) называется тело, состоящее из двух кругов, которые не лежат в одной плоскости, а совмещаются параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих кругов.

Круги – основания цилиндра.

Отрезки, соединяющие соответствующие точки окружностей кругов, – **образующие**. AA_1 ; BB_1 – образующие цилиндра.

Цилиндр называется **прямым**, если его образующие перпендикулярны плоскостям оснований.



Свойства

1. Основания цилиндра равны и параллельны.

$OA = O_1A_1 = R$; $(OAB) \parallel (A_1O_1B_1)$ – O – центр нижнего основания, O_1 – центр верхнего основания.

2. Образующие цилиндра параллельны и равны. $AA_1 \parallel BB_1$; $AA_1 = BB_1$.

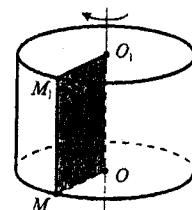
3. Высота цилиндра (расстояние между плоскостями оснований) равна образующей.

$H_{цил.} = AA_1 = OO_1$.

4. При вращении прямоугольника около его стороны как оси образуется цилиндр.

OMM_1O_1 – прямоугольник; OO_1 – ось образованного цилиндра ($OO_1 \parallel MM_1$).

$R_{цил.} = OM = O_1M_1$; $H_{цил.} = MM_1 = OO_1$.



Площадь поверхности и объем цилиндра

Боковая поверхность

$$S_{бок.} = 2\pi RH$$

Полная поверхность

$$S_{полн.} = 2\pi R(R + H)$$

Объем

$$V = \pi R^2 H$$

R – радиус основания. H – высота цилиндра.

Сечения цилиндра плоскостями

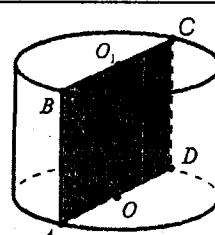
Осьное сечение цилиндра

$ABCD$ – осевое сечение (сечение, проходящее через ось OO_1).

$ABCD$ – прямоугольник (если $ABCD$ – квадрат, то цилиндр называется равносторонним).

$AD = d_{осн.} = 2R$; $AB = H_{цил.}$.

AB и CD – образующие цилиндра.



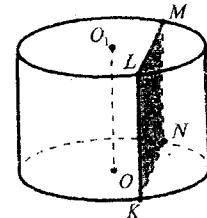
Сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси

$(LMKN) \parallel OO_1$;

$KLNM$ – прямоугольник;

KL и MN – образующие цилиндра;

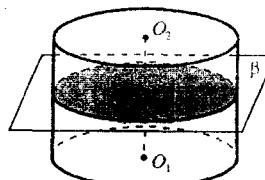
$KL = H_{\text{цил.}}$.



Сечение цилиндра плоскостью, параллельной его основаниям

Плоскость, параллельная плоскости основания цилиндра, пересекает его боковую поверхность по окружности, равной окружности основания.

$$R_{\text{пер.}} = R_{\text{цил.}}$$



Конус

Конусом (круговым конусом) называется тело, состоящее из круга, точки, не лежащей в плоскости этого круга, и всех отрезков, соединяющих заданную точку с точками круга.

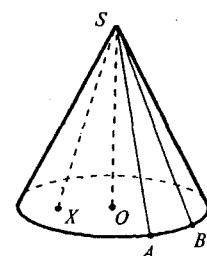
Круг – **основание конуса**.

Точка S – **вершина конуса**.

Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, – **образующие**.

SA ; SB – образующие конуса.

Конус называется **прямым**, если $SO \perp (AOB)$ (O – центр круга основания).



Свойства

1. Образующие конуса равны. $SA = SB = \dots$

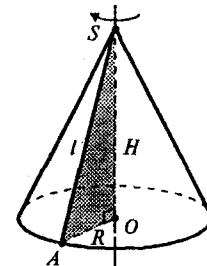
2. $H_{\text{конуса}} = SO$; $(SO \perp (AOB))$.

3. При вращении прямоугольного треугольника около его катета как оси образуется конус.

$\triangle AOS$ – прямоугольный, $\angle AOS = 90^\circ$;

прямая SO – ось конуса;

$R_{\text{конуса}} = AO$; $H_{\text{конуса}} = SO$; AS – образующая; $AS = l$.



Площадь поверхности и объем конуса

Боковая поверхность

$$S_{\text{бок.}} = \pi RL$$

Полная поверхность

$$S_{\text{полн.}} = \pi R(R + L)$$

Объем

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

R – радиус основания; L – образующая; H – высота конуса.

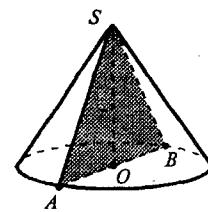
Сечения конуса плоскостями

Осьное сечение конуса

ΔSAB – осевое сечение (сечение, проходящее через ось SO).

ΔSAB – равнобедренный.

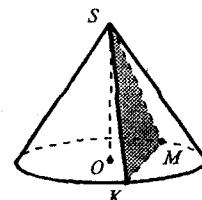
$SA = SB$ (SA и SB – образующие).



Сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину

ΔSMK – равнобедренный.

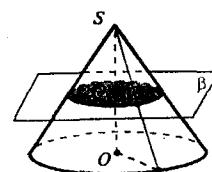
$SM = SK$ (SM и SK – образующие).



Сечение конуса плоскостью, параллельной его основанию

Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, пересекает конус по кругу, а боковую поверхность – по окружности с центром на оси конуса.

$$\frac{R_{\text{сеч.}}}{R_{\text{кон.}}} = \frac{SO_1}{SO}.$$

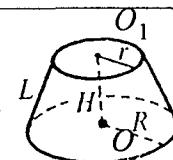


Усеченный конус

Усеченным конусом называется часть конуса, ограниченная его основанием и сечением, параллельным основанию.

Высотой усеченного конуса называется расстояние между плоскостями его оснований.

В частности, $OO_1 = H_{\text{усеч. конуса}}$, где O и O_1 – центры оснований усеченного конуса.



Свойства

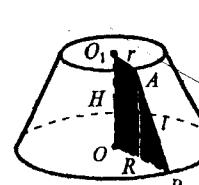
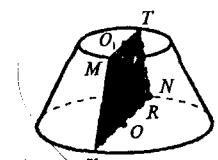
1. Осьное сечение усеченного конуса – равнобокая трапеция:

MKN – осевое сечение;

$MT \parallel KN$, $MK = TN$ (образующие);

$MT = 2r$; $KN = 2R$; $OO \perp KN$; $OO_1 = H$.

2. При вращении прямоугольной трапеции ($OBAO_1$) около оси, проходящей через боковую сторону, перпендикулярную основаниям, образуется усеченный конус.



Площадь поверхности и объем усеченного конуса

Боковая поверхность

$$S_{\text{бок.}} = \pi(R + r)L$$

Полная поверхность

$$S_{\text{полн.}} = \pi(R + r)L + \pi R^2 + \pi r^2$$

Объем

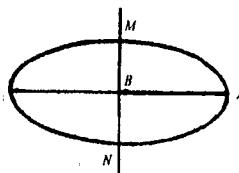
$$V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2)$$

L – образующая. R и r – радиусы нижнего и верхнего оснований.

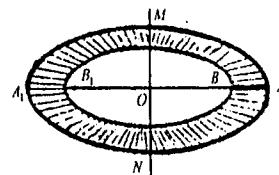
Тела вращения

Рассмотрим, какие тела могут образоваться в результате вращения отрезка около оси. Пусть отрезок AB вращается около оси MN и лежит с ней в одной плоскости.

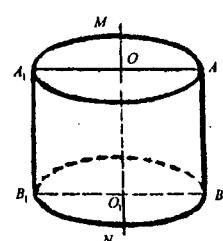
1. $AB \perp MN$ и имеет с MN общую точку B .
В результате вращения отрезка около оси получаем **круг** с центром в точке B и радиусом, равным отрезку AB .



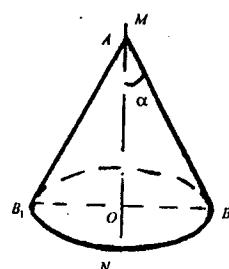
2. $AB \perp MN$ и не имеет общей точки с MN , причем $OB = d$. В результате вращения образуется **плоское кольцо**, ширина которого равна длине данного отрезка.



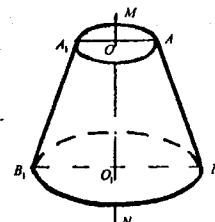
3. $AB \parallel MN$ и AB вращается на расстоянии d от оси MN . Получается **поверхность цилиндра**, образующая которой равна отрезку AB , а радиус основания равен d .



4. Отрезок AB имеет с осью MN общую точку A и наклонен к ней под углом α . Вращаясь, AB описывает **боковую поверхность конуса**, образующая которой равна AB , а радиус основания $R = AB \sin \alpha$.



5. Отрезок AB не имеет с осью общей точки и наклонен к ней под углом α . В результате вращения отрезок AB описывает **боковую поверхность усеченного конуса**. Образующая конуса равна AB , радиусы оснований $r = d$ и $R = d + AB \sin \alpha$.



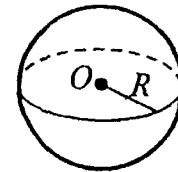
Сфера и шар

Сферой называется множество всех точек пространства, находящихся на данном расстоянии R от заданной точки O . При вращении полуокружности около ее диаметра получаем сферу.

Шаром называется множество всех точек пространства, находящихся от заданной точки O на расстоянии, не большем данного расстояния R .

При вращении полукруга около его диаметра получаем шар.

Сфера является **поверхностью шара**.



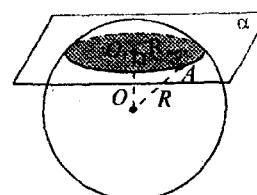
Сечение шара плоскостью

Любое сечение шара плоскостью есть круг.

Центр этого круга – основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

O – центр шара, O_1 – центр круга сечения.

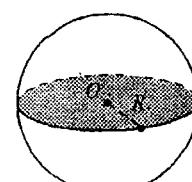
$$OO_1 \perp \alpha. \text{ Из } \Delta OO_1 A: R_{\text{сеч.}} = \sqrt{R^2_{\text{шара}} - OO_1^2}.$$



Сечение, проходящее через центр шара, – **большой круг**.

$$R_{\text{большого круга}} = R_{\text{шара}}$$

Сечение сферы любой плоскостью есть окружность.



Площадь сферы

$$S = 4\pi R^2$$

Объем шара

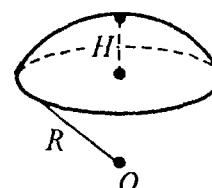
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Части шара

Сегмент

$$\text{Объем: } V = \frac{1}{3}\pi H^2(3R - H).$$

$$\text{Площадь сегментной поверхности: } S_{\text{бок.}} = 2\pi RH.$$

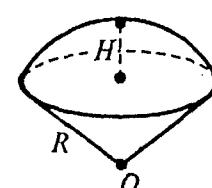


Сектор

$$\text{Объем: } V = \frac{2}{3}\pi R^2 H.$$

Площадь полной поверхности:

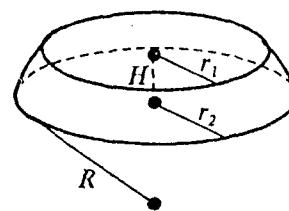
$$S_{\text{полн.}} = \pi R(2H + \sqrt{2HR - H^2}).$$



Срез

$$\text{Объем: } V = \frac{1}{6}\pi H^3 + \frac{1}{2}\pi(r_1^2 + r_2^2)H.$$

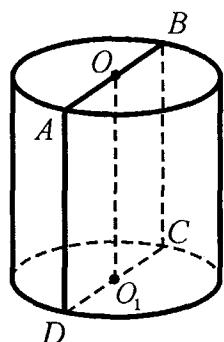
$$\text{Площадь боковой поверхности: } S_{\text{бок.}} = 2\pi RH.$$



УЧЕНИЧЕСКАЯ СТРАНИЧКА

1. В цилиндре площадь основания равна Q , а площадь осевого сечения S . Определить полную поверхность цилиндра.

Решение.



В цилиндре $S_{\text{осн.}} = Q$ и $S_{ABCD} = S$. Найти $S_{\text{полн.}}$ цилиндра.

Обозначим $AO = R$ и $AD = H$; тогда $S_{\text{полн.}} = 2\pi R(H + R)$.

По условию задачи, $2RH = S$, $\pi R^2 = Q$, откуда

$$R = \sqrt{\frac{Q}{\pi}}; H = \frac{S}{2\sqrt{\frac{Q}{\pi}}}.$$

$$\text{Тогда } S_{\text{полн.}} = 2\pi \sqrt{\frac{Q}{\pi}} \left(\frac{S}{2\sqrt{\frac{Q}{\pi}}} \sqrt{\frac{\pi}{Q}} + \sqrt{\frac{Q}{\pi}} \right) = \pi S + 2Q.$$

Ответ: $\pi S + 2Q$.

2. Параллельно оси цилиндра проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу α . Диагональ образовавшегося сечения равна l и наклонена к плоскости основания под углом β . Определить объем цилиндра.

Решение.

Сечением цилиндра плоскостью, параллельной его оси OO_1 и пересекающей основание, является прямоугольник. Пусть это прямоугольник AA_1B_1B , в котором $A_1B = l$, и пусть дуга AMB равна α . Тогда $\angle AOB = \alpha$. Так как $AA_1 \perp (AOB)$, то проекцией диагонали A_1B на плоскость основания является хорда AB . Поэтому $\angle A_1BA = \beta$.

Объем цилиндра $V = \pi R^2 H$. Из ΔAA_1B ($\angle A = 90^\circ$):

$H = AA_1 = l \cdot \sin \beta$; $AB = l \cdot \cos \beta$. Из точки O проведем перпендикуляр ON к хорде AB . Так как ΔAOB равнобедренный, то $\angle AON = \frac{\alpha}{2}$.

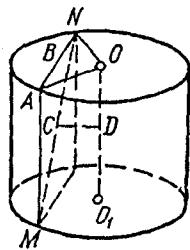
$$AN = \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{1}{2} l \cdot \cos \beta. \text{ Из } \Delta AON \ (\angle N = 90^\circ): R = OA = \frac{AN}{\sin \angle AON} = \frac{l \cdot \cos \beta}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\text{Тогда } V = \pi \cdot R^2 \cdot H = \pi \cdot \left(\frac{l \cdot \cos \beta}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \right)^2 \cdot l \cdot \sin \beta = \frac{\pi \cdot l^3 \cdot \cos^2 \beta \cdot \sin \beta}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ: $\frac{\pi \cdot l^3 \cdot \cos^2 \beta \cdot \sin \beta}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$.

3. Высота цилиндра 6 дм, радиус основания 5 дм. Концы отрезка, длина которого 10 дм, лежат на окружностях обоих оснований. Найти расстояние между данным отрезком и осью.

Решение.



В данном цилиндре $AM = 6$ дм; $AO = 5$ дм и отрезок $MN = 10$ дм.

Найти расстояние между отрезком MN и осью цилиндра OO_1 .

MN и OO_1 – скрещивающиеся прямые. Проведем плоскость MAN через прямую MN параллельно оси OO_1 ; тогда расстояние от любой точки оси OO_1 до проведенной плоскости будет искомым.

$OO_1 \perp (ANO)$, $(AMN) \perp (ANO)$, $BO \perp AN$ (по свойству медианы равнобедренного треугольника ANO ($NO = AO = R$), проведенной к основанию AN). $BO \perp (AMN)$ – по теореме о прямой, лежащей в одной из перпендикулярных плоскостей и перпендикулярной к линии их пересечения. BO – искомое расстояние.

Из прямоугольного ΔMAN получим: $AN = \sqrt{MN^2 - AM^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (дм).

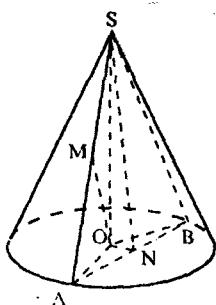
Из прямоугольного ΔABO ($BO \perp AN$; $AB = \frac{AN}{2}$): $OB = \sqrt{AO^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (дм).

В этом случае $CD = BO = 3$ дм.

Ответ: 3 дм.

4. Через вершину конуса проведена плоскость, пересекающая его основание по хорде, которую видно с вершины под углом α , а из центра основания – под углом β . Определить боковую поверхность конуса, если расстояние от центра его основания до середины образующей равно d .

Решение.



Пусть сечением конуса плоскостью является треугольник SAB , SO – высота конуса, точка M – середина образующей SA . По условию, $\angle ASB = \alpha$, $\angle NOA = \beta$, $OM = d$. Боковая поверхность конуса $S_{\text{бок.}} = \pi Rl$, где $R = OA$ – радиус основания, $l = SA$ – длина образующей. В прямоугольном треугольнике SOA ($\angle O = 90^\circ$) середина M гипotenузы SA является центром описанной окружности. Поэтому $MS = MA = MO$,

откуда $SA = 2 \cdot OM = 2d$. Из вершины S проведем перпендикуляр SN к хорде AB . По теореме о трех перпендикулярах, $ON \perp AB$. Так как $SA = SB$, то высота SN является биссектрисой и медианой треугольника ASB .

Поэтому $\angle NSA = \frac{\alpha}{2}$ и $AN = NB$. Аналогично $\angle NOA = \frac{\beta}{2}$.

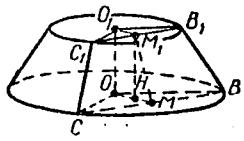
Из ΔSNA : $NA = SA \cdot \sin \angle NSA = 2d \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$. Из ΔONA : $OA = \frac{NA}{\sin \angle NOA} = \frac{2d \cdot \sin(\alpha/2)}{\sin(\beta/2)}$.

Тогда $S_{\text{бок.}} = \pi \cdot OA \cdot SA = \pi \cdot \frac{2d \cdot \sin(\alpha/2)}{\sin(\beta/2)} \cdot 2d = \frac{4\pi \cdot d^2 \cdot \sin(\alpha/2)}{\sin(\beta/2)}$.

Ответ: $\frac{4\pi \cdot d^2 \cdot \sin(\alpha/2)}{\sin(\beta/2)}$.

5. В усеченном конусе радиусы оснований 5 см и 3 см, высота $\sqrt{2}$. Через две его образующие проведено сечение плоскостью, отсекающей от окружностей оснований дуги по 120° . Найти площадь сечения.

Решение.



1) Проводим $OM \perp BC$, $O_1M_1 \perp B_1C_1$, тогда $BM = MC$, $B_1M_1 = M_1C_1$ (теорема о радиусе, перпендикулярном хорде).

2) $MM_1 \perp BC$ (как ось симметрии трапеции BB_1C_1C).

$$3) S_{\text{сеч.}} = \frac{BC + B_1C_1}{2} \cdot MM_1 \quad (1) \quad (\text{формула площади трапеции}).$$

$$4) BC = OA\sqrt{3} = 5\sqrt{3}, B_1C_1 = 3\sqrt{3} \text{ см} \quad (2) \quad (BC = a_3 = R\sqrt{3}).$$

5) В трапеции OO_1M_1M проводим $M_1H \perp OM$; из ΔHM_1M : $MM_1 = \sqrt{HM_1^2 + HM^2}$ (3) (теорема Пифагора); $HM_1 = OO_1 = \sqrt{2}$ см.

$$6) HM = OM - OH = OM - O_1M_1 \quad (4); \quad \angle OCB = (180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ.$$

$$7) \text{Из } \Delta COM: OM = OC \sin 30^\circ = 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}; \text{ из } \Delta C_1O_1M_1:$$

$$O_1M_1 = O_1C_1 \sin 30^\circ = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}; \text{ подставим эти значения в (4): } HM = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1 \text{ (см)}.$$

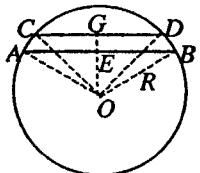
$$8) MM_1 = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3} \text{ (см)} \quad (5).$$

$$9) \text{Из (5), (2) и (1): } S_{\text{сеч.}} = \frac{5\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 12 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 12 (см²).

6. Внутри шара проведены две параллельные плоскости по одну сторону от его центра на расстоянии 3 см друг от друга. Эти плоскости дают в сечении два малых круга, диаметры которых 9 см и 12 см. Вычислить объем шара.

Решение.



По условию, $AB = 12$ см; $CD = 9$ см. Треугольники OEB и OGD — прямоугольные, откуда $R^2 = OE^2 + EB^2$ или $R^2 = OG^2 + GD^2$, $OG = OE + 3$; тогда имеем $R^2 = (OE + 3)^2 + GD^2$. Сравнивая выражения, получим $OE^2 + EB^2 = (OE + 3)^2 + GD^2$,

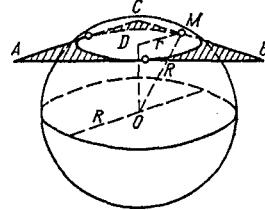
$$\text{или } OE^2 + 6^2 = (OE + 3)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 \Rightarrow OE = \frac{9}{8} \text{ (см)}.$$

$$\text{Тогда } R = \sqrt{OE^2 + EB^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{8}\right)^2 + 6^2} = 6,1 \text{ см}; V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi 6,1^3 \approx 946 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Ответ: 946 см³.

7. Стороны треугольника равны 15 см, 14 см и 13 см. Найти удаление от плоскости треугольника до центра шара, касательной к сторонам треугольника, если радиус шара равен 5 см.

Решение.



Дан шар O с радиусом $R = 5$ см и $\triangle ABC$, стороны которого касаются поверхности шара и равны $AB = 15$ см, $BC = 14$ см и $AC = 13$ см. Найти расстояние от центра шара до плоскости $\triangle ABC$.

Плоскость $\triangle ABC$ пересечёт шар O по кругу, вписанному в данный треугольник. Основание перпендикуляра OD , опущенного из центра шара O на плоскость $\triangle ABC$, попадает в центр этого круга D .

Пусть $DM = r$ – радиус круга D , проведенный в точку касания стороны CB поверхности шара. Тогда из прямоугольного $\triangle ODM$ находим $OD = \sqrt{OM^2 - DM^2}$.

Радиус шара $R = OM = 5$ см. Радиус круга D , вписанного в данный треугольник, находим по формуле $r = DM = \frac{S}{p}$, где S – площадь, а p – полупериметр

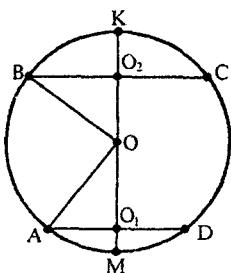
$$\text{треугольника: } DM = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \frac{\sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}}{21} = 4 \text{ (см).}$$

Подставляя найденные значения в формулу для OD , находим искомое расстояние $OD = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (см).

Ответ: 3 см.

8. Радиусы оснований шарового пояса равны 10 см и 12 см, а его высота – 11 см. Найти поверхность сферического пояса, если параллельные плоскости, пересекающие шар, расположены по разные стороны от центра шара.

Решение.



На рисунке $O_1A = 10$ см, $O_2B = 12$ см, $H = O_1O_2 = 11$ см.

Площадь поверхности пояса: $S = 4\pi R^2 - (S_1 + S_2)$, где R – радиус шара, S_1 , S_2 – площади поверхностей шаровых сегментов с высотами $H_1 = O_1M$ и $H_2 = O_2K$.

$$S = 4\pi R^2 - (2\pi RH_1 + 2\pi RH_2) = 2\pi R(2R - H_1 - H_2) = 2\pi RH.$$

$$\text{Найдем } R: O_1O + OO_2 = O_1O_2; \sqrt{R^2 - 10^2} + \sqrt{R^2 - 12^2} = 11;$$

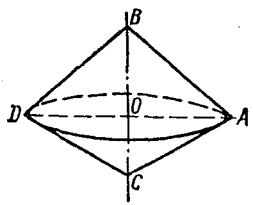
$$R^2 - 10^2 = (11 - \sqrt{R^2 - 12^2})^2; R = 12,5 \text{ см.}$$

$$\text{Следовательно, } S = 2\pi \cdot 12,5 \cdot 11 = 275\pi \text{ (см}^2\text{).}$$

Ответ: 275π см².

9. Доказать, что если $\triangle ABC$ вращается вокруг стороны $BC = a$, то объем полученного тела $V_a = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{Q^2}{a}$, где Q – площадь треугольника.

Решение.



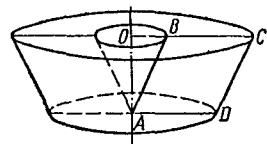
Объем тела вращения состоит из двух конусов BAD и CAD . Обозначим $AO = h$ высоту $\triangle ABC$, опущенную на сторону BC , которая является и радиусом оснований конусов. Тогда, обозначив объем искомого тела вращения через V_a , имеем

$$V_a = V_{\text{кон. } ABD} + V_{\text{кон. } CAD}, \text{ или } V_a = \frac{1}{3}\pi h^2(CO + OB) = \frac{1}{3}\pi ah^2.$$

Учитывая, что, по условию, $ah = 2Q$, найдем $V_a = \frac{1}{3}\pi ah^2 = \frac{1}{3}\pi \frac{a^2 h^2}{a} = \frac{4}{3}\pi \frac{Q^2}{a}$, что и требовалось доказать. Формула верна для любого треугольника, но если угол будет тупой, то при доказательстве надо учитывать, что тогда $V_a = V_{\text{кон. } ABD} - V_{\text{кон. } ACD}$.

10. Ромб $ABCD$ с $\angle A = 60^\circ$ и стороной $AB = a$ вращается вокруг оси $AO \perp AD$. Найти объем тела вращения.

Решение.



Объем тела вращения равен разности объемов усеченного конуса $ADCO$ и конуса ABO :

$$V_x = \frac{1}{3}\pi \cdot AO(OC^2 + AD \cdot OC + AD^2) - \frac{1}{3}\pi \cdot AO \cdot OB^2 =$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot AO(OC^2 + AD \cdot OC + AD^2 - OB^2).$$

Рассмотрим $\triangle AOB$ ($\angle AOB = 90^\circ$ и $\angle BAO = 30^\circ$). В этом треугольнике $AB = a$, тогда $BO = \frac{1}{2}a$, $AO = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Подставляя эти значения в формулу для объема тела вращения, найдем $V_x = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \left(\left(\frac{3}{2}a\right)^2 + a \cdot \frac{3}{2}a + a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2 \right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}\pi a^3$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{4}\pi a^3$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ



1. Осевое сечение цилиндра — прямоугольник, площадь которого 48 см^2 . Площадь основания цилиндра равна $36\pi \text{ см}^2$. Вычислить высоту цилиндра.
2. Осевым сечением цилиндра является квадрат, диагональ которого 8 см. Вычислить боковую поверхность цилиндра.
3. Длина окружности основания цилиндра равна $12\pi \text{ см}$, его высота равна 10 см. Вычислить объем цилиндра.
4. Радиус основания цилиндра 37 дм, высота 24 дм. На каком расстоянии от оси цилиндра находится сечение, имеющее форму квадрата?
5. В цилиндре параллельно оси проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу в 120° . Длина оси 15 см, ее отстояние от секущей плоскости 4 см. Вычислить площадь сечения.
6. Хорда основания цилиндра равна a и стягивает дугу 2α . Расстояние от центра второго основания до этой хорды равно d . Найти полную поверхность цилиндра.
7. В цилиндре параллельно его оси проведена плоскость, пересекающая нижнее основание по хорде, которая видна из центра этого основания под углом α . Диагонали образованного сечения образуют между собой угол β . Площадь сечения равна S . Определить площадь основания цилиндра.
8. В цилиндре параллельно его оси проведено сечение, диагональ которого наклонена к плоскости основания под углом φ . Это сечение пересекает нижнее основание по хорде, которая стягивает дугу α . Найти объем цилиндра, если его высота равна H .
9. Образующая конуса равна $\sqrt{6}$ см и составляет с плоскостью основания угол 45° . Найти объем конуса.
10. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 90° , площадь сечения 18 см^2 . Найти объем конуса.
11. Через вершину конуса проведена плоскость, пересекающая основание по хорде, которая видна из центра основания под углом β , а из вершины — под углом α . Радиус основания равен R . Найти площадь сечения.
12. Через вершину конуса, радиус которого равен R , проведена плоскость под углом α к плоскости основания. Эта плоскость отсекает от окружности основания дугу 2α . Найти высоту конуса.
13. Через вершину конуса, высота которого равна h , проведена плоскость под углом β к плоскости основания. Образующая конуса образует с высотой угол α . Найти длину хорды, по которой плоскость пересекает основание.
14. Через вершину конуса проведена плоскость, пересекающая его основание по хорде, которая видна из центра основания под углом β , а из вершины — под углом α . Найти радиус основания конуса, если площадь сечения равна S .
15. Через вершину конуса проведена плоскость под углом β к плоскости основания. Эта плоскость отсекает от окружности основания дугу 2α . Расстояние от вершины конуса до хорды, стягивающей эту дугу, равно l . Найти образующую конуса.
16. В основании конуса проведена хорда, которая видна из его центра под углом α , а из вершины конуса под углом φ . Определить боковую поверхность конуса, если его радиус равен R .

17. В конусе из центра основания к образующей проведен перпендикуляр, который наклонен к плоскости основания под углом α . Длина перпендикуляра равна a . Определить полную поверхность конуса.
18. Радиусы оснований усеченного конуса относятся как $1 : 3$. Образующая конуса равна 4 и составляет с плоскостью основания угол 60° . Найти объем конуса.
19. Высота усеченного конуса равна 5, а диагональ осевого сечения – 13. Радиусы оснований относятся как $1 : 2$. Найти объем конуса.
20. Прямоугольный треугольник с катетом a и прилежащим острым углом α вращается около этого катета. Найти поверхность тела вращения.
21. В усеченном конусе диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны, образующая равна l и составляет с плоскостью основания угол α . Найти объем усеченного конуса.
22. Стороны прямоугольника равны 4 см и 5 см. Найти площадь поверхности и объем тела, полученного при вращении прямоугольника около его меньшей стороны.
23. В равнобедренном треугольнике ABC $AC = CB = 25$, $AB = 48$. Треугольник вращается вокруг оси, проходящей через вершину B и перпендикулярной AB . Найти объем тела вращения.
24. Хорда длиной a , лежащая в основании конуса, удалена от центра на расстояние m ; плоскость, проходящая через хорду и вершину конуса, составляет с плоскостью основания угол ϕ . Найти объем конуса.
25. Ромб с площадью S и тупым углом ϕ вращается вокруг оси, проведенной через вершину острого угла перпендикулярно стороне. Найти объем фигуры вращения (рис. 1).
26. Как изменится поверхность шара, если его радиус увеличить в три раза?
27. Какая фигура имеет больший объем: шар с радиусом 1 дм или правильная треугольная призма, каждое ребро которой равно 2 дм?
28. Во сколько раз нужно увеличить радиус сферы, чтобы увеличить площадь сферы в 10 раз?
29. Отношение площадей двух сфер равно 2. Найти отношение диаметров этих сфер.
30. Объем шара равен V . Определить его поверхность.
31. Радиус шара равен 17 см. Найти площадь сечения шара плоскостью, находящейся на расстоянии 15 см от центра.
32. Все стороны правильного треугольника касаются сферы с радиусом 2 дм. Найти расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если сторона его равна 6 дм.
33. Радиус шара равен R , а диаметр его сечения плоскостью равен a . Найти поверхность меньшего сферического сегмента.
34. Шар касается всех сторон прямоугольного треугольника, катеты которого равны 6 дм и 8 дм. Найти радиус шара, если расстояние от центра шара до плоскости треугольника равно 14 дм.
35. Дуга осевого сечения шарового сектора равна 120° . Найти отношение объема шарового сектора к объему соответствующего шарового сегмента.
36. Площадь сферической поверхности шарового сектора радиуса R равна площади большого круга шара. Найти площадь конической поверхности сектора (рис. 2).

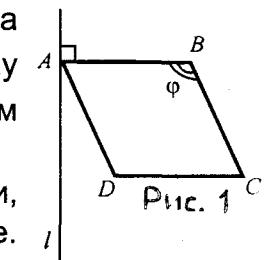


Рис. 1

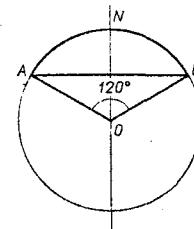


Рис. 2

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-3-1

Тема. Цилиндр



B-I	B-II
<p>1. Осевым сечением цилиндра является квадрат, диагональ которого равна $4\sqrt{2}$ см. Вычислить длину основания цилиндра.</p> <p>2. Параллельно оси цилиндра проведена плоскость, пересекающая основание по хорде, которая стягивает дугу β. Определить боковую поверхность цилиндра, если диагональ образованного сечения равна a и составляет с плоскостью основания угол α.</p>	<p>1. Осевым сечением цилиндра является квадрат. Площадь основания цилиндра равна 64π см². Вычислить высоту цилиндра.</p> <p>2. Параллельно оси цилиндра проведена плоскость, пересекающая основание по хорде, длина которой равна a. Эта хорда стягивает дугу α. Найти объем цилиндра, если диагональ образованного сечения составляет с плоскостью основания угол β.</p>
B-III	B-IV
<p>1. В цилиндре параллельно оси проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу в 60°. Длина оси 10 см, ее удаление от секущей плоскости 2 см. Вычислить площадь сечения.</p> <p>2. В нижнем основании цилиндра проведена хорда, которая видна из его центра под углом α. Отрезок, соединяющий центр верхнего основания с концом хорды, наклонен к плоскости основания под углом β. Определить объем цилиндра, если расстояние от центра нижнего основания до этого отрезка равно a.</p>	<p>1. Площадь осевого сечения цилиндра 8 м^2, площадь основания 12 м^2. Вычислить площадь сечения, параллельного оси и отстоящего от нее на 1 м.</p> <p>2. В нижнем основании цилиндра проведена хорда, стягивающая дугу β. Отрезок, соединяющий центр верхнего основания с серединой хорды, образует с плоскостью основания угол α. Определить боковую поверхность цилиндра, если расстояние от центра нижнего основания до этого отрезка равно b.</p>

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-3-2

Тема. Конус, усеченный конус



В-І	В-ІІ
1. В конусе через его вершину проведена плоскость, пересекающая основание по хорде, длина которой равна a . Хорда стягивает дугу 90° . Наибольший угол между образующими конуса равен 60° . Найти площадь боковой поверхности конуса.	1. Через вершину конуса проведена плоскость, пересекающая основание по хорде, длина которой равна m . Угол между образующими в сечении прямой, а наибольший угол между образующими конуса 120° . Найти площадь боковой поверхности конуса.
2. Длины окружностей оснований усеченного конуса равны 4π и 10π . Высота конуса равна 4. Найти площадь поверхности усеченного конуса.	2. Найти радиусы основания усеченного конуса, если его боковая поверхность равна 208π , образующая – 13, а высота – 5.
3. Через вершину конуса проведена плоскость под углом 60° к плоскости основания, пересекающая основание по хорде, стягивающей дугу 60° . Высота конуса равна $4\sqrt{3}$. Найти объем конуса.	3. Через вершину конуса проведена плоскость, пересекающая окружность основания по хорде, равной $6\sqrt{3}$ и стягивающей дугу в 120° . Плоскость составляет с плоскостью основания угол 45° . Найти объем конуса.
В-ІІІ	В-ІV
1. Центральный угол в развертке боковой поверхности конуса равен 120° . Площадь боковой поверхности равна 12π . Найти площадь осевого сечения конуса.	1. Центральный угол в развертке боковой поверхности конуса равен 240° . Высота конуса – $5\sqrt{5}$. Найти площадь боковой поверхности конуса.
2. Образующая усеченного конуса равна l и составляет с плоскостью основания угол α . Диагональ осевого сечения конуса перпендикулярна образующей. Найти площадь боковой поверхности конуса.	2. Образующая усеченного конуса составляет с плоскостью нижнего основания угол φ . Диагональ осевого сечения конуса перпендикулярна его образующей. Сумма длин окружностей оснований равна $2\pi m$. Найти площадь боковой поверхности конуса.
3. Угол в развертке боковой поверхности конуса равен 120° . Площадь боковой поверхности конуса равна 3π . Найти объем конуса.	3. Длина хорды и радиус развертки боковой поверхности конуса соответственно равны $6\sqrt{3}$ и 6. Найти объем конуса.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-3-3

Тема. Шар и его части



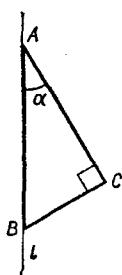
B-I	B-II
1. Линия пересечения сферы и плоскости, удаленной от центра сферы на 8, имеет длину 12π . Найти площадь поверхности сферы.	1. Сечение шара плоскостью, удаленной от его центра на 12, имеет площадь 25π . Определить площадь поверхности шара.
2. Плоскость пересекает шар. Диаметр, проведенный в одну из точек линии пересечения, составляет с плоскостью угол 45° . Найти площадь сечения, если диаметр шара равен $4\sqrt{3}$.	2. Плоскость пересекает сферу. Диаметр сферы, проведенный в одну из точек линии пересечения, имеет длину $4\sqrt{2}$ и составляет с плоскостью угол 45° . Найти длину линии пересечения.
3. Радиус шара равен R . Определить объем шарового сектора, если дуга в осевом сечении сектора равна 90° .	3. Радиус шара равен R . Определить объем шарового сектора, если дуга в осевом сечении сектора равна 60° .
B-III	B-IV
1. Сечения шара двумя параллельными плоскостями, между которыми лежит центр шара, имеют площади 144π и 25π . Найти площадь поверхности шара, если расстояние между параллельными плоскостями равно 17.	1. Сечения сферы двумя параллельными плоскостями имеют длины 10π и 24π . Найти площадь сферы, если расстояние между плоскостями равно 7 и центры сечений лежат на одном радиусе.
2. Через точку, не лежащую на сфере, проведены две плоскости, касающиеся сферы. Найти расстояние от центра сферы до линии пересечения плоскостей, если угол между плоскостями равен 60° , а площадь сферы 32π .	2. Через точку на поверхности шара проведены две плоскости, пересекающие его. Обе плоскости удалены от центра сферы на расстояние $2\sqrt{3}$, угол между ними равен 60° . Найти площадь полученных сечений.
3. Радиусы оснований шарового пояса равны 3 м и 4 м, а радиус шара равен 5 м. Определить объем шарового пояса, если параллельные плоскости, пересекающие шар, расположены по одну сторону от центра шара.	3. Радиусы оснований шарового пояса равны 3 м и 4 м, а радиус шара равен 5 м. Определить объем шарового пояса, если параллельные плоскости, пересекающие шар, расположены по разные стороны от центра шара.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-3-4



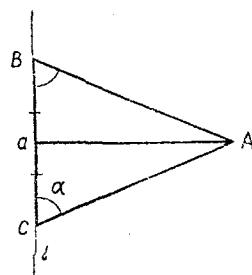
B-I

Прямоугольный треугольник с площадью S и острым углом α вращается вокруг оси, содержащей гипотенузу. Найти объем фигуры вращения.



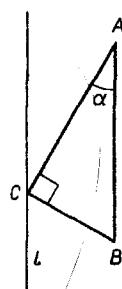
B-II

Равнобедренный треугольник, основание которого a и угол при основании α , вращается вокруг оси, содержащей это основание. Найти объем фигуры вращения.



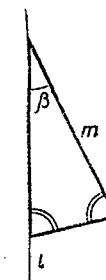
B-III

Прямоугольный треугольник с площадью S и острым углом α вращается вокруг оси, проведенной через вершину прямого угла параллельно гипотенузе. Найти объем фигуры вращения.



B-IV

Равнобедренный треугольник, угол при вершине которого равен β , а боковая сторона равна m , вращается вокруг оси, содержащей боковую сторону. Найти объем фигуры вращения.



КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА К-3-1



B-I	B-II
1. Найти объем и боковую поверхность равностороннего цилиндра, если длина окружности его основания равна 16π см.	1. Образующая конуса равна a , угол при вершине осевого сечения равен α . Найти объем конуса и его боковую поверхность.
2. Шар с радиусом 13 см пересечен двумя параллельными плоскостями, находящимися на расстоянии 7 см и 5 см от центра шара. Найти площади образованных сечений.	2. В шаре на расстоянии 12 см от центра проведена секущая плоскость так, что образовавшийся в сечении круг имеет радиус 5 см. Найти площадь поверхности сферического сегмента, отсеченного от шара этой плоскостью.
3. В основании конуса хорда, равная a , стягивает дугу α . Отрезок, соединяющий вершину конуса с серединой этой хорды, наклонен к плоскости основания под углом ϕ . Найти объем конуса.	3. В цилиндре параллельно его оси проведено сечение, диагональ которого образует с плоскостью основания угол ϕ . Это сечение пересекает основание по хорде, которая стягивает дугу ϕ и равна a . Найти объем цилиндра.
B-III	B-IV
1. Найти объем и боковую поверхность конуса, диаметр основания которого равен d , а угол при вершине осевого сечения равен α .	1. Диагонали осевого сечения цилиндра взаимно перпендикулярны. Периметр сечения равен $8a$. Найти объем цилиндра и площадь его боковой поверхности.
2. Сечение шара плоскостью, отстоящей от его центра на расстоянии 3 см, имеет радиус 4 см. Найти площадь сферы и объем шара.	2. Шар радиусом 13 см пересечен двумя параллельными плоскостями, расположенными по разные стороны от центра шара. Площади образовавшихся сечений равны $64\pi \text{ см}^2$ и $49\pi \text{ см}^2$. Найти расстояние между плоскостями сечений.
3. В цилиндре параллельно его оси проведено сечение, диагональ которого наклонена к плоскости основания под углом ϕ . Это сечение пересекает нижнее основание по хорде, стягивающей дугу α . Найти объем цилиндра, если его высота равна H .	3. В основании конуса хорда равна a и стягивает дугу α . Найти объем конуса, если его образующая наклонена к плоскости основания под углом β .

§4. Комбинации геометрических тел

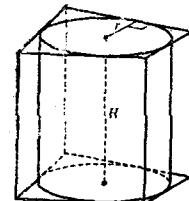
Возможные типы комбинаций

- Многогранник и многогранник. (Призма, вписанная в пирамиду, или пирамида, вписанная в призму, и другие.)
- Многогранник и тело вращения. (Пирамида, вписанная в конус, или конус, вписанный в пирамиду; цилиндр, вписанный в пирамиду, или пирамида, вписанная в цилиндр, и другие; шар, вписанный в пирамиду, или пирамида, вписанная в шар; призма, вписанная в шар, или шар, вписанный в призму, и другие.)
- Тело вращения и тело вращения. (Шар, вписанный или описанный около цилиндра, конуса, и другие.)

Цилиндром, вписанным в призму, называется цилиндр, основания которого — круги, вписанные в основание призмы, а боковая поверхность цилиндра касается боковых граней призмы.

Радиус цилиндра — r .

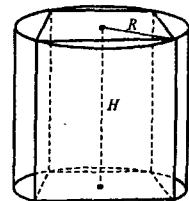
Ось цилиндра совпадает с высотой призмы — H .



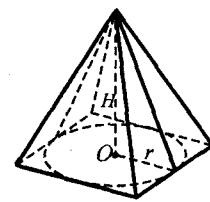
Цилиндр называется описанным около призмы, если его основания — круги описанные около оснований призмы, а образующие совпадают с ребрами призмы.

Радиус цилиндра — R .

Ось цилиндра совпадает с высотой призмы — H .



Конусом, вписанным в пирамиду, называется конус, основание которого — круг, вписанный в многоугольник основания пирамиды, вершина совпадает с вершиной пирамиды, боковая поверхность конуса касается боковых граней пирамиды.



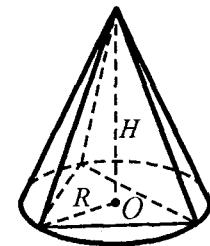
r — радиус конуса;

H — высота пирамиды и конуса.

Конус называется описанным около пирамиды, если его основание — круг, описанный около пирамиды, вершина совпадает с вершиной пирамиды, а образующие совпадают с ребрами пирамиды.

Высоты конуса и пирамиды совпадают на основании единственности прямой, перпендикулярной плоскости и проведенной через точку, не лежащую в данной плоскости.

Радиус вписанной в основание пирамиды окружности (круга) перпендикулярен стороне многоугольника, лежащего в основании пирамиды, и является проекцией образующей конуса на плоскость основания.

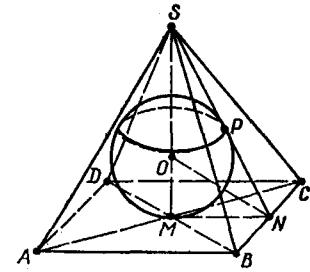
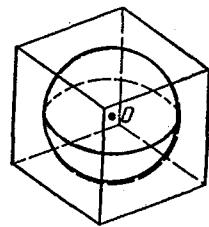


R — радиус конуса;

H — высота пирамиды и конуса.

Шар называется вписанным в многогранник, если все грани многогранника касаются шара. **Многогранник** в этом случае называется **описанным около шара** (сферы).

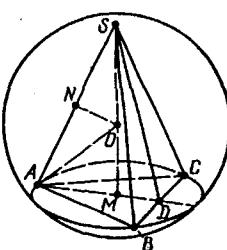
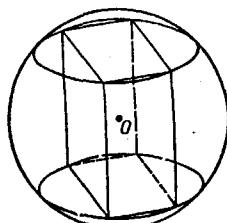
Центр шара, вписанного в многогранник, равноудален от всех его граней. Он является точкой пересечения полуплоскостей, проведенных через ребра двугранных углов, образованных двумя смежными гранями, которые делят этот угол пополам. Расстояние от центра шара до граней — его радиус.



Шар называется описанным около многогранника, если все вершины многогранника лежат на поверхности шара (сферы).

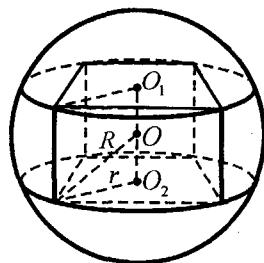
В этом случае **многогранник называют вписанным в шар**.

Центр шара, описанного около многогранника, равноудален от всех его вершин, то есть является точкой пересечения плоскостей, проведенных через середины ребер многогранника (призмы, пирамиды) перпендикулярно им. Расстояние от центра шара до вершины многогранника — его радиус.



Шар можно описать около призмы, только если она прямая и её основание является прямоугольником, вписанным в окружность.

Центр шара, описанного около прямой призмы, лежит на середине высоты призмы, соединяющей центры окружностей, описанных около оснований призмы.



O — центр шара;

R — радиус шара;

O_1O_2 — высота призмы;

r — радиус окружности, описанной около основания призмы

$$R^2 = \left(\frac{H}{2}\right)^2 + r^2.$$

Примечание. Центр шара, описанного около прямоугольного параллелепипеда, лежит в точке пересечения диагоналей параллелепипеда, а каждая диагональ параллелепипеда является диаметром описанного шара.

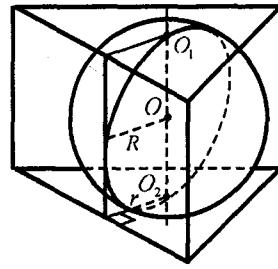
Шар можно вписать в прямую призму, если её основания являются многоугольниками, описанными около окружности, а высота призмы равна диаметру шара и диаметру этой окружности.

Центр шара, вписанного в прямую призму, лежит на середине отрезка, соединяющего центры окружностей, вписанных в основания призмы. Причем радиус шара равен радиусу окружности, вписанной в основание призмы, а диаметр шара равен высоте призмы.

Примечание. Шар можно вписать и в некоторые наклонные призмы. Если рассмотреть перпендикулярное сечение призмы, проходящее через центр вписанного шара, то получим, что радиус шара, вписанного в наклонную призму, равен радиусу окружности, вписанной в перпендикулярное сечение призмы, а диаметр шара равен высоте призмы.

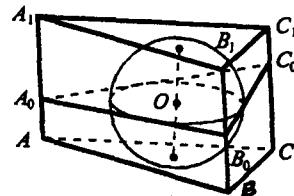
Если в многогранник можно вписать сферу, то объем многогранника равен одной трети произведения площади полной поверхности многогранника на радиус вписанной сферы.

$$V = \frac{1}{3} r S_{\text{полн.многогр.}}$$



O — центр шара; R — радиус шара;
 O_1O_2 — высота призмы и диаметр шара;
 r — радиус окружности, вписанной
в основание призмы,

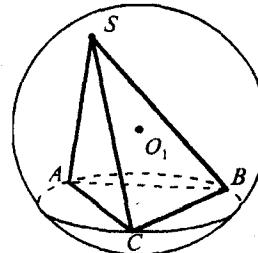
$$R = r = \frac{H}{2}.$$



$A_0B_0C_0$ — перпендикулярное сечение
 $(A_0B_0C_0) \perp AA_1$,

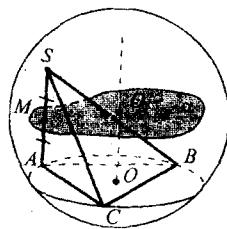
то $r_{\text{впис.шара}} = r_{\text{окр., вл. в перпенд. сечении } A_0B_0C_0}$,
 $d_{\text{впис. шара}} = H_{\text{призмы}}$.

Шар называется **описанным около пирамиды**, если все вершины пирамиды лежат на поверхности шара.



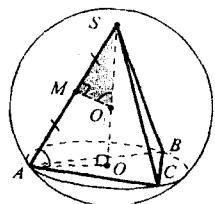
O_1 — центр описанного шара;
 $AO_1 = BO_1 = CO_1 = SO_1 = R_{\text{опис. шара}}$.

Центр шара, описанного около произвольной пирамиды, лежит на прямой, перпендикулярной плоскости основания, проходящей через центр окружности, описанной около основания, в точке пересечения этой прямой с плоскостью, перпендикулярной боковому ребру и проходящей через его середину.



O — центр окружности, описанной около основания, $OO_1 \perp (ABC)$;
 M — середина SA , $\alpha \perp SA$ ($M \in \alpha$);
 α пересекает OO_1 в точке O_1 ;
 O_1 — центр описанного шара.

Если вершина пирамиды проектируется в центр окружности, описанной около основания, то центр описанного шара лежит на прямой, содержащей высоту пирамиды в точке пересечения этой прямой с серединным перпендикуляром к боковому ребру.



SO — высота пирамиды, O — центр окружности, описанной около основания пирамиды, M — середина ребра SA , $MO_1 \perp SA$; $MO_1 \cap SA$ в точке O_1 ;
 O_1 — центр описанного шара, $SO_1 = R$ (шара);
 $AO = r$ (окружности, описанной около основания пирамиды).

Примечание. Центр описанного шара может находиться в середине пирамиды (на высоте, рис. 1); вне пирамиды (на продолжении высоты, рис. 2); в плоскости основания пирамиды (совпадает с основанием высоты пирамиды, рис. 3).

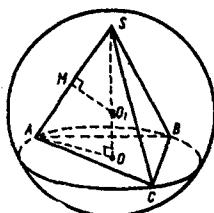


Рис. 1

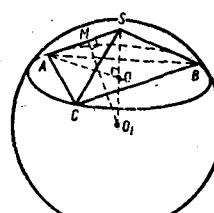


Рис. 2

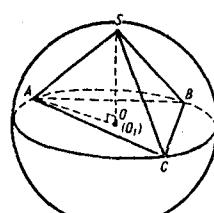
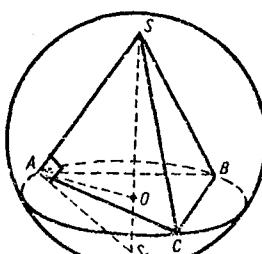
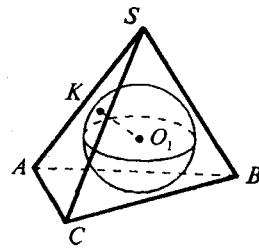


Рис. 3

Если центр описанного шара лежит на высоте пирамиды (или на её продолжении), то при решении некоторых задач можно использовать такой приём: продлить высоту пирамиды до пересечения с шаром в точке S_1 и соединить точку S_1 с точкой A . Тогда SS_1 — диаметр шара и $\angle SAS_1 = 90^\circ$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр.



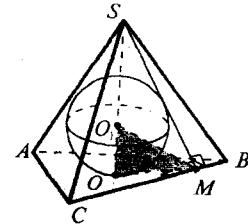
Шар называется вписанным в пирамиду, если все грани пирамиды касаются шара.



O_1 — центр шара;

K — точка касания с гранью SAC ;
 $O_1K = r$ (радиус шара), $O_1K \perp (SAC)$.

Если вершина пирамиды проектируется в центр окружности, вписанной в основание, то центр вписанного шара лежит на высоте пирамиды, в точке пересечения высоты с биссектрисой линейного угла двугранного угла при основании пирамиды. (Считают, что плоскость линейного угла проходит через высоту пирамиды.)



SO — высота пирамиды;

O — центр окружности, вписанной в основание пирамиды;

$\angle SMO$ — линейный ($OM \perp BC$; $SM \perp BC$);

MO_1 — биссектриса $\angle SMO$;

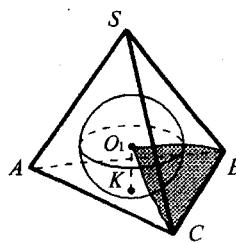
O_1 — центр вписанного шара;

OO_1 — радиус вписанного шара;

OM — радиус окружности, вписанной в основание пирамиды.

Примечание. Центр шара, вписанного в пирамиду, лежит в точке пересечения биссекторных плоскостей двугранных углов при ребрах пирамиды.

Биссекторной плоскостью двугранного угла называется плоскость, которая проходит через ребро двугранного угла и делит этот угол пополам.



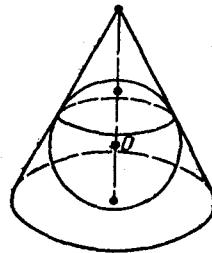
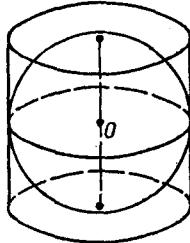
O_1 — центр вписанного шара;

(BCO_1) — биссекторная плоскость двугранного угла при ребре BC ;

$O_1K \perp (ABC)$;

O_1K — радиус вписанного шара.

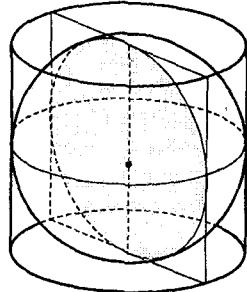
Шар называется вписаным в цилиндр (конус), если основания (основание) и все образующие, которые образуют цилиндр (конус), касаются шара. Такой цилиндр (конус) называется описанным около шара.



Шар можно вписать только в такой цилиндр, высота которого равна диаметру основания (такой цилиндр называют равносторонним).

Шар касается оснований цилиндра в их центрах и боковой поверхности цилиндра по большей окружности шара, параллельной основаниям цилиндра.

Диаметр шара равен высоте цилиндра.



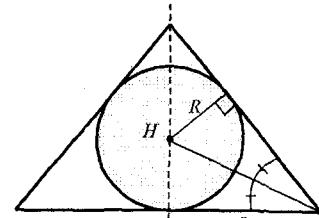
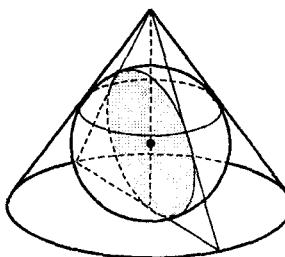
R — радиус вписанного шара;

r — радиус цилиндра; H — высота цилиндра;

$$R = r, 2R = H.$$

Шар можно вписать в любой конус. Шар касается основания конуса в его центре и боковой поверхности конуса по окружности, лежащей в плоскости, параллельной основанию конуса.

Центр вписанного шара лежит на оси конуса и совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник, являющийся осевым сечением конуса.



R — радиус вписанного шара;

r — радиус конуса; H — высота конуса;

$$\frac{R}{H-R} = \frac{r}{\sqrt{H^2-r^2}}.$$

Шар называется описанным около цилиндра, если основания цилиндра являются параллельными сечениями шара (рис. 1).

Шар называется описанным около конуса, если основание конуса является сечением шара, а вершина конуса лежит на поверхности шара (сфера) (рис. 2).

Такие цилиндр и конус называются вписанными в шар (сферу).

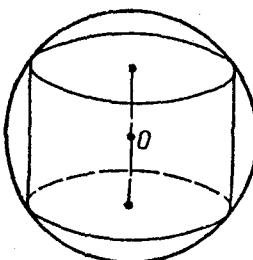


Рис. 1

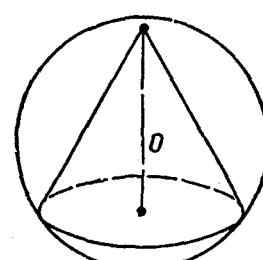
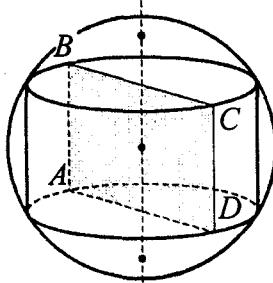


Рис. 2

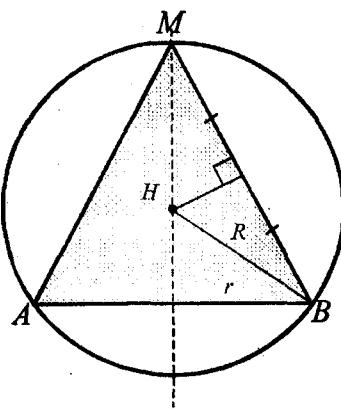
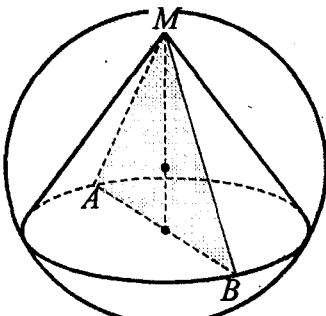
Шар можно описать около любого (прямого, кругового) цилиндра.
Окружности оснований цилиндра лежат на поверхности шара.
Центр описанного шара лежит на середине высоты цилиндра, проходящей через ось цилиндра.



$ABCD$ — осевое сечение цилиндра;
 R — радиус описанного шара;
 r — радиус цилиндра; H — высота цилиндра;

$$R^2 = \left(\frac{H}{2}\right)^2 + r^2.$$

Шар можно описать около любого конуса.
Окружность основания конуса и вершина конуса лежат на поверхности шара.
Центр описанного шара лежит на оси конуса и совпадает с центром окружности, описанной около треугольника, являющегося осевым сечением конуса.



ΔMAB — осевое сечение конуса;
 R — радиус описанного шара;
 r — радиус конуса;
 H — высота конуса;

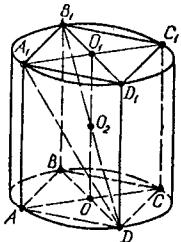
$$R^2 = (H - R)^2 + r^2.$$

УЧЕНИЧЕСКАЯ СТРАНИЧКА



1. В цилиндр вписан параллелепипед со стороной основания a . Диагональ параллелепипеда наклонена к плоскости основания под углом α и образует угол β с боковой гранью, проходящей через сторону a . Найти боковую поверхность цилиндра. Вычислить, если $a = 6 \text{ см}$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 15^\circ$.

Решение.



Очевидно, что вписанный в цилиндр параллелепипед — прямой, поскольку, по определению, его ребра совпадают с образующими цилиндра. Основание параллелепипеда — параллелограмм, который, по условию, вписан в окружность. Сумма его противолежащих углов равна 180° , а каждый из них равен 90° . Следовательно, в основании параллелепипеда лежит прямоугольник. Центром окружности, описанной около

прямоугольника, является точка пересечения его диагоналей (равноудалена от каждой пары противолежащих вершин). Боковую поверхность цилиндра можно вычислить по формуле: $S_{\text{бок.}} = \pi dH$, где $d = BD$, а $H = BB_1$. Решение задачи сводится к выражению диагоналей основания и высоты параллелепипеда с помощью известных параметров $AD = a$, $\angle B_1DB = \alpha$ и $\angle A_1DB_1 = \beta$. В треугольнике B_1BD $BD = B_1D \cos \alpha$. Из прямоугольного $\triangle B_1A_1D$ имеем: $A_1D = B_1D \cos \beta$.

Следовательно, $S_{\text{бок.}} = \pi B_1D \cos \alpha \cdot B_1D \sin \alpha = \frac{1}{2} \pi B_1D^2 \sin 2\alpha$.

Здесь, чтобы избежать в дальнейшем громоздких выражений и их преобразований, выведенные из треугольника B_1BD формулы для BB_1 и BD вначале подставили в формулу боковой поверхности цилиндра, которая после этого упростилась. В дальнейшем отпала необходимость искать B_1D_1 , а затем BB_1 и BD , поскольку удобнее сразу найти B_1D и подставить в полученную формулу.

Рассмотрим $\triangle A_1AD$. Он прямоугольный, следовательно, $A_1D^2 = AA_1^2 + AD^2$.

Но $AA_1 = BB_1 = B_1D \sin \alpha$ и $AD = a$. Тогда $(B_1D \cos \beta)^2 = (B_1D \sin \alpha)^2 + a^2$;

$B_1D^2 \cos^2 \beta = B_1D^2 \sin^2 \alpha + a^2$, $B_1D^2 (\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha) = a^2$,

$$B_1D^2 = \frac{a^2}{\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha} = \frac{a^2}{\frac{1}{2}(1 + \cos 2\beta) - \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)} =$$

$$= \frac{a^2}{\cos 2\beta + \cos 2\alpha} = \frac{a^2}{\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}. \text{ Поэтому, } S_{\text{бок.}} = \frac{\pi a^2 \sin 2\alpha}{2 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}.$$

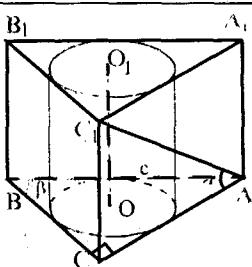
Вычислим боковую поверхность цилиндра для данных значений параметров $a = 6 \text{ см}$

$$\alpha = 45^\circ, \beta = 15^\circ, \text{ т.е. } S_{\text{бок.}} = \frac{\pi 6^2 \sin 90^\circ}{2 \cos 60^\circ \sin 30^\circ} = \frac{\pi \cdot 36}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{72\pi}{\sqrt{3}} = 24\sqrt{3}\pi \approx 130,6 \text{ см}^2$$

Ответ: $\frac{\pi a^2 \sin 2\alpha}{2 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}$; $\approx 130,6 \text{ см}^2$.

Примечание. Если бы в задаче было сказано, что в цилиндр вписан прямой параллелепипед, то первую часть приведенного в задаче пояснения следует опустить.

2. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом β . Диагональ грани, которая содержит противолежащий данному катету, наклонена к плоскости основания под углом α . Вычислить боковую поверхность цилиндра, вписанного в данную призму. Вычислить, если $c = 12 \text{ см}$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$.



Решение.

Пусть в основании прямой призмы лежит треугольник ABC , в котором $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = \beta$, $AB = c$. Проекцией диагонали AC_1 на плоскость основания является отрезок AC . Поэтому, по условию, $\angle C_1AC = \alpha$. Высота H цилиндра, вписанного в данную призму, равна высоте призмы, а радиус r основания равен радиусу окружности, вписанной в треугольник ABC .

Боковая поверхность вписанного цилиндра $S_{\text{бок.}} = 2\pi \cdot r \cdot H$.

Из ΔABC : $AC = c \cdot \sin \beta$; $BC = c \cdot \cos \beta$.

$$\text{Тогда } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2}c \cdot \sin \beta \cdot c \cdot \cos \beta = \frac{1}{4}c^2 \sin 2\beta.$$

С другой стороны, $S_{\Delta ABC} = p \cdot r$, где p — полупериметр треугольника ABC .

$$\text{Поскольку } p = \frac{1}{2}(c + c \cdot \sin \beta + c \cdot \cos \beta) = \frac{c}{2}(1 + \sin \beta + \cos \beta), \text{ то}$$

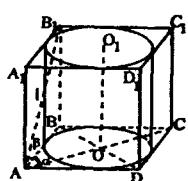
$$r = \frac{S_{\Delta ABC}}{p} = \frac{c \cdot \sin 2\beta}{2(1 + \sin \beta + \cos \beta)}. \text{ Из } \Delta ACC_1: H = CC_1 = AC \cdot \operatorname{tg} \alpha = c \cdot \sin \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\text{Следовательно, } S_{\text{бок.}} = 2\pi \cdot \frac{c \cdot \sin 2\beta}{2(1 + \sin \beta + \cos \beta)} \cdot c \cdot \sin \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{\pi \cdot c^2 \sin \beta \cdot \sin 2\beta \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1 + \sin \beta + \cos \beta}$$

$$c = 12 \text{ см}, \alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ \text{ получим: } S_{\text{бок.}} = \frac{\pi \cdot 12^2 \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \sqrt{3}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} = 36(3 - \sqrt{3})\pi \text{ (см}^2\text{).}$$

Ответ: $\frac{\pi \cdot c^2 \sin \beta \cdot \sin 2\beta \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1 + \sin \beta + \cos \beta}; 36(3 - \sqrt{3})\pi \text{ см}^2$.

3. Основанием прямой призмы является ромб с острым углом α . Диагональ боковой грани призмы равна l и образует с плоскостью основания угол β . Определить боковую поверхность цилиндра, вписанного в данную призму.



Решение.

Пусть в основании прямой призмы лежит ромб $ABCD$, в котором $\angle A = \alpha < 90^\circ$. Проекцией диагонали AB_1 грани AA_1B_1B на плоскость основания является сторона AB ромба. По условию, $AB_1 = l$, $\angle B_1AB = \beta$.

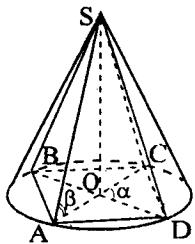
Высота H цилиндра, вписанного в данную призму, равна высоте призмы, а радиус r основания равен радиусу окружности, вписанной в ромб $ABCD$. Боковая поверхность вписанного цилиндра $S_{\text{бок.}} = 2\pi \cdot r \cdot H$.

Из $\Delta AB_1B (\angle B = 90^\circ)$: $H = BB_1 = l \cdot \sin \beta$; $AB = l \cdot \cos \beta$. Из формулы для площади ромба $S = p \cdot r$, где $p = 2 \cdot AB$ — его полупериметр, находим:

$$r = \frac{S}{p} = \frac{AB^2 \cdot \sin \alpha}{2 \cdot AB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot l \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha.$$

$$\text{Следовательно, } S_{\text{бок.}} = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha \cdot l \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}\pi \cdot l^2 \cdot \sin 2\beta \cdot \sin \alpha.$$

4. В основании пирамиды лежит прямоугольник, площадь которого равна S и угол между диагоналями равен α . Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом β . Вычислить объем конуса, описанного около этой пирамиды. Вычислить, если $S = 36 \text{ см}^2$, $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 60^\circ$.



Решение.

В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, $S_{ABCD} = S$, O — точка пересечения диагоналей AC и BD , $\angle COD = \alpha$. Поскольку боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания один и тот же угол, то вершина S проектируется в центр окружности, описанной около прямоугольника, то есть в точку O . Следовательно, $SO \perp (ABC)$ и,

по условию, $\angle SAO = \beta$.

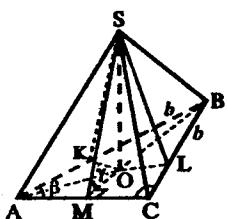
Поскольку $S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot AC^2 \cdot \sin \alpha$, то $AC = \sqrt{\frac{2S}{\sin \alpha}}$. $R = \frac{AC}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2S}{\sin \alpha}}$.

Из ΔSOA : $H = SO = OA \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \beta}{2} \sqrt{\frac{2S}{\sin \alpha}}$. Тогда объем описанного конуса:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot H = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2S}{\sin \alpha}} \right)^2 \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{2} \cdot \sqrt{\frac{2S}{\sin \alpha}} = \frac{\pi \cdot S \cdot \operatorname{tg} \beta}{12 \sin \alpha} \cdot \sqrt{\frac{2S}{\sin \alpha}}.$$

Ответ: $\frac{\pi \cdot S \cdot \operatorname{tg} \beta}{12 \sin \alpha} \cdot \sqrt{\frac{2S}{\sin \alpha}}$.

5. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с боковой стороной b и углом β при основании. Все двугранные углы при основании пирамиды равны γ . Определить боковую поверхность конуса, вписанного в данную пирамиду.



Решение.

Пусть $SABC$ — заданная пирамида, $AB = BC = b$, $\angle BAC = \beta$. Проведем высоту SO пирамиды и перпендикуляры SK, SL, SM к сторонам AB, BC, AC . По теореме о трех перпендикулярах, $OK \perp AB, OL \perp BC, OM \perp AC$. Поэтому углы SKO, SLO и SMO являются линейными углами двугранных

углов при основании пирамиды. По условию, $\angle SKO = \angle SLO = \angle SMO = \gamma$. Прямоугольные треугольники SKO, SLO и SMO имеют общий катет SO и равные острые углы. Поэтому $\Delta SKO = \Delta SLO = \Delta SMO$, отсюда вытекает $SK = SL = SM$ и $OK = OL = OM$. Кроме того, $OK \perp AB, OL \perp BC, OM \perp AC$ и точка O является центром окружности, вписанной в треугольник ABC . Поэтому OM для вписанного в пирамиду конуса является радиусом основания, а SM — образующей. Поскольку прямая BO содержит биссектрису угла при вершине равнобедренного треугольника, то $BO \perp AC$. Прямая OM тоже перпендикулярна прямой AC . Поэтому прямые BO и OM совпадают. Значит, точки B, O и M лежат на одной прямой. Из ΔAOM ($\angle M = 90^\circ$): $AM = b \cdot \cos \beta$.

Из ΔAOM $\angle M = 90^\circ$, $\angle A = \frac{\beta}{2}$: $r = OM = AM \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\beta}{2} \right) = b \cdot \cos \beta \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\beta}{2} \right)$.

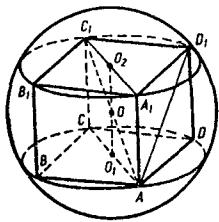
Из ΔOMS ($\angle O = 90^\circ$): $l = SM = \frac{OM}{\cos \gamma} = \frac{b \cdot \cos \beta \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\beta}{2} \right)}{\cos \gamma}$.

Находим боковую поверхность вписанного конуса:

$$S_{\text{бок.}} = \pi r l = \pi b \cdot \cos \beta \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\beta}{2} \right) \frac{b \cdot \cos \beta \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\beta}{2} \right)}{\cos \gamma} = \frac{\pi \cdot b^2 \cdot \cos^2 \beta \cdot \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\beta}{2} \right)}{\cos \gamma}.$$

6. В шар с радиусом R вписан правоугольный параллелепипед, диагональ которого образует с меньшей боковой гранью угол α . Диагональ основания параллелепипеда образует с большей стороной основания угол β . Вычислить измерения параллелепипеда.

Решение.



Центром шара, описанного около правоугольного параллелепипеда, является точка пересечения его диагоналей — точка O . Учитывая, что в правоугольном параллелепипеде $C_1D_1 \perp (AA_1D_1D)$, получаем, что AD_1 — проекция AC_1 на плоскость AA_1D_1D .

Следовательно, по условию, $\angle C_1AD = \alpha$.

Если AA_1D_1D — меньшая боковая грань, то AD — меньшая сторона основания (соответственно AB — большая). Тогда, по условию, $\angle CAB = \beta$.

Из правоугольного треугольника AC_1D_1 : $C_1D_1 = AC_1 \cdot \sin \alpha = 2R \cdot \sin \alpha$.

Но $AB = C_1D_1 = 2R \cdot \sin \alpha$. Тогда из правоугольного треугольника ABC :

$$CB = AB \cdot \tan \beta = 2R \sin \alpha \cdot \tan \beta.$$

Квадрат диагонали правоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений. Следовательно, $AC_1^2 = AB^2 + BC^2 + BB_1^2$. Отсюда

$$BB_1 = \sqrt{AC_1^2 - AB^2 - BC^2} = 2R \sqrt{1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \tan^2 \beta} = 2R \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \tan^2 \beta}.$$

Ответ: $2R \sin \alpha$; $2R \sin \alpha \cdot \tan \beta$; $2R \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \tan^2 \beta}$.

7. Нарисовать правильную треугольную призму, описанную около шара.

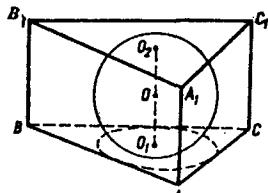


Рис. 1

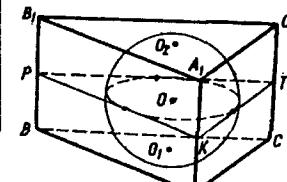


Рис. 2

Решение.

Сначала нарисуем основание описанной призмы — треугольник ABC , обозначим точку O_1 , в которой пересекаются медианы этого треугольника (рис.1). Представим себе, какой должна быть проекция вписанного шара: это будет круг, касающийся сторон треугольника ABC в их серединах. Нарисуем соответствующий эллипс. Большой диаметр этого эллипса должен быть равен высоте описанной призмы. Строим приблизительно такой же высоты боковые ребра AA_1 , BB_1 и CC_1 . Пусть точка O_2 — точка пересечения медиан AA_1 , BB_1 , CC_1 . Точки O_2 и O_1 — полюсы вписанного шара. Из середины O отрезка O_2O_1 как из центра проводим окружность диаметром, немного большим, чем O_2O_1 . Эта окружность — очертание вписанного в данную призму шара.

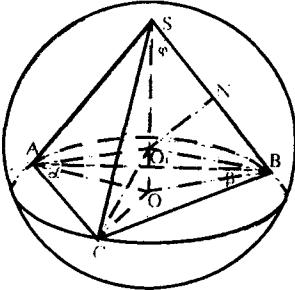
Можно начинать выполнение рисунка не с основания призмы, а с её сечения плоскостью, которая проходит через середины боковых ребер (рис.2).

Нарисуем изображение равностороннего треугольника KPT . Впишем в него эллипс так, чтобы он касался каждой стороны треугольника в её середине. Пусть O — центр этого эллипса. Проведем через точки K , P , T и O вертикальные прямые и отложим на них отрезки $KA = KA_1 = PB = PB_1 = TC = TC_1 = OO_1 = OO_2$, длина каждого из которых равна половине длины большего диаметра эллипса. $ABC A_1 B_1 C_1$ — изображение правильной призмы, описанной около шара с центром O ; O_1 и O_2 — полюсы этого шара. Радиусом, немного большим, чем OO_1 , опишем её очертание. Рисунок готов.

Шары и сферы, описанные около пирамид или конусов

8. В основании пирамиды лежит треугольник с углами α и β и площадью S . Все боковые ребра пирамиды образуют с её высотой угол φ . Определить поверхность сферы, описанной около пирамиды. Вычислить, если $S = 36 \text{ см}^2$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\varphi = 45^\circ$.

Решение.



Пусть $SABC$ — данная пирамида, $S_{\Delta ABC} = S$, $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$. Проведем высоту SO пирамиды. Тогда $\angle ASO = \angle BSO = \angle CSO = \varphi$. Пусть O_1 — центр сферы, описанной около пирамиды. Площадь поверхности сферы вычисляется по формуле $S_{\text{сф.}} = 4\pi R^2$, где $R = O_1S$ — её радиус. Покажем, что центр сферы лежит на прямой SO .

Прямоугольные треугольники ASO , BSO , CSO имеют общий катет SO и равные острые углы. Поэтому $\Delta ASO \sim \Delta BSO \sim \Delta CSO$, откуда следует, что $OA = OB = OC$, то есть точка O является центром окружности, описанной около треугольника ABC . Поскольку $O_1A = O_1B = O_1C = R$, то проекции наклонных O_1A , O_1B и O_1C на плоскость ABC равны между собой. Это означает, что проекция точки O_1 на плоскость ABC равноудалена от точек A , B и C , то есть этой проекцией является точка O . Поскольку проекциями точек S и O_1 на плоскость ABC является одна и та же точка O , то $O_1 \in SO$.

Так как расстояния от точки O_1 до концов ребер пирамиды равны между собой, то центр сферы, описанной около заданной пирамиды, является точкой пересечения прямой, содержащей высоту пирамиды, с плоскостью, которая перпендикулярна одному из боковых ребер и проходит через его середину.

Пусть $R = O_1C = x$. Из точки O_1 проведем перпендикуляр O_1N к ребру SB .

Из ΔO_1SN : $SN = O_1S \cdot \cos \varphi = x \cdot \cos \varphi$. Поскольку $O_1S = O_1B$, то $SN = NB$, и поэтому $SB = 2SN = 2x \cdot \cos \varphi$.

Из ΔSOB ($\angle O = 90^\circ$): $OB = SB \cdot \sin \varphi = 2x \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi = x \cdot \sin 2\varphi$.

По следствию из теоремы синусов для треугольника ABC :

$$\frac{AC}{\sin \beta} = \frac{BC}{\sin \alpha} = 2 \cdot OB = 2x \cdot \sin 2\varphi; AC = 2x \cdot \sin 2\varphi \cdot \sin \beta; BC = 2x \cdot \sin 2\varphi \cdot \sin \alpha.$$

$$\text{Тогда } S = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \sin(180^\circ - \alpha - \beta) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \sin 2\varphi \cdot \sin \beta \cdot 2x \cdot \sin 2\varphi \cdot \sin \alpha \cdot \sin(\alpha + \beta) = 2x^2 \sin^2 2\varphi \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin(\alpha + \beta),$$

$$\text{откуда } x^2 = \frac{S}{2 \sin^2 2\varphi \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin(\alpha + \beta)}.$$

$$\text{Следовательно, } S_{\text{сф.}} = 4\pi R^2 = 4\pi x^2 = \frac{2\pi S}{\sin^2 2\varphi \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin(\alpha + \beta)}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{2\pi S}{\sin^2 2\varphi \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin(\alpha + \beta)}.$$

Шары, вписанные в пирамиды или конусы

9. В правильной треугольной пирамиде высота равна H , а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом α . Определить объем шара, вписанного в данную пирамиду.

Решение.

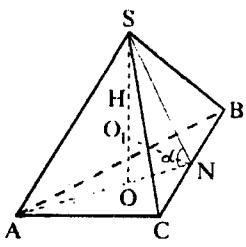


Рис. 1

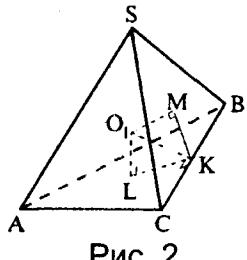


Рис. 2

Пусть $SABC$ — данная правильная пирамида (рис. 1), высота $SO = H$. Из вершины S проведем перпендикуляр SN к стороне BC . По теореме о трех перпендикулярах, $ON \perp SN$. Поэтому $\angle SNO$ является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями SBC и ABC , и, по условию, $\angle SNO = \alpha$. Пусть O_1 — центр вписанного шара. Объем шара найдем по формуле $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, где R — её радиус.

Покажем сначала, что точка O_1 лежит на высоте пирамиды. Для этого проведем из точки O_1 перпендикуляр O_1K к ребру BC и перпендикуляры O_1L и O_1M к граням ABC и SBC (рис. 2).

Так как $O_1K \perp BC$, то $LK \perp BC$ и $MK \perp BC$. Из того, что ребро BC перпендикулярно MK , O_1K и LK , следует, что точки O_1, M, K, L принадлежат одной плоскости. По построению, точки L и M являются точками касания вписанного шара к граням ABC и SBC : $O_1L = O_1M = R$. Точка O_1 равноудалена от сторон угла MKL , и поэтому лежит на его биссектрисе. По условию задачи, $\angle MKL = \alpha$. Поэтому $\angle O_1KL = \frac{\alpha}{2}$. Из ΔO_1KL : $LK = O_1L \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = R \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$, то есть расстояние от точки L до стороны BC равно $R \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. Аналогично можно показать, что расстояние от точки L до сторон AB и AC тоже равно $R \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. Поэтому точка L является центром окружности, вписанной в треугольник ABC . Следовательно, точки L и O совпадают. Поскольку проекциями точек S и O_1 на плоскость основания является одна и та же точка O , то $O_1 \in SO$, а именно: O_1 является точкой пересечения высоты пирамиды с биссектрисой угла MKL .

Вернемся к рисунку 1. Из сказанного следует, что $O_1O = R$ и $\angle O_1NO = \frac{\alpha}{2}$.

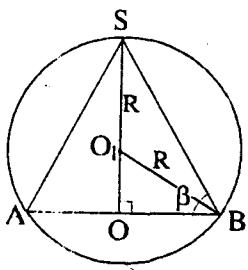
Из ΔSON ($\angle O = 90^\circ$): $ON = H \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$.

Из ΔO_1ON ($\angle O = 90^\circ$): $R = O_1O = ON \cdot \operatorname{ctg} \angle O_1NO = H \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Следовательно, $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi H^3 \cdot \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}$.

Ответ: $\frac{4}{3}\pi H^3 \cdot \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}$.

10. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом β . Определить объем конуса, если радиус описанного около него шара равен R .



Решение.

На рисунке изображено осевое сечение конуса и шара, SO — высота, $SA = SB$ — образующие конуса, $\angle SBA = \beta$, O_1 — центр описанного шара, $O_1S = R$. В равнобедренном треугольнике ASB центр O_1 описанной окружности лежит на прямой, содержащей высоту SO . Из ΔABS по следствию, из

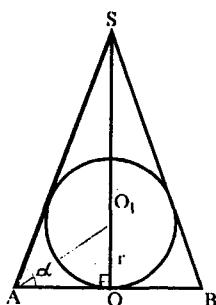
теоремы синусов, получим: $\frac{AB}{\sin \angle S} = 2R$; $AB = 2R \cdot \sin(180^\circ - 2\beta) = 2R \sin 2\beta$.

$OB = \frac{1}{2}AB = R \cdot \sin 2\beta$; $SO = OB \cdot \operatorname{tg} \beta = R \cdot \sin 2\beta \cdot \operatorname{tg} \beta = 2R \cdot \sin^2 \beta$. Объем конуса:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot OB^2 SO = \frac{1}{3}\pi \cdot (R \sin 2\beta)^2 2R \sin^2 \beta = \frac{2}{3}\pi R^3 \sin^2 \beta \cdot \sin^2 2\beta.$$

Ответ: $\frac{2}{3}\pi R^3 \sin^2 \beta \cdot \sin^2 2\beta$.

11. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α . Определить объем конуса, если радиус вписанного в него шара равен r . Вычислить, если $r = 6$ см, $\alpha = 60^\circ$.



Решение.

На рисунке изображено осевое сечение конуса и шара, SO — высота, $SA = SB$ — образующие конуса, $\angle SBA = \beta$, O_1 — центр вписанного шара. В равнобедренном треугольнике ASB центр O_1 вписанной окружности лежит на высоте SO . Поскольку $O_1O \perp AB$, то O — точка касания вписанного шара к основанию конуса.

По условию, $O_1O = r$. Центром окружности, вписанной в треугольник, является точка пересечения его биссектрис. Поэтому, $\angle O_1AO = \frac{\alpha}{2}$.

Из ΔAO_1O ($\angle O = 90^\circ$): $R = OA = O_1O \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = r \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$.

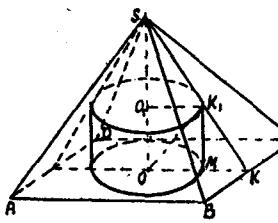
Из ΔASO ($\angle O = 90^\circ$): $H = SO = AO \cdot \operatorname{tg} \alpha = r \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

Объем конуса: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right)^2 \cdot r \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}\pi r^3 \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

Ответ: $\frac{1}{3}\pi r^3 \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

12. В правильную четырехугольную пирамиду, сторона основания которой a и двугранный угол при основании α , вписан цилиндр. Найдите объем цилиндра, если высота цилиндра равна радиусу основания.

Решение.



Пусть $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида; $AB = BC = CD = AD = a$, точка S проектируется в центр основания. Проведем $SK \perp BC$, тогда $OK \perp BC$ и $\angle OKS = \alpha$. По условию задачи, высота цилиндра равна радиусу его основания, поэтому OMK_1O_1 — квадрат, и для нахождения точки K_1 касания верхнего основания цилиндра с апофемой OK биссектриса прямого угла KOS : $K_1M = O_1K_1 = r = H$. $V = \pi r^2 H = \pi r^3$.

Из подобия треугольников OSK и O_1SK_1 получим: $\frac{O_1K_1}{OK} = \frac{SO_1}{SO}$.

$O_1K_1 = r$; $OK = \frac{a}{2}$. Из $\triangle OSK$: $SO = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha$. Тогда $SO_1 = SO - OO_1 = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha - r$.

Подставив эти значения в пропорцию, получим: $\frac{r}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha - r}{\frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha}$. Отсюда $r = \frac{\frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$.

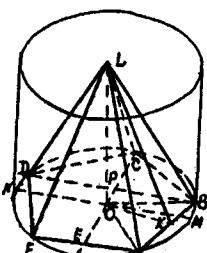
Учитывая, что $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$ и $\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin(45^\circ + \alpha)}{\cos 45^\circ \cdot \cos \alpha}$, предыдущее равенство

примет вид: $r = \frac{a \sqrt{2} \sin \alpha}{4 \sin(45^\circ + \alpha)}$.

Объем вписанного цилиндра $V = \pi r^3 = \frac{\pi a^3 2 \sqrt{2} \sin^3 \alpha}{64 \sin^3(45^\circ + \alpha)} = \frac{\pi a^3 \sqrt{2} \sin^3 \alpha}{32 \sin^3(45^\circ + \alpha)}$.

Ответ: $\frac{\pi a^3 \sqrt{2} \sin^3 \alpha}{32 \sin^3(45^\circ + \alpha)}$.

13. В цилиндр, боковая поверхность которого равна S , вписана правильная пятиугольная пирамида так, что её основание вписано в основание цилиндра, а вершина лежит в плоскости другого основания цилиндра. Вычислить объем пирамиды, зная, что её боковые грани наклонены к основанию под углом α .



Решение.

Строим изображение цилиндра, а так же вписанного в его нижнее основание правильного пятиугольника $ABCDF$. Напомним, что диагонали правильного пятиугольника параллельны его противолежащим сторонам, а отношение половины диаметра, конец которого взят в качестве одной вершины правильного пятиугольника, до отрезка, образованного этой вершиной и точкой пересечения диаметра с диагональю, параллельной противолежащей стороне, является

величиной постоянной и равно $\frac{10}{7}$. MN и CE — сопряженные диаметры, $CO : CP = 10 : 7$ и $BD \parallel MN \parallel AF$. Поскольку пирамида правильная, то её вершина L содержится в центре верхнего основания. Проведем апофему LK грани BLA , тогда $\angle OKL = \alpha$. $V = \frac{1}{3}QH$. По условию, $2\pi RH = S$, где R — радиус основания цилиндра, H — высота и цилиндра, и пирамиды. Из $\triangle LOK$: $H = LO = OK \operatorname{tg} \alpha$. Из $\triangle BOA$: $\angle AOB = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$, а $\angle AOK = \frac{1}{2}\angle AOB = 36^\circ$. Тогда из прямоугольного треугольника AOK , где $OA = R$, $OK = R \cos 36^\circ$, поэтому $H = R \cos 36^\circ \operatorname{tg} \alpha$. $Q = S_{ABCD} = 5S_{\triangle AOB} = \frac{5}{2}R^2 \sin 72^\circ$.

Найдем R из равенства $2\pi RH = S$: $S = 2\pi R \cdot R \cos 36^\circ \operatorname{tg} \alpha = 2\pi R^2 \cos 36^\circ \operatorname{tg} \alpha$.

$$\text{Отсюда } R = \sqrt{\frac{S}{2\pi \cos 36^\circ \operatorname{tg} \alpha}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } V &= \frac{1}{3}QH = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2}R^2 \sin 72^\circ \cdot R \cos 36^\circ \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{6}R^3 \sin 72^\circ \cos 36^\circ \operatorname{tg} \alpha = \\ &= \frac{5}{6} \sin 72^\circ \cos 36^\circ \operatorname{tg} \alpha \left(\sqrt{\frac{S}{2\pi \cos 36^\circ \operatorname{tg} \alpha}} \right)^3 = \frac{5}{6} \sin 72^\circ \sqrt{\frac{S^3}{8\pi^3 \cos^3 36^\circ \operatorname{tg}^3 \alpha}} = \frac{5}{3} \sin 36^\circ \sqrt{\frac{S^3 \cos 36^\circ}{8\pi^3 \operatorname{tg}^3 \alpha}}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } V = \frac{5}{3} \sin 36^\circ \sqrt{\frac{S^3 \cos 36^\circ}{8\pi^3 \operatorname{tg}^3 \alpha}}.$$

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

-  1. Высота цилиндра 10 см, в него вписана треугольная пирамида, стороны основания которой 12 см, 16 см, 20 см. Найти:
 - радиус основания цилиндра;
 - объем пирамиды.
- 2. Основанием прямой призмы является равнобедренный треугольник с углом β при вершине. Диагональ боковой грани, содержащей основание этого треугольника, равна a и наклонена к плоскости основания под углом α . Определить боковую поверхность цилиндра, описанного около призмы.
- 3. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник с острым углом β . Диагональ боковой грани, содержащей прилежащий к этому углу катет, равна b и наклонена к плоскости основания под углом α . Определить объем цилиндра, описанного около данной пирамиды.
- 4. В основании прямой призмы лежит прямоугольник, диагональ которого образует с боковой стороной угол γ . Диагональ боковой грани призмы, содержащей меньшую сторону прямоугольника, равна d и образует с плоскостью основания угол α . Определить боковую поверхность цилиндра, описанного около данной призмы.
- 5. Основанием прямой призмы, боковая поверхность которой равна S , является прямоугольный треугольник с острым углом α . Определить боковую поверхность описанного около призмы цилиндра.
- 6. Основанием прямой призмы, объем которой V , является прямоугольный треугольник, острый угол которого равен α . Определить объем описанного около призмы цилиндра.

7. Основание прямой призмы – прямоугольник с углом α между диагоналями. Диагональ призмы наклонена к плоскости основания под углом β . Найти объем цилиндра, описанного около этой призмы, площадь основания которой равна S . Вычислить для $S = 3\sqrt{3}$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$.
8. Основание прямой призмы – ромб со стороной a и углом β , который образует эта сторона с большей диагональю ромба. Меньшая диагональ призмы образует с плоскостью основания угол α . Определить объем цилиндра, вписанного в эту призму.
9. Основание прямой призмы – равнобедренный треугольник с острым углом β при вершине. Диагональ грани, проходящей через боковую сторону треугольника, равна a и наклонена к основанию под углом α . Определить боковую поверхность цилиндра, вписанного в данную призму.
10. В цилиндр вписана треугольная призма, а в призму вписан цилиндр. Найти отношение объемов цилиндров.
11. В правильную треугольную призму вписан цилиндр, а в цилиндр вписана правильная треугольная призма. Найти отношение объемов призм.
12. В основании прямой призмы лежит ромб, площадь которого равна S и тупой угол равен β . Диагональ боковой грани призмы образует с площадью основания угол α . Определить боковую поверхность цилиндра, вписанного в данную призму. Вычислить, если $S = 36 \text{ см}^2$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$.
13. Основание пирамиды – равнобедренный треугольник с боковой стороной b и острым углом β при вершине. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом α . Определить боковую поверхность конуса, в который вписана эта пирамида. Вычислить при $b = 30 \text{ см}$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 60^\circ$.
14. Основание пирамиды – равнобедренный треугольник с острым углом α при вершине. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом β . Найти объем конуса, описанного около пирамиды, если площадь ее основания равна S . Вычислить при $S = 9\sqrt{3}$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$.
15. Основанием пирамиды является равнобокая трапеция с острым углом α . Диагональ трапеции перпендикулярна боковой стороне. Все боковые ребра пирамиды образуют с ее высотой угол β . Расстояние от основания высоты пирамиды до боковой стороны трапеции равно b . Определить боковую поверхность конуса, описанного около данной пирамиды.
16. В основании пирамиды лежит остроугольный треугольник. Все боковые ребра пирамиды образуют с площадью основания угол γ . Расстояние от основания высоты пирамиды до одной из сторон основания равно l , а углы, прилежащие к этой стороне, равны α и β . Определить боковую поверхность конуса, описанного около данной пирамиды.
17. В основании пирамиды лежит прямоугольник, диагональ которого образует с большей стороной угол α . Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом γ . Отрезок, соединяющий середину большей стороны прямоугольника с основанием высоты пирамиды, равен a . Определить объем конуса, описанного около данной пирамиды.
18. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с основанием a и углом α при вершине. Все боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания угол γ . Определить боковую поверхность конуса, описанного около данной пирамиды.

19. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетом a и прилежащим к нему острым углом α . Все боковые ребра пирамиды образуют с площадью основания угол γ . Определить объем конуса, описанного около данной пирамиды.
20. Апофема правильной шестиугольной пирамиды равна a , а двугранный угол при стороне основания – α . Найти объем и боковую поверхность вписанного конуса. Вычислить для $a = 4$, $\alpha = 60^\circ$.
21. В пирамиду, основанием которой является равнобокая трапеция с тупым углом β , вписан конус. Все двугранные углы при основании пирамиды равны γ . Расстояние от основания высоты пирамиды до вершины данного угла трапеции равно a . Определить боковую поверхность конуса.
22. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом β . Все двугранные углы при основании пирамиды равны γ . Определить объем конуса, вписанного в данную пирамиду.
23. В треугольной пирамиде все двугранные углы при основании равны γ . Расстояние от основания высоты пирамиды до вершины одного из углов основания равно d , а два других угла основания равны α и β . Определить боковую поверхность конуса, вписанного в данную пирамиду.
24. В основании пирамиды лежит ромб с острым углом α . Все двугранные углы при основании пирамиды равны γ . Отрезок, соединяющий основание высоты пирамиды с серединой стороны ромба, равен b . Определить объем конуса, вписанного в данную пирамиду.
25. Найти радиус сферы, описанной около прямоугольного параллелепипеда с измерениями a , b , c (рис. 1).
26. Найти радиус сферы, описанной около прямой призмы, высота которой равна c , а основанием является прямоугольный треугольник с катетами a и b (рис. 2).
27. Найти радиус сферы, описанной около треугольной пирамиды, три ребра которой попарно перпендикулярны и имеют длины a , b , c (рис. 3).

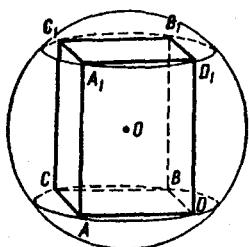


Рис. 1

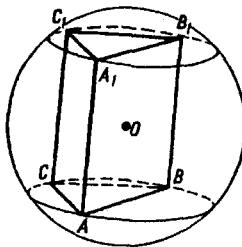


Рис. 2

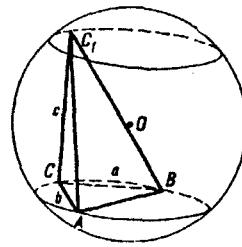


Рис. 3

28. Около правильной четырехугольной призмы описана сфера. Радиус сферы, проведенный к вершине призмы, образует с ее боковым ребром угол γ . Определить поверхность сферы, если боковое ребро призмы равно a .
29. Радиус шара равен R . Найти площадь диагонального сечения вписанного в шар куба.
30. Около правильной четырехугольной пирамиды описан шар. Боковое ребро пирамиды образует с плоскостью основания угол γ . Высота пирамиды равна H . Определить объем шара.
31. Около правильной треугольной пирамиды описан шар. Высота пирамиды равна H и образует с боковым ребром угол γ . Определить объем шара.

32. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с углом β при вершине. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом γ . Определить объем пирамиды, если радиус описанного около нее шара равен R .
33. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с острым углом α . Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом γ . Определить объем пирамиды, если радиус описанного около нее шара равен R .
34. В шар вписана правильная четырехугольная пирамида, сторона основания которой равна a . Определить поверхность шара, если боковое ребро пирамиды наклонено к основанию под углом ϕ .
35. В шар вписана правильная треугольная пирамида, высота которой равна R . Определить объем шара, если боковое ребро пирамиды наклонено к основанию под углом β .
36. В правильной треугольной пирамиде боковая грань наклонена к основанию под углом ϕ . Определить площадь боковой поверхности пирамиды, если радиус шара, вписанного в пирамиду, равен r .
37. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом γ . Расстояние от вершины конуса до центра вписанного в него шара равно d . Определить площадь боковой поверхности конуса.
38. Конус вписан в шар, радиус которой равен R . Найти площадь боковой поверхности конуса, если угол при вершине его осевого сечения равен α .
39. Высота конуса равна радиусу R его основания. Радиус шара с центром, совпадающим с центром основания данного конуса, тоже равен R . На расстоянии $\frac{R}{2}$ от вершины конуса проведена плоскость, параллельная его основанию. Найти площадь части сечения, заключенной между боковой поверхностью конуса и поверхностью шара.
40. Около шара описан цилиндр. Найти отношения их поверхностей и объемов.
41. В шар вписан цилиндр, радиус основания которого относится к высоте как $m : n$. Определить полную поверхность этого цилиндра, если поверхность шара равна S .
42. Высота конуса H , образующая l . Определить радиус описанного шара.
43. Радиус шара 5 см. В шар вписан конус, радиус его основания 4 см. Найти высоту конуса.
44. Радиус шара 2 м. В него вписан равносторонний конус. Найти полную поверхность и объем конуса.
45. В конус с радиусом основания r и образующей l вписан шар. Определить длину линии, по которой поверхность шара касается боковой поверхности конуса.
46. Около шара с радиусом r описан конус, больший угол между образующими которого прямой. Определить полную поверхность конуса.
47. Высота конуса 20 м, образующая 25 м. Найти радиус вписанного полушария, основание которого лежит на основании конуса.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-4-1

Тема. Комбинация призмы и цилиндра

B-I	7 баллов	B-II	9 баллов
V	В цилиндр вписана правильная треугольная призма, сторона основания которой равна 6 см, а высота 8 см. Найти длину окружности основания цилиндра.	V	В цилиндр вписана правильная четырехугольная призма, сторона основания которой 4 см, а высота 7 см. Найти площадь основания цилиндра.
B-III	11 баллов	B-IV	12 баллов
V	Ребро куба равно a . Найти площадь осевого сечения описанного цилиндра.	V	Площадь осевого сечения цилиндра равна 16 см. Найти боковую поверхность вписанной правильной шестиугольной призмы.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-4-2

Тема. Комбинация конуса и пирамиды

B-I	7 баллов	B-II	9 баллов
V	Образующая конуса равна 13 см. В конус вписана пирамида, основанием которой служит прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см. Найти высоту пирамиды.	V	Образующая конуса равна 4 см и наклонена к плоскости основания под углом 60° . Найти боковую поверхность вписанной правильной треугольной пирамиды.
B-III	11 баллов	B-IV	12 баллов
V	В конус, радиус основания которого R , вписана правильная четырехугольная пирамида. Найти: а) высоту конуса; б) объем пирамиды.	V	Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α . Найти объем и боковую поверхность описанного конуса. Вычислить для $a = 6$, $\alpha = 60^\circ$.

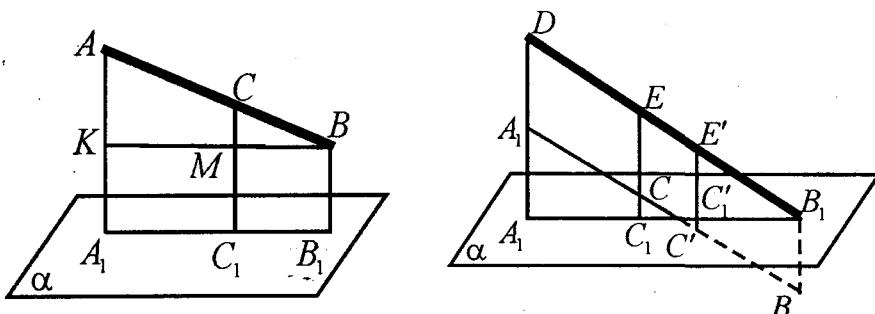
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА К-4-1

Тема. Комбинации геометрических тел



B-I	7 баллов	B-II	9 баллов
1. Основание прямой призмы — равнобедренный прямоугольный треугольник. Найти радиус основания цилиндра, описанного около призмы, если высота призмы 5 см, а её боковая поверхность равна 10 см^2 .	1. В цилиндр вписана правильная треугольная призма, сторона основания которой равна a , а боковое ребро — b . Найти площадь боковой поверхности цилиндра и его объём.		
2. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна $2a$, двугранный угол при основании равен 60° . Найти: а) объем пирамиды; б) образующую конуса.	2. Ребро правильного тетраэдра равно 6 см. Найти: а) объём тетраэдра; б) радиус основания описанного конуса.		
B-III	11 баллов	B-IV	12 баллов
1. В правильную шестиугольную призму вписан цилиндр. Найти площадь боковой поверхности цилиндра и его объём, если сторона основания призмы $2a$, а её боковое ребро l .	1. Основанием прямой призмы является равнобокая трапеция с острым углом α . Диагональ трапеции является биссектрисой острого угла. Диагональ боковой грани, содержащей боковую сторону трапеции, равна l и образует с плоскостью основания угол γ . Вычислить объём цилиндра, описанного около данной призмы.		
2. Около конуса описана треугольная пирамида, основанием которой является равнобедренный прямоугольный треугольник. Высота пирамиды равна 5 дм, боковая поверхность — 10 дм^2 . Найти радиус основания конуса.	2. Дан конус, осевым сечением которого является равносторонний треугольник. В конус вписан шар радиуса R . Найти объём данного конуса.		
3. Высота цилиндра равна радиусу R его основания. Радиус шара с центром, совпадающим с центром одного из оснований цилиндра, тоже равен R . На расстоянии $\frac{R}{2}$ от основания цилиндра проведена параллельная ему плоскость. Найти площадь части сечения, заключенной между боковой поверхностью цилиндра и поверхностью шара.	3. В полушарие с радиусом R вписан цилиндр, высота которого равна $\frac{R}{\sqrt{2}}$. Найти объём этого цилиндра.		

СТРАНИЧКА АБИТУРИЕНТА
Прямые и плоскости в пространстве
Деление отрезка в заданном отношении



1. Пусть A_1, B_1 – параллельные проекции на плоскость α концов A, B заданного отрезка, а C_1 – проекция точки C , делящей отрезок AB в отношении $m : n$, считая от точки A . Выразим длину отрезка CC_1 через длины $AA_1 = a, BB_1 = b$ и числа m, n .

Рассмотрим случай, когда точки A и B лежат по одну сторону от плоскости α и $a > b$. Проведем $BK \parallel A_1B_1$ до пересечения с прямыми AA_1 и CC_1 в точках K и M соответственно (при $a < b$ эту прямую проводили бы через точку A). Тогда из подобия треугольников CBM и ABK : $CM = AK \cdot (CB:AB) = (a - b) \cdot \frac{n}{m + n}$.

$$\text{Поэтому } CC_1 = CM + MC_1 = (a - b) \cdot \frac{n}{m + n} + b = \frac{an + bm}{m + n}. \quad (*)$$

Пусть теперь точки A и B лежат по разные стороны от плоскости α . Перенесем отрезок AB на вектор $\overrightarrow{BB_1}$. Обозначим через D и E образы точек A и C .

Тогда $AD = CE = BB_1 = b, DA_1 = AA_1 + DA = a + b$, а точка E делит отрезок DB_1 в отношении $m:n$. Из подобия треугольников $B_1C_1E_1$ и B_1A_1D :

$$EC_1 = \frac{n}{m + n} \cdot DA_1 = \frac{(a + b)n}{m + n}. \text{ Поэтому в зависимости от того, по одну или по разные}$$

стороны от плоскости α лежат точки C и E , имеем: $CC_1 = \pm EC_1 \mp EC$.

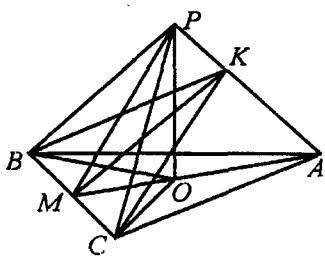
$$\text{В обоих случаях: } CC_1 = \left| \frac{(a + b)n}{m + n} - b \right| = \frac{|an - bm|}{m + n}. \quad (**)$$

Значительно быстрее формулы (*) и (**) можно получить из координатных формул деления отрезка в заданном отношении. Если координатную плоскость Oxy системы координат $Oxyz$ совместить с плоскостью α , то длины $AA_1 = a$ и $BB_1 = b$ взятые с одним и тем же знаком, если точки A, B лежат по одну сторону от плоскости α , и с противоположными знаками, – если по разные стороны, будут пропорциональны аппликатам z_1 и z_2 точек A и B соответственно. Поэтому формулы (*) и (**) становятся простыми следствиями известной формулы

$$z = \frac{nz_1 + mz_2}{m + n}.$$

2. Из точки пространства до вершин равнобедренного треугольника с основанием 24 дм проведены равные отрезки длиной 25 дм. Расстояние от данной точки до плоскости треугольника равно 20 дм. Вычислить площадь треугольника, одна сторона которого совпадает с основанием данного треугольника, противолежащая вершина принадлежит противолежащему проведенному отрезку, а плоскость перпендикулярна этому отрезку.

Решение.



Пусть ABC – данный треугольник, $AB = AC, BC = 24$ дм; P – заданная точка, $PA = PB = PC = 25$ дм; PO – перпендикуляр к плоскости ABC , $PO = 20$ дм; K – такая точка прямой PA , что $(KBC) \perp PA$. Необходимо вычислить площадь треугольника KBC . Из равенства прямоугольных треугольников POA, POB, POC (углы при вершине O у них прямые, так как $PO \perp (ABC)$) следует равенство отрезков OA, OB, OC , то есть

O – центр окружности, описанной около треугольника ABC .

Из ΔPOA ($\angle O = 90^\circ$): $OA = \sqrt{PA^2 - PO^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15$ дм.

Обозначим $M = AO \cap BC$. Тогда AM – медиана и высота в ΔABC , а PM – в ΔPBC .

Поэтому $BM = \frac{1}{2}BC = 12$ дм, а из ΔOMB ($\angle M = 90^\circ, OB = OA = 15$ дм):

$OM = \sqrt{OB^2 - MB^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ (дм). Следовательно, в зависимости от размещения точки O по отношению к ΔABC имеем: $AM = AO + OM = 24$ дм или $AM = AO - OM = 6$ дм.

Точка M является основанием высоты KM в треугольнике KBC . Действительно, так как $BC \perp AM, BC \perp PM$, то $BC \perp (PMA)$ и, следовательно, $BC \perp KM$. Сравнивая площади треугольника PMA , определенные двумя способами, получим равенство:

$KM \cdot PA = PO \cdot AM$, откуда $KM = \frac{PO \cdot AM}{PA} = \frac{20 \cdot 24}{25} = 19,2$ (дм) или

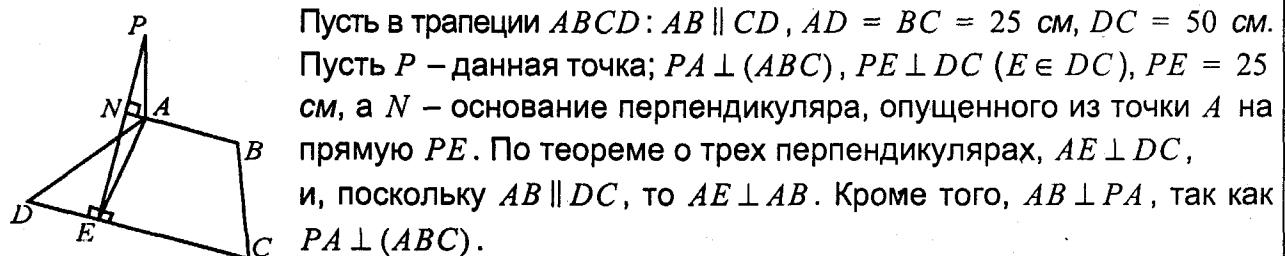
$KM = \frac{20 \cdot 6}{25} = 4,8$ (дм). Поэтому $S_{\Delta KBC} = \frac{1}{2}BC \cdot KM = BM \cdot KM = 12 \cdot 19,2 = 230,4$ (дм 2)

или $S_{\Delta KBC} = 12 \cdot 4,8 = 57,6$ (дм 2).

Ответ: 230,4 дм 2 или 57,6 дм 2 .

3. Большее основание и боковая сторона равнобокой трапеции соответственно равны 50 см и 25 см. Из некоторой точки пространства к плоскости трапеции и к ее большему основанию проведены два перпендикуляра. Основанием первого перпендикуляра является вершина тупого угла трапеции. Длина второго перпендикуляра и расстояние от него до меньшего основания трапеции соответственно равны 25 см и 12 см. Вычислить площадь трапеции.

Решение.



Пусть в трапеции $ABCD$: $AB \parallel CD, AD = BC = 25$ см, $DC = 50$ см.

Пусть P – данная точка; $PA \perp (ABC)$, $PE \perp DC$ ($E \in DC$), $PE = 25$ см, а N – основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую PE . По теореме о трех перпендикулярах, $AE \perp DC$, и, поскольку $AB \parallel DC$, то $AE \perp AB$. Кроме того, $AB \perp PA$, так как $PA \perp (ABC)$.

Следовательно, $AB \perp (PAE)$, откуда $AB \perp AN$. Таким образом, AN – общий перпендикуляр прямых AB и PE . По условию задачи, $AN = 12$ см.

Отрезок AN является высотой прямоугольного треугольника PAE , проведенной из вершины прямого угла. Поэтому, обозначив $NE = x$ см (тогда $PN = PE - NE = 25 - x$ см), имеем:

$$PN \cdot NE = AN^2; (25 - x) \cdot x = 12^2; x^2 - 25x + 144 = 0; x_1 = 16, x_2 = 9.$$

Из $\triangle ANE$ ($\angle N = 90^\circ$): $AE = \sqrt{AN^2 + NE^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$ (см) или

$$AE = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15 \text{ (см). В первом случае из } \triangle AED \text{ } (\angle E = 90^\circ):$$

$$DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15 \text{ (см), и, таким образом, } AB = DC - 2DE = 20 \text{ см.}$$

Во втором случае $DE = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$ (см) и $AB = 10$ см. В первом случае для

$$\text{площади трапеции имеем: } S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot AE = \frac{1}{2}(20 + 50) \cdot 20 = 700 \text{ (см}^2\text{), а}$$

$$\text{во втором } S_{ABCD} = 450 \text{ см}^2.$$

Ответ: 700 см² или 450 см².

Многогранники. Тела вращения

4. Около шара описана прямая призма, основанием которой является ромб. Большая диагональ призмы образует с плоскостью основания угол, равный α . Найти острый угол ромба.

Решение.

Поскольку в условии задачи вообще нет отрезка, то для решения этой задачи введем неизвестный отрезок. Например, $R_{\text{шара}} = x$.

Как известно, диаметр шара, вписанного в призму, является высотой этой призмы, но, по условию, данная призма

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямая, следовательно, ее высотой будет

боковое ребро, то есть $CC_1 = H_{\text{пр.}} = d_{\text{шара}} = 2x$. Если в ромбе $ABCD$ углы A и C – острые, то большей диагональю призмы будет AC_1 . Покажем это. Из

прямоугольного треугольника ACC_1 : $AC_1 = \sqrt{CC_1^2 + AC^2} = \sqrt{H_{\text{пр.}}^2 + AC^2}$. (1)

Из прямоугольного треугольника B_1BD : $B_1D = \sqrt{BB_1^2 + BD^2} = \sqrt{H_{\text{пр.}}^2 + BD^2}$. (2)

Если угол A – острый угол ромба, то AC – большая диагональ ромба $AC > BD$. Тогда, сравнивая формулы (1) и (2), получаем, что при $AC > BD$ $AC_1 > B_1D$, то есть

AC_1 – большая диагональ призмы. Тогда, по условию, $\angle C_1AC = \alpha$ (учитывая, что AC – проекция AC_1 на плоскость основания).

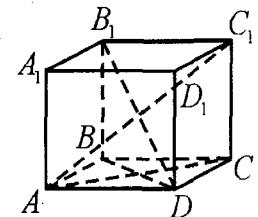
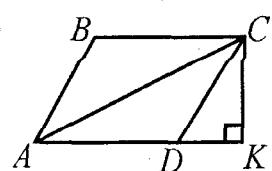
Из прямоугольного треугольника AC_1C : $AC = CC_1 \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 2x \operatorname{ctg}\alpha$.

Радиус шара, вписанного в прямую призму, равен радиусу окружности, вписанной в основание призмы. Но диаметр окружности, вписанной в ромб, является высотой ромба, значит, $CK = 2x (CK \perp AD)$.

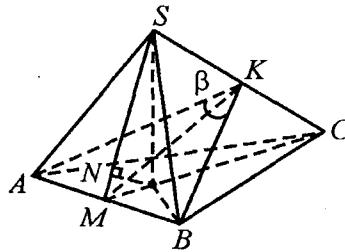
Из прямоугольного треугольника ACK :

$$\sin \angle CAK = \frac{CK}{AC} = \frac{2x}{2x \operatorname{ctg}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha. \text{ Тогда } \angle CAK = \arcsin(\operatorname{tg}\alpha), \text{ так}$$

как диагональ ромба является биссектрисой его углов, имеем: $\angle BAD = 2\angle CAK = 2\arcsin(\operatorname{tg}\alpha)$.



5. В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен β . Определить объем пирамиды, если расстояние от основания ее высоты до боковой грани равно q .



Решение.

Пусть в правильной треугольной пирамиде $SABC$: SO – высота, SM – апофема грани SAB , $(ABK) \perp SC$, где K – точка прямой SC , $ON \perp SM$ ($N \in SM$). Тогда $ON \perp (SAB)$ и, по условию задачи, $ON = q$, $\angle AKB = \beta$.

Пусть $\angle SMO = \alpha$. Из $\triangle MNO$: $MO = \frac{q}{\sin \alpha}$. Из $\triangle SOM$:

$$H = SO = MO \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{q}{\cos \alpha}. \text{ Из } \triangle OMB: MB = MO \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}q}{\sin \alpha} \cdot AB = \frac{2\sqrt{3}q}{\sin \alpha}.$$

$$S_{\text{осн.}} = \frac{\sqrt{3}}{4} AB^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{12q^2}{\sin^2 \alpha} = \frac{3\sqrt{3}q^2}{\sin^2 \alpha}. V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H = \frac{\sqrt{3}q^3}{\sin^2 \alpha \cos \alpha}.$$

Найдем $\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha$. Из $\triangle SOM$: $SM = \frac{MO}{\cos \alpha} = \frac{q}{\sin \alpha \cos \alpha}$.

$$\text{Из } \triangle SMB: SB = \sqrt{SM^2 + MB^2} = \sqrt{\frac{q^2}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} + \frac{3q^2}{\sin^2 \alpha}} = \frac{q\sqrt{1+3\cos^2 \alpha}}{\sin \alpha \cos \alpha} = SC.$$

Из $\triangle KMB$: $BK = \frac{MB}{\sin \frac{\beta}{2}} = \frac{\sqrt{3}q}{\sin \alpha \sin \frac{\beta}{2}}$. Поскольку $S_{\triangle SAB} = S_{\triangle SBC}$,

$$\text{то: } AB \cdot SM = SC \cdot BK; \frac{2\sqrt{3}q}{\sin \alpha} \cdot \frac{q}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{q\sqrt{1+3\cos^2 \alpha}}{\sin \alpha \cos \alpha} \cdot \frac{\sqrt{3}q}{\sin \alpha \sin \frac{\beta}{2}};$$

$$2\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{1+3\cos^2 \alpha}; \cos^2 \alpha = \frac{1}{3}\left(4\sin^2 \frac{\beta}{2} - 1\right);$$

$$\sin^2 \alpha \cos \alpha = (1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha = \left(1 - \frac{4}{3}\sin^2 \frac{\beta}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot \cos \alpha = \frac{4}{3}\cos^2 \frac{\beta}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{4\sin^2 \frac{\beta}{2} - 1}.$$

$$\text{Следовательно, } V = \frac{9q^3}{4\cos^2 \frac{\beta}{2} \sqrt{4\sin^2 \frac{\beta}{2} - 1}}.$$

Примечание. Двугранный угол α при основании пирамиды можно было бы найти по другой теореме косинусов для трехгранного угла с вершиной C :

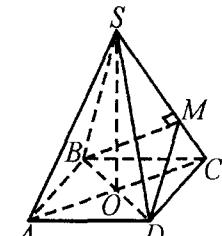
$$\cos \beta = -\cos \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \cos 60^\circ.$$

6. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен α . Вычислить площадь основания пирамиды, если высота пирамиды равна H .

Решение.

Пусть $SABCD$ – правильная пирамида. Тогда $ABCD$ – основание пирамиды и квадрат, а основание высоты совпадает с центром этого квадрата, точка O – точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$, то SO – высота пирамиды, и, по условию, $SO = H$. Построим линейный угол двугранного угла при боковом ребре SC .

Его удобно строить так: в грани SBC проведем $BM \perp SC$ и соединим образовавшуюся точку M с точкой D . $\triangle CMD = \triangle CMB$ ($BC = CD$ как стороны квадрата, MC – общая, $\angle DCM = \angle BCM$ как плоские углы равных боковых граней).



Из равенства треугольников имеем: $DM = MB$ и $\angle CMD = \angle CMB = 90^\circ$, то есть $DM \perp SC$. Учитывая, что по построению $BM \perp SC$, имеем, что $\angle BMD$ – линейный угол двугранного угла при боковом ребре SC , то есть $\angle BMD = \alpha$.

Соединим точку M с точкой O . Поскольку O – середина диагонали BD , то MO – медиана равнобедренного треугольника BMD и, следовательно, MO – высота и биссектриса треугольника BMD (тогда $\angle DMO = \frac{1}{2}\angle DMB = \frac{\alpha}{2}$). $(BMD) \perp SC$, значит, $OM \perp SC$. Поскольку данный угол $\angle BMD$ и данный отрезок SO «не объединяются» в один треугольник, то введем неизвестный отрезок.

Пусть $AB = BC = CD = AD = x$. Тогда $OD = OC = \frac{1}{2}BD = \frac{x\sqrt{2}}{2}$.

Из $\triangle ODM$ ($\angle MOD = 90^\circ$): $OM = OD \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$.

Из $\triangle OMC$ ($\angle OMC = 90^\circ$): $MC = \sqrt{OC^2 - OM^2} = \frac{x}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}$.

Для составления уравнения используем подобие прямоугольных треугольников SOC и OMC . Тогда $\frac{SO}{OM} = \frac{OC}{MC}$, то есть $\frac{2H}{x\sqrt{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{x \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2x \sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}}$.

$$\text{Отсюда } x = \frac{H\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}}{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}.$$

7. В основании четырехугольной пирамиды лежит ромб с тупым углом β . Все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом φ . Определить полную поверхность пирамиды, если расстояние от центра вписанного шара до вершины пирамиды равно d .

Решение.

Пусть $SABCD$ – данная пирамида. SO – ее высота ($ABCD$ – ромб). В условии задачи сказано, что все боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания (а не к основанию!) пирамиды, поэтому вершина проектируется в точку, равноудаленную от прямых, содержащих стороны ромба.

Такая точка единственная (г. м. т., равноудаленных от параллельных прямых AB и CD , – это прямая a , параллельная этим прямым и проходящая посередине между ними. Аналогично г. м. т., равноудаленных от параллельных прямых BC и AD , – это прямая b , параллельная этим прямым и проходящая посередине между ними. Но две прямые a и b могут пересечься только в одной точке. Значит, существует только одна точка O – равноудаленная от прямых, содержащих стороны ромба) – это точка пересечения диагоналей ромба, то есть центр окружности, вписанной в ромб (фактически в этой задаче все боковые грани пирамиды одинаково наклонены и к плоскости основания, и к самому основанию). Если вершина пирамиды проектируется в центр вписанной в основание окружности, то центр вписанного шара находится на высоте пирамиды в точке пересечения высоты с биссектрисой линейного угла двугранного угла при основании.

Построим линейный угол, например, при ребре AB : $OM \perp AB$, тогда $SM \perp AB$ (по теореме о трех перпендикулярах). Следовательно, $\angle SMO$ – линейный и, по условию, $\angle SMO = \phi$.

Проведем биссектрису MO_1 угла SMO ($\angle OMO_1 = \frac{\phi}{2}$). O_1 – точка пересечения биссектрисы с высотой SO – центр вписанного шара, а OO_1 – радиус вписанного шара. По условию, $SO_1 = d$.

Поскольку данный отрезок d «не объединяется» с данными углами β или ϕ в один треугольник, то введем неизвестный отрезок, например, $OO_1 = x$. Чтобы составить уравнение, выразим отрезок $SO_1 = d$ через x .

Из прямоугольного треугольника MO_1O ($\angle O_1OM = 90^\circ$): $OM = OO_1 \operatorname{ctg} \frac{\phi}{2} = x \operatorname{ctg} \frac{\phi}{2}$.

Из прямоугольного треугольника SOM : $SO = OM \cdot \operatorname{tg} \phi = x \operatorname{ctg} \frac{\phi}{2} \operatorname{tg} \phi$.

Тогда $SO_1 = SO - OO_1$, то есть $d = x \operatorname{ctg} \frac{\phi}{2} \operatorname{tg} \phi - x$. Отсюда $x = \frac{d}{\operatorname{ctg} \frac{\phi}{2} \operatorname{tg} \phi - 1}$.

Следовательно, $OM = x \operatorname{ctg} \frac{\phi}{2} = \frac{d \operatorname{ctg} \frac{\phi}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{\phi}{2} \cdot \operatorname{tg} \phi - 1}$.

Для определения площади боковой поверхности используем то, что все боковые грани данной пирамиды наклонены под одним углом ϕ к основанию (!) пирамиды.

Тогда $S_{\text{бок.}} = \frac{S_{\text{осн.}}}{\cos \phi}$ и $S_{\text{пов.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}} = \frac{S_{\text{осн.}}}{\cos \phi} + S_{\text{осн.}} = S_{\text{осн.}} \left(\frac{1}{\cos \phi} + 1 \right)$.

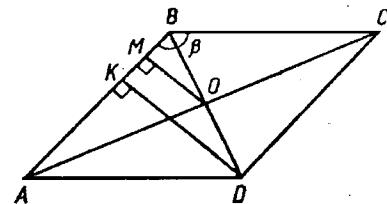
Чтобы найти площадь основания, рассмотрим вынесенный рисунок основания. Если $\angle ABC = \beta$, то $\angle BAD = 180^\circ - \beta$ (так как $ABCD$ – ромб). Проведем $DK \perp AB$.

Тогда $DK = 2OM$ (диаметр вписанной окружности является высотой ромба) и из прямоугольного треугольника AKD :

$$AD = \frac{DK}{\sin(180^\circ - \beta)} = \frac{2OM}{\sin \beta}. \text{ Следовательно, } S_{\text{осн.}} = AB \cdot KD = \frac{2OM}{\sin \beta} = \frac{4OM^2}{\sin \beta}.$$

Тогда $S_{\text{пов.}} = S_{\text{осн.}} \left(\frac{1}{\cos \phi} + 1 \right) = \frac{4OM^2}{\sin \beta} \left(\frac{1}{\cos \phi} + 1 \right)$, и, подставляя значение OM ,

$$\text{получаем: } S_{\text{пов.}} = \frac{4d^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\phi}{2}}{\left(\operatorname{ctg} \frac{\phi}{2} \cdot \operatorname{tg} \phi - 1 \right)^2 \sin \beta} \left(\frac{1}{\cos \phi} + 1 \right).$$



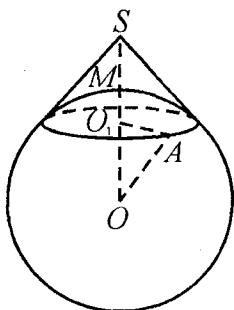
8. Радиус шара 15 см. Определить площадь части ее поверхности, которая видна из точки, лежащей на расстоянии 25 см от центра шара.

Решение.

Из точки S мысленно проведем лучи, касательные к данному шару. Точки касания будут лежать на окружности с центром O_1 радиуса O_1A . Эта окружность делит поверхность шара на две части. Необходимо найти площадь меньшей части.

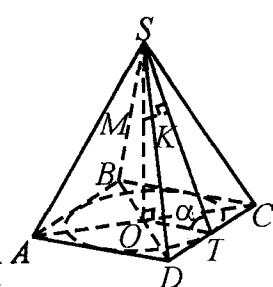
Радиус шара OA известен, нужно определить высоту MO_1 меньшего сферического сегмента. Прямоугольные треугольники OO_1A и OAS подобны, так как угол при вершине O у них общий.

Поэтому $O_1O : OA = OA : OS$ или $O_1O : 15 = 15 : 25$, откуда $O_1O = 9$, $MO_1 = OM - OO_1 = 15 - 9 = 6$. Значит, искомая площадь $Q = 2\pi \cdot 15 \cdot 6 = 180\pi$.



Ответ: $180\pi \text{ см}^2$.

9. В правильной четырехугольной пирамиде расстояние от середины высоты пирамиды до боковой грани равно d . Определить радиус основания и образующую вписанного в пирамиду конуса, если его образующая наклонена к плоскости основания под углом α .



Решение.

Если конус вписан в пирамиду, то их вершины совпадают, а основание конуса вписано в основание пирамиды. Тогда совпадают их высоты, то есть SO – высота пирамиды и конуса. Чтобы изобразить расстояние от середины высоты пирамиды (точки M) до боковой грани (например, до SDC), вспомним, что плоскость линейного угла перпендикулярна каждой грани двугранного угла. Поэтому построим стандартный линейный угол двугранного угла при ребре DC : проводим $OT \perp DC$ и соединяем точки S и T . По теореме о трех перпендикулярах, $ST \perp DC$. Тогда $\angle STO$ – линейный угол двугранного угла при ребре DC . Но тогда $(STO) \perp (SDC)$. Проведем в плоскости STO $MK \perp ST$. Тогда $MK \perp (SDC)$, то есть MK – расстояние от середины высоты до боковой грани SDC , значит, $MK = d$.

Так как $OT \perp DC$, то OT – радиус вписанной в основание пирамиды окружности и тогда ST – образующая конуса, а OT – ее проекция на плоскость основания, то есть $\angle STO$ – это угол наклона образующей конуса к плоскости основания ($\angle STO = \alpha$). Тогда $\angle SMK = \angle STO = \alpha$.

Из прямоугольного треугольника SMK : $SM = \frac{MK}{\cos \alpha} = \frac{d}{\cos \alpha}$.

Точка M – середина SO , следовательно $SO = 2SM = \frac{2d}{\cos \alpha}$.

Из прямоугольного треугольника SOT находим радиус основания конуса (OT) и образующую конуса (ST): $OT = SO \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{2d}{\sin \alpha}$; $ST = \frac{SO}{\sin \alpha} = \frac{2d}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$.

10. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с углом α при основании. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом β . Определить высоту пирамиды и площадь ее основания, если радиус шара, описанного около нее, равен R .

Решение.

Пусть $SABC$ – данная пирамида и SO – ее высота. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом β , поэтому вершина пирамиды проектируется в центр окружности, описанной около основания. Следовательно, O – центр окружности, описанной около $\triangle ABC$ ($AB = AC$; $\angle B = \angle C = \alpha$). Центр описанного шара лежит на высоте пирамиды или на ее продолжении, то есть на прямой SO в точке пересечения прямой SO с серединным перпендикуляром к боковому ребру. Например, в плоскости ASO проведем $KO_1 \perp AS$, где K – середина AS , тогда O_1 – центр описанного шара, а SO_1 – радиус шара.

Так как проекцией ребра SA на плоскость основания является AO , то $\angle SAO$ – угол наклона ребра SA к плоскости ABC , то есть $\angle SAO = \beta$. Но тогда $\angle SO_1K = 90^\circ - \angle KSO_1 = \angle SAO = \beta$.

Из прямоугольного треугольника SKO_1 $SK = SO_1 \cdot \sin \beta = R \sin \beta$, тогда $SO = 2SK = 2R \sin \beta$.

Из прямоугольного треугольника SAO высота пирамиды $SO = SA \cdot \sin \beta = 2R \sin^2 \beta$; $AO = SA \cdot \cos \beta = 2R \sin \beta \cos \beta = R \sin 2\beta$.

Так как AO – радиус окружности, описанной около треугольника ABC , то из формулы для радиуса описанной окружности найдем сторону AC : $AO = \frac{AC}{2 \sin \alpha}$, тогда $AC = 2AO \cdot \sin \alpha = 2R \sin 2\beta \sin \alpha$.

Найдем площадь основания по формуле:

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin \angle CAB = \frac{1}{2} (2R \sin 2\beta \sin \alpha)^2 \sin(180^\circ - 2\alpha) = \\ &= 2R^2 \sin^2 2\beta \sin^2 \alpha \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Примечание. В зависимости от величины угла α положение точки O – центра описанной около треугольника ABC окружности – может быть различным:

- 1) при $45^\circ < \alpha < 90^\circ$ треугольник ABC – остроугольный, и точка O находится внутри треугольника;
- 2) при $\alpha = 45^\circ$ $\angle CAB = 90^\circ$ и точка O лежит на середине BC (совпадает с точкой M , где M – середина BC);
- 3) при $0 < \alpha < 45^\circ$ $\angle CAB$ – тупой, следовательно, точка O лежит вне треугольника ABC (на продолжении AM).

Аналогично, в зависимости от величины угла β положение центра описанной окружности шара – точки O_1 – также может быть различным:

- 1) на высоте SO пирамиды (если $45^\circ < \beta < 90^\circ$);
- 2) совпадать с точкой O (если $\beta = 45^\circ$);
- 3) на продолжении высоты SO за основание (если $0 < \beta < 45^\circ$).

Поскольку возможны любые комбинации значений α и β , то всего к этой задаче можно построить 9 различных рисунков.

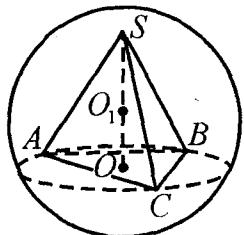


Рис.1

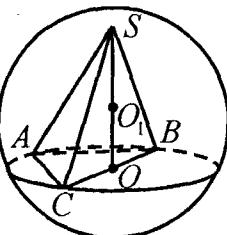


Рис.2

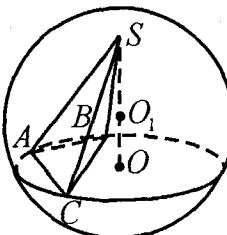


Рис.3

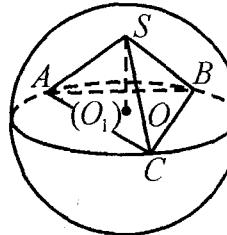


Рис.4

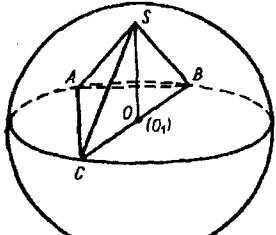


Рис.5

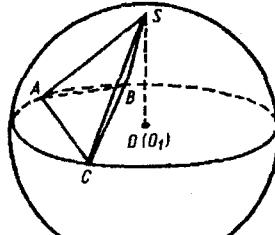


Рис.6

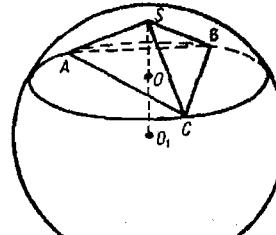


Рис.7

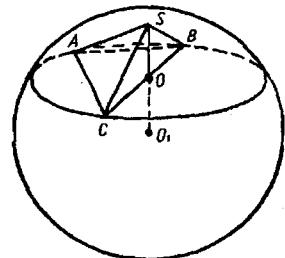


Рис.8

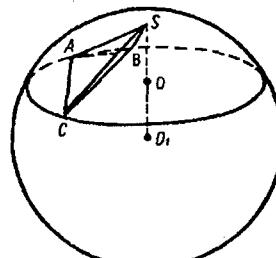


Рис.9

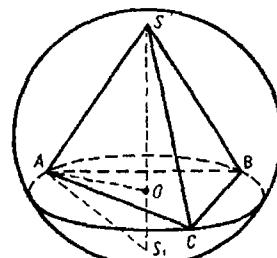


Рис.10

Если мы захотим в процессе решения этой задачи использовать фиксированное положение точек O_1 и O (например, использовать, что $SO = SO_1 + OO_1$), то нужно будет это решение корректировать для каждого из 9 случаев расположения точек O и O_1 . В связи с этим, решая задачи на описанный шар (как и задачи на описанную окружность), целесообразно использовать только такие формулы и соотношения, которые справедливы для всех конкретных значений углов и сторон рассматриваемых фигур. Здесь использованы именно такие факты: для радиуса описанной около основания окружности формулу $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$, справедливую для любого треугольника и

для определения положения точки O_1 – общий подход к нахождению положения центра шара, описанного около любой пирамиды.

Найденное решение можно использовать при любых значениях α и β .

Примечание. Решая эту задачу, можно было не фиксировать положение центра шара с помощью серединного перпендикуляра к боковому ребру SA , а дополнить высоту SO пирамиды до диаметра шара. В этом случае начало решения задачи может быть таким: «Если все боковые ребра пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, то вершина пирамиды проектируется в центр окружности, описанной около основания пирамиды». Но в этом случае центр описанного шара лежит на высоте пирамиды или на ее продолжении. Продолжим высоту SO пирамиды за основание до пересечения с шаром в точке S_1 (рис. 10.). Так как центр шара лежит на прямой SS_1 , то SS_1 – диаметр шара, то есть $SS_1 = 2R$. Соединим точку S_1 с точкой A и рассмотрим сечение шара плоскостью ASO .

Секущая плоскость проходит через центр шара, поэтому в сечении получим круг, радиус которого равен радиусу шара, в который вписан треугольник (рис. 11). Вписанный угол SAS_1 опирается на диаметр, следовательно, он прямой ($\angle SAS_1 = 90^\circ$). Тогда

$\angle AS_1S = 90^\circ - \angle ASS_1 = \angle SAO = \beta$. Из прямоугольного треугольника SAS_1 : $SA = SS_1 \cdot \sin \beta = 2R \sin \beta$. Дальнейшее решение полностью совпадает с приведенным выше решением.

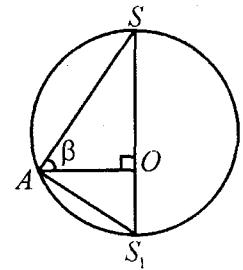


Рис.11

11. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с углом α при вершине. Две равные боковые грани пирамиды перпендикулярны к плоскости его основания, а третья боковая грань образует с ней угол ϕ . Определить высоту пирамиды, если радиус вписанного в нее шара равен r .

Решение.

Пусть $SABC$ – данная пирамида (рис. 1). Если боковые грани SAB и SBC перпендикулярны плоскости основания, то высотой пирамиды является их общее боковое ребро SB ($SB \perp$ плоскости ABC). Проведем $BM \perp AC$, тогда $BM \perp AC$ (по теореме о трех перпендикулярах), следовательно, $\angle SMB$ – линейный угол двугранного угла с ребром AC , то есть угол наклона грани ASC к плоскости основания. По условию, $\angle SBM = \phi$.

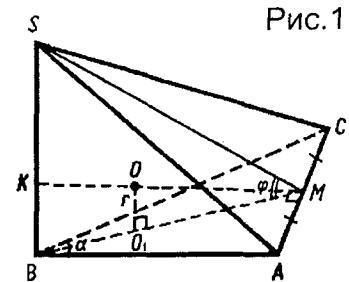


Рис.1

Находим центр вписанного в пирамиду шара как точку пересечения биссекторных плоскостей двугранных углов при ребрах пирамиды.

Так как плоскость $ABC \perp SB$ (SB – высота), то $\angle ABC$ – линейный угол двугранного угла с ребром BS . Кроме того, BM – биссектриса угла ABC (BM – высота, медиана и биссектриса в $\triangle ABC$). Следовательно, плоскость SBM является биссекторной плоскостью двугранного угла с ребром BS (центр вписанного в пирамиду шара лежит в этой плоскости).

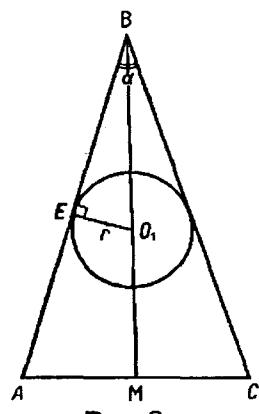


Рис.2

Чтобы построить биссекторную плоскость двугранного угла с ребром AC , проведем биссектрису MK линейного угла SMB (тогда $\angle BMK = \frac{\phi}{2}$). Через биссектрису MK и проходит биссекторная плоскость двугранного угла с ребром AC . Но MK принадлежит двум построенным биссекторным плоскостям, следовательно, MK – прямая пересечения этих биссекторных плоскостей, и центр O вписанного шара лежит на прямой KM .

Опустим из центра шара – точки O – перпендикуляр OO_1 на касательную к шару плоскость ABC . Тогда $OO_1 = r$ – радиус шара. Спроектируем (ортогонально) данную комбинацию тел на плоскость основания ABC . Проекцией шара будет круг, радиус которого равен радиусу шара. Центр шара спроектируется в центр круга – O_1 . Боковые грани пирамиды SAB и SBC , перпендикулярные к плоскости основания, проектируются на стороны AB и BC (соответственно) треугольника ABC (рис. 2). Так как шар был вписан в пирамиду, то грани SAB и SAC были касательными к шару, значит, отрезки AB и AC – касательные к кругу, то есть круг вписан в угол ABC (если $O_1E \perp AB$, то $O_1E = r$ – радиус круга).

Из прямоугольного треугольника O_1BE ($\angle O_1BE = \frac{\alpha}{2}$): $BO_1 = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}}$.

Из прямоугольного треугольника OO_1M (рис. 1): $O_1M = OO_1 \operatorname{ctg} \frac{\phi}{2} = r \operatorname{ctg} \frac{\phi}{2}$.

Тогда $BM = BO_1 + O_1M = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}} + r \operatorname{ctg} \frac{\phi}{2} = \frac{r \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\phi}{2}\right)}{\sin \frac{\alpha}{2}}$.

Из прямоугольного треугольника SBM $SB = BM \cdot \operatorname{tg} \phi = \frac{r \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\phi}{2}\right) \operatorname{tg} \phi}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ — высота пирамиды.

Примечание. Очевидно, что после нахождения отрезка BM из треугольника ABC можно найти любые его элементы и площадь.

12. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с углом β при основании. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны к плоскости его основания, а третья боковая грань составляет с ней угол α . Найти высоту и площадь основания пирамиды, если радиус описанного около нее шара равен R .

Решение.

Пусть $SABC$ — данная пирамида, основанием которой является равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$).

По условию задачи, $\angle BAC = \angle ACB = \beta$. Если грани SAB и SBC перпендикулярны плоскости основания, то высотой пирамиды будет их общее боковое ребро SB , то есть $SB \perp (ABC)$.

Проведем в плоскости основания $BM \perp AC$. Тогда $SM \perp AC$

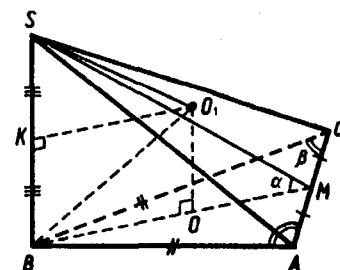
(по теореме о трех перпендикулярах). Следовательно, угол SMB — линейный угол двугранного угла

с ребром AC , то есть угол наклона грани SAC к плоскости основания. По условию, $\angle SMB = \alpha$.

Центр описанного шара лежит на прямой, перпендикулярной к плоскости основания пирамиды, проходящей через центр окружности, описанной около основания пирамиды. Если O — центр окружности, описанной около треугольника ABC и O_1 — центр описанного шара, то $OO_1 \perp (ABC)$.

OO_1 и SB — два перпендикуляра к плоскости ABC , следовательно, $OO_1 \parallel SB$. Но параллельные прямые лежат в одной плоскости. В этой плоскости точка O_1 равновременно удалена от точек B и S ($O_1B = O_1S = R$), поэтому точка O_1 лежит на серединном перпендикуляре KO_1 к ребру SB (на рисунке проводим KO_1 параллельно BM , так как это два перпендикуляра к одной прямой SB и между собой они параллельны). Получим плоский четырехугольник $KBOO_1$ с прямыми углами, следовательно,

$KBOO_1$ — прямоугольник. Тогда $OO_1 = BK = \frac{1}{2}SB$ (кроме того, $O_1B = R$).



Данные по условию отрезки и углы «не объединяются» в один треугольник, поэтому введем неизвестный отрезок. Пусть $AB = BC = x$. Так как BO – радиус окружности, описанной около треугольника ABC , то $BO = \frac{AB}{2\sin \angle ACB} = \frac{x}{2\sin \beta}$.

Из прямоугольного треугольника OBO_1 ($\angle O_1OB = 90^\circ$):

$$OO_1 = \sqrt{O_1B^2 - BO^2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\sin^2 \beta}}.$$

$$\text{Но } OO_1 = \frac{1}{2}SB, \text{ следовательно, } SB = 2OO_1 = 2\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\sin^2 \beta}}.$$

$$\text{Тогда из прямоугольного } \triangle SBM: BM = SB \operatorname{ctg} \alpha = 2\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\sin^2 \beta}} \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$\text{С другой стороны, из прямоугольного } \triangle CBM: BM = BC \sin \beta = x \sin \beta.$$

$$\text{Получим равенство: } 2\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\sin^2 \beta}} \operatorname{ctg} \alpha = x \sin \beta.$$

Обе части этого уравнения положительны ($x > 0$ как длина отрезка, α и β – острые углы по условию задачи). Следовательно, после возведения обеих частей уравнения в квадрат получим равносильное ему (на области определения) уравнение:

$$4\left(R^2 - \frac{x^2}{4\sin^2 \beta}\right) \operatorname{ctg}^2 \alpha = x^2 \sin^2 \beta.$$

$$\text{Отсюда } x^2 = \frac{4R^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha \sin^2 \beta}{\sin^4 \beta + \operatorname{ctg}^2 \alpha}.$$

$$\text{Тогда } S_{\text{осн.}} = S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin(180^\circ - 2\beta) = \frac{1}{2}x^2 \sin 2\beta = \frac{2R^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha \sin^2 \beta \sin 2\beta}{\sin^4 \beta + \operatorname{ctg}^2 \alpha}.$$

$$H_{\text{пир.}} = SB = 2\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\sin^2 \beta}} = \frac{2R \sin^2 \beta \alpha}{\sqrt{\sin^4 \beta + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}.$$

13. Угол между образующей конуса и его высотой равен β . Расстояние от центра описанного около конуса шара до основания его высоты равно l . Найти радиус основания и высоту конуса.

Решение.

Рассмотрим осевое сечение комбинации данных тел. Осевым сечением шара будет круг (радиус которого равен радиусу шара), а осевым сечением конуса будет равнобедренный треугольник (основание которого равно диаметру основания конуса, а высота – высоте конуса). Так как окружность описана около конуса, то круг будет описан около треугольника. Угол между образующей конуса и его стороной ($\angle BSO_1 = \angle ASO_1 = \beta$).

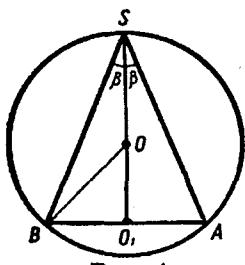


Рис.1

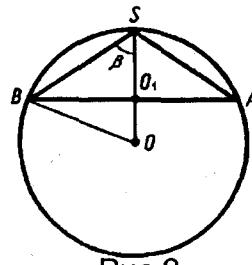


Рис.2

- В зависимости от величины угла β центр описанной окружности может находиться: 1) (при $0^\circ < \beta < 45^\circ$) внутри $\triangle ABS$ на высоте SO_1 (рис.1); 2) (при $45^\circ < \beta < 90^\circ$) вне $\triangle ABS$ на продолжении высоты (рис. 2).

В каждом из этих случаев $OO_1 = l$. Соединим в каждом из этих случаев точки O и B . Для случая 1: $\angle O_1OB = 2\beta$ (как центральный угол, соответствующий вписанному углу BSO_1). Тогда из прямоугольного треугольника BOO_1 : $R_{\text{осн.}} = BO_1 = ltg2\beta$, а из прямоугольного треугольника SBO_1 : $H_{\text{кон.}} = SO_1 = BO_1ctg\beta = ltg2\beta ctg\beta$.

Для случая 2: $\angle O_1OB = 2\angle SAB = 2(90^\circ - \beta) = 180^\circ - 2\beta$.

Тогда из прямоугольного треугольника BOO_1 :

$$R_{\text{осн.}} = BO_1 = ltg(180^\circ - 2\beta) = -ltg2\beta, \text{ а из прямоугольного треугольника } SBO_1: H_{\text{кон.}} = SO_1 = BO_1ctg\beta = -ltg2\beta ctg\beta.$$

Примечание. Кроме двух случаев размещения точки O_1 , показанных на рис. 1 и 2, теоретически возможен также случай, изображенный на рис. 3: при $\beta = 45^\circ$ точки O и O_1 совпадают, так как треугольник ASB – прямоугольный. Учитывая то, что по условию $OO_1 = l \neq 0$, делаем вывод, что последний случай не удовлетворяет условию задачи.

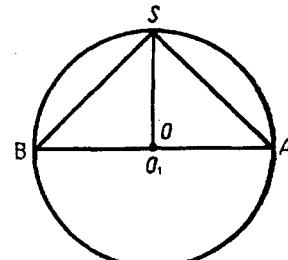


Рис.3

14. Найти объем тетраэдра, вершины которого имеют следующие координаты:
 $A(3;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(2;3;0)$ $D(1;1;4)$.

Решение.

Аппликаты точек A , B и C – нули, поэтому грань ABC тетраэдра лежит в плоскости xy (рис.1). Аппликата вершины D равна 4, то есть расстоянию от точки D до плоскости xy .

Следовательно, высота данной пирамиды $H = 4$. Необходимо определить площадь основания.

Для решения задачи можно было бы использовать формулу Герона, но тогда необходимо будет выполнить громоздкие вычисления, так как стороны ΔABC выражаются

иррациональными числами: $AB = \sqrt{9+4+0} = \sqrt{13}$, $AC = \sqrt{1+9+0} = \sqrt{10}$.

Поэтому лучше воспользоваться скалярным произведением

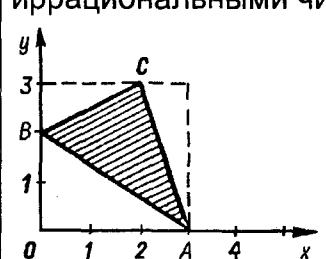
$$\text{векторов: } \cos \alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} = \frac{3+6+0}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{10}} = \frac{9}{\sqrt{130}}.$$

$$\text{Следовательно, } S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{13} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{1 - \frac{81}{130}} = 3,5;$$

Рис.2

$$V = \frac{1}{3} \cdot 3,5 \cdot 4 = \frac{14}{3} (\text{ед}^3).$$

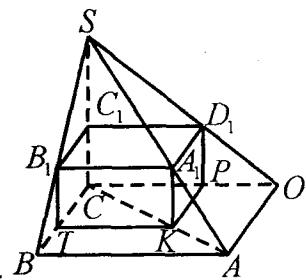
Еще надежнее вычислить площадь треугольника ABC , если считать его вписанным в прямоугольник (рис.2). Тогда достаточно будет из площади квадрата со стороной в 3 единицы длины вычесть площади трех прямоугольных треугольников, что вычислить можно и устно: $S_{ABC} = 9 - 3 - 1 - 1,5 = 3,5$.



15. Основанием пирамиды является квадрат со стороной a , две боковые грани пирамиды перпендикулярны основанию, а две другие наклонены к основанию под углом α . В пирамиду вписывают прямоугольные параллелепипеды так, что четыре вершины каждого из них лежат на боковых ребрах пирамиды, а четыре – на ее основании. Какой из этих параллелепипедов имеет наибольший объем? Найти его.

Решение.

Если основание пирамиды $SABCD$ – квадрат, то перпендикулярными к ней могут быть только смежные боковые грани, их общее боковое ребро SC также перпендикулярно к площади основания. Так как $CD \perp AD$, то, по теореме о трех перпендикулярах $SD \perp AD$. Следовательно, $SDC = \alpha$ и высота пирамиды $SC = CD \operatorname{tg} \alpha = a \operatorname{tg} \alpha$.



Верхнее основание вписанного в данную пирамиду параллелепипеда можно рассматривать как сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию, поэтому основаниями вписанных параллелепипедов являются квадраты.

Обозначим сторону основания и высоту вписанного параллелепипеда соответственно буквами x и y . Тогда его объем $V = x^2y$, где $0 < x < a$, $0 < y < a \operatorname{tg} \alpha$.

Определим y через x . Если $CP = x$, то $PD = a - x$, $y = (a - x) \operatorname{tg} \alpha$.

Следовательно, $V = x^2(a - x) \operatorname{tg} \alpha$.

Найдем наибольшее значение этой функции на $(0; a)$. Очевидно, что когда x стремится к 0 или a , то V стремится к 0. Поэтому наибольшее значение функция принимает во внутренней точке отрезка $[0; a]$.

$$V' = (2ax - 3x^2)\operatorname{tg} \alpha.$$

$V' = 0$ тогда, когда $2ax = 3x^2$, то есть при $x = 0$, или $x = \frac{2}{3}a$. Тогда на $(0; a)$ рассматриваемая функция принимает наибольшее значение при $x = \frac{2}{3}a$. Тогда при таком x наибольший объем $V = \frac{4}{27}a^3 \operatorname{tg} \alpha$.

Ответ. Наибольший объем $V = \frac{4}{27}a^3 \operatorname{tg} \alpha$ имеет параллелепипед со стороной $\frac{2}{3}$ стороны основания пирамиды.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Через вершины треугольника и точку пересечения его медиан проведены параллельные прямые до пересечения с плоскостью, не имеющей с треугольником общих точек. Длины отрезков этих прямых от двух вершин треугольника и точки пересечения его медиан до плоскости соответственно равны 43 см, 29 см и 41 см. Вычислить длину отрезка от третьей вершины треугольника до этой плоскости.
2. Основания равнобокой трапеции равны 36 см и 24 см, а ее площадь 540 см^2 . Точка пространства удалена от всех вершин трапеции на $2\sqrt{374}$ см. Вторая точка пространства равноудалена от данной точки и всех вершин трапеции. Вычислить расстояние от второй точки до плоскости трапеции.
3. Две стороны треугольника равны 21 см и 15 см, а его площадь – $90\sqrt{3} \text{ см}^2$. Из точки пространства на равных расстояниях от данных сторон проведен перпендикуляр к плоскости треугольника, основание которого принадлежит третьей стороне. Расстояние от этой точки до одной из данных сторон равно 10 см. Вычислить расстояние от точки до плоскости треугольника.
4. В основании прямой призмы лежит ромб с тупым углом β и большей диагональю d . Меньшая диагональ призмы образует с боковой гранью угол α . Определить объем призмы.
5. В основании прямой призмы лежит равнобедренный остроугольный треугольник с углом β при вершине. Расстояние от центра окружности, описанной около этого треугольника, до его основания равно a . Диагональ боковой грани призмы, содержащей боковую сторону основания, образует с плоскостью основания призмы угол α . Определить объем призмы.
6. В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α . Точка высоты пирамиды, находящаяся на расстоянии a от ее вершины, равноудалена от боковой грани и плоскости основания. Определить объем пирамиды.
7. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α . Через одну из сторон основания проведено сечение, плоскость которого перпендикулярна противолежащей боковой грани. Площадь сечения равна S . Определить площадь боковой поверхности пирамиды.
8. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом β . Точка высоты пирамиды, находящаяся на расстоянии b от бокового ребра, равноудалена от концов этого ребра. Определить объем пирамиды.
9. В основании пирамиды лежит треугольник с углами α и β . Все боковые ребра пирамиды равны b . Отрезок, соединяющий точку высоты пирамиды, равноудаленную от ее бокового ребра и плоскости основания, с вершиной основания, наклонен к плоскости основания под углом γ . Определить объем пирамиды.
10. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с углом α при основании и радиусом вписанной окружности r . Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом β . Определить объем пирамиды.
11. В основании пирамиды лежит ромб с острым углом α . Все двугранные углы при основании пирамиды равны между собой. Некоторая точка высоты пирамиды удалена от ее вершины и стороны основания на расстояние b . Перпендикуляр, проведенный из этой точки к стороне основания, образует с плоскостью основания угол β . Определить объем пирамиды.

12. В основании пирамиды лежит прямоугольная трапеция с острым углом α . Все двугранные углы при основании пирамиды равны между собой. Точка высоты пирамиды, равноудаленная от плоскости основания и бокового ребра, содержащая вершину угла α , соединена отрезком с вершиной этого угла. Длина отрезка равна a , а угол, образованный им и плоскостью основания, равен β . Определить объем пирамиды.
13. В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен β . Определить полную поверхность пирамиды, если радиус вписанного шара равен r .
14. Радиус основания конуса равен r , а образующая наклонена к плоскости основания под углом β . Около этого конуса описана пирамида, в основании которой лежит равнобедренный треугольник с углом 2α при основании. Определить объем пирамиды. Вычислить, если $r = 4$ см, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$.
15. Основание пирамиды – ромб со стороной a и острым углом α . Каждая боковая грань пирамиды наклонена к плоскости основания под углом β . Найти объем шара, вписанного в пирамиду. Вычислить, если $a = 6$ см, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$.
16. В шар радиусом R вписана четырехугольная пирамида, боковые ребра которой наклонены к плоскости основания под углом φ . Найти объем пирамиды, если в ее основании лежит прямоугольник с углом α между диагоналями. Вычислить, если $R = 3$ см, $\varphi = 30^\circ$, $\alpha = 60^\circ$.
17. Данна сфера с радиусом R . Определить высоту вписанной в нее правильной треугольной призмы наибольшего объема.
18. В правильной треугольной призме сумма длин всех трех ее ребер, имеющих общую вершину, равна 4. При каком значении высоты призмы площадь боковой поверхности будет наибольшей?
19. В правильной треугольной пирамиде длина бокового ребра $2\sqrt{3}$. При каком значении угла, образованного этим ребром и основанием пирамиды, объем будет наибольшим?
20. В основании наклонной призмы $ABC A_1 B_1 C_1$ треугольник ABC , $\angle ACB = 90^\circ$, $AC : BC = 2$, $A_1 O$ – высота призмы, $A_1 O + AC + BC = 18$. Какая должна быть длина BC , чтобы объем призмы был наибольшим?

Ответы
Тренировочные упражнения

§ 1. 1. $8\sqrt{3}$ см. 2. 4 дм. 3. 6 дм. 4. 6 дм. 32. $2a\sqrt{4H^2 + a^2}$.

§ 2. 12. 6 см. 13. а) $3\sqrt{5}$; б) 45° . 31. а) $\operatorname{tg} \angle MCA = 0,6\sqrt{3}$;

б) $S_{\Delta MDC} = 6 \text{ ед}^2$; $S_{\Delta CMB} = 1,5\sqrt{43} \text{ ед}^2$; $S_{\Delta AMD} = 6\sqrt{3} \text{ ед}^2$. 15. 12. 17. 8. 18. 1) $\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$;

2) $\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}$; 3) $\sqrt{b^2 - a^2}$. 19. 1) $\frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + \frac{a^2}{3}}$; 2) $\frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + a^2}$; 3) $\frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + 3a^2}$. 20. 5 и 6 см.

21. 3 см. 22. 12 см. 23. 1) $\frac{3a}{4}\sqrt{4h^2 + \frac{a^2}{3} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4}}$; 2) $\sqrt{4h^2 + a^2 + a^2}$; 3) $\frac{3a}{2}\sqrt{4h^2 + 3a^2} + \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

24. 1,8 м; 4 м. 25. $\frac{a^2}{4}\sqrt{15}$. 26. $3a^2$. 27. 768 см^2 . 28. 540 см^2 . 29. 448 см^2 . 30. $\frac{a^2}{2}(6 + \sqrt{7})$;

$3a^2$. 31. $\frac{a^2}{4}(\sqrt{3} + \sqrt{15})$. 32. $2\sqrt{3}b^2 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$. 33. $4l^2 \cos^2\frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\beta$. 34. $4R^2 \sin^2\alpha \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

35. $\frac{8}{3}b^3 \cos\beta \sin 2\beta$. 36. $\frac{a}{\sin\beta \cos\beta}$. 37. $h\sqrt{1 + 4\operatorname{ctg}^2\alpha}$. 41. $2\sqrt{3}r^3 \operatorname{tg}\beta$. 42. $\frac{a^3 \operatorname{ctg}\gamma \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{24 \sin\alpha}$.

43. $\frac{2}{3}l^3 \cos^2\beta \sin\beta \sin\gamma$. 44. $\frac{r^3 \operatorname{ctg}\frac{3\beta}{2} \operatorname{ctg}\gamma}{6 \cos^2\beta}$. 45. $\frac{r^3 (1 + \cos\beta + \sin\beta)^3 \operatorname{tg}\alpha}{3 \sin^2 2\beta}$.

46. $\frac{h^2 \operatorname{ctg}^2\alpha \operatorname{tg}\beta}{2 \cos\alpha} \left(1 + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)^2$. 47. $\frac{\sqrt{3}}{8}R^3 \operatorname{tg}\alpha$. 49. $\frac{1}{6}b^3 \sin\beta \sin\frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\beta}{4}\right) \operatorname{tg}\gamma$. 50. $\frac{R^2 \sin 2\alpha}{\cos\gamma}$.

52. $\frac{a^2 \operatorname{tg}\beta}{4 \cos\gamma}$. 54. $\frac{2r^3 \sin\beta \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}{3 \operatorname{tg}\frac{3\beta}{2}}$. 55. $\frac{8\sqrt{3}l^3}{9 \cos^2\gamma \sin\gamma}$. 56. $\frac{a^2 (\sin\alpha + 1)}{\cos\alpha}$. 57. $\frac{a^2 \sin\beta (\sin\alpha + 1)}{\cos\alpha}$.

58. $\frac{8d^3}{3 \sin^2\alpha \cos\alpha \sin\beta}$. 59. 1292 см^2 . 62. $\frac{c^3 \sin 2\alpha \operatorname{tg}\beta}{24(\sin\alpha + \cos\alpha)}$. 63. $\frac{b^3 \sin^2\beta \operatorname{tg}\alpha}{6 \left(1 + 2 \sin\frac{\beta}{2}\right)}$. 65. $\frac{2H^3 \operatorname{ctg}^2\beta}{3 \sin\alpha}$.

66. $\frac{6\sqrt{3}a^2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sin 2\alpha}$. 67. $\frac{8d^2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sin 2\alpha}$. 68. $\frac{d^3 \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{3 \sin^2\alpha \cos\alpha}$. 70. $93\sqrt{3} \text{ см}^2$. 71. $(90\sqrt{3} + 228) \text{ см}^2$. 72. 2 см.

73. 1 дм. 74. $\frac{784}{3} \text{ дм}^2$. 75. $156\sqrt{3} \text{ см}^2$. 76. $20\sqrt{2} \text{ см}^2$. 77. 9 см.

§ 3. 11. $S = R^2 \sin^2\frac{\beta}{2} \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. 12. $H = R \sin\alpha$. 13. $AB = \frac{2h\sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha}}{\sin\alpha \sin\beta}$. 14. $R = \frac{\sqrt{S \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}{\sin\frac{\beta}{2}}$.

15. $\frac{l\sqrt{\sin^2\beta \sin^2\alpha - \cos^2\beta}}{\cos\alpha}$. 16. $S_{\text{бок.}} = \frac{\pi R^2 \sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. 17. $\frac{\pi a^2 (\sin\alpha + 1)}{\cos^2\alpha \sin\alpha}$.

$$\S 4.2. \frac{\pi a^2 \cdot \sin \alpha}{2 \sin \beta} . 3. \frac{\pi \cdot b^3 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha}{4 \cos^2 \beta} . 4. \frac{\pi \cdot d^2 \cdot \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha} . 8. 2\pi a^3 \sin^2 \beta \cos^2 \beta \operatorname{tg} \alpha.$$

$$9. \pi a^2 \sin^2 \alpha \sin \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\beta}{4} \right) . 10. 4:1. 11. \pi S \operatorname{tg} \alpha; 36\sqrt{3}\pi \text{ см}^2. 15. \frac{\pi b^2}{\sin^2 \alpha \sin \beta}.$$

$$16. \frac{\pi l^2}{\cos \gamma \cos^2(\alpha + \beta)} . 17. \frac{\pi a^3 \operatorname{tg} \gamma}{3 \sin^3 \alpha} . 21. \frac{\pi a^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}}{\cos \gamma} . 22. \frac{\pi c^3 \cos^3 \beta \operatorname{tg} \gamma}{\left(1 + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \right)^3} . 23. \frac{\pi d^2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)}{\cos \gamma}.$$

$$24. \frac{1}{3} \pi b^3 \sin^3 \alpha \operatorname{tg} \gamma . 25. R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} . 26. R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} . 27. R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

$$28. \frac{\pi \cdot a^2}{\cos^2 \gamma} . 30. \frac{\pi H^3}{6 \sin^6 \alpha} . 31. \frac{\pi H^3}{6 \cos^6 \alpha} . 32. \frac{4}{3} R^3 \sin^2 \alpha \sin^2 \alpha \cos^2 \frac{\beta}{2} \sin \beta . 33. \frac{2}{3} R^3 \sin^2 \gamma \sin^2 2\gamma \sin 2\alpha.$$

$$34. \frac{2\pi a^2}{\sin^2 2\varphi} . 35. \frac{\pi h^2}{6 \sin^2 \beta} . 37. \pi d^2 \cos \varphi \operatorname{ctg} \frac{2\Phi}{2} . 38. 2\pi R^2 \sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2} . 39. \frac{\pi R^2}{2} . 43. 8 \text{ см или } 2 \text{ см}.$$

$$44. 9\pi m^3; 3\pi m^3. 45. 2\pi r \frac{l-r}{l} . 46. \pi r^2 (5\sqrt{2} + 7) . 47. 12 \text{ м}.$$

Самостоятельные работы

$$\mathbf{C-1-1. B-I. 1. 6 \text{ см}. 2. } a = 4, 5 \text{ см. B-II. 1. } 4\sqrt{3} \text{ см. 2. } h = a\sqrt{2}; \alpha = 45^\circ.$$

$$\mathbf{B-III. 1. } h = 4, 5 \text{ см. 2. } l = 30 \text{ см. B-IV. 1. } l = 62, 5 \text{ см. 2. } l_1 = a\sqrt{5}; l_2 = 2a.$$

$$\mathbf{C-1-3. B-I. 1. } 12\sqrt{39} . 2. 14 \text{ см}; \alpha = \arcsin \frac{6}{7} . \mathbf{B-II. 1. } 50(1 + \sqrt{2}) = 120, 5 . 2. h = 12 \text{ см};$$

$$\alpha = \operatorname{arcsinh} \frac{12}{17} . \mathbf{B-III. 1. } S = \frac{3}{2} d^2 \sin 2\alpha . 2. S = 2a^2 \left(\sin \alpha + 4 \operatorname{cm} \frac{\alpha}{2} + 4 \operatorname{cm} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta \right).$$

$$\mathbf{C-2-3. B-I. } \frac{3}{2} b^2 \sin \varphi . \mathbf{B-II. } \frac{8d^2}{\sin \alpha \sin 2\alpha} . \mathbf{B-III. } \frac{4r^2(1 + \cos \gamma)}{\sin \alpha \cos \gamma} . \mathbf{B-IV. } \frac{4H^2 \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}}{\sin \beta}.$$

Контрольные работы

$$\mathbf{K-2-1. B-I. 1. } 24 \text{ см. B-II. 1. } 16 \text{ см. B-IV. 2. } \frac{m^2}{2 \cos \alpha} \text{ см}^2.$$

$$\mathbf{K-2-2. B-I. 1. } 9\sqrt{7} \text{ см}^2 . 2. 144 \text{ см}^2 . \mathbf{B-II. 1. } 540 \text{ см}^2 . 2. ab + a\sqrt{a^2 + b^2} \text{ ед}^2.$$

$$\mathbf{B-III. 360 \text{ см}^2 . 2. } ab + a\sqrt{a^2 + b^2} \text{ ед}^2 . \mathbf{B-IV. 1. } 324\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1) \text{ м}^2 . 2. ab + a\sqrt{a^2 + b^2} \text{ ед}^2.$$

$$\mathbf{K-2-3. B-I. 1. } \frac{1}{4} c^3 \sin 2\alpha \operatorname{tg} \gamma . 2. H^2 \operatorname{ctg} \beta \left(1 + \frac{1}{\sin \beta} \right) . \mathbf{B-II. 1. } \frac{1}{3} l^3 \sin 2\beta \sin 2\alpha \sin \alpha .$$

$$2. \frac{a^2}{\cos \alpha} (\sin \alpha + 1) . \mathbf{B-III. 1. } \frac{2}{3} a^3 \cos^3 \frac{\beta}{2} \operatorname{ctg} \gamma . 2. \frac{H^2 \operatorname{ctg} \beta (1 + \sin \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} . \mathbf{B-IV. 1. } \frac{2}{3} c^3 \cos^3 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \gamma .$$

$$2. \frac{a^2 \sin \beta \sin \alpha + 1}{\cos \alpha} .$$

$$\mathbf{K-4-1. B-II. } \frac{2\pi}{\sqrt{3}} ab, \frac{\pi}{3} a^2 b . \mathbf{B-III. 1. } 2\pi al\sqrt{3}, 3\pi a^2 l . 2. 6 - 4\sqrt{2} \text{ дм. 3. } \frac{\pi R^2}{4} .$$

$$\mathbf{B-IV. 1. } \frac{\pi l^3 \cos^2 \gamma \sin \gamma}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} . 2. 3\pi R^3 . 3. \frac{\pi R^3}{2\sqrt{2}} .$$

ISBN 966822012-9



9 789668 220128