

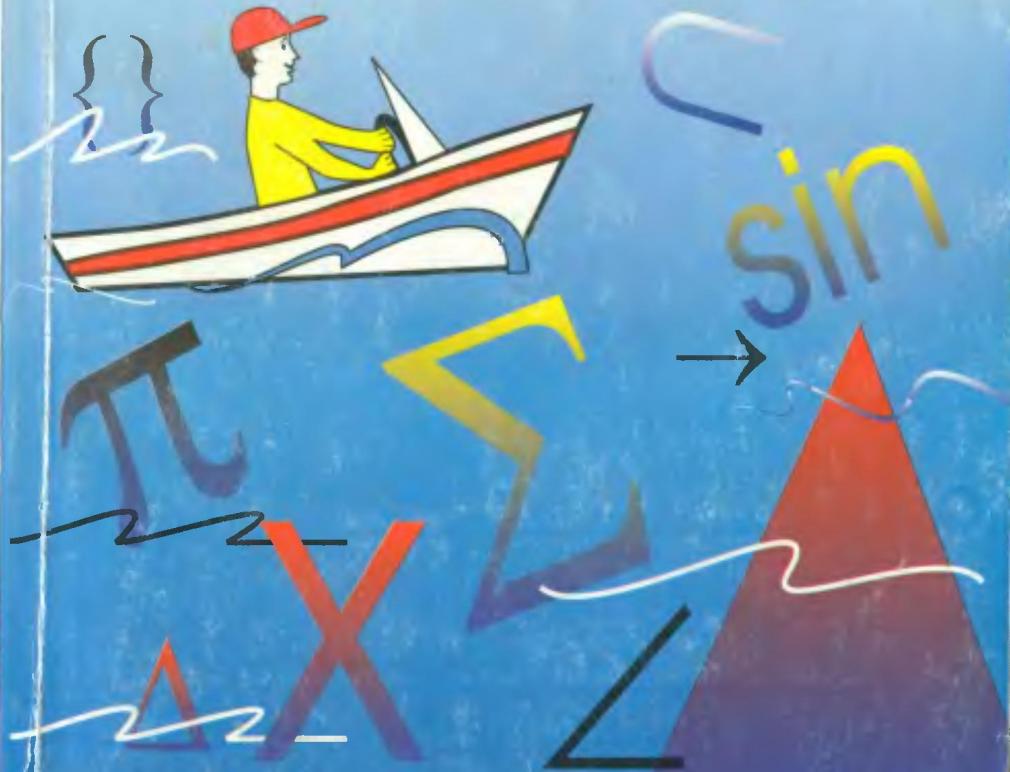
*Кладовая школьной математики*

П.Горнштейн, А.Мерзляк, В.Полонский, М.Якир

# Экзамен по математике

и

*его подводные цифры*



*Кладовая школьной математики*

---

---

П. И. Горнштейн, А. Г. Мерзляк,  
В. Б. Полонский, М. С. Якир

**Экзамен  
по математике  
и его подводные рифы**

«ИЛЕКСА»  
«ГИМНАЗИЯ»  
Москва — Харьков  
1998

**ББК 22.17**

**Г69**

**П. И. Горнштейн, А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский,  
М. С. Якир**

**Г69      Экзамен по математике и его подводные рифы.— М.:  
Илекса, Харьков: Гимназия, 1998,— 236 с.**

**ISBN 5-89237-023-2**

Книга включает задачи и вопросы, которые были использованы на письменных и устных выпускных и вступительных экзаменах по математике. Основная цель пособия — профилактика характерных ошибок, которые допускаются учащимися на экзаменах.

В книге детально рассмотрено большое количество задач. Представлено много материала для самостоятельной работы. Приведены ответы для всех задач, а также решения для наиболее сложных из них.

Для старшеклассников, слушателей подготовительных отделений вузов, учителей математики, репетиторов.

**ББК 22.17**

**ISBN 5-89237-023-2**

© Горнштейн П. И.,  
Мерзляк А. Г.,  
Полонский В. Б.,  
Якир М. С., 1998

© ООО «Илекса», 1998  
© ТО «Гимназия», 1998

## От авторов

Спрос рождает предложение. Экзамен требует задач. Поэтому многолетняя практика экзаменов по математике стимулировала создание мощного производства по их «изготовлению». И это замечательно: ведь в итоге «фабрика задач» создала немало образцов самого высокого качества, а иногда даже шедевров элементарной математики.

Известно, что производство порождает производство. Если кто-то задачи придумывает, значит, каким-то образом их надо научиться решать. Как здесь не вспомнить, что «задача» по-английски “problem” (проблема). Проблема обучения решению задач осложняется еще тем, что зачастую автора задачи не волнует, достаточно ли у школьника навыков для ее решения. Возникают «ножницы». В какой-то степени их устраняет издание массовой литературы по методам решения конкурсных задач, и совершенно очевидно, что абитуриент ими (методами) должен владеть. Однако внутри каждого метода есть свои тонкости, нюансы, «подводные рифы». Учащийся, натасканный лишь по методам решения, как правило, попадает в расставленные экзаменатором ловушки. Поэтому в подготовку к любому экзамену, в том числе и к конкурсному, должна обязательно быть включена целенаправленная работа по выявлению узких мест. Тогда в негласной дуэли между преподавателями вузов,

с одной стороны, и абитуриентами, их учителями или репетиторами, с другой, победят последние. Таким образом, выход только один — «во всем... дойти до самой сути».

Мы далеки от мысли, что учащийся, даже добросовестно изучивший материал настоящего пособия, может считать себя застрахованным от всех каверз конкурсных задач. В то же время мы надеемся, что эта книга сможет оказать абитуриенту существенную помощь в преодолении стоящих перед ним преград.

**Желаем успехов!**

## §1. «Коварные» вопросы теории

Среди учащихся, даже увлеченных математикой, бытует мнение, что знание теории носит второстепенный характер. Этому в какой-то степени способствует господствующая в последние годы письменная форма проведения экзаменов. Поэтому в подготовке абитуриентов акценты сместились в сторону овладения приемами решения задач. Но задача задаче — рознь. Для решения одних вполне достаточно формального владения методом, для решения других требуется нечто большее, а именно: глубокое, освоенное до деталей понимание сути вопроса. И здесь без теории не обойтись. Очень часто от того, насколько учащийся разбирается во всех тонкостях того или иного математического понятия, зависит его успех.

Как нам кажется, задания этого параграфа способствуют неформальному усвоению теории, помогают в формировании математической культуры.

Еще отметим следующее.

1. Нередко читателю встречаются вопросы о правильности приведенного в тексте определения. С формальной точки зрения в выборе определения существует известная степень свободы. Мы же под «правильным» подразумеваем то определение, которого традиционно придерживается школьный курс математики.

2. Вопросы, выходящие за пределы программы для поступающих в вузы, отмечены значком \*. Прежде всего они адресованы учащимся школ и классов с углубленным изучением математики.

\* \* \*

### 1.1. Верно ли определение?

Наименьшим общим кратным двух целых чисел называется наименьшее число, которое делится на каждое из заданных чисел.

1.2.\* Приведем два определения наибольшего общего делителя двух целых чисел.

*Определение 1.* Наибольшим общим делителем двух целых чисел  $a$  и  $b$  называется наибольшее из чисел, являющихся общими делителями чисел  $a$  и  $b$ .

**Определение 2.** Наибольшим общим делителем двух целых чисел  $a$  и  $b$  называется такой их общий делитель, который делится на любой другой делитель этих чисел.

а) Верны ли эти определения?

б) Эквивалентны ли эти определения?

1.3.\* Существуют ли пары целых чисел, не имеющие наибольшего общего делителя?

1.4. Верны ли следующие определения?

а) Натуральное число называется простым, если оно делится на единицу и само на себя.

б) Натуральное число называется простым, если оно делится только на единицу и само на себя.

в) Натуральное число называется простым, если оно не имеет других натуральных делителей, кроме единицы и самого себя.

г) Натуральное число называется простым, если оно имеет только два различных натуральных делителя.

д) Натуральное число называется простым, если его нельзя представить в виде произведения двух натуральных чисел, каждое из которых больше единицы.

1.5. Какие из следующих утверждений правильные, а какие нет?

а) Сумма любого рационального числа и любого иррационального есть число иррациональное.

б) Произведение любого рационального числа на любое иррациональное есть число иррациональное.

в) Сумма любых двух иррациональных чисел есть число иррациональное.

г) Произведение любых двух иррациональных чисел есть число иррациональное.

1.6. Верно ли, что  $n$ -й степенью числа  $a$  ( $n \in N$ ) называется произведение  $n$  чисел, каждое из которых равно  $a$ ?

1.7. Верно ли, что степенью всякого числа  $a$  с целым отрицательным показателем  $n$  есть число, равное  $\frac{1}{a^{-n}}$ ?

1.8. Каким свойством должно обладать число  $b$ , чтобы оно являлось квадратным корнем из числа  $a$ ?

1.9. Каким свойством должно обладать число  $b$ , чтобы  $b = \sqrt[n]{a}$ ?

1.10. При каких значениях  $a$  верно равенство  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ , где  $m \in Z$ ,  $n \in N$ ?

**1.11.** О переменных  $x$  и  $y$  известно, что выражение  
а)  $\sqrt{xy}$ ; б)  $\lg(xy)$

определенено. Следует ли из этого, что  $x$  и  $y$  имеют одинаковые знаки?

**1.12.** К выражению  $\sqrt{xy}$  применить теорему о корне из произведения.

**1.13.** О переменных  $x$  и  $y$  известно, что они одного знака. Прологарифмировать выражение  $xy$ .

**1.14.** Верно ли, что квадратным трехчленом называется многочлен вида  $ax^2 + bx + c$ , где  $x$  — переменная,  $a$ ,  $b$  и  $c$  — некоторые числа?

**1.15.** Известно, что дискриминант квадратного трехчлена равен нулю. Верно ли, что этот трехчлен можно представить в виде квадрата двучлена?

**1.16.** О параметрах  $a$ ,  $b$  и  $c$  известно, что  $b^2 - 4ac = 0$ . Следует ли отсюда, что уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  имеет одно решение?

**1.17.** О параметрах  $a$ ,  $b$  и  $c$  известно, что  $b^2 - 4ac < 0$ . Верно ли, что уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  не имеет решений?

**1.18.** К обеим частям уравнения  $f(x) = g(x)$  прибавим одно и то же действительное число. Получим ли при этом уравнение, равносильное данному?

**1.19.** К обеим частям уравнения  $f(x) = g(x)$  прибавим одно и то же выражение  $\varphi(x)$ . Получим ли при этом уравнение, равносильное данному?

**1.20.** Какое из уравнений  $f(x) = 0$  или  $f(x)g(x) = 0$  является следствием другого?

**1.21.** Равносильны ли уравнения  $f(x) = 1$  и  $(\sqrt{f(x)})^2 = 1$ ?

**1.22. Данны пары выражений:**

1)  $\sqrt{xy}$  и  $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$ ; 7)  $\lg x + \lg y$  и  $\lg xy$ ;

2)  $\sqrt{xy}$  и  $\sqrt{|x|} \cdot \sqrt{|y|}$ ; 8)  $\lg \frac{x}{y}$  и  $\lg |x| - \lg |y|$ ;

3)  $\sqrt{\frac{x}{y}}$  и  $\frac{\sqrt{xy}}{y}$ ; 9)  $\lg x^n$  и  $n \lg |x|$ ,  $n \in N$ ;

4)  $\sqrt{\frac{x}{y}}$  и  $\frac{\sqrt{xy}}{|y|}$ ; 10)  $\operatorname{tg}(x+y)$  и  $\frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{1 - \operatorname{tg}x \operatorname{tg}y}$ ;

5)  $\sqrt[n]{x^k}$  и  $\sqrt[n]{x}$ , где  $n \in N$ ,  $k \in N$ ; 11)  $\sin 2x$  и  $\frac{2\operatorname{tg}x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ ;

6)  $(x^{\frac{n}{m}})^m$  и  $x^n$ , где  
 $n \in N$ ,  $m \in N$ ,  
 $n \neq 1$ ,  $m \neq 1$ ,  
 $\text{НОД}(m; n) = 1$ ;

12)  $\frac{1 - \tg^2 x}{1 + \tg^2 x}$  и  $\cos 2x$ .

А. Для каких из них при переходе от первого выражения ко второму область определения а) сужается; б) расширяется; в) не изменяется?

Б. Рассмотрим тождества, левая и правая части которых соответственно первое и второе из вышеперечисленных алгебраических выражений. Каждое из этих тождеств выполняется на каком-то множестве  $M$  ( $M$  — максимальное множество значений  $(x; y)$ , подстановка которых в тождество обращает его в верное числовое равенство). Для каких тождеств множество  $M$  а) уже; б) равно области определения первого выражения?

1.23. Какое из следующих определений верно?

Последовательность  $a_n$  называется возрастающей, если для любого натурального  $n$  справедливо неравенство

- а)  $a_n > a_{n-1}$ ;
- б)  $a_{n+1} > a_n$ .

1.24.\* Напомним следующие определения:

- 1) Последовательность  $\{a_n\}$  называется ограниченной сверху, если существует число  $M$  такое, что для всех  $n \in N$  выполняется неравенство  $a_n \leq M$ .
- 2) Последовательность  $\{a_n\}$  называется ограниченной снизу, если существует число  $m$  такое, что для всех  $n \in N$  выполняется неравенство  $a_n \geq m$ .
- 3) Последовательность  $\{a_n\}$  называется ограниченной, если она ограничена как сверху, так и снизу.

Какие из следующих утверждений являются верными?

- а) Если последовательность имеет наибольший и наименьший элементы, то она ограничена.
- б) Если последовательность ограничена сверху (снизу), то она имеет наибольший (наименьший) элемент.
- в) Если последовательность возрастает и ограничена сверху, то она имеет наибольший элемент.
- г) Если последовательность возрастает, то она имеет наименьший элемент.

1.25.\* Последовательность  $\{a_n\}$  называется бесконечно большой, если для любого числа  $M$  найдется номер  $N_0$  такой, что для всех  $n > N_0$  выполняется неравенство  $|a_n| > M$ .

Верно ли, что если последовательность не является ограниченной сверху, то она бесконечно большая?

1.26. Верно ли, что любая бесконечная арифметическая прогрессия является неограниченной последовательностью?

1.27. Верно ли, что в арифметической прогрессии каждый член является средним арифметическим предыдущего и следующего членов?

1.28. Верно ли определение?

Геометрической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же не равное нулю число.

1.29. Может ли одна и та же последовательность быть одновременно как арифметической, так и геометрической прогрессией?

1.30. Верно ли, что каждый член, начиная со второго, любой бесконечной геометрической прогрессии является средним геометрическим последующего и предыдущего членов?

1.31. Верно ли, что если знаменатель геометрической прогрессии больше единицы, то прогрессия является возрастающей?

1.32. Может ли геометрическая прогрессия быть возрастающей, если ее знаменатель меньше единицы?

1.33. Верны ли определения?

а) Функция  $f$  называется нечетной, если ее область определения симметрична относительно начала координат и для любых двух различных  $x$  и  $-x$  из области определения функции выполняется равенство  $f(-x) = -f(x)$ .

б) Функция  $f$  называется четной, если ее область определения симметрична относительно начала координат и для любых двух различных  $x$  и  $-x$  из области определения функции выполняется равенство  $f(-x) = f(x)$ .

1.34. Может ли график нечетной функции пересекать ось ординат в точке, отличной от точки  $(0; 0)$ ?

1.35. Может ли функция одновременно быть и четной, и нечетной?

1.36. Является ли функция  $y = \frac{1}{x}$  убывающей?

- 1.37. Может ли возрастающая функция быть ограниченной?
- 1.38. Может ли возрастающая (убывающая) функция быть а) четной; б) нечетной?
- 1.39. Может ли монотонная функция быть периодической?
- 1.40. Может ли немонотонная функция быть обратимой?
- 1.41. Существует ли функция, определенная на  $R$  и являющаяся немонотонной на любом промежутке?
- 1.42. Может ли монотонная функция иметь экстремум?
- 1.43. Верно ли, что сумма любых двух возрастающих функций — возрастающая функция?
- 1.44. Может ли не имеющая экстремумов функция быть четной?
- 1.45. Может ли сумма двух функций, не являющихся монотонными на множестве  $M$ , быть монотонной функцией на  $M$ ?
- 1.46. Верно ли, что всякая линейная функция обратима?
- 1.47. Может ли четная функция быть обратимой?
- 1.48. Верно ли, что общие точки (если они существуют) графиков любых двух взаимно обратных функций принадлежат прямой  $y = x$ ?
- 1.49. Может ли обратимая функция иметь экстремум?
- 1.50. Верно ли, что сумма двух любых непериодических функций есть функция непериодическая?
- 1.51. Верно ли, что сумма двух любых периодических функций также функция периодическая?
- 1.52. Верно ли, что сумма двух любых периодических функций  $f$  и  $g$  таких, что  $D(f) \cap D(g) \neq \emptyset$  — функция периодическая?
- 1.53. Может ли сумма периодической и непериодической функций быть функцией периодической?
- 1.54. Существует ли такая функция, что любое действительное число является ее периодом?
- 1.55. Существует ли функция, для которой любое рациональное число, отличное от нуля, является периодом и ни одно иррациональное число периодом не является?
- 1.56. Существует ли функция, для которой каждое иррациональное число является ее периодом, но не существует рационального числа, являющегося ее периодом?
- 1.57. Верно ли, что если функции  $f$  и  $g$  имеют главный период  $T$ , причем  $D(f) \cap D(g) \neq \emptyset$ , то функция  $f + g$  также имеет своим главным периодом число  $T$ ?

**1.58.** Известно, что функции  $f$  и  $g$  имеют главный период  $T$ , причем  $D(f) \cap D(g) \neq \emptyset$ . Верно ли, что функция  $f + g$  имеет главный период?

**1.59.** Что можно сказать о периодичности функции  $y = f(g(x))$ , если  $D(y) \neq \emptyset$  и а)  $g$  — периодическая функция; б)  $f$  — периодическая функция, а  $g$  — непериодическая; в)  $f$  и  $g$  — непериодические функции.

**1.60.** Что можно утверждать о непрерывности функции  $f + g$  в точке  $x_0$ , если:

- функции  $f$  и  $g$  непрерывны в точке  $x_0$ ;
- функции  $f$  и  $g$  разрывны в точке  $x_0$ ;
- функция  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ , а функция  $g$  разрывна в этой точке?

**1.61.\*** Известно, что функция  $f$  определена на отрезке  $[a; b]$  и возрастает на промежутке  $(a; b)$ . Можно ли утверждать, что функция  $f$  возрастает на  $[a; b]$ ?

**1.62.** Существует ли функция, определенная на  $\mathbb{R}$  и разрывная в каждой точке?

**1.63.\*** Известно, что непрерывная на отрезке  $[a; b]$  функция обладает следующими свойствами:

- функция  $f$  ограничена на  $[a; b]$ ;
- на  $[a; b]$  функция  $f$  достигает наибольшего и наименьшего значений  $M$  и  $m$ ;
- функция  $f$  принимает все значения из отрезка  $[m; M]$ .

Верно ли, что любая функция  $f$ , обладающая свойствами 1)-3), непрерывна на  $[a; b]$ ?

**1.64.\*** Существует ли функция, определенная на  $\mathbb{R}$  и непрерывная а) ровно в одной точке; б) в счетном количестве точек?

**1.65.** Верно ли, что если функции  $f$  и  $g$  недифференцируемы в точке  $x_0$ , то и функция  $f + g$  обязательно недифференцируема в точке  $x_0$ ?

**1.66.** Верно ли, что если график функции  $f$  в точке  $x_0$  имеет касательную, то функция  $f$  непременно дифференцируема в точке  $x_0$ ?

**1.67.\*** Существует ли функция, определенная на  $\mathbb{R}$  и дифференцируемая а) ровно в одной точке; б) в счетном количестве точек?

**1.68.** Что можно сказать о функции, производная которой линейная функция?

1.69. Известно, что функция  $f$  непрерывна и возрастает на промежутке  $I$ . Верно ли, что обязательно  $f'(x) \geq 0$  для всех  $x \in I$ ?

1.70. Известно, что  $x_0$  — критическая точка функции  $f$ . Можно ли утверждать, что тогда  $f'(x_0) = 0$ ?

1.71. Для всех  $x \in D(f)$   $f(x) \geq f(x_0)$ . Верно ли, что всегда  $x_0$  — точка минимума функции  $f$ ?

1.72. Какие из точек  $x_1, x_2, x_3$  (рис. 1) являются точками максимума? минимума?

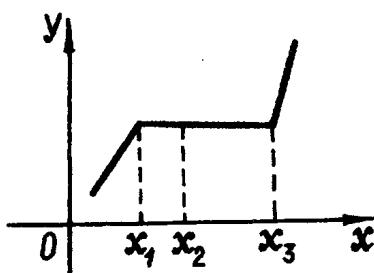


Рис. 1.

нила свой знак с « $\leftrightarrow$ » на « $\rightarrow$ ». Верно ли, что тогда  $x_0$  — точка максимума?

1.75. Точка  $x_0$  является критической точкой функции  $f$ . При переходе через точку  $x_0$  производная не изменила свой знак. Верно ли, что тогда  $x_0$  не является точкой экстремума?

1.73. Точка  $x_0$  является критической точкой функции  $f$ . При переходе через точку  $x_0$  производная меняет знак. Можно ли утверждать, что тогда  $x_0$  является точкой экстремума?

1.74. Точка  $x_0$  является критической точкой функции  $f$ . При переходе через точку  $x_0$  производная изменила свой знак с « $\leftrightarrow$ » на « $\rightarrow$ ». Верно ли, что тогда  $x_0$  — точка максимума?

## § 2. Осторожно! Простая задача!

Учиться плавать можно по-разному. Например, сразу бросить ученика в глубокое место и подождать результат. Возможен и иной путь — начать с «лягушатника».

Так же обстоит дело в обучении решению сложных задач.

Мы предлагаем читателю пойти по второму пути, не забывая при этом, что захлебнуться можно и в ванной.

Построить графики функций (2.1. — 2.20.):

$$2.1. y = (\sqrt{x})^2.$$

$$2.2. y = (x^{1/3})^3.$$

$$2.3. y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x.$$

$$2.4. y = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

$$2.5. y = \frac{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x}.$$

$$2.6. y = \sin^2 \operatorname{tg} x + \cos^2 \operatorname{tg} x.$$

$$2.7. y = \sin \arcsin x.$$

$$2.8. y = \arcsin x + \arccos x.$$

$$2.9. y = \sqrt{\arccos x - \pi}.$$

$$2.10. y = \lg \operatorname{tg} x + \lg \operatorname{ctg} x.$$

$$2.11. y = \log_x x.$$

$$2.12. y = 2^{\log_2 x}.$$

$$2.13. y = 2^{\frac{\nu_2 \log_2 x}{1}}.$$

$$2.14. y = x^{\log_x 2}.$$

$$2.15. y = 10^{\frac{\log x}{\log 10}}.$$

$$2.16. y = \sqrt{\lg \sin x}.$$

$$2.17. y = \sqrt{2^{\cos x} - 2}.$$

$$2.18. y = \sqrt{\sin^2 x - 4 \sin x + 4}.$$

$$2.19. y = \log_2(x^2 - 1) - \log_2(x - 1).$$

$$2.20. y = \frac{\lg(x^2 + 1)}{\lg(x^2 + 1)}.$$

2.21. При каких  $a$  верно равенство:

$$a) ((a - 1)^{1/3})^3 = a - 1;$$

$$b) \sqrt[6]{(a - 2)^2} = \sqrt[3]{a - 2};$$

$$c) \sqrt[6]{2^{2a}} = 4?$$

2.22. В выражении  $a\sqrt{b}$  внести множитель под знак корня.

2.23. Известно, что выражение  $\sqrt{a^2 b}$  определено. Что можно утверждать о знаке числа  $b$ ?

**2.24.** Примените к выражению  $\sqrt{(\sin x - 2)(\cos y - 3)}$  свойство корень из произведения.

**2.25.** Вычислить:

a)  $\arcsin(\sin 6)$ ;

b)  $\arccos(\cos 16)$ .

Решить уравнение (2.26 — 2.31):

2.26.  $\frac{x-1}{x-1} = 0.$

2.27.  $\frac{x-1}{x-1} = 1.$

2.28.  $\frac{x^2 + 6x + 5}{x+1} = 0.$

2.29.  $\frac{x^2 - 2x - 8}{x+2} = -6.$

2.30.  $\frac{x-x}{x+3} = 0.$

2.31.  $\frac{2x-3}{x-3} + \frac{5-x}{x-3} - \frac{x+2}{x-3} = 0.$

Решить неравенство (2.32 — 2.39):

2.32.  $x^2 > 0.$

2.33.  $x^2 \leq 0.$

2.34.  $\frac{1}{x^2} + 1 > 0.$

2.35.  $x(x^2 + 1) > 0.$

2.36.  $\frac{x^2 + 1}{x} < 0.$

2.37.  $\frac{x^4 + 1}{x^2} \geq 0.$

2.38.  $\frac{x-1}{x-1} > 0.$

2.39.  $\frac{x-1}{x-1} \geq 0.$

2.40.  $\frac{x-1}{x-1} > \frac{1}{2}.$

2.41.  $\frac{x-1}{x-1} \leq 1.$

2.42.  $\left(\frac{x-2}{x-3}\right)^2 \geq 0.$

2.43.  $\left(\frac{x-2}{x-3}\right)^2 > 0.$

2.44.  $x + \frac{1}{x} > \frac{1}{x} - 1.$

2.45.  $\frac{(x-1)(x-4)}{x-4} > 0.$

2.46.  $(x-1)(x-2)^2 > 0.$

2.47.  $(x-1)(x+2)^2 \geq 0.$

2.48.  $(x+2)(x+3)^2 < 0.$

2.49.  $(x+2)(x-3)^2 \leq 0.$

Решить уравнения (2.50 — 2.77):

2.50.  $|x^2 - 4x + 3| = -2.$

2.51.  $|x^2 - 6x - 7| = \sqrt{3} - 2.$

2.52.  $|x| = -x^2 - 1.$

2.53.  $|x| = -(x-2)^2.$

2.54.  $|x| = -|x+1|.$

2.55.  $x^2 + 4|x| + 1 = 0.$

2.56.  $|x| = -\frac{1}{x^2}.$

2.57.  $x|x| = -\frac{1}{x}.$

2.58.  $\left|\frac{1}{x}\right| = -x^2.$

2.59.  $x^2 + x + 1 = -|x|.$

2.60.  $2x - x^2 - 1 = |x|.$

2.61.  $|x| - x = -1.$

2.62.  $|x| - x = 1 - \sqrt{2}.$

2.63.  $x - |x| = |x+1|.$

- 2.64.  $|x| = -x^2$ .      2.65.  $|x - 2| = -(2 - x)^2$ .  
 2.66.  $|x - 3| = 6x - x^2 - 9$ .      2.67.  $|x + 3| + (x + 3)^2 = 0$ .  
 2.68.  $|x + 2| = -|x^2 - 4|$ .      2.69.  $x - |x| = x^2$ .  
 2.70.  $|x| = x$ .      2.71.  $|2x - 3| = 2x - 3$ .  
 2.72.  $|x^2 - 1| = 1 - x^2$ .      2.73.  $\left| \frac{1}{x-1} \right| = \frac{1}{1-x}$ .  
 2.74.  $\frac{|x|}{x} = 1$ .      2.75.  $\frac{|x-3|}{3-x} = 1$ .  
 2.76.  $|x - 2| = |2 - x|$ .      2.77.  $\left| \frac{1}{x-3} \right| = \left| \frac{1}{3-x} \right|$ .

Решить неравенства (2.78 — 2.121):

- 2.78.  $|x| > -1$ .      2.79.  $|x^2 - 3x - 2| < -1$ .  
 2.80.  $\left| \frac{1}{x+3} - \frac{1}{2x-5} \right| > -2$ .      2.81.  $\left| \frac{1}{x^2-1} \right| > -\frac{1}{2}$ .  
 2.82.  $|x| > 0$ .      2.83.  $|x| \geq 0$ .      2.84.  $|x| < 0$ .  
 2.85.  $|x^2 - 4| \leq 0$ .      2.86.  $|x| \geq -x^2$ .      2.87.  $|x| > -x^2$ .  
 2.88.  $|x| > -|x - 4|$ .      2.89.  $|x| \geq -|x(x-1)|$ .  
 2.90.  $|x| > -|x(x-1)|$ .      2.91.  $|x(x-1)| > -|x|$ .  
 2.92.  $|x(x-1)| \geq -|x|$ .      2.93.  $\left| \frac{1}{x} \right| > -|x|$ .  
 2.94.  $|x| \geq x$ .      2.95.  $|x| > x$ .      2.96.  $|x| \geq -x$ .  
 2.97.  $|x| > -x$ .      2.98.  $|x| < x$ .      2.99.  $|x| \leq x$ .  
 2.100.  $|x| < -x$ .      2.101.  $|x| \leq -x$ .      2.102.  $\left| \frac{1}{x} \right| \geq \left| \frac{1}{x} \right|$ .  
 2.103.  $\frac{|x|}{x} \geq 1$ .      2.104.  $\frac{|x|}{x} > 1$ .      2.105.  $\frac{|x|}{x} \leq 1$ .  
 2.106.  $\frac{|x|}{x} < 1$ .      2.107.  $|x| + x \geq -x^2$ .  
 2.108.  $|x| + x > -x^2$ .      2.109.  $|x| + x \leq -x^2$ .  
 2.110.  $|x| + x < -x^2$ .      2.111.  $x - |x| \leq \frac{1}{x^2}$ .  
 2.112.  $|x| - x \leq -\frac{1}{x^2}$ .      2.113.  $x|x-1| > 0$ .  
 2.114.  $x|x-1| \leq 0$ .      2.115.  $x|x-1| \geq 0$ .  
 2.116.  $x|x-1| < 0$ .      2.117.  $x|x-1| \leq 0$ .

$$2.118. \frac{x}{|x - 1|} > 0.$$

$$2.119. \frac{x}{|x - 1|} \geq 0.$$

$$2.120. \frac{x}{|x + 1|} < 0.$$

$$2.121. \frac{x}{|x + 1|} \leq 0.$$

Решить уравнение (2.122 — 2.139):

$$2.122. \sqrt{x} = -x^2.$$

$$2.123. \sqrt{x} = -|x|.$$

$$2.124. \sqrt{\frac{1}{x}} = -x^2.$$

$$2.125. x^{1/3} = -2.$$

$$2.126. \sqrt{x} = x - |x|.$$

$$2.127. \sqrt{x} = -(x + 1)^2.$$

$$2.128. x\sqrt{x} = -x.$$

$$2.129. \sqrt{x - 1} + |x - 1| = 0.$$

$$2.130. \sqrt{x - 2} + \sqrt{4 - x^2} = 0.$$

$$2.131. \sqrt{x^4} = x^2.$$

$$2.132. \sqrt{x^2} = x.$$

$$2.133. \sqrt{x^2} = -x.$$

$$2.134. \sqrt{x - 2}\sqrt{x - 3} = 0.$$

$$2.135. \sqrt{x(x + 1)} = \sqrt{x}\sqrt{x + 1}.$$

$$2.136. \sqrt{(x - 1)(x - 2)} = \sqrt{1 - x}\sqrt{2 - x}\sqrt{x}.$$

$$2.137. x\sqrt{x - 2} = 0.$$

$$2.138. (x^2 - 4)\sqrt{x} = 0.$$

$$2.139. \sqrt{x - 3} + \sqrt{2 - x} = 1.$$

Решить неравенства (2.140 — 2.161):

$$2.140. \sqrt{x} < -1.$$

$$2.141. \sqrt{5x + 2} < 3 - \sqrt{10}.$$

$$2.142. \sqrt{x - 2} > -3.$$

$$2.143. \sqrt{|x|} > -5.$$

$$2.144. \sqrt{|x|} > 0.$$

$$2.145. \sqrt{\frac{1}{x+3}} \geq 0.$$

$$2.146. \sqrt{x} \leq 0.$$

$$2.147. \sqrt{x} < 1.$$

$$2.148. \sqrt{x} \geq -\sqrt{x}.$$

$$2.149. \sqrt{x} > -\sqrt{x}.$$

$$2.150. \sqrt{x} \geq x - |x|.$$

$$2.151. \sqrt{x} > x - |x|.$$

$$2.152. \sqrt{x} \leq x - |x|.$$

$$2.153. \sqrt{x} < x - |x|.$$

$$2.154. \sqrt{x^2} \geq x.$$

$$2.155. \sqrt{x^2} > x.$$

$$2.156. x\sqrt{x + 3} \geq 0.$$

$$2.157. (x + 2)\sqrt{x} < 0.$$

$$2.158. (x + 2)\sqrt{x} \leq 0.$$

$$2.159. |x + 2|\sqrt{x} \geq 0.$$

$$2.160. |\sqrt{2x + 3} - 2| > -1.$$

$$2.161. \left| \frac{1}{\sqrt{x}} - 2 \right| > -3.$$

2.162. Какие из пар уравнений являются равносильными?  
Какое из уравнений в парах является следствием другого?

a)  $x^2 = 1$  и  $|x| = 1$ ;

б)  $x^2 = x^3$  и  $x = 1$ ;

в)  $x^3 = 1$  и  $|x| = 1$ ;

г)  $x^{1994} = 1$  и  $x^2 = 1$ ;

д)  $x + 1 = 0$  и  $(x + 1)(x^2 + 1) = 0$ ;

- e)  $x^2 + 2x + 1 = 0$  и  $x + 1 = 0$ ;
- ж)  $|x + 3| = |2 - x|$  и  $(x + 3)^2 = (2 - x)^2$ ;
- з)  $\frac{x}{x} = 1$  и  $x = 2$ ;      и)  $\frac{x}{x} = 1$  и  $\frac{x - 1}{x - 1} = 1$ ;
- к)  $\frac{x^2 - 1}{x + 1} = 0$  и  $x^2 - 1 = 0$ ;    л)  $\frac{x^2 - 1}{x + 1} = 0$  и  $x - 1 = 0$ ;
- м)  $\frac{x^2 - 1}{x + 2} = 0$  и  $x^2 - 1 = 0$ ;
- н)  $2x - 3 = 3 - 2x$  и  $\frac{2x - 3}{x - 1} = \frac{3 - 2x}{x - 1}$ ;
- о)  $\sqrt{x} = 1$  и  $x^2 = 1$ ;      н)  $\sqrt{x^2} = 1$  и  $x^2 = 1$ ;
- п)  $\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}} = 1$  и  $\sqrt{x^2} = 1$ ;      с)  $\sqrt{x} = -2$  и  $\frac{1}{x} = 0$ ;
- м)  $\sqrt{x} + 3 = 0$  и  $x^{1995} + x^{1994} + \dots + x^2 + x + 1 = 0$ ;
- у)  $\sqrt{x + 1} = x - 1$  и  $x + 1 = (x - 1)^2$ ;
- ф)  $\sqrt{(x + 1)(x - 1)} = 0$  и  $(x + 1)(x - 1) = 0$ ;
- х)  $\sqrt{x + 1} \sqrt{x - 1} = 0$  и  $\sqrt{(x + 1)(x - 1)} = 0$ ;
- ц)  $(x - 1) \sqrt{x + 1} = 0$  и  $(x + 1)(x - 1) = 0$ ;
- и)  $(x + 1) \sqrt{x - 1} = 0$  и  $(x + 1)(x - 1) = 0$ ;
- ш)  $x - 1 = 0$  и  $(x + 1) \sqrt{x - 1} = 0$ ;
- щ)  $2x + 3 = x - 1$  и  $(2x + 3) \sqrt{x} = (x - 1) \sqrt{x}$ ;
- э)  $2x + 3 = x - 1$  и  $(2x + 3) \sqrt{x + 6} = (x - 1) \sqrt{x + 6}$ ;
- ю)  $x^2 + \sqrt{x} = \sqrt{x} + 1$  и  $x^2 = 1$ .

Решить уравнения (2.163 — 2.193):

- 2.163.**  $(a^2 - 4)x = a + 2$ .      **2.164.**  $(a^2 - 6a + 5)x = a - 1$ .
- 2.165.**  $ax = b$ .      **2.166.**  $\frac{x - 2}{x + a} = 0$ .
- 2.167.**  $\frac{x - a}{x + 3} = 0$ .      **2.168.**  $\frac{x - a}{a - 2} = 0$ .
- 2.169.**  $\frac{x - 7}{x^2 - a^2} = 0$ .      **2.170.**  $\frac{x + 2a}{x + a} = 0$ .
- 2.171.**  $\frac{x - a}{x^2 - 4x + 3} = 0$ .      **2.172.**  $\frac{x^2 - 4x + 3}{x - a} = 0$ .
- 2.173.**  $\frac{a(x - 2)}{x - a} = 0$ .      **2.174.**  $\frac{a(x - a)}{x - 2} = 0$ .

$$2.175. \sqrt{x-3} = a.$$

$$2.177. a\sqrt{x} = 0.$$

$$2.179. \frac{x-a}{\sqrt{x-1}} = 0.$$

$$2.181. \frac{x-1}{\sqrt{x+a}} = 0.$$

$$2.183. (x-a)\sqrt{x+a} = 0.$$

$$2.185. (x-a)\sqrt{x^2-1} = 0.$$

$$2.187. \sqrt{x} + \sqrt{x+a} = 0.$$

$$2.189. a^2\sqrt{x-1} + \sqrt{x} = 0.$$

$$2.191. |x-3| + a^2|x| = 0.$$

$$2.193. a^2\sqrt{x-3} + |x| = 0.$$

$$2.176. \sqrt{x} = -a.$$

$$2.178. (x-a)\sqrt{x-1} = 0.$$

$$2.180. (x-1)\sqrt{x+a} = 0.$$

$$2.182. \sqrt{x}\sqrt{x-a} = 0.$$

$$2.184. (x+a)\sqrt{x-a} = 0.$$

$$2.186. (x^2-1)\sqrt{x-a} = 0.$$

$$2.188. \sqrt{x-1} + a^2\sqrt{x} = 0.$$

$$2.190. |x| = a.$$

$$2.192. \sqrt{x-3} + a^2|x| = 0.$$

Решить неравенства (2.194 — 2.216):

$$2.194. x(x-a) < 0.$$

$$2.195. (x-a)(x-2a) < 0.$$

$$2.196. (x-a)^2(x-2a) < 0.$$

$$2.197. (x-a)^2(x-2a) \leq 0.$$

$$2.198. \sqrt{x} + a^2 \leq 0.$$

$$2.199. a\sqrt{x} > 0.$$

$$2.200. a\sqrt{x} \leq 0.$$

$$2.201. \sqrt{x} > a.$$

$$2.202. \sqrt{x} \leq a.$$

$$2.203. \sqrt{x} + \sqrt{x-a} > 0.$$

$$2.204. (x-a)\sqrt{x} \geq 0.$$

$$2.205. x\sqrt{x-a} \leq 0.$$

$$2.206. |x-1|\sqrt{x+a} > 0.$$

$$2.207. \frac{\sqrt{x-a}}{|x-2|} \geq 0.$$

$$2.208. |x-2| < a.$$

$$2.209. |x^2+a| \leq 0.$$

$$2.210. |x|(x+a) \leq 0.$$

$$2.211. |x|(x-a) > 0.$$

$$2.212. (x-1)|x-a| \geq 0.$$

$$2.213. (x-2)|x+a| < 0.$$

$$2.214. a2^x \leq a^2.$$

$$2.215. a^2 2^x > a.$$

$$2.216. x^2 - 2x + 2^{\lfloor x \rfloor} > 0.$$

2.217. При каких  $a$  система  $\begin{cases} x > 3, \\ x \leq a \end{cases}$  не имеет решений?

2.218. При каких  $a$  система  $\begin{cases} x \geq 5, \\ x \leq 3-a \end{cases}$  имеет единственное решение?

2.219. При каких  $a$  существует ровно три целых числа, являющихся решением системы неравенств  $\begin{cases} x \geq 2, \\ x < a? \end{cases}$

2.220. При каких  $a$  решением системы

$$\begin{cases} x > 3, \\ x \geq a \end{cases}$$

является промежуток а)  $(3; \infty)$ ; б)  $[5; \infty)$ ?

2.221. При каких  $a$  уравнение  $(a+4)x^2 + 6x - 1 = 0$  имеет единственное решение?

2.222. При каких  $a$  уравнение  $(2a+8)x^2 - (a+4)x + 3 = 0$  имеет единственное решение?

2.223. При каких  $a$  уравнение

a)  $(a+6)x^2 - 8x + a = 0$ ;

б)  $a(2a+4)x^2 - (a+2)x - 5a - 10 = 0$

имеет более одного решения?

2.224. Найти все значения параметра  $a$ , при которых графики функций  $y = (a+5)x^2 - 7$  и  $y = (3a+15)x - 4$  не имеют общих точек?

2.225. При каких  $a$  неравенство  $(x-a)\sqrt{7x+3} \leq 0$  имеет единственное решение?

2.226. Найти все значения  $a$ , при которых уравнение

а)  $(x-a)(\sqrt{x}-9) = 0$ ;

б)  $(x-a)\log_2 x = 0$ ;

в)  $(x-3)\log_2 a = 0$ ;

г)  $(x-a)\arccos(x+3) = 0$ ;

д)  $(x-1)\arccos a = 0$

имеет единственное решение?

2.227. При каких  $a$  решением неравенства

$$(x-a)^2(x+4) \geq 0$$

является луч?

2.228. При каких  $a$  неравенство  $2x - a > 0$  является следствием неравенства  $x + 2a - 3 > 0$ ?

2.229. При каких  $a$  из неравенства  $0 < x < 1$  следует неравенство  $x^2 - a^2 \leq 0$ ?

2.230. Найти все значения  $a$ , при которых уравнение  $(\sqrt{x}-1)\log_3(1-a) = 0$  равносильно неравенству  $a\sqrt{x} \leq 0$ .

2.231. Найти все значения  $a$ , при которых уравнения  $\sin x = a - 3$  и  $\sqrt{x+3} = 2a + 1$  равносильны.

2.232. При каких  $a$  большее из двух чисел  $5a - 1$  и  $|2a|$  равно квадрату меньшего?

### §3. Откуда берутся посторонние корни

Знаете ли Вы, почему при возведении в квадрат обеих частей уравнения  $\sqrt{x} = 1$  мы не приобретаем посторонних корней, в то время как подобная операция с уравнением  $\sqrt{x} = -x$  к этому приводит? Почему, пользуясь определением логарифма при решении уравнения  $\log_x 4 = 2$ , мы получим уравнение-следствие  $x^2 = 4$ ? Почему умножение обеих частей уравнения  $\sqrt{x} = 1$  на двучлен  $x + 2$  не приводит к появлению посторонних корней, а на  $x - 2$  — приводит?

Ответить на эти и другие вопросы, связанные с приобретением посторонних решений, поможет материал настоящего параграфа.

Опыт показывает, что нередко ученик, «берясь» за решение уравнения (впрочем, как и неравенства), концентрирует свое внимание только на поиске преобразований, сводящих исходное уравнение к более простому, забывая при этом, что не всякое упрощение безобидно. Действительно, ведь далеко не каждое преобразование *сохраняет неизменным* множество корней данного уравнения: в одном случае это множество может сузиться, т.е. произойдет потеря корней (об этом речь пойдет в следующем параграфе), в другом — расшириться, т.е. появятся «лишние» (посторонние) корни.

По правде говоря, в появлении посторонних корней ничего страшного нет, если «истинные» корни возможно «просеять» сквозь «решето» проверки. (Такой метод решения уравнений называется методом следствий.) Однако главное заключается в том, чтобы четко знать, какое решение нуждается в проверке, а какое — нет, иными словами, *зафиксировать тот момент процесса решения, после которого возможно появление посторонних корней*.

Говоря о проверке как об этапе решения, нельзя обойти вопрос о возможности ее технической реализации. Ведь бывают корни «неудобные» для проверки, а в тех случаях, когда получено бесконечное множество решений, проверка может оказаться просто бессильной. Для подобных ситуаций возможен иной путь решения — так называемый метод равносильных (эквивалентных) переходов. Этот метод можно условно разложить на два этапа: увидеть момент перехода

к уравнению-следствию, затем необходимыми ограничениями на исковую переменную нейтрализовать возможность появления посторонних корней.

Подчеркнем, что и в методе следствий, и в методе равносильных переходов чрезвычайно важно знать причины (источники) появления посторонних решений.

Итак, какие же это причины?

### A. Расширение области определения.

Совершенно очевидно, что вне области определения уравнения корней быть не может (рис. 2). Поэтому область определения уравнения берет на себя роль ограничителя (погрой весьма широкого) множества корней. Естественно, расширение ограничительных рамок может привести к появлению посторонних корней. Так, например, переходя от уравнения  $\log_x 4 = 2$  к уравнению  $x^2 = 4$ , мы расширили область определения исходного



Рис. 2.

уравнения (была  $M = (0; 1) \cup (1; \infty)$ , стала  $R$ ), т.е. сняли все ограничения на исковую переменную, поэтому и появился посторонний корень  $x = -2$ . Ясно, что в этом уравнении проверка легко справится со своей задачей (решение проводится методом следствий). Однако решение этого уравнения можно осуществить и методом равносильных переходов (см. приложение). Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x^2 = 4. \end{cases}$$

Подчеркнем, что неравенства системы сохраняют ограничения, которые накладывает первоначальное уравнение на переменную.

Остановимся на одном важном моменте. Пусть с помощью «законных» преобразований (см. приложение) мы перешли от уравнения  $f(x) = g(x)$  с областью определения  $M$  к уравнению-следствию  $f_1(x) = g_1(x)$  с областью определе-

ния  $N$ , где  $M \subseteq N$ . Верно ли, что требование  $x \in M$  спасет от посторонних корней? Забегая несколько вперед, скажем, что расширение области определения уравнения не единственная причина появления посторонних корней. Но об этом подробно мы расскажем в следующих двух пунктах. А сейчас лишь ограничимся характерным примером.

Решая уравнение  $\sqrt{x} = -x$  возведением обеих частей в квадрат, мы получаем уравнение-следствие  $x = x^2$ . Понятно, что произошло расширение области определения, однако требование  $x \geq 0$  не уберегает от появления постороннего корня  $x = 1$ .

Особо подчеркнем, что примеры настоящего пункта подобраны так, что ограничения  $x \in M$ , где  $M$  — область определения исходного уравнения, будет достаточно для сохранения равносильности.

И еще одно замечание. Расширение области определения уравнения не всегда приводит к появлению посторонних корней. Так, например, уравнение  $\frac{x^2 - 4}{x + 1} = 0$  равносильно уравнению  $x^2 - 4 = 0$ , а уравнение  $\log_2 x = 4$  равносильно  $x = 16$ . При этом как в первом, так и во втором примерах произошло расширение области определения исходного уравнения. Вместе с тем не будет ничего криминального в том, что ученик, например, решая первое уравнение, перейдет к системе

$$\begin{cases} x^2 - 4 = 0, \\ x \neq -1. \end{cases}$$

Однако ясно, что в ограничении  $x \neq -1$  нет никакой необходимости.

Прежде, чем перейти к разбору задач данного пункта, мы настоятельно рекомендуем читателю повторить упражнение 1.22, обратив внимание на преобразования, расширяющие область определения выражения.

В первую очередь обратимся к уравнению вида  $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ . Понятно, что уравнение  $f(x) = 0$  является его следствием. Однако добавление требования  $g(x) \neq 0$  достаточно для сохранения равносильности. Таким образом, рассматриваемое уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0. \end{cases}$$

$$3.1. \text{ Решить уравнение } \frac{x}{x+1} - \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} = 0.$$

*Решение.* Сложив дроби, стоящие в левой части, получим уравнение

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = 0,$$

равносильное исходному. Это же уравнение, в свою очередь, равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0, \\ x^2 \neq 1. \end{cases}$$

Квадратное уравнение системы, являясь следствием исходного уравнения, имеет два корня  $x = 3, x = -1$ . Очевидно, что последний корень — посторонний.

*Ответ.*  $x = 3$ .

$$3.2. \text{ Решить уравнение } \frac{\lg x^2}{\lg(6x - 5)} = 1.$$

*Решение.* Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \lg x^2 - \lg(6x - 5) = 0, \\ \lg(6x - 5) \neq 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \lg \frac{x^2}{6x - 5} = 0, \\ 6x - 5 \neq 1. \end{cases}$$

Обратим внимание, что переход к последней системе не изменил область определения исходного уравнения.

Далее

$$\begin{cases} \frac{x^2}{6x - 5} = 1, \\ x \neq 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 1, \\ x = 5, \end{cases} \\ x \neq 1. \end{cases}$$

*Ответ.*  $x = 5$ .

$$3.3. \text{ Решить уравнение } \frac{\cos 2x + 2\sin 2x + 4\cos^2 x}{\sin x + \cos x} = \sin x - \cos x.$$

*Решение.* Переходим к равносильной системе

$$\begin{cases} \cos 2x + 2\sin 2x + 4\cos^2 x = \sin^2 x - \cos^2 x, \\ \sin x + \cos x \neq 0. \end{cases}$$

Найдем корни уравнения-следствия. Имеем

$$2\cos^2 x - 2\sin^2 x + 4\sin x \cos x + 4\cos^2 x = 0,$$

$$\sin^2 x - 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0.$$

Поскольку  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ , не являются корнями последнего уравнения, то оно равносильно такому:

$$\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 3 = 0.$$

Отсюда  $\operatorname{tg} x = 3$  или  $\operatorname{tg} x = -1$ .

Требования  $\sin x + \cos x \neq 0$ , т.е.  $\operatorname{tg} x \neq -1$ , полностью достаточно для того, чтобы «отбросить» посторонние корни. Итак, подходит только  $\operatorname{tg} x = 3$ . Получаем

*Ответ.*  $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Часто при упрощении выражений приходится сокращать дроби. А эта операция может расширить область определения выражения. Например, заменив дробь  $\frac{ab}{ac}$  такой  $\frac{b}{c}$ , мы расширили область определения. Естественно, этот факт следует учитывать при решении уравнений.

**3.4.** Решить уравнение  $\frac{x^2 - 6x + 5}{x - 1} = -4$ .

*Решение.* Конечно, это уравнение можно решать, как три предыдущих. Однако можно поступить иначе: разложить числитель на множители. Имеем

$$\frac{(x - 1)(x - 5)}{x - 1} = -4.$$

Ясно, что, сократив дробь, мы расширим область определения уравнения. Однако переход к системе

$$\begin{cases} x - 5 = -4, \\ x \neq 1 \end{cases}$$

сохранил равносильность. Полученная система решений не имеет.

*Ответ.* Нет решений.

**3.5.** Решить уравнение

$$-3 \frac{|1 - \cos x|}{1 - \cos x} \cdot \sin x = \sin x - 2\sin 2x.$$

*Решение.* Так как  $1 - \cos x \geq 0$ , то, раскрыв модуль, получим уравнение  $-3 \frac{1 - \cos x}{1 - \cos x} \cdot \sin x = \sin x - 2\sin 2x$ , равносильное исходному.

Разумеется, следующий естественный шаг расширит область определения. Поэтому надо подключить ограничение  $\cos x \neq 1$ . Имеем:

$$\begin{cases} -3\sin x = \sin x - 2\sin 2x, \\ \cos x \neq 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\sin x(\cos x - 1) = 0, \\ \cos x \neq 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x \neq 1. \end{cases}$$

Легко понять, что последняя система равносильна уравнению  $\cos x = -1$ .

*Ответ.*  $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

**3.6.** Решить уравнение  $\frac{\sin 3x - 2\sin x}{\cos 3x} = \sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x$ .

*Решение.* Запишем цепочку уравнений, равносильных исходному:

$$\frac{3\sin x - 4\sin^3 x - 2\sin x}{4\cos^3 x - 3\cos x} = \sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x,$$

$$\frac{\sin x(1 - 4\sin^2 x)}{\cos x(1 - 4\sin^2 x)} = \sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x.$$

Понятно, что последнее уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = \sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x, \\ \sin x \neq \pm \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 0, \\ \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ \sin x \neq \pm \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pi n, \\ x = \frac{\pi}{6} + \pi k, \\ x \neq \pm \frac{\pi}{6} + \pi m, \text{ где } m, n, k \text{ — целые.} \end{cases}$$

Отсюда получаем

*Ответ.*  $x = \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

Следующие три примера показывают, как можно получить посторонние корни, совершив, казалось бы, безобидную операцию приведения подобных слагаемых. Так, переход от уравнения  $f(x) + g(x) = \varphi(x) + g(x)$  к уравнению  $f(x) = \varphi(x)$  расширяет область определения, если  $D(g) \subset \subset D(f) \cap D(\varphi)$ . Поэтому при такой операции для сохранения равносильности необходимо подключить требование  $x \in D(g)$ .

3.7. Решить уравнение  $1 + \lg(1 + x^2 - 2x) - \lg(1 + x^2) = 2\lg(1 - x)$ .

*Решение.* Имеем  $1 + \lg(1 - x)^2 - \lg(1 + x^2) = 2\lg(1 - x)$ . Известно, что  $\lg(1 - x)^2 = 2\lg|1 - x|$ . Однако область определения рассматриваемого уравнения есть промежуток  $(-\infty; 1)$ . Поэтому исходное уравнение равносильно такому

$$1 + 2\lg(1 - x) - \lg(1 + x^2) = 2\lg(1 - x).$$

Ясно, что на следующем этапе решения «исчезнет» слагаемое  $2\lg(1 - x)$ . И этот шаг приведет к расширению области определения уравнения. Поэтому мы обязаны «сохранить о нем память». Для этого достаточно добавить ограничение  $x < 1$ .

Итак, данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 1 - \lg(1 + x^2) = 0, \\ x < 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3, \\ x = -3, \\ x < 1. \end{cases}$$

*Ответ.*  $x = -3$ .

$$3.8. \text{ Решить уравнение } \lg\sqrt{1+x} + 3\lg\sqrt{1-x} - 2 = \lg\sqrt{1-x^2}.$$

*Решение.* Так как в данном уравнении  $-1 < x < 1$ , то  $\lg\sqrt{1-x^2} = \lg\sqrt{1-x} + \lg\sqrt{1+x}$ . Поэтому исходное уравнение равносильно такому:

$$\lg\sqrt{1+x} + 3\lg\sqrt{1-x} - 2 = \lg\sqrt{1+x} + \lg\sqrt{1-x}.$$

Понятно, что, приведя подобные слагаемые, мы получим уравнение-следствие. Следовательно, придерживаясь равносильных переходов, запишем систему

$$\begin{cases} \lg\sqrt{1-x} = 1, \\ x > -1. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} x = -99, \\ x > -1. \end{cases}$$

*Ответ.* Нет решений.

$$3.9. \text{ Решить уравнение } \cos 2x - \operatorname{tg}^2 x = \frac{\cos^2 x - \cos^3 x - 1}{\cos^2 x}.$$

$$\text{Решение. Имеем } \cos 2x - \operatorname{tg}^2 x = 1 - \cos x - \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$\cos 2x - \operatorname{tg}^2 x = -\cos x - \operatorname{tg}^2 x.$$

Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos 2x + \cos x = 0, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0, \\ \cos x \neq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[ \begin{array}{l} \cos x = -1, \\ \cos x = \frac{1}{2}, \\ \cos x \neq 0, \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pi + 2\pi k, \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \text{ где } n \text{ и } k \text{ — целые.} \end{cases}$$

$$\text{Ответ. } x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \text{ или } x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что требование  $\cos x \neq 0$  оказалось лишним. Но мы это смогли обнаружить лишь в конце решения.

Обычно упрощение выражений связано с применением различных тождеств (формул). Однако, как мы уже заметили выше (опять-таки см. упражнение 1.22.), левые и правые части тождеств могут иметь разные области определения. Совершенно очевидно, что при решении уравнения применение такого рода тождеств может изменить его область определения.

В соответствии с темой настоящего параграфа рассмотрим примеры, в которых применение необходимых формул расширяет область определения уравнения.

**3.10.** Решить уравнение  $2x^2 - 7(\sqrt{x})^2 = 4$ .

*Решение.* Поскольку  $(\sqrt{x})^2 = x$  только при  $x \geq 0$ , то данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2x^2 - 7x - 4 = 0, \\ x \geq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4, \\ x = -\frac{1}{2}, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

*Ответ.*  $x = 4$ .

**3.11.** Решить уравнение  $3^{\frac{1}{2} + \log_3 \cos x} + \sqrt{6} = 9^{\frac{1}{2} + \log_9 \sin x}$ .

*Решение.* Применение основного логарифмического тождества расширит область определения данного уравнения. Поэтому исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt{3} \cos x + \sqrt{6} = 3 \sin x, \\ \sin x > 0, \\ \cos x > 0. \end{cases}$$

Решим уравнение-следствие. Имеем  $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $x = \frac{\pi}{6} + (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Из полученного множества надо выбрать только те значения  $x$ , которые принадлежат первой четверти. При  $k = 2n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ , получим  $x = \frac{5\pi}{12} + 2\pi n$ . Очевидно эта серия

подходит. При  $k = 2n + 1$  получаем  $x = \frac{11\pi}{12} + 2\pi n$ . Понятно, что все эти корни посторонние для данного уравнения.

*Ответ.*  $x = \frac{5\pi}{12} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

**3.12.** Решить уравнение  $(1 + \operatorname{tg}^2 x) \sin x + \operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$ .

*Решение.* Записав данное уравнение в виде  $(1 + \operatorname{tg}^2 x) \sin x = 1 - \operatorname{tg}^2 x$ , несложно догадаться, что обе части следует разделить на  $1 + \operatorname{tg}^2 x$ . Ясно, что такое преобразование не нарушает равносильность. Имеем

$$\sin x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

Замена правой части этого уравнения на  $\cos 2x$  расширит его область определения ровно на множество  $\frac{\pi}{2} + \pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ . Следовательно, данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin x = \cos 2x, \\ \cos x \neq 0, \\ 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0, \\ \cos x \neq 0, \\ \left[ \begin{array}{l} \sin x = -1, \\ \sin x = \frac{1}{2}, \\ \cos x \neq 0. \end{array} \right] \end{cases}$$

Отсюда  $\sin x = \frac{1}{2}$ .

*Ответ.*  $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

**3.13.** Решить уравнение  $\frac{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x} = 1$ .

*Решение.* Разумеется, использование формулы тангенса разности — шаг совершенно естественный, но небезопасный. Действительно, уравнение  $\operatorname{tg} x = 1$  — следствие данного, т.к. при таком переходе исчезает ограничение  $\cos 2x \neq 0$ . Значит, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \quad n \text{ и } k \text{ — целые.} \end{cases}$$

Очевидно эта система не имеет решений.

*Ответ.* Нет решений.

**3.14.** Решить уравнение  $\log_2 \frac{x-5}{x+5} + \log_2(x^2 - 25) = 0$ .

*Решение.* Перейдя к уравнению  $\log_2 \frac{(x-5)(x^2-25)}{x+5} = 0$ ,

т. е.  $\log_2(x-5)^2 = 0$ , главное — не забыть об области определения исходного уравнения. Поэтому здесь опять-таки удобно «работать» с равносильной системой

$$\begin{cases} \log_2(x-5)^2 = 0, \\ \begin{cases} x < -5, \\ x > 5. \end{cases} \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} |x-5| = 1, \\ \begin{cases} x < -5, \\ x > 5. \end{cases} \end{cases}$$

Решив эту систему, получим

*Ответ.*  $x = 6$ .

В только что разобранном примере соблазнительно совершить следующие преобразования:  $\log_2(x-5) - \log_2(x+5) + \log_2(x-5) + \log_2(x+5) = 0$ . Кстати, они приведут к верному ответу. Но такая тактика опасна, т. к. она ведет к сужению области определения, а следовательно, возникает угроза потери корня. И верный ответ здесь — счастливая случайность.

**3.15.** Решить уравнение  $\log_2^2 \operatorname{tg} x + \log_2 |\sin x| \cdot \log_2 |\cos x| = 1$ .

*Решение.* Запишем уравнение, равносильное данному:

$$\log_2^2 \operatorname{tg} x + 4 \log_2 |\sin x| \cdot \log_2 |\cos x| = 1.$$

Если первое слагаемое в левой части полученного уравнения заменить выражением  $(\log_2 \sin x - \log_2 \cos x)^2$ , то мы сузим область определения исходного уравнения. Поэтому

лучше ее расширить, сняв угрозу потери корня (из двух зол выбирают меньшее). Имеем:

$$(\log_2 |\sin x| - \log_2 |\cos x|)^2 + 4 \log_2 |\sin x| \cdot \log_2 |\cos x| = 1.$$

Надо четко понимать, что это уравнение является следствием исходного. Действительно, ведь первоначальное уравнение требует от  $\sin x$  и  $\cos x$  быть одного знака, а последнее уравнение это требование «смягчает» до ограничения  $\sin x \cdot \cos x \neq 0$ .

Итак, запишем систему, равносильную исходному уравнению

$$\begin{cases} (\log_2 |\sin x| + \log_2 |\cos x|)^2 = 1, \\ \operatorname{tg} x > 0. \end{cases}$$

Далее

$$\begin{cases} \log_2^2 |\sin x \cos x| = 1, \\ \operatorname{tg} x > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} |\sin 2x| = 4, \\ \operatorname{tg} x > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} |\sin 2x| = 1, \\ \operatorname{tg} x > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 2x = 0, \\ \operatorname{tg} x > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, & n \in \mathbb{Z}, \\ \operatorname{tg} x > 0. \end{cases}$$

Осталось из полученной серии корней выбрать лишь те, которые лежат в первой или третьей четвертях.

$$\text{Ответ. } x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$3.16. \text{ Решить систему } \begin{cases} \sqrt[y]{4^x} = 32 \sqrt[x]{8^y}, \\ \sqrt[y]{3^x} = 3 \sqrt[y]{9^{1-y}}. \end{cases}$$

*Решение.* Совершенно ясно, что в этой системе удобно перейти к дробным показателям. И, казалось бы, ничего опасного в этом нет. Но (!) этот путь, как ни странно, ведет к расширению области определения системы. В самом деле, из условия следует, что  $x$  и  $y$  — натуральные числа, причем

большие единицы. Однако указанное преобразование это ограничение снимает.

Итак, запишем систему

$$\begin{cases} \frac{2x}{y} = 2^5 \cdot \frac{3y}{2x}, \\ 3^y = 3 \cdot 3^{\frac{x}{y}}, \end{cases}$$

которая является следствием исходной. Имеем

$$\begin{cases} \frac{2x}{y} = 5 + \frac{3y}{x}, \\ \frac{x}{y} = \frac{2-y}{y}. \end{cases}$$

Рассмотрев первое уравнение системы как квадратное относительно  $\frac{x}{y}$ , получим  $\frac{x}{y} = 3$  или  $\frac{x}{y} = -\frac{1}{2}$ . Поскольку  $x$  и  $y$  — натуральные, то подходит только первый корень.

Далее решаем систему

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = 3, \\ \frac{x}{y} = \frac{2-y}{y}. \end{cases}$$

Отсюда  $x = \frac{3}{2}$  и  $y = \frac{1}{2}$ . И с учетом ограничений на значения  $x$  и  $y$  получаем

*Ответ.* Нет решений.

**3.17.** Решить систему

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} 4x = \operatorname{tg} \frac{y-8}{3}, \\ 4 \log_{\frac{6x}{\pi}} \frac{\pi}{6} + 27^{\log_3 \sqrt[3]{y}} = 2 \log \sqrt{\frac{6x}{\pi}} \left( \frac{6x^2}{\pi} \right) - 3x. \end{cases}$$

*Решение.* Упростим второе уравнение системы:

$$4 \log_{\frac{6x}{\pi}} \frac{\pi}{6} + 3^{\log_3 \sqrt[3]{y}} = 4 \left( \log_{\frac{6x}{\pi}} \frac{6x}{\pi} + \log_{\frac{6x}{\pi}} x \right) - 3x.$$

Заметим, что сделанные преобразования пока еще не нарушили равносильности. Однако на следующем этапе с переменной  $y$  будет снято ограничение  $y > 0$ . Имеем

$$4 \log_{\frac{6x}{\pi}} \frac{\pi}{6} + y = 4 + 4 \log_{\frac{6x}{\pi}} x - 3x,$$

$$4 \log_{6x} \frac{\pi}{6x} = 4 - 3x - y.$$

Дальнейшее преобразование уже снимет ограничение  $x > 0$  и  $x \neq \frac{\pi}{6}$  с переменной  $x$ . Имеем  $-4 = 4 - 3x - y$ ,  $y = 8 - 3x$ .

Таким образом, исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - 4x \right) + \operatorname{tg} x = 0, \\ y = 8 - 3x, \\ y > 0, \\ x > 0, \\ x \neq \frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы. Запишем:

$$\frac{\sin \left( \frac{\pi}{2} - 3x \right)}{\cos \left( \frac{\pi}{2} - 4x \right) \cos x} = 0,$$

$$\begin{cases} \cos 3x = 0, \\ \sin 4x \neq 0, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$$

Несложно убедиться, что решением этой системы будет  $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Требование  $x > 0$  и  $x \neq \frac{\pi}{6}$  оставит только  $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Вместе с тем не следует забывать, что  $y > 0$ , т. е.  $x < \frac{8}{3}$ . Поэтому исходной системе удовлетворяет только  $x = \frac{5\pi}{6}$ . Отсюда  $y = 8 - \frac{5\pi}{2}$ .

*Ответ.*  $x = \frac{5\pi}{6}$  и  $y = 8 - \frac{5\pi}{2}$ .

Сейчас нам предстоит работать с уравнением вида  $f(g(x)) = f(\varphi(x))$ . Порой при решении таких уравнений приходится сравнивать значения «внутренних» функций, т. е. переходить к уравнению  $g(x) = \varphi(x)$ . Здесь не надо спешить с выводом о том, что всегда второе уравнение является

следствием первого. Может быть и наоборот (тривиальный пример — переход от уравнения  $\sin x = \sin(2x - 1)$  к уравнению  $x = 2x - 1$ ). Все зависит от свойств функции  $f$ . Однако мы смело можем утверждать, что такой переход ведет к расширению или сохранению области определения исходного уравнения.

Ниже мы подобрали такие примеры, в которых свойства функции  $f$  все же таковы, что ее «исчезновение» приводит к уравнению-следствию. (О примерах иного рода будет рассказано в конце настоящего параграфа.)

**3.18.** Решить уравнение  $\sqrt{x^2 + 5x - 2} = \sqrt{9x - 2}$ .

*Решение.* Поскольку функция  $y = \sqrt{t}$  является монотонной, то можем сделать вывод, что  $x^2 + 5x - 2 = 9x - 2$ . Полученное уравнение является следствием исходного. Причина все та же — расширение области определения. Тогда система

$$\begin{cases} x^2 + 5x - 2 = 9x - 2, \\ 9x - 2 \geq 0 \end{cases}$$

равносильна данному уравнению. Заметим, что нет никакой необходимости подключать в систему еще неравенство  $x^2 + 5x - 2 \geq 0$ . Из двух неравенств мы выбрали то, которое проще решить. Решив полученную систему, запишем

*Ответ.*  $x = 4$ .

**3.19.** Решить уравнение  $\arcsin x = \arcsin(x^2 - 2x - 4)$ .

*Решение.* Благодаря свойствам функции  $y = \arcsin t$  (область определения и монотонность) мы можем записать систему, равносильную данному уравнению:

$$\begin{cases} x = x^2 - 2x - 4, \\ -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Далее

$$\begin{cases} x = 4, \\ x = -1, \\ -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

*Ответ.*  $x = -1$ .

**3.20.** Решить уравнение  $\log_5 \operatorname{tg} x = (\log_5 4) \log_4 (3 \sin x)$ .

*Решение.* Не нарушая равносильности, легко привести данное уравнение к такому:  $\log_5 \operatorname{tg} x = \log_5 (3 \sin x)$ . Это уравнение в свою очередь равносильно системе

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 3 \sin x, \\ \sin x > 0. \end{cases}$$

Имеем

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{3}, \\ \sin x > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \sin x > 0. \end{cases}$$

*Ответ.*  $x = \arccos \frac{1}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

**3.21.** Решить уравнение

$$\log_{1+x+\sin x}(x^2 + x - 1) = \log_{1+x+\sin x}(3x + 2).$$

*Решение.* Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 + x - 1 = 3x + 2, \\ 1 + x + \sin x > 0, \\ x + \sin x \neq 0, \\ 3x + 2 > 0. \end{cases}$$

Уравнение-следствие имеет два корня  $x = -1$  или  $x = 3$ . Легко проверить, что при  $x = -1$  основание логарифма отрицательно, а  $x = 3$  удовлетворяет всем неравенствам системы.

*Ответ.*  $x = 3$ .

## Б. Умножение на выражение с переменной.

Иногда бывает выгодно умножить обе части уравнения на какое-то выражение. Попробуем разобраться в последствиях такой операции. Итак, мы от уравнения  $f(x) = g(x)$  перешли к уравнению  $f(x)\varphi(x) = g(x)\varphi(x)$ . Если область определения функции  $f$  уже области определения исходного уравнения ( $D(\varphi) \subset D(f) \cap D(g)$ ), то возможна потеря корня (подробно о потере корней будет рассказано в следующем параграфе). Если  $D(\varphi) \supseteq D(f) \cap D(g)$ , то множество корней исходного уравнения может расширяться за счет корней уравнения  $\varphi(x) = 0$ . Сразу заметим, что в этом случае умножение на выражение с переменной не всегда ведет к

появлению посторонних корней. Во-первых, уравнение  $\varphi(x) = 0$  вообще может не иметь корней, во-вторых, если корни и есть, то они или могут не входить в область определения исходного уравнения, или содержаться среди корней уравнения  $f(x) = g(x)$ .

### 3.22. Решить уравнение

$$(\sqrt{1+x} + 1)(\sqrt{1+x} + 2x - 5) = x.$$

*Решение.* Использование в данном примере традиционных приемов решения иррациональных уравнений к успеху не приведет (в этом читатель может убедиться самостоятельно). Здесь нужна идея. Умножим обе части уравнения на выражение  $\sqrt{1+x} - 1$ . Естественно, получим уравнение-следствие

$$x(\sqrt{1+x} + 2x - 5) = x(\sqrt{x+1} - 1).$$

Это уравнение равносильно совокупности

$$\begin{cases} x = 0, \\ \sqrt{1+x} + 2x - 5 = \sqrt{x+1} - 1. \end{cases}$$

Решим второе уравнение совокупности. Его следствием будет  $2x - 5 = -1$ . Отсюда  $x = 2$ .

Осталось произвести проверку. Ей подвергнем значения  $x = 2$ ,  $x = 0$ .

Легко убедиться, что первый корень подходит, а второй — нет.

*Ответ.*  $x = 2$ .

Прежде, чем приступить к разбору следующего примера, отметим, что выражение  $\sqrt{1+x} - 1$  обращается в нуль при  $x = 0$ . Именно это значение и оказалось посторонним корнем.

### 3.23. Решить уравнение

$$\sqrt{2x^2 + 3x + 5} + \sqrt{2x^2 - 3x + 5} = 3x.$$

*Решение.* Воспользуемся идеей решения предыдущего уравнения: умножим обе части уравнения на выражение  $\sqrt{2x^2 + 3x + 5} - \sqrt{2x^2 - 3x + 5}$ . Имеем уравнение-следствие

$$6x = 3x \left( \sqrt{2x^2 + 3x + 5} - \sqrt{2x^2 - 3x + 5} \right).$$

Отсюда

$$\begin{cases} x = 0, \\ \sqrt{2x^2 + 3x + 5} - \sqrt{2x^2 - 3x + 5} = 2. \end{cases}$$

Не будем спешить возводить второе уравнение совокупности в квадрат. Здесь выгодней его почленно сложить с исходным уравнением. Получим

$$2\sqrt{2x^2 + 3x + 5} = 2 + 3x.$$

Опять переходим к следствию

$$8x^2 + 12x + 20 = 4 + 12x + 9x^2.$$

Отсюда  $x = \pm 4$ .

Проверка покажет, что из корней  $x = 0$ ,  $x = \pm 4$  первоначальному уравнению удовлетворяет только  $x = 4$ .

*Ответ.*  $x = 4$ .

**3.24.** Решить уравнение  $8 \cos x \cos 2x \cos 4x = 1$ .

*Решение.* Если бы в левой части стоял еще множитель  $\sin x$ , то нам удалось бы легко преобразовать это уравнение в простейшее. Поэтому оправдано умножить обе части исходного уравнения на  $\sin x$ . Получим уравнение-следствие  $\sin 8x = \sin x$ . Отсюда

$$\begin{cases} \sin \frac{7x}{2} = 0, \\ \cos \frac{9x}{2} = 0, \\ x = \frac{2\pi k}{7}, \\ x = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{9}, \text{ где } n \text{ и } k \text{ — целые.} \end{cases}$$

Поскольку среди корней исходного уравнения не содержатся корни уравнения  $\sin x = 0$  (это можно проверить, подставив  $x = \pi m$ ,  $m \in Z$ , в данное уравнение), то из полученной серии следует исключить все числа вида  $\pi m$ , где  $m \in Z$ .

Сразу видно, что  $k$  может принимать все целые значения, кроме вида  $7p$ , где  $p \in Z$ .

Пусть  $\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{9} = \pi m$ . Отсюда  $1 + 2n = 9m$ . Если  $m$  — четное, то полученное равенство противоречиво; если  $m$  — нечетно, т. е.  $m = 2t + 1$ ,  $t \in Z$ , то получим  $1 + 2n = 18t + 9$ ,  $n = 9t + 4$ . Таким образом, возникло ограничение  $n \neq 9t + 4$ .

*Ответ.*  $x = \frac{2\pi k}{7}$  или  $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{9}$ , где  $k$  и  $n$  — целые, причем  $k \neq 7p$ ,  $n \neq 9t + 4$ ,  $p$  и  $t$  — целые.

## В. Применение немонотонной функции.

Наверное, многим известно, что возвведение обеих частей уравнения в четную степень может привести к появлению посторонних корней. Подчеркнем, что это преобразование именно может, но не всегда порождает посторонние корни (см. пример в начале параграфа). С чем же это связано? Ответ на этот вопрос содержится в решении более общей задачи. Сформулируем ее.

Дано уравнение  $f(x) = g(x)$ . В ходе его решения возникла необходимость «взять» функцию  $\varphi$  от обеих частей, иными словами, перейти к уравнению  $\varphi(f(x)) = \varphi(g(x))$ . Как такая операция повлияет на множество корней исходного уравнения? (Фактически возведение обеих частей уравнения в степень — это частный случай только что указанного преобразования, когда  $\varphi$  — степенная функция.)

Во-первых, этот переход, как минимум, не расширяет область определения первоначального уравнения, поэтому в случае сужения возможна потеря корня. (Например, замена уравнения  $x^2 - 2 = x$  на уравнение  $\sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{x}$  ведет к потере корня  $x = -1$ .) Во-вторых, даже при сохранении области определения можно приобрести посторонние корни. (Например, переход от уравнения  $x = 2x - 1$  к уравнению  $\sin x = \sin(2x - 1)$ .) В-третьих, можно не изменить множество корней. (Например, уравнения  $x = 2x - 1$  и  $2^x = 2^{2x-1}$  — равносильны.)

Теперь становится совершенно очевидным, что ответ на поставленный вопрос зависит от свойств функции  $\varphi$ . А именно:

**Теорема.** Если при всех значениях  $x \in G$  обе части уравнения  $f(x) = g(x)$  принимают значения, принадлежащие множеству  $M$ , на котором функция  $\varphi$  строго монотонна, то уравнение  $\varphi(f(x)) = \varphi(g(x))$  равносильно исходному на множестве  $G$ .

Мы не будем приводить доказательство этой теоремы (его структура ничем не отличается от доказательства теорем такого рода). Нам здесь вполне достаточно понять ее содержание на уровне здравого смысла.

Итак, главное заключается в том, что если при  $x = \alpha$   $f(\alpha) \neq g(\alpha)$ , то для немонотонной функции  $\varphi$  возможна ситуация, когда  $\varphi(f(\alpha)) = \varphi(g(\alpha))$ , т. е.  $\alpha$  становится посторонним корнем. Понятно, что если  $\varphi$  — монотонная функция, то такого не произойдет.

Вновь вернемся к тривиальному примеру  $\sqrt{x} = 1$ . На множестве  $G = [0, \infty)$  обе части этого уравнения неотрицательны. А как раз квадратичная функция  $\varphi(t) = t^2$  возрастает на  $G$ . Поэтому рассматриваемое уравнение равносильно уравнению  $(\sqrt{x})^2 = 1$  на множестве  $G$ . Последнее, в свою очередь, равносильно  $x = 1$ .

Теперь становится понятным, почему, например, операция возвведения обеих частей уравнения в нечетную степень относится к классу безопасных (функция  $y = x^n$ , где  $n$  — нечетное, натуральное, — монотонная). Вообще, теорему о возведении обеих частей уравнения в натуральную степень читатель может найти в приложении.

Подытожим сказанное. Важно помнить, что «взятие» от обеих частей уравнения немонотонной функции может привести к приобретению посторонних корней (кстати, может произойти и потеря корней, если сужается область определения, например, переход от уравнения  $x^2 = x$  к уравнению  $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}$  ведет к потере корня  $x = 0$ ). Равносильность такого перехода гарантирует сформулированная выше теорема, но (!) равносильность на определенном множестве  $G$ . Поэтому применение теоремы становится наиболее эффективным, если вне  $G$  нет корней (например,  $G$  — область определения уравнения).

### 3.25. Решить уравнение $\sqrt{10x - 1} - \sqrt{x + 3} = 1$ .

*Решение.* Очевидно, что обе части этого уравнения следует возвести в квадрат, т.е. применить немонотонную функцию, не сужающую область определения данного уравнения. Эта операция приведет к уравнению-следствию  $11x + 2 - 2\sqrt{10x - 1} \cdot \sqrt{x + 3} = 1$ . Удобно переписать полученное уравнение так:

$$2\sqrt{10x - 1} \cdot \sqrt{x + 3} = 11x + 1.$$

Снова переходим к следствию, возведя обе части последнего уравнения в квадрат. Имеем

$$4(10x^2 + 29x - 3) = 121x^2 + 22x + 1.$$

Отсюда  $81x^2 - 94x + 13 = 0$ . Это уравнение имеет два корня  $x = 1$ ,  $x = \frac{13}{81}$ . Понятно, что описанное решение должно быть завершено проверкой. Она покажет следующий

*Ответ.*  $x = 1$ .

Сделаем одно замечание. Посторонний корень  $x = \frac{13}{81}$  входит в область определения исходного уравнения. Это означает, что его появление «спровоцировано» не расширением области определения, а применением немонотонной функции.

На следующем примере покажем, как решать иррациональные уравнения методом равносильных переходов.

**3.26.** Решить уравнение  $\sqrt{3x + 5} - \sqrt{x - 1} = 4$ .

*Решение.* Перепишем данное уравнение так:

$$\sqrt{3x + 5} = \sqrt{x - 1} + 4$$

На множестве  $G = [1, \infty)$  — область определения исходного уравнения — обе части последнего уравнения (впрочем, как и первоначального) принимают неотрицательные значения, т. е. значения из промежутка, на котором квадратичная функция  $\varphi(t) = t^2$  монотонна. Следовательно, на множестве  $G$  исходное уравнение равносильно такому:

$$(\sqrt{3x + 5})^2 = (\sqrt{x - 1} + 4)^2.$$

Удобно этот результат сформулировать так: исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3x + 5 = x - 1 + 16 + 8\sqrt{x - 1}, \\ x \in G. \end{cases}$$

Впрочем, наличие в уравнении системы выражения  $\sqrt{x - 1}$  позволяет не подключать ограничение  $x \in G$ . (Обратим внимание, что отсутствие необходимости в требовании  $x \in G$  на этом этапе решения связано с особенностями конкретного уравнения и не является закономерным фактом.)

Итак, исходное уравнение равносильно такому:

$$4\sqrt{x - 1} = x - 5.$$

На множестве  $H = [5; \infty)$  обе части этого уравнения принимают неотрицательные значения. Следовательно, последнее уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 16x - 16 = x^2 - 10x + 25, \\ x \geq 5. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 13 + 8\sqrt{2}, \\ x = 13 - 8\sqrt{2}, \end{cases} \\ x \geq 5. \end{cases}$$

*Ответ.*  $x = 13 + 8\sqrt{2}$ .

Заметим, что при решении этого уравнения можно было, как говорится, не мудрить, а попросту, как в предыдущем примере, два раза возвести в квадрат, получить квадратное уравнение, а затем сделать проверку. Однако вряд ли проверка найденных корней доставила бы читателю удовольствие.

3.27. Решить уравнение  $\sqrt{2x - 5} + \sqrt{x + 2} = \sqrt{2x + 1}$ .

*Решение.* На области определения  $G = \left[\frac{5}{2}; \infty\right)$  обе части уравнения принимают неотрицательные значения. Поэтому данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3x - 3 + 2\sqrt{2x - 5} \cdot \sqrt{x + 2} = 2x + 1, \\ x \geq \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} 2\sqrt{2x - 5} \cdot \sqrt{x + 2} = -x + 4, \\ x \geq \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Обе части уравнения системы принимают неотрицательные значения на множестве  $H = \left[\frac{5}{2}; 4\right] \subset G$ . Следовательно, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 8x^2 - 4x - 40 = x^2 - 8x + 16, \\ \frac{5}{2} \leq x \leq 4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x^2 + 4x - 56 = 0, \\ \frac{5}{2} \leq x \leq 4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-2 - 6\sqrt{11}}{7}, \\ x = \frac{-2 + 6\sqrt{11}}{7}, \\ \frac{5}{2} \leq x \leq 4. \end{cases}$$

*Ответ.*  $x = \frac{-2 + 6\sqrt{11}}{7}$ .

3.28. Решить уравнение  $\arccos(x\sqrt{3}) + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ .

*Решение.* Заметим, что при  $x \leq 0$  левая часть уравнения больше правой. Поэтому достаточно ограничиться случаем, когда  $x > 0$ . Имеем  $\arccos(x\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2} - \arccos x$ . Это уравнение еще равносильно исходному. Теперь запишем следствие

$$\cos(\arccos(x\sqrt{3})) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right),$$

$$x\sqrt{3} = \sin(\arccos x).$$

Легко показать, что при  $0 \leq x \leq 1$   $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$ . Тогда получаем, что уравнение  $x\sqrt{3} = \sqrt{1 - x^2}$  является следствием первоначального. Оно, в свою очередь, равносильно системе

$$\begin{cases} 3x^2 = 1 - x^2, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Отсюда  $x = \frac{1}{2}$ . Полученный корень, естественно, подлежит проверке. Она дает такой

*Ответ.*  $x = \frac{1}{2}$ .

3.29. Решить уравнение  $\arcsin 2x + \arcsin x = \frac{\pi}{3}$ .

*Решение.* Это уравнение выгодно переписать так:

$$\arcsin 2x = \frac{\pi}{3} - \arcsin x. \quad (*)$$

Его следствием будет уравнение

$$\sin(\arcsin 2x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \arcsin x\right).$$

$$\text{Отсюда } 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}x, \quad 5x = \sqrt{3-3x^2}.$$

Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 25x^2 = 3 - 3x^2, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Решив систему, получим  $x = \sqrt{\frac{3}{28}}$ . Понятно, что «любовь» проверка такого корня — работа не из легких. Покажем, как можно обойти технические трудности.

Поскольку  $x_0 = \sqrt{\frac{3}{28}} < \frac{1}{2}$ , то при  $x = x_0$  обе части уравнения (\*) принимают значения из промежутка  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ , причем в ходе решения было установлено, что  $\sin(\arcsin 2x_0) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \arcsin x_0\right)$ . Следовательно, учитывая то, что функция  $y = \sin x$  возрастает на  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ , получаем

$\arcsin 2x_0 = \frac{\pi}{3} - \arcsin x_0$ . А это и означает, что  $x = \sqrt{\frac{3}{28}}$  является корнем исходного уравнения.

$$\text{Ответ. } x = \sqrt{\frac{3}{28}}.$$

3.30. Решить уравнение

$$\arcsin(1 + 2\cos x) + \arccos(1 + 3\tg x) = \frac{\pi}{2}.$$

*Решение.* Имеем

$$\arcsin(1 + 2\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(1 + 3\tg x). \quad \text{Переходим к}$$

следствию

$$\sin(\arcsin(1 + 2\cos x)) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(1 + 3\tg x)\right).$$

Отсюда  $1 + 2\cos x = 1 + 3\tg x$ . Далее

$$2 \cos^2 x = 3 \sin x,$$

$$2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно  $\sin x$ , получим  $\sin x = \frac{1}{2}$ , т. е.  $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

Для проверки полученное множество корней удобно разбить на два подмножества

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \text{ } n \text{ и } k \text{ -- целые.} \end{cases}$$

Нетрудно обнаружить, что первая серия вообще не входит в область определения исходного уравнения. Вторая же этому уравнению удовлетворяет.

Ответ.  $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

### Упражнения.

Решить уравнения (3.31–3.83):

$$3.31. \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x^2-2x} = \frac{8}{x^3-4x}.$$

$$3.32. \frac{2}{x^2+5x} + \frac{3}{2x-10} = \frac{15}{x^2-25}.$$

$$3.33. \frac{2 - 3 \sin x - \cos 2x}{6x^2 - \pi x - \pi^2} = 0.$$

$$3.34. \frac{2 \sin^2 x + 3\sqrt{2} \sin x - \sin 2x + 1}{2 \sin x \cos x + 1} = -1.$$

$$3.35. \frac{\sqrt{3} + \sin 2x + 3 \cos x}{1 + 2 \sin x} = -\sqrt{3} + \cos x.$$

$$3.36. \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin 2x} = \frac{1}{\sin 4x}.$$

$$3.37. \frac{\operatorname{ctg} 4t}{\sin^2 t} + \frac{\operatorname{ctg} t}{\sin^2 4t} = 0.$$

$$3.38. (\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + 2 \operatorname{tg} 2x)(1 + \cos 3x) = 4 \sin 3x.$$

$$3.39. \frac{\log_2(9 - 2^x)}{3 - x} = 1.$$

- 3.40.  $\frac{\log_3 x^2}{\log_3(11x - 10)} = 1.$   
 3.41.  $\frac{x^2 - 7x + 6}{x - 6} = 5.$   
 3.42.  $\frac{1 - \cos x}{\sin x} + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = 0.$   
 3.43.  $\sin(3\pi - x) + \operatorname{tg}(\pi + x) = \frac{\cos^{-1} x - \cos x}{2 \sin x}.$   
 3.44.  $\frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \sin 2x - \cos 2x} + \sin x (1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \frac{x}{2}) = -2.$   
 3.45.  $\frac{3 \sin 4x + 2 \sin 2x}{3 \cos 4x + 2 \cos 2x + 3} + 2 \operatorname{tg} x = 0.$   
 3.46.  $\frac{\sin 2t + 2 \cos^2 t - 1}{\cos t - \cos 3t + \sin 3t - \sin t} = -2 \cos t \cos 2t.$   
 3.47.  $\frac{3(\cos 2x + \operatorname{ctg} 2x)}{\operatorname{ctg} 2x - \cos 2x} - 2(\sin 2x + 1) = 0.$   
 3.48.  $\frac{3(1 - \sin 3x)}{\sin x - \cos 2x} = 2 \cos 2x - 7.$   
 3.49.  $2 + \lg(x^2 + 4x + 4) - \lg(x^2 + 19) = 2\lg(2 + x).$   
 3.50.  $\log_2(4x^2 + 2x) = \log_{2x} x + \log_{2x} 2.$   
 3.51.  $\sin^4 x + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1 + 3 \cos^2 x \sin^4 x - \sin^2 x}{\sin^2 x}.$   
 3.52.  $2^{\log_2(x^2 - 4x + 3)} = x - 3.$   
 3.53.  $5^{-2 \log_{0.04}(3 - 4x^2)} + \frac{3}{2} \log_{\frac{3}{8}} 4^x = 0.$   
 3.54.  $\log_2(9 - 2^x) = 10^{\lg(3 - x)}.$   
 3.55.  $\lg(5 - x) + 2 \lg \sqrt{3 - x} = 1.$   
 3.56.  $\log_5(3x - 11) + \log_5(x - 27) = 3 + \log_5 8.$   
 3.57.  $\log_2(4 \cdot 3^x - 6) - \log_2(9^x - 6) = 1.$   
 3.58.  $\lg(x(x + 9)) + \lg \frac{x + 9}{x} = 0.$   
 3.59.  $\lg(\sqrt{3 + x} - 1) = \frac{2}{\log_{\sqrt{x}} 10}.$   
 3.60.  $x^2 \log_x 27 \cdot \log_9 x = x + 4.$   
 3.61.  $x \log_{x+1} 5 \cdot \log_{\sqrt[3]{1/3}}(x + 1) = \frac{x - 4}{x}.$   
 3.62.  $\cos 6x + \operatorname{tg}^2 x + \cos 6x \operatorname{tg}^2 x = 1.$

$$3.63. \begin{cases} \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} \frac{y-5}{2}, \\ 2x + 3 \log \frac{4x}{\pi} \sqrt[3]{\frac{\pi^2 x}{16}} = \frac{3}{4} \log \sqrt[4]{\frac{4x}{\pi}} \left( \frac{4x^2}{\pi} \right) - 4^{3 \log_8 \sqrt[4]{y}}. \end{cases}$$

$$3.64. 2\sqrt[3]{4} - 9\sqrt[3]{2} + 4 = 0.$$

$$3.65. \log_x \cos x = 0.$$

$$3.66. \log_5 \sin 2x = \log_3 \sqrt{\frac{\sin x}{5}}.$$

$$3.67. \log_{\sin 3x} (\cos x - \cos 2x) = 1.$$

$$3.68. \log_{\operatorname{tg} x} \left( \frac{1}{\cos^2 x} - \sin 2x + \cos 2x + \sqrt{3} \cos x - \sqrt{3} \sin x \right) = 2.$$

$$3.69. \log_{\frac{-x^2 - 6x}{10}} (\sin 3x + \sin x) = \log_{\frac{-x^2 - 6x}{10}} \sin 2x.$$

$$3.70. \sqrt{2 \sin x \sin 2x} = \sqrt{5 \cos x + 4 \sin 2x}.$$

$$3.71. \arcsin (3x^2 - x + 1) = \arcsin (9x - 2).$$

$$3.72. \sqrt{x^2 + 3x - 2} + \sqrt{x^2 - x + 1} = 4x - 3.$$

$$3.73. (\sqrt{x+1} + 1)(\sqrt{x+10} - 4) = x.$$

$$3.74. (\sqrt{x+1} + 1)(\sqrt{1+x} + x^2 + x - 7) = x.$$

$$3.75. \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{8} \cos 15x.$$

$$3.76. \sqrt{7 + 3x} = 4 - x.$$

$$3.77. \sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1} = 1.$$

$$3.78. 3\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2} = 7.$$

$$3.79. \operatorname{arctg} 2x + \operatorname{arctg} 3x = -\frac{3\pi}{4}.$$

$$3.80. \arcsin x = \operatorname{arcctg} x.$$

$$3.81. \arccos(2x-1) = 3 \arccos x.$$

$$3.82. \arcsin x + \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2}.$$

$$3.83. \arcsin \left( \frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg} x \right) + \arccos \left( \frac{6}{\pi} + \operatorname{tg} x \right) = \frac{\pi}{2}.$$

## § 4. Как корни не потерять

В предыдущем параграфе, говоря о причинах появления посторонних корней, мы не смогли «обойти» проблему потери решений. И это естественно. Ведь если при переходе от первого уравнения ко второму возникают посторонние корни, то «обратный ход» ведет к их потере. Пользуясь этими соображениями, несложно установить основные причины потери корней.

1. Расширение области определения уравнения может привести к появлению посторонних корней. Значит, ее сужение — возможная причина их потери.

2. В результате умножения обеих частей уравнения на выражение с переменной порой возникают посторонние корни. Следовательно, деление может привести к потере корней.

3. «Взятие» от обеих частей уравнения немонотонной функции  $f$  может дать посторонние корни. Тогда ее «исчезновение» в уравнении  $f(g(x)) = f(\varphi(x))$  — это еще одна причина потери корней.

Из трех вышеперечисленных причин мы подвергнем деятельности анализу только первую. Для того чтобы пояснить такой выбор, нам придется сделать замечание общего характера.

Ошибки учащегося свидетельствуют об уровне понимания (непонимания) изучаемого материала. Поэтому не все ошибки абитуриентов предсказуемы. А следовательно, не для всякой ошибки можно организовать работу по ее профилактике. Так, если учащийся, решая уравнение  $\cos x = 1$ , пишет  $x = \frac{1}{\cos}$ , то вряд ли ему следует в настоящем сезоне (а может, и во всех последующих) подавать документы в вуз. По нашему мнению, подвергать анализу следует лишь ту ошибку, за которой стоит не полное незнание, а недопонимание изучаемого объекта.

Нам приходилось видеть, как учащиеся, решая уравнение  $x^2 = x$ , «сокращали» обе части на  $x$  и записывали ответ  $x = 1$ , теряя при этом корень  $x = 0$  (работает вторая причина). Не обделяли нас и такими перлами, как переход от уравнения  $\sin 2x = \sin x$  к уравнению  $2x = x$  (здесь потеряю корней обуславливает третья причина). Эти две ошибки имеют право на существование, более того, надо проводить целенаправленную работу по их устраниению. Однако это

следует делать на более ранней стадии, а не на последнем этапе подготовки в вуз. Поэтому в настоящем параграфе мы займемся профилактикой ошибок более «высокого уровня», связанных с потерей корней.

Сейчас в очередной раз возникла необходимость обратиться к упражнению 1.22 и конкретно к той его части, где рассмотрены преобразования, сужающие область определения выражения. При решении уравнений часто именно эти преобразования являются причиной потери корней. Покажем это на примерах.

В первую очередь обратимся к тем уравнениям, в которых есть необходимость преобразовывать выражения вида  $\sqrt{ab}$ , т. е. применять формулу корень из произведения. Понятно, что переход  $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$  ведет к сужению области определения (требование  $a \geq 0$  и  $b \geq 0$  более жесткое, чем ограничение  $ab \geq 0$ ). Следующий пример демонстрирует, как игнорирование этого факта ведет к потере корня.

4.1. Решить уравнение  $\sqrt{(x-1)^2(x-3)} = x-1$ .

*Решение.* Область определения этого уравнения есть множество  $M = \{1\} \cup [3; \infty)$ . Наверное, трудно не заметить, что  $x = 1$  — корень данного уравнения. Вместе с тем применение вышеупомянутой формулы приведет нас к уравнению

$$|x-1|\sqrt{x-3} = x-1.$$

Однако полученное уравнение не имеет своим корнем  $x = 1$  (он не входит в область определения). Причина ясна — сужение области определения исходного уравнения.

Покажем один из вариантов правильного решения.

Поскольку корень  $x = 1$  все же бросается в глаза, то этот факт можно использовать следующим образом. Исходное уравнение равносильно совокупности

$$\begin{cases} x = 1, \\ |x-1|\sqrt{x-3} = x-1. \end{cases}$$

Так как во втором уравнении совокупности  $x \geq 3$ , то оно равносильно такому:  $\sqrt{x-3} = 1$ . Отсюда  $x = 4$ .

*Ответ.*  $x = 1$  или  $x = 4$ .

Предложим читателю один совет. Пусть в ходе решения уравнения  $f(x) = g(x)$  мы перешли к уравнению  $f_1(x) = g_1(x)$  и при этом сузили область определения исходного уравнения ровно на множество  $M$ . Далее нам удалось ус-

становить, что любой элемент некоторого множества  $G \subseteq M$  — корень данного уравнения, причем в  $M$  больше корней нет. В таком случае бывает удобно записать, что уравнение  $f(x) = g(x)$  равносильно совокупности

$$\begin{cases} x \in G, \\ f_i(x) = g_i(x). \end{cases}$$

Наверное, мало кто сомневается, что хуже корни потерять, чем приобрести посторонние. Поэтому при работе с выражениями вида  $\sqrt{ab}$  можно применить следующую формулу:  $\sqrt{ab} = \sqrt{|a|}\sqrt{|b|}$ , которая, естественно, приведет к расширению области определения, но, во всяком случае, застрахует от потери корней.

$$4.2. \text{ Решить уравнение } \sqrt{x^2 - 1} = \left(\frac{1}{2}x + 1\right)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

*Решение.* Сразу заметим, что замена данного уравнения таким:  $\sqrt{x-1}\sqrt{x+1} = \left(\frac{1}{2}x + 1\right)\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$  ведет к потере корня  $x = -1$ . Обезопасим себя переходом к уравнению-следствию

$$\sqrt{|x-1|}\sqrt{|x+1|} = \left(\frac{1}{2}x + 1\right)\frac{\sqrt{|x+1|}}{\sqrt{|x-1|}}.$$

Это уравнение равносильно совокупности

$$\begin{cases} x = -1, \\ \sqrt{|x-1|} = \frac{1}{2}x + 1 \\ \sqrt{|x+1|} = \frac{1}{2}x + 1. \end{cases}$$

Решим второе уравнение совокупности. Имеем

$$(\sqrt{|x-1|})^2 = \frac{1}{2}x + 1,$$

$$|x-1| = \frac{1}{2}x + 1,$$

$$\begin{cases} x-1 = \frac{1}{2}x + 1, \\ x-1 = -\frac{1}{2}x - 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4, \\ x = 0. \end{cases}$$

Ясно, что такое решение следует завершить проверкой.  
Она даст следующий

*Ответ.*  $x = -1$  или  $x = 4$ .

Если теорему о корне из произведения применить так:

$$\sqrt{ab} = \begin{cases} \sqrt{a}\sqrt{b}, & \text{если } a \geq 0 \text{ и } b \geq 0; \\ \sqrt{-a}\sqrt{-b}, & \text{если } a \leq 0 \text{ и } b \leq 0, \end{cases}$$

то появляется возможность использовать метод равносильных переходов.

4.3. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 - y\sqrt{xy} = 36, \\ y^2 - x\sqrt{xy} = 72. \end{cases}$$

*Решение.* Если в двух предыдущих примерах нетрудно было заметить, что «вольное» обращение с выражением  $\sqrt{ab}$  приводило к потере корней, то в настоящей задаче такая опасность более «замаскирована». В то же время не трудно догадаться, что левые части уравнений системы следует разложить на множители, а это невозможно сделать, не применив теорему о корне из произведения.

Данная система равносильна совокупности двух систем.

a)

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ \sqrt{x}(\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3}) = 36, \\ \sqrt{y}(\sqrt{y^3} - \sqrt{x^3}) = 72. \end{cases}$$

Поскольку левые части уравнений системы имеют разные знаки (в крайнем случае могут принимать нулевые значения), то полученная система решений не имеет.

б)

$$\begin{cases} x \leq 0, \\ y \leq 0, \\ \sqrt{-x}(\sqrt{(-x)^3} + \sqrt{(-y)^3}) = 36, \\ \sqrt{-y}(\sqrt{(-y)^3} + \sqrt{(-x)^3}) = 72. \end{cases}$$

Отсюда  $\frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-y}} = \frac{1}{2}$ ,  $\sqrt{-y} = 2\sqrt{-x}$ . Применяя метод подстановки, получим  $\sqrt{x^4} = 4$ . А так как мы рассматриваем случай, когда  $x \leq 0$ , то можем записать  $x = -2$ . Значит,  $y = -8$ .

*Ответ.*  $(-2; -8)$ .

$$4.4. \text{ Решить уравнение } 1 + \log_6 \frac{x-1}{x+7} = \frac{1}{2} \log_6 (x-1)^2.$$

*Решение.* В этом примере можно совершить сразу два преобразования, каждое из которых может привести к потере корней. А именно,  $\log_6 \frac{x-1}{x+7} = \log_6(x-1) - \log_6(x+7)$  или  $\log_6(x-1)^2 = 2\log_6(x-1)$ . Не вызывает сомнений, что такие шаги ведут к сужению области определения уравнения. Поэтому нам выгодно первый логарифм вообще не трогать, а второй преобразовать так, чтобы сохранить неизменной область определения. Переходим к уравнению, равносильному данному:

$$1 + \log_6 \frac{x-1}{x+7} - \log_6 |x-1| = 0.$$

Вообще говоря, переход  $\lg a - \lg b = \lg \frac{a}{b}$  ведет к расширению области определения уравнения, однако в нашем случае применение этой формулы оставит ее неизменной.

Имеем уравнение, равносильное исходному:

$$\log_6 \frac{x-1}{(x+7)|x-1|} = -1.$$

Отсюда  $\frac{x-1}{(x+7)|x-1|} = \frac{1}{6}$ , причем этот переход тоже равносильный.

Это уравнение в свою очередь равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x > 1, \\ \frac{1}{x+7} = \frac{1}{6}, \end{cases}$$
  

$$\begin{cases} x < 1, \\ \frac{1}{x+7} = -\frac{1}{6}. \end{cases}$$

Решив эту совокупность, получим

*Ответ.*  $x = -13$ .

#### 4.5. Решить уравнение

$$\log_{0.5x} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x} \sqrt{x} = 0.$$

*Решение.* В решении этого примера можно идти двумя путями: перейти к основанию 2 или перейти к основанию

х. Первый путь технически более громоздкий, чем второй. Поэтому возникает соблазн заменить исходное уравнение следующим:

$$\frac{\log_x x^2}{\log_x 0,5 + \log_x x} - \frac{14 \log_x x^3}{\log_x 16 + \log_x x} + \frac{40 \log_x \sqrt{x}}{\log_x 4 + \log_x x} = 0.$$

Но именно такой шаг ведет к потере корня. Действительно, область определения исходного уравнения — это все положительные числа, кроме  $x = 2$ ,  $x = \frac{1}{16}$ ,  $x = \frac{1}{4}$ . Однако переход к основанию  $x$  ведет к сужению области определения еще на один элемент  $x = 1$ , который как раз и является корнем исходного уравнения (в этом легко убедиться). Поэтому, выбирая переход к основанию  $x$ , следует записать, что данное уравнение равносильно совокупности:

$$\begin{cases} x = 1, \\ \frac{2}{-\log_2 2 + 1} - \frac{42}{4\log_2 2 + 1} + \frac{20}{2\log_2 2 + 1} = 0. \end{cases}$$

Решим второе уравнение совокупности. Пусть  $\log_2 2 = t$ , тогда получим  $\frac{1}{1-t} - \frac{21}{4t+1} + \frac{10}{2t+1} = 0$ . После необходимых преобразований запишем:

$$\frac{2t^2 + 3t - 2}{(1-t)(4t+1)(2t+1)} = 0.$$

Несложно убедиться, что корнями этого уравнения будут  $t = \frac{1}{2}$  или  $t = -2$ . Отсюда, с учетом ограничений для  $x$ , устанавливаем, что  $x = 4$  или  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

*Ответ.*  $x = 1$ , или  $x = 4$ , или  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**4.6. Решить уравнение  $\sqrt{2}(1 + \cos x) = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ .**

*Решение.* Один из способов решения данного уравнения — это применение формулы  $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$ , которая по понятным причинам сузит область определения уравнения ровно на множество  $\pi + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Поэтому, выбрав такой путь решения, следует проверить, являются ли числа из

указанного множества корнями данного уравнения. Проверка покажет, что  $x = \pi + 2\pi k$  — корни исходного уравнения.

Итак, первоначальное уравнение равносильно совокупности

$$\begin{cases} x = \pi + 2\pi k, \\ \sqrt{2}(1 + \cos x) = \frac{1 + \cos x}{\sin x}. \end{cases}$$

Область определения второго уравнения совокупности позволяет нам утверждать, что оно равносильно такому:

$$\sqrt{2} = \frac{1}{\sin x}. \text{ Отсюда } x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

*Ответ.*  $x = \pi + 2\pi k$  или  $x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n$ , где  $n$  и  $k$  — целые.

Справедливости ради заметим, что, преобразовав исходное уравнение к такому виду:

$$2\sqrt{2}\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}},$$

мы обойдем неприятности, связанные с потерей корней.

4.7. Решить уравнение  $3\sin x - 2\cos x = 2$ .

*Решение.* Воспользуемся формулами

$$\sin x = \frac{2\tg \frac{x}{2}}{1 + \tg^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \tg^2 \frac{x}{2}}{1 + \tg^2 \frac{x}{2}},$$

предварительно проверив, являются ли  $x = \pi + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , (именно на это множество сужится область определения уравнения) корнями данного уравнения. После этого станет понятным, что исходное уравнение равносильно совокупности

$$\begin{cases} x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{6\tg \frac{x}{2}}{1 + \tg^2 \frac{x}{2}} - \frac{2 - 2\tg^2 \frac{x}{2}}{1 + \tg^2 \frac{x}{2}} = 2. \end{cases}$$

Преобразовав второе уравнение совокупности, получим  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{2}{3}$ . Отсюда  $x = 2 \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Объединим полученные результаты в

*Ответ.*  $x = \pi + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $x = 2 \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Обратим внимание читателя, что и для этого уравнения существует безопасный путь решения. Его надо преобразовать к однородному относительно  $\sin \frac{x}{2}$  и  $\cos \frac{x}{2}$ .

Имеем  $6 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 2(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}) = 2(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2})$ .

**4.8.** Решить уравнение  $\operatorname{tg} 2x + \sin 2x = \frac{16}{15} \operatorname{ctgx}$ .

*Решение.* Это уравнение, как и предыдущее, с помощью соответствующих формул удобно преобразовать к алгебраическому относительно  $\operatorname{tg} x$ .

Данное уравнение равносильно совокупности

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{16}{15 \operatorname{tg} x}. \end{cases}$$

После преобразований второе уравнение совокупности станет таким:  $4 \operatorname{tg}^4 x + 15 \operatorname{tg}^2 x - 4 = 0$ . Решив последнее уравнение как квадратное относительно  $\operatorname{tg}^2 x$ , получим

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n, \\ x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi m, m \text{ и } n \text{ — целые.} \end{cases}$$

*Ответ.*  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ , или  $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n$ , или  $x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi m$ ,  $m, n, k$  — целые.

**4.9.** Решить уравнение  $2 \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + x \right) + 5 \sqrt{3} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{3} + x \right) = -7$ .

*Решение.* Совершенно очевидно, что при решении этого уравнения следует применять формулу  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$ . Если область определения левой части этой формулы строится из ограничения  $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ , то для существования правой части следует еще потребовать, чтобы  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$ ,  $n$  и  $m$  — целые. Поэтому решение данного уравнения надо начать с проверки, являются ли  $x = \frac{\pi}{2} + \pi p, p \in \mathbb{Z}$ , корнями данного уравнения. Проверка даст утвердительный ответ. Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi p, p \in \mathbb{Z}, \\ \frac{2 + 2\operatorname{tg}x}{1 - \operatorname{tg}x} + \frac{5\sqrt{3}(\sqrt{3} + \operatorname{tg}x)}{1 - \sqrt{3}\operatorname{tg}x} = -7. \end{cases}$$

Упростим второе уравнение совокупности. Имеем  

$$2 + 2\operatorname{tg}x - 2\sqrt{3}\operatorname{tg}x - 2\sqrt{3}\operatorname{tg}^2x + 15 + 5\sqrt{3}\operatorname{tg}x - 15\operatorname{tg}x - 5\sqrt{3}\operatorname{tg}^2x =$$

$$= -7 + 7\sqrt{3}\operatorname{tg}x + 7\operatorname{tg}x - 7\sqrt{3}\operatorname{tg}^2x, 4\sqrt{3}\operatorname{tg}x + 20\operatorname{tg}x = 24.$$

Отсюда  $\operatorname{tg}x = \frac{6}{5 + \sqrt{3}} = \frac{3(5 - \sqrt{3})}{11}$ ,  $x = \operatorname{arctg} \frac{3(5 - \sqrt{3})}{11} + \pi l, l \in \mathbb{Z}$ .

*Ответ.*  $x = \frac{\pi}{2} + \pi p$  или  $x = \operatorname{arctg} \frac{3(5 - \sqrt{3})}{11} + \pi l$ ,  $p$  и  $l$  — целые.

Во всех предыдущих примерах причиной потери решений было использование тождества вида  $f(x) = g(x)$ , верных для всех  $x \in M$ , причем (и что самое важное)  $M = D(g) \subset D(f)$ . Вместе с тем применение тождества, в которых  $D(f) = D(g)$ , также может быть источником потери решений. Это возможно тогда, когда множество  $M$  (множество, на котором верно тождество) уже области определения выражения  $f(x)$ . Иными словами,  $M \subset D(f) = D(g)$ . Поясним сказанное на простом примере.

Если при решении уравнения  $\sqrt{x^2} = 1$  заменить выражение  $\sqrt{x^2}$  на  $x$ , то тем самым область определения уравнения не изменяется, но происходит потеря корня  $x = -1$ .

Что же служит потерей корня? Имеем  $f(x) = \sqrt{x^2}$ ,  $g(x) = x$ .  $D(f) = D(g) = R$ . Тождество  $f(x) = g(x)$  справедливо на множестве  $M = [0; \infty)$ . Следовательно,  $M \subset D(f) = D(g)$ , что и явилось причиной потери корня.

Сопоставив этот пример с ранее разобранными, попытаемся несколько обобщить причину потери корней, связанную с сужением области определения уравнения.

Пусть надо решить уравнение  $f(x) = 0$ . Выражение  $f(x)$  тождественно равно  $g(x)$  на каком-то множестве  $M$ . И если  $M \subset D(f)$ , то переход к уравнению  $g(x) = 0$  может привести к потере корней (впрочем, как и к приобретению посторонних).

В примерах 4.1–4.9 ситуация была таковой:  $M = D(f) \subset D(g)$ . Следующие два примера характерны тем, что  $D(f) = D(g)$ , а  $M \subset D(f)$ .

**4.10.** Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt[3]{x-y} = 6, \\ \sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^2} = 8. \end{cases}$$

*Решение.* Поскольку  $(x-y)^2 \geq 0$ , то переход  $\sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^2} = \sqrt[6]{(x+y)^3} \cdot \sqrt[6]{(x-y)^2}$  не изменяет область определения исходной системы. При всех допустимых  $x$  и  $y$   $\sqrt[6]{(x+y)^3} = \sqrt{x+y}$ , поэтому такое преобразование не влияет на равносильность. С первого взгляда представляется очень естественным аналогично упростить (сократив показатели) второй множитель, т. е. совершить преобразование  $\sqrt[6]{(x-y)^2} = \sqrt[3]{x-y}$ . Однако это равенство выполняется не для всех допустимых значений  $x$  и  $y$ , а лишь при  $x \geq y$ . Полученное ограничение ( $x \geq y$ ) может привести к потере решений. Но на самом деле  $\sqrt[6]{(x-y)^2} = \sqrt[3]{|x-y|}$ . Таким образом, исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt[3]{x-y} = 6, \\ \sqrt{x+y} \cdot \sqrt[3]{|x-y|} = 8, \end{cases}$$

которая, в свою очередь, равносильна совокупности двух систем.

a)

$$\begin{cases} x - y \geq 0, \\ \sqrt{x+y} + \sqrt[3]{x-y} = 6, \\ \sqrt{x+y} \cdot \sqrt[3]{x-y} = 8. \end{cases}$$

Обозначим  $\sqrt{x+y} = u$ ,  $\sqrt[3]{x-y} = v$ . Ясно, что  $u \geq 0$  и  $v \geq 0$ . Получаем систему

$$\begin{cases} u + v = 6, \\ uv = 8. \end{cases}$$

Легко убедиться, что эта система имеет два решения:

$$\begin{cases} u = 4, \\ v = 2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} u = 2, \\ v = 4. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} = 4, \\ \sqrt[3]{x-y} = 2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \sqrt{x+y} = 2, \\ \sqrt[3]{x-y} = 4 \end{cases}$$

Решив эти две системы, получим следующие пары значений  $x$  и  $y$ :  $(12; 4)$ ,  $(34; -30)$ .

б)

$$\begin{cases} x - y < 0, \\ \sqrt{x+y} + \sqrt[3]{x-y} = 6, \\ \sqrt{x+y} \cdot \sqrt[3]{x-y} = -8. \end{cases}$$

Для решения этой системы будем пользоваться теми же обозначениями, что и в случае а). Однако здесь  $u \geq 0$ ,  $v < 0$ . Имеем

$$\begin{cases} u + v = 6, \\ uv = -8. \end{cases}$$

Решением полученной системы будут пары  $(u, v)$ :  $(3 + \sqrt{17}, 3 - \sqrt{17})$ ,  $(3 - \sqrt{17}, 3 + \sqrt{17})$ . По понятным причинам вторая пара не подходит. Тогда можно записать

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} = 3 + \sqrt{17}, \\ \sqrt[3]{x-y} = 3 - \sqrt{17}. \end{cases}$$

Нетрудно установить, что решением этой системы будет пара  $(103 - 19\sqrt{17}; -77 + 25\sqrt{17})$ .

*Ответ.*  $(12; 4)$ ,  $(34; -30)$ ,  $(103 - 19\sqrt{17}; -77 + 25\sqrt{17})$ .

4.11. Решить систему

$$\begin{cases} 2\sqrt[3]{\frac{x}{y}} - 3\frac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt[3]{y}} = 2, \\ x - y = 63. \end{cases}$$

*Решение.* Разумеется, решение этой системы следует начать с упрощения дроби  $\frac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt[3]{y}}$ . Для этого нужно сделать

так, чтобы в числителе и в знаменателе стояли корни с одинаковыми показателями. Казалось бы, нет ничего проще, как записать, что  $\sqrt[3]{y} = \sqrt[6]{y^2}$ . Но это равенство справедливо лишь при  $y \geq 0$ . Следовательно, осуществление такого перехода неизбежно влечет за собой подключение ограничения  $y > 0$ , что в свою очередь приведет к поиску лишь положительных решений исходной системы.

Однако, на самом деле,

$$\sqrt[3]{y} = \begin{cases} \sqrt[6]{y^2}, & \text{если } y \geq 0, \\ -\sqrt[6]{y^2}, & \text{если } y < 0. \end{cases}$$

Поэтому исходная система равносильна совокупности двух систем.

a)

$$\begin{cases} y > 0, \\ 2 \sqrt[3]{\frac{x}{y}} - 3 \sqrt[6]{\frac{x}{y}} = 2, \\ x - y = 63. \end{cases}$$

Рассмотрев первое уравнение системы как квадратное относительно  $\sqrt[6]{\frac{x}{y}}$  и найдя его лишь положительный корень, получим  $\sqrt[6]{\frac{x}{y}} = 2$ . Отсюда уже легко найти решение системы. Это будет пара  $(64; 1)$ .

b)

$$\begin{cases} y < 0, \\ 2 \sqrt[3]{\frac{x}{y}} + 3 \sqrt[6]{\frac{x}{y}} = 2, \\ x - y = 63. \end{cases}$$

Предлагаем читателю убедиться самостоятельно, что решением этой системы будет пара  $(-1; -64)$ .

*Ответ.*  $(64; 1), (-1; -64)$ .

### Упражнения

Решить уравнения (4.12–4.28):

4.12.  $\sqrt{(x+4)^2(x-5)} = x+4$ .

$$4.13. 2\sqrt{x^2 - 9} = (x + 5)\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}.$$

$$4.14. 2\log_3(x-2) + \log_3(x-4)^2 = 0.$$

$$4.15. \log_{x+1}(x^2 + x - 6)^2 = 4.$$

$$4.16. \lg(x(x+9)) + \lg\left(\frac{x+9}{x}\right) = 0.$$

$$4.17. 2\log_8(2x) + \log_8(x^2 + 1 - 2x) = \frac{4}{3}.$$

$$4.18. \frac{3}{2}\log_{1/4}(x+2)^2 - 3 = \log_{1/4}(4-x)^3 + \log_{1/4}(x+6)^3.$$

$$4.19. \frac{1}{3}(\log_2(3x-4))^6 \log_2 x^3 = 8(\log_2 \sqrt{x})^2 + (\log_2(3x-4))^2.$$

$$4.20. \log_{3x}x^3 + \log_{\frac{3}{2}}x = 0.$$

$$4.21. 20\log_{4x}\sqrt{x} + 7\log_{16x}x^3 - 3\log_{\frac{3}{2}}x^2 = 0.$$

$$4.22. 2(1 - \cos 2x) = \operatorname{tg} x.$$

$$4.23. \operatorname{tg} 2x + \sin 2x = \frac{8}{3} \operatorname{ctg} x.$$

$$4.24. \operatorname{tg}\left(2x + \frac{5\pi}{3}\right) = 2 \operatorname{ctg} 2x + \frac{1}{3} \operatorname{ctg} \frac{13\pi}{6}.$$

$$4.25. \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{ctg} \frac{4\pi}{3} + 3 \operatorname{ctg} 2x.$$

$$4.26. \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4} + x\right) = 2 \cos \frac{2\pi}{3} - 5 \operatorname{ctg} x.$$

$$4.27. \operatorname{ctg} \frac{11\pi}{6} = \frac{2\operatorname{ctg} x + 3}{\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}.$$

$$4.28. \sqrt[3]{x+7} + \sqrt[6]{x^2 - 2x + 1} = 2.$$

## § 5. Если вы переходите к совокупности...

Хорошо, когда удается левую часть уравнения  $F(x) = 0$  (или неравенства  $F(x) \geq 0$ ) представить в виде произведения нескольких выражений. Как правило, этот шаг приносит пользу, поскольку появляется возможность обратиться к решению более простых уравнений (неравенств), объединенных в надлежащую совокупность. Однако именно на этом этапе решения абитуриенты допускают немало ошибок. О трех наиболее распространенных пойдет речь в настоящем параграфе.

### A. Решение уравнений вида $f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$ .

То, что высказывание  $ab = 0$  равносильно совокупности

$$\begin{cases} a = 0, \\ b = 0, \end{cases}$$

наверное, знает каждый. Многие считают, что так же обстоит дело и с уравнением  $f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$  (1), т.е. последнее равносильно совокупности

$$\begin{cases} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Однако это верно далеко не всегда. Так, например, решая уравнение  $(x - 2)\sqrt{x - 3} = 0$  переходом к совокупности

$$\begin{cases} x - 2 = 0, \\ \sqrt{x - 3} = 0, \end{cases}$$

мы приобретаем посторонний корень  $x = 2$ . В чем же дело? Следует ясно представлять себе, что при переходе к совокупности (2) может произойти расширение области определения исходного уравнения — причина появления посторонних корней. Впрочем, эти «проблемы» можно обойти, заметив, что уравнение (1), на самом деле, равносильно системе

$$\begin{cases} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0, \\ x \in D(f_1) \cap D(f_2). \end{cases}$$

Рассмотрим несколько характерных примеров.

### 5.1. Решить уравнение

$$\sqrt{x} \left( 9^{\sqrt{x^2 - 3}} - 3^{\sqrt{x^2 - 3}} \right) = 3^{2\sqrt{x^2 - 3} + 1} - 3^{\sqrt{x^2 - 3} + 1} + 6\sqrt{x} - 18.$$

*Решение.* Выполним очевидные преобразования:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} \left( 9^{\sqrt{x^2 - 3}} - 3^{\sqrt{x^2 - 3}} \right) &= 3 \left( 9^{\sqrt{x^2 - 3}} - 3^{\sqrt{x^2 - 3}} \right) + 6\sqrt{x} - 18, \\ (\sqrt{x} - 3) \left( 9^{\sqrt{x^2 - 3}} - 3^{\sqrt{x^2 - 3}} - 6 \right) &= 0. \end{aligned}$$

Легко установить, что область определения рассматриваемого уравнения — промежуток  $[\sqrt{3}; \infty)$ . Следовательно, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt{x} - 3 = 0, \\ 9^{\sqrt{x^2 - 3}} - 3^{\sqrt{x^2 - 3}} - 6 = 0, \\ x \geq \sqrt{3}. \end{cases}$$

$x = 9$  — корень первого уравнения совокупности. Рассмотрев второе как квадратное относительно  $\sqrt{x^2 - 3}$ , определяем, что  $x = \pm 2$  его корни. Заметим, что если мы бы не подключили ограничение  $x \geq \sqrt{3}$ , то в ответ попал бы посторонний корень  $x = -2$ , в то время как в действительности

*Ответ.*  $x = 9$  или  $x = 2$ .

### 5.2. Решить уравнение

$$\frac{4}{3} \cos^2 \frac{x}{2} (1 - \sqrt{\sin x}) = \sqrt{2 \cos x} - \sqrt{\sin 2x}.$$

*Решение.* Поскольку в данном уравнении  $\sin x \geq 0$  и  $\cos x \geq 0$ , то переход  $\sqrt{\sin 2x} = \sqrt{2 \cos x} \cdot \sqrt{\sin x}$  не изменит множество корней исходного уравнения. Тогда можно записать цепочку уравнений, равносильных данному:

$$\frac{4}{3} \cos^2 \frac{x}{2} (1 - \sqrt{\sin x}) = \sqrt{2 \cos x} (1 - \sqrt{\sin x}),$$

$$\frac{2}{3} (1 + \cos x) (1 - \sqrt{\sin x}) - \sqrt{2 \cos x} (1 - \sqrt{\sin x}) = 0,$$

$$(1 - \sqrt{\sin x}) \left( \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cos x - \sqrt{2 \cos x} \right) = 0.$$

Если теперь приравнять каждый множитель к нулю, т.е. перейти к надлежащей совокупности, то мы тем самым расширим область определения исходного уравнения (каждое из уравнений совокупности будет свободно от одного из ограничений  $\sin x \geq 0$  или  $\cos x \geq 0$ ). Поэтому следующим этапом решения должен стать переход к системе, равносильной первоначальному уравнению. Имеем

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \frac{2}{3} \cos x - \sqrt{2 \cos x} + \frac{2}{3} = 0, \\ \sin x \geq 0, \\ \cos x \geq 0. \end{cases}$$

Корнями первого уравнения совокупности будут все числа вида  $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , каждое из которых удовлетворяет полученной системе. Рассмотрев второе уравнение как квадратное относительно  $\sqrt{2 \cos x}$ , устанавливаем, что  $\cos x = \frac{1}{2}$ .

Отсюда  $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Но так как работает еще ограничение  $\sin x \geq 0$ , то получаем  $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ .

*Ответ.*  $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$  или  $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ ,  $n$  и  $k$  — целые.

**5.3. Решить уравнение  $(3^{\operatorname{ctg} x})^x \cdot 27^{\operatorname{ctg} x} = 9^{\operatorname{ctg} x}$ .**

*Решение.* Имеем

$$3^{8x^2 \operatorname{ctg} x + 15x \operatorname{ctg} x} = 3^{2x \operatorname{ctg} x},$$

$$\operatorname{ctg} x (8x^2 + 15x - 2) = 0.$$

Последнее уравнение, а значит и исходное, равносильно системе

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} x = 0, \\ 8x^2 + 15x - 2 = 0, \\ \pi x \neq \pi n, \text{ где } n \text{ — целое.} \end{cases}$$

Отсюда

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} + k, \\ x = \frac{1}{8}, \\ x = -2, \\ x \neq n, k \text{ и } n \text{ — целые.} \end{array} \right.$$

Благодаря тому, что мы бережно отнеслись к области определения исходного уравнения, в ответ не «просочится» посторонний корень  $x = -2$ .

*Ответ.*  $x = \frac{1}{2} + k$ ,  $k$  — целое, или  $x = \frac{1}{8}$ .

5.4. Решить уравнение  $\sqrt{\sin x - \frac{1}{2}} \cdot \log_3(x - 2) = 0$ .

*Решение.* Следующая система равносильна данному уравнению:

$$\left\{ \begin{array}{l} \log_3(x - 2) = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2}, \\ x > 2, \\ \sin x \geq \frac{1}{2}. \end{array} \right.$$

Корнем первого уравнения совокупности будет  $x = 3$ .

Поскольку  $\sin 3 < \frac{1}{2}$  (докажите это самостоятельно), то  $x = 3$  не является корнем исходного уравнения. Теперь осталось среди множества  $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , — корней второго уравнения совокупности — выбрать лишь те, которые удовлетворяют условию  $x > 2$ . Ясно, что для этого достаточно потребовать от  $n$  быть натуральным.

*Ответ.*  $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

## Б. Решение нестрогих неравенств.

Одним из способов решения неравенства  $f_1(x)f_2(x) > 0$  служит переход к совокупности

$$\begin{cases} f_1(x) > 0, \\ f_2(x) > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(x) < 0, \\ f_2(x) < 0. \end{cases}$$

В тех случаях, когда знак какого-либо множителя  $f_1$  или  $f_2$  известен, можно сократить работу, ограничившись рассмотрением лишь одной из систем совокупности. Так, например, для неравенства  $(x - 4)\sqrt{x^2 - 4x + 3} > 0$  достаточно решить систему

$$\begin{cases} x - 4 > 0, \\ \sqrt{x^2 - 4x + 3} > 0. \end{cases}$$

А уместна ли подобная «рационализация» при решении нестрогих неравенств  $f_1(x)f_2(x) \geq 0$ ? Испытаем это на только что разработанном примере, заменив знак  $>$  на  $\geq$ . Имеем  $(x - 4)\sqrt{x^2 - 4x + 3} \geq 0$ . И если решение этого неравенства свести к системе

$$\begin{cases} x - 4 \geq 0, \\ \sqrt{x^2 - 4x + 3} \geq 0, \end{cases}$$

то произойдет потеря решений  $x = 1$  и  $x = 3$ . И это понятно. Ведь при  $x = 1$  или  $x = 3$  второй множитель равен нулю. В таком случае знак первого множителя не играет роли, а система требует, чтобы он был неотрицательным.

Как же избежать подобных осложнений? Наиболее распространенный прием — это переход к совокупности

$$\begin{cases} f_1(x) \geq 0, \\ f_2(x) \geq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(x) \leq 0, \\ f_2(x) \leq 0. \end{cases}$$

Впрочем, часто бывает удобно обратиться и к такой совокупности:

$$\begin{cases} f_1(x)f_2(x) = 0, \\ f_1(x)f_2(x) > 0. \end{cases}$$

Перейдем к примерам.

**5.5.** Решить неравенство  $(1 + \sin x)(-x^2 + x + 6) \geq 0$ .

*Решение.* Очевидно  $1 + \sin x \geq 0$ . Но отсюда вовсе не следует, что далее надо совершить весьма распространенную ошибку, а именно, ограничиться лишь решением неравенства  $-x^2 + x + 6 \geq 0$ , потеряв при этом бесконечно много решений исходного неравенства, которые дает уравнение  $\sin x + 1 = 0$ . Переход к следующей совокупности оградит нас от подобных неприятностей.

Имеем

$$\begin{cases} (1 + \sin x)(-x^2 + x + 6) = 0, \\ (1 + \sin x)(-x^2 + x + 6) > 0. \end{cases}$$

Решив уравнение, получим  $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $n$  — целое,  $x = -2$ ,  $x = 3$ . Неравенство совокупности равносильно системе

$$\begin{cases} \sin x \neq -1, \\ x^2 - x - 6 < 0, \end{cases}$$

решением которой будет объединение промежутков  $(-2; -\frac{\pi}{2})$  и  $(-\frac{\pi}{2}; 3)$ .

*Ответ.*  $\left[-2; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; 3\right] \cup \left\{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}\right\}$ .

5.6. Решить неравенство  $\frac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1} \geq 0$ .

*Решение.* Сразу видно, что  $x = 5$  одно из решений. Обратим внимание, что при  $x = 5$  знаменатель принимает отрицательное значение. Поэтому если решение данного неравенства свести к системе

$$\begin{cases} \sqrt{x-5} \geq 0, \\ \log_{\sqrt{2}}(x-4) - 1 > 0, \end{cases}$$

то мы потеряем  $x = 5$ . Запишем совокупность, равносильную исходному неравенству.

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1} = 0, \\ \frac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1} > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5, \\ x > 5, \\ \log_{\sqrt{2}}(x - 4) > 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5, \\ x > 5, \\ x > 4 + \sqrt{2}. \end{cases}$$

*Ответ.*  $x = 5$  или  $x > 4 + \sqrt{2}$ .

**5.7.** Решить неравенство

$$\sqrt{-x^2 + 7x - 10} \log_2(x - 3) \leq 0.$$

*Решение.* Запишем

$$\begin{cases} \sqrt{-x^2 + 7x - 10} \log_2(x - 3) = 0, \\ \sqrt{-x^2 + 7x - 10} \log_2(x - 3) < 0. \end{cases}$$

Здесь мы ограничимся только ответом, предлагая читателю провести дальнейшее решение самостоятельно. Отметим лишь, что уравнение совокупности можно рассматривать как одно из упражнений к пункту А.

*Ответ.*  $(3; 4) \cup \{5\}$ .

## В. Сколько корней имеет уравнение?

Выделим еще один тип задач, в которых требуется определить число корней уравнения вида  $f_1(x)f_2(x) = 0$ . Нередко при решении подобных примеров абитуриенты поступают следующим образом: переходя к совокупности, определяют отдельно число корней каждого из уравнений  $f_1(x) = 0$  и  $f_2(x) = 0$ , затем складывают полученные результаты. Но ведь нет никаких гарантий, что некоторые корни уравнений совокупности не совпадут. Поэтому решающему не следует исключать такую возможность, а стараться держать ее в поле зрения.

Проиллюстрируем сказанное на примерах.

**5.8.** Определить число корней уравнения

$$5\sin 2x - 8\tan x - 5\cos^2 x + 4 = 0$$

на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

*Решение.* Легко получить из данного уравнения следующее:

$$5\cos^2x(2\tgx - 1) - 4(2\tgx - 1) = 0. \text{ Отсюда}$$

$$(2\tgx - 1)(5\cos^2x - 4) = 0,$$

$$\begin{cases} \tg x = \frac{1}{2}, \\ \cos 2x = \frac{3}{5}. \end{cases}$$

Заданному промежутку принадлежит лишь один корень первого уравнения  $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$  и два корня второго уравнения

$x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{3}{5}$ . С первого взгляда представляется естественным считать ответом число 3. Однако более внимательный анализ показывает, что  $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \arccos \frac{3}{5}$  (проверьте!).

Тогда мы получим такой

*Ответ.* 2.

Справедливости ради заметим, что, выразив в исходном уравнении  $\sin 2x$  и  $\cos^2 x$  через  $\tg x$ , мы практически исключим возможность попадания в «ловушку». Однако «внешность» данного уравнения не указывает на то, что второй способ предпочтительней первого. Это выясняется лишь на завершающей стадии. Поэтому выбор пути решения скорее всего связан с везением, чем с заранее продуманной стратегией.

**5.9.** Сколько различных корней имеет уравнение

$$\cos x \operatorname{ctgx} - \sin x = a \cos 2x \text{ на отрезке } [0, 2\pi]?$$

*Решение.* После преобразования левой части получим

$$\frac{\cos 2x}{\sin x} = a \cos 2x.$$

Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos 2x = 0, \\ \frac{1}{\sin x} = a, \\ \sin x \neq 0. \end{cases}$$

Первое уравнение на отрезке  $[0; 2\pi]$  имеет четыре корня  $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ . Второе при  $|a| < 1$  вообще корней не имеет.

Если  $|a| = 1$ , то очевидно, на рассматриваемом промежутке

уравнение  $\frac{1}{\sin x} = a$  имеет только один корень. Если

$|a| > 1$ , то, переходя к уравнению  $\sin x = \frac{1}{a}$ , получим, что на  $[0; 2\pi]$  оно имеет два корня. Итак, ответ... Но при этом следует подметить, что при  $a = \pm \sqrt{2}$  корни второго уравнения совокупности содержатся среди корней первого.

*Ответ.* Если  $|a| < 1$  или  $a = \pm \sqrt{2}$ , то уравнение имеет четыре корня; если  $|a| = 1$ , то корней — пять; если  $|a| > 1$  и  $a \neq \pm \sqrt{2}$ , то корней шесть.

**5.10.** Сколько различных решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ (y - ax)(y - a\sqrt{2}) = 0 \end{cases}$$

в зависимости от значений параметра  $a$ ?

*Решение.* Запишем совокупность систем, равносильную данной. Имеем

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ y = ax \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ y = a\sqrt{2}. \end{cases}$$

Обратившись к графической интерпретации (рис. 3), увидим, что первая система совокупности имеет два решения

при любом  $a$ . Тот же рисунок поможет определить число решений второй системы. Имеем: при  $|a| > 2$  — нет решений, при  $|a| = 2$  — одно решение,  $|a| < 2$  — два решения.

Здесь снова надо быть внимательным и заметить (опять-таки благодаря рисунку), что при  $a = \sqrt{3}$ , или  $a = -\sqrt{3}$ , или  $a = 0$  прямые  $y = ax$  и  $y = a\sqrt{2}$  пересекаются в точках, лежащих на окружности  $x^2 + y^2 = 8$ . Понятно, что этот факт внесет корректировку в ответ.

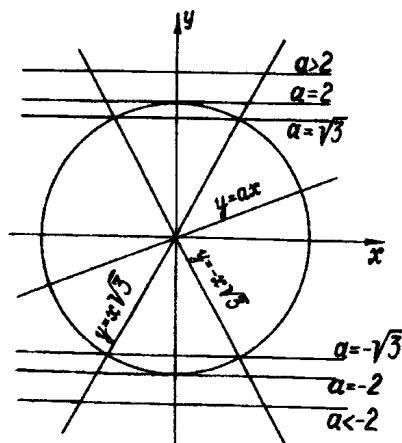


Рис. 3.

*Ответ.* Если  $|a| > 2$  или  $a = 0$ , то решений два; если  $|a| = 2$  или  $|a| = \sqrt{3}$ , то решений три; если  $-2 < a < -\sqrt{3}$ , или  $-\sqrt{3} < a < 0$ , или  $0 < a < \sqrt{3}$ , или  $\sqrt{3} < a < 2$ , то решений четыре.

## Упражнения

Решить уравнение (5.11–5.17):

5.11.  $\sqrt{9 - x^2} (2\sin 2\pi x + 5\cos \pi x) = 0.$

5.12.  $\sqrt{49 - 4x^2} (\sin \pi x + 3\cos \frac{\pi x}{2}) = 0.$

5.13.  $(x + 1)\sqrt{x^2 + x - 2} = 2x + 2.$

5.14.  $x^2 \cdot 3^{x-2} + 3^{\sqrt{x}+2} = 3^x + x^2 \cdot 3^{\sqrt{x}}.$

5.15.  $\log_3(4 - x) \log_{4-2x}(1 - x)(2 - x) = \log_3(4 - x).$

5.16.  $(\log_2 \frac{1}{3-x}) \sqrt{\operatorname{tg} x + 1} = 0.$

5.17.  $(3 + 5 \cos 2x) (2 - 4 \sin x + \sqrt{3 - 2 \cos 2x + 5 \sin x}) = 0.$

5.18. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\sin x} \cos y = 0, \\ 2\sin^2 x - \cos 2y - 2 = 0. \end{cases}$$

Решить неравенство (5.19–5.24.):

5.19.  $(2^x - 2) \sqrt{-x^2 + x + 6} \geq 0.$

5.20.  $\sqrt{x^2 - 7,5x + 14} \log_2|x - 3| \leq 0.$

5.21.  $\sqrt{4 - x^2} \left( \log_3 \frac{x+1}{x} + 2 \right) \leq 0.$

5.22.  $(x^2 - 2,8x + 1,8) \sqrt{\log_{1/5}|x - 2|} \geq 0.$

5.23.  $\frac{(\log_{\sqrt{2}}(x - 3))^2}{x^2 - 4x - 5} \geq 0.$

5.24.  $\sqrt{5 + 9x - 2x^2} (\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x) \leq 0.$

5.25. Определить число корней уравнения

$$10 \sin^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 15 \sin 2x + 9 = 0$$

на отрезке  $[0; \frac{\pi}{2}]$ .

5.26. Сколько корней на отрезке  $[-2; 2]$  имеет уравнение

$$(2x^2 - x - 6) \cos \pi x = 0?$$

**5.27.** Определить количество корней уравнения  $4^x - (a + 3)2^x + 4a - 4 = 0$  в зависимости от значений параметра  $a$ .

**5.28.** На координатной плоскости изобразить множество пар  $(a; b)$ , для каждой из которых уравнение  $(x^2 - (a + b)x + 1)(x^2 - (a - b)x + 1) = 0$  имеет четыре различных действительных корня.

## § 6. Казалось бы, решение завершено...

Вступительный экзамен — это своего рода борьба, соревнование. Побеждать должны сильнейшие, т. е. те, кто обладает мастерством. Как нам кажется, мастерство абитуриента складывается из двух компонентов: прочные знания плюс уверенность. Без последнего качества одержать победу очень сложно, а порой просто невозможно. Но это, конечно, идеальная модель, к которой должен стремиться каждый учащийся.

Уверенность абитуриента в своих действиях особенно важна на последнем этапе решения задачи, т. е. тогда, когда следует подытожить работу — записать ответ. Наверное, каждому из нас приходилось сталкиваться с такой ситуацией. Решение задачи завершено, найден ответ. Более того, проверка показывает, что полученный результат удовлетворяет всем требованиям задачи. Казалось бы, чего еще желать? А на поверку оказывается, что задача решена не полностью, не разобраны все случаи, а значит, полученный ответ, будучи неполным, неверный.

Банальный пример. Решая уравнение  $x^2 = 1$ , учащийся дает ответ  $x = 1$ . Этот корень удовлетворяет исходному уравнению, но это не спасает, так как полученный ответ неполный, а следовательно, неверный. Правда, надо «уметь» не заметить еще корень  $x = -1$ . Однако есть немало задач, где второе, третье и т. д. решения глубоко замаскированы и не сразу бросаются в глаза. Такие задачи относятся к классу наиболее сложных, коварных, а поэтому самых неприятных для абитуриентов.

Как научиться видеть, что решение данной задачи требует рассмотрения нескольких случаев, а не «хвататься» лишь за разбор того, который лежит на поверхности? Признаемся, для нас этот вопрос чрезвычайно сложный. И мы не можем предложить читателю полный список конкретных рекомендаций, следование которым могло бы застраховать абитуриента от неполных решений. Это связано, прежде всего, с тем, что «замаскированность двойного дна» в первую очередь зависит от особенностей конкретной задачи, и помочь его обнаружить может опыт, интуиция, сообразительность.

Чтобы научиться читать, надо читать, чтобы научиться решать коварные задачи, надо именно их решать. Вот и вся премудрость. В настоящем параграфе читатель в достаточном количестве найдет для себя задачи такого рода. И, может быть, работа с ними поможет абитуриенту развить чрезвычайно важное качество — *умение проверки решения задачи на полноту*. (Кстати, с некоторыми примерами подобного класса мы сталкивались в предыдущих параграфах.)

В заключение мы не можем устоять от соблазна дать один общий совет, прекрасно понимая, что общий совет — это почти не совет.

Каждый раз, когда вам кажется, что решение уже завершено, желательно задать самому себе вопросы: «Все ли я учел? Разобрал ли я все возможные случаи? Может быть, полученный ответ неполный?»

Уверенность — это важнейшее качество. Но его не следует абсолютизировать. Разумная степень сомнения в правильности своих действий иногда оказывает существенную пользу.

## A. Многовариантные геометрические задачи.

Как правило, первый этап решения геометрической задачи — это выполнение чертежа, соответствующего условию. В подавляющем большинстве задач школьного учебника предполагают однозначную геометрическую трактовку: задача построения чертежа по исходным данным имеет одно решение. Естественно, такая практика формирует определенный стереотип, результатом которого являются неполные решения определенного класса геометрических задач, а именно таких, где заданные параметры не позволяют выполнить чертеж одновариантно. Подобные задачи нередко встречаются на вступительных экзаменах и, естественно, являются традиционно сложными для абитуриентов.

Настоящий пункт ставит перед собой цель не только познакомить учащихся с задачами указанного типа, но и попытаться раскрыть некоторые причины, ведущие к неоднозначной трактовке условия.

Понятно, что предлагаемый материал принесет максимальную пользу, если читатель попытается решить задачи самостоятельно и сравнить свои решения с авторскими.

**I. Условие задачи не определяет взаимное расположение точек и фигуры.**

Примеры.

1) Точка или принадлежит отрезку  $AB$ , или ему не принадлежит, но лежит на прямой  $AB$ .

2) Точки лежат или в одной полуплоскости относительно заданной прямой, или в разных. То же и с полупространством.

3) Различные положения центра описанной окружности или ортоцентра треугольника в зависимости от вида треугольника (остроугольный, прямоугольный, тупоугольный).

6.1. Длина окружности, описанной около равнобедренного треугольника, равна  $20\pi$ . Найдите площадь этого тре-

угольника, если его основание равно 12.

*Решение.* Очевидно радиус окружности равен 10. Нетрудно догадаться, что в данную окружность можно вписать два равнобедренных треугольника с заданным основанием (рис. 4). В первом треугольнике  $\angle C_1$  — острый, во втором  $\angle C_2$  — тупой (случай, когда  $\angle C_1 = \angle C_2 = 90^\circ$  числовые данные задачи исключают).

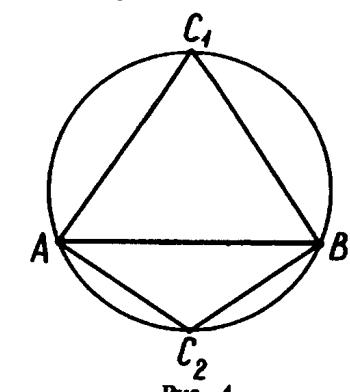


Рис. 4.

I случай. Имеем  $AB = 2R \sin \angle C_1$ , где  $R$  — радиус окружности. Отсюда  $\sin \angle C_1 = \frac{3}{5}$ . Поскольку  $\angle C_1$  — острый, то  $\cos \angle C_1 = \frac{4}{5}$ . По теореме косинусов  $AB^2 = 2AC_1^2 - 2AC_1^2 \times \cos \angle C_1$ . Далее, получаем  $AC_1^2 = 360$ . Площадь  $\Delta AC_1B$  равна  $S = \frac{1}{2} AC_1^2 \sin \angle C_1 = 108$ .

II случай. Здесь также  $\sin \angle C_2 = \frac{3}{5}$ , но  $\cos \angle C_2 = -\frac{4}{5}$ , так как  $\angle C_2$  — тупой. Теперь, придерживаясь вышеизложенной схемы решения, легко установить, что площадь  $\Delta AC_2B$  равна 12.

*Ответ.* 108 или 12.

**6.2.**  $ABCDE$  — правильный пятиугольник. Точка  $M$  обладает таким свойством, что  $\triangle DEM$  — равносторонний. Найти величину угла  $AMC$ .

*Решение.* Так как внутренний угол правильного пятиугольника равен  $108^\circ$ , то  $\angle MDC = \angle EDC - \angle EDM = 108^\circ - 60^\circ = 48^\circ$  (рис. 5). В силу того, что  $\triangle MDC$  — равнобедренный ( $MD = DC$ ), то  $\angle DMC = \frac{1}{2}(180^\circ - 48^\circ) = 66^\circ$ . Ана-

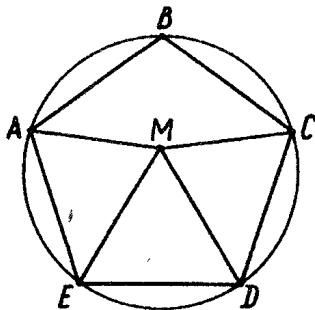


Рис. 5.

логично устанавливаем, что  $\angle EMA = 66^\circ$ . Отсюда  $\angle AMC = 360^\circ - (60^\circ + 66^\circ + 66^\circ) = 168^\circ$ .

Однако приведенное решение не является полным. Действительно, в условии задачи не сказано, что точка  $M$  лежит внутри пятиугольника. Поэтому возможен второй случай (рис. 6):  $\angle MDC = \angle MDE + \angle EDC = 60^\circ + 108^\circ = 168^\circ$ .

Так как  $\triangle MDC$  — равнобедренный ( $MD = DC$ ), то  $\angle CMD = 6^\circ$ . Аналогично получаем  $\angle AME = 6^\circ$ . Следовательно,  $\angle AMC = \angle EMD - 2\angle CMD = 60^\circ - 12^\circ = 48^\circ$ .

*Ответ.*  $168^\circ$  или  $48^\circ$ .

**6.3.** Найти длины сторон  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$ , если  $BC = 8$ , а длины высот, проведенных к  $AC$  и  $BC$ , равны соответственно 6,4 и 4.

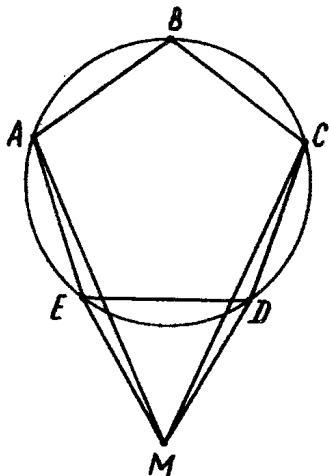


Рис. 6.

*Решение.* Обозначим основание высоты, проведенной к стороне  $AC$ , через  $B_1$ , а к стороне  $BC$  —  $A_1$ . Выразив площадь  $\triangle ABC$  двумя способами, получим  $AA_1 \cdot BC = BB_1 \cdot AC$ . Отсюда  $4 \cdot 8 = 6,4 \cdot AC$ ,  $AC = 5$ .

Обратим внимание читателя, что на данном этапе решения задачи мы преднамеренно не делали никаких ссылок на рисунок. И это можно понять. Ведь любая

ссылка на готовый чертеж зафиксировала бы положение точек  $A_1$  и  $B_1$  относительно отрезков  $BC$  и  $AC$  соответственно.

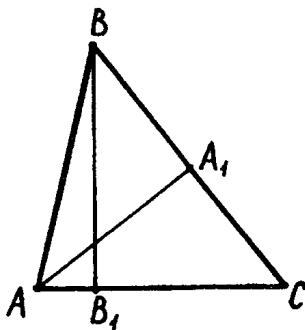


Рис. 7.

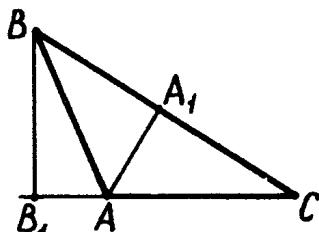


Рис. 8.

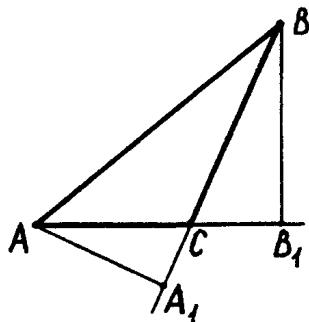


Рис. 9.

Но это положение зависит от вида треугольника  $ABC$ . Однако условие задачи умалчивает, остроугольный он или тупоугольный. (Случай прямоугольного треугольника очевидно не реализуется.)

Таким образом, для полного решения задачи надо разобрать четыре случая:  $\triangle ABC$  — остроугольный,  $\angle A$  — тупой,  $\angle B$  — тупой,  $\angle C$  — тупой. Вместе с тем более внимательный анализ показывает, что этот перебор можно сократить. Действительно, так как  $AC = 5 < BC = 8$ , то угол  $B$  тупым быть не может.

**I случай.** Треугольник остроугольный (рис. 7). Из  $\Delta A A_1 C \quad A_1 C = \sqrt{AC^2 - AA_1^2} = 3$ . Тогда  $A_1 B = BC - A_1 C = 5$ . Из  $\Delta A A_1 B \quad AB = \sqrt{AA_1^2 + A_1 B^2} = \sqrt{41}$ .

**II случай.**  $\angle A$  — тупой (рис. 8). Из  $\Delta B B_1 C \quad B_1 C = \sqrt{BC^2 - BB_1^2} = 4,8$ , т. е.  $B_1 C < AC$ , что не соответствует рисунку. Значит, этот случай не реализуется.

Читатель может задать вопрос, зачем же рассматривать ту ситуацию, которая не существует.

Но, как говорят в народе, легко быть крепким задним умом.

**III случай.**  $\angle C$  — тупой (рис. 9). Заметим, что отрезок  $CB_1$  по-прежнему равен 4,8. Но в разбираемой ситуации это не приводит к противоречию. Из  $\Delta A B_1 B \quad AB = \sqrt{AB_1^2 + BB_1^2} = \sqrt{137}$ .

*Ответ.*  $\sqrt{41}$  и 5 или  $\sqrt{137}$  и 5.

6.4. В круг радиуса  $R$  вписана трапеция так, что расстояние от центра круга до одного из ее оснований вдвое меньше соответствующего расстояния до другого основания. Найти периметр трапеции, если известно, что один из ее углов равен  $60^\circ$ .

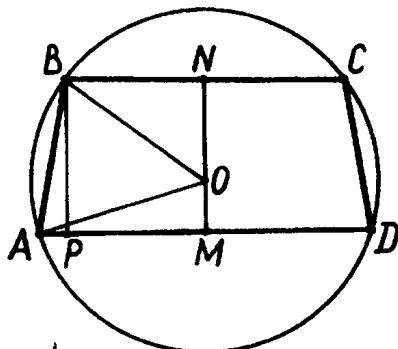


Рис. 10.

На рис. 10  $O$  — центр круга,  $MN \perp AD$ ,  $ON = 2OM$ ,  $O$  принадлежит отрезку  $MN$ . Проведем  $BP \perp AD$ . Учитывая условие,  $\angle ABP = 30^\circ$ . Пусть  $OM = x$ , тогда  $NO = 2x$ ,  $BP = 3x$ .

Из  $\Delta OBN$   $BN = \sqrt{R^2 - 4x^2}$ , из  $\Delta AOM$   $AM = \sqrt{R^2 - x^2}$ , из  $\Delta ABP$   $AP = \frac{3x}{\sqrt{3}} = x\sqrt{3}$ .

Имеем:  $PM = AM - AP = \sqrt{R^2 - x^2} - x\sqrt{3}$ . Тогда  $\sqrt{R^2 - 4x^2} = \sqrt{R^2 - x^2} - x\sqrt{3}$ . Отсюда после несложных преобразований получаем  $x = \frac{R}{2}$ . Следовательно,  $ON = 2x = R$

— противоречие.

Аналогично можно показать, что случай, когда  $OM = 2ON$ , не реализуется.

Рассмотрим второй случай (рис. 11).

Рассуждая, как и в первом случае, для  $x$  получаем уравнение

$$\sqrt{R^2 - 4x^2} = \sqrt{R^2 - x^2} - \frac{x}{\sqrt{3}}$$

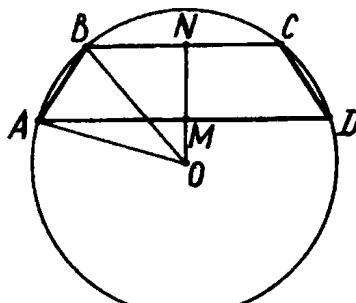


Рис. 11.

Отсюда  $x = \frac{R\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$ . Тогда искомый периметр равен  $\frac{11R\sqrt{7}}{7}$ .

(Предлагаем читателю в этом убедиться самостоятельно.)

*Ответ.*  $\frac{11R\sqrt{7}}{7}$ .

6.5. Угол  $ABC$  равен  $60^\circ$ , причем  $AB = BC = a$ . Окружность  $O_1$  касается  $AB$  в точке  $A$ , а окружность  $O_2$  касается  $BC$  в точке  $C$ , кроме того, эти окружности касаются друг друга внешним образом. Найти радиусы окружностей, если известно, что их отношение равно двум.

*Решение.* Если известно, что окружность касается прямой в данной точке, то отсюда еще не следует однозначность положения ее центра в одной из полуплоскостей, определяемых прямой. Этот факт нередко слу-

жит источником неопределенности геометрической задачи. Как раз здесь мы столкнулись с подобной ситуацией. Действительно, каждый из центров  $O_1$  или  $O_2$  может находиться как внутри угла, так и вне его.

I случай (рис. 12). Ясно, что  $O_1A \perp AB$  и  $O_2C \perp BC$ .  $K$  — точка пересечения прямых  $O_1A$  и  $O_2C$ . Легко установить, что  $\angle AKC = 120^\circ$ . Поскольку  $AB = BC$ , то  $\Delta ABK = \Delta CBK$  по гипотенузе и катету. Отсюда  $\angle ABK = \angle CBK = 30^\circ$ . Тогда  $AK = CK = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ . Пусть  $O_2C = r$ . По условию  $O_1A = 2r$ . Далее  $O_1K = \frac{a\sqrt{3}}{3} - 2r$ ,  $O_2K = \frac{a\sqrt{3}}{3} - r$ . Применим к  $\Delta O_1KO_2$  теорему косинусов. Имеем  $9r^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - 2r\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - r\right)^2 - 2 \times \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - 2r\right) \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - r\right) \cos 120^\circ$ . Отсюда после необходимых преобразований получаем  $r = \frac{\sqrt{35} - 3\sqrt{3}}{4}a$ .

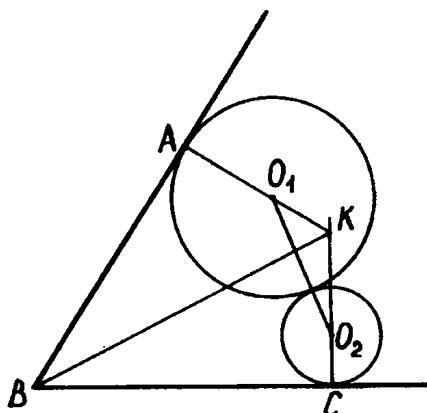


Рис. 12.

**II случай.** (рис. 13). Понятно, что  $\angle O_1BC = 30^\circ$ . Тогда  $O_1C = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ , а  $O_2C = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ .

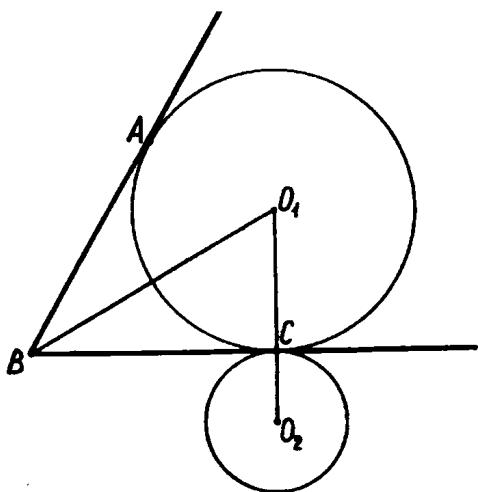


Рис. 13.

**III случай.** (рис. 14). Имеем  $O_2A = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ ,

$$O_1A = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

**IV случай.** (рис. 15). Как и в первом случае, определяем, что  $\angle O_1KO_2 = 120^\circ$ ,  $\angle ABK = \angle CBK = 30^\circ$ .

$$\text{Далее } O_1K = 2r + \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

$O_2K = r + \frac{a\sqrt{3}}{3}$ . Опять-таки применяем теорему косинусов к  $\Delta O_1KO_2$ :

$$9r^2 = \left(2r + \frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(r + \frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2 \left(2r + \frac{a\sqrt{3}}{3}\right) \left(r + \frac{a\sqrt{3}}{3}\right) \cos 120^\circ.$$

$$\text{Отсюда } r = \frac{\sqrt{35} + 3\sqrt{3}}{4} a.$$

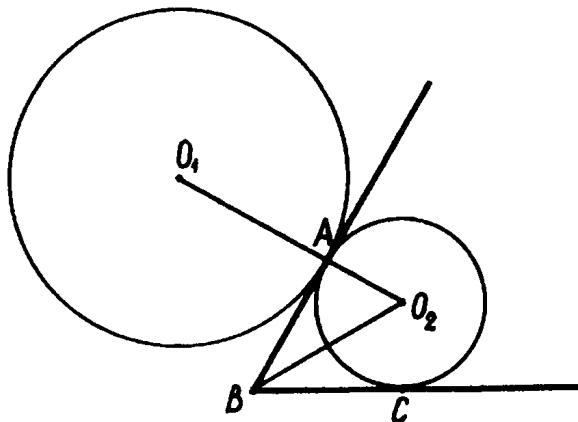


Рис. 14.

Ответ.  $\frac{\sqrt{35} - 3\sqrt{3}}{4}a$  и  $\frac{\sqrt{35} + 3\sqrt{3}}{4}a$ , или  $\frac{a\sqrt{3}}{6}$  и  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ ,  
или  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$  и  $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ , или  $\frac{\sqrt{35} + 3\sqrt{3}}{2}a$  и  $\frac{\sqrt{35} + 3\sqrt{3}}{2}a$ .

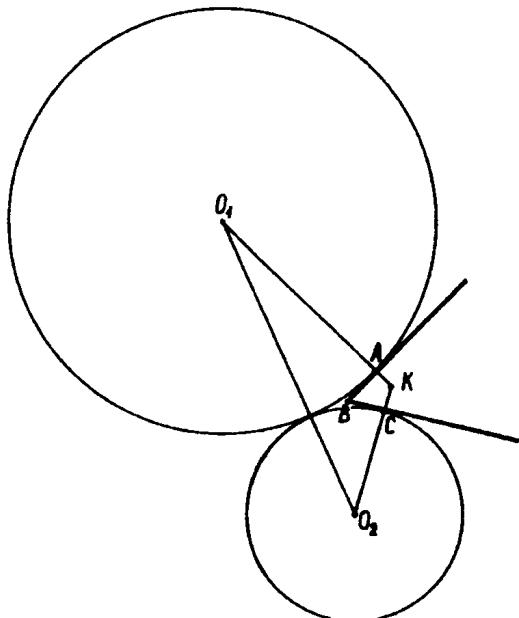


Рис. 15.

6.6. Два ромба  $ABCD$  и  $AMHK$ , имеющие общую вершину  $A$ , расположены так, что стороны  $AB$  и  $AM$  образуют угол в  $30^\circ$ . Известно, что углы при вершине  $A$  обоих ромбов равны  $60^\circ$ , площадь пересечения ромбов равна  $5\sqrt{3}$ , а площадь их объединения равна  $23\sqrt{3}$ . Найти площадь каждого из ромбов.

*Решение.* Наверное, прочитав условие этой задачи, сразу сложно представить соответствующую «картинку». Однако

этот «недостаток» в качестве приложения имеет и свои преимущества. Возможно, попытки выполнить чертеж подскажут читателю, что одновариантно это сделать нельзя.

Нарисуем ромб  $ABCD$  с углом  $A$ , равным  $60^\circ$  (рис. 16). Поскольку по условию стороны  $AM$  и  $AB$

образуют угол в  $30^\circ$ , то сторона  $AM$  может лежать или на луче  $AM_1$ , или на луче  $AM_2$ . Однако, нарисовав ромб  $AMHK$  в каждом из двух случаев, мы увидим, что фигуры (пере-

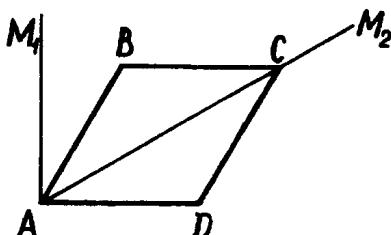


Рис. 16.

сечение ромбов) будут симметричны относительно  $AC$ , а значит, равны. Поэтому принадлежность точки  $M$  лучу  $AM_1$  или лучу  $AM_2$  не будет источником многовариантности в данной задаче.

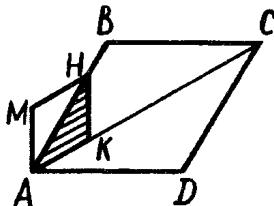


Рис. 17.

Но более внимательный подход покажет, что форма пересечения ромбов зависит от положения вершины  $H$  на луче  $AB$ .

I случай.  $AH \leq AB$  (рис. 17). Пусть стороны ромбов  $ABCD$  и  $AMHK$  соответственно равны  $a$  и  $b$ . Поскольку острые

углы этих ромбов содержат по  $60^\circ$ , то  $S_{ABCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ , а

$$S_{AMHK} = \frac{b^2\sqrt{3}}{2}.$$

В рассматриваемом случае пересечение ромбов — это треугольник  $AHK$ , а объединение состоит из ромба  $ABCD$  и треугольника  $AMH$ . Учитывая условие, составляем следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = 23\sqrt{3}, \\ \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = 5\sqrt{3}. \end{cases}$$

Отсюда получаем  $a = 6$ ,  $b = 2\sqrt{5}$ . Однако теперь не надо спешить с какими-либо выводами, а проверить, удовлетворяет ли найденный результат рассматриваемой геометрической конфигурации. Из  $\Delta AKH$  с помощью теоремы косинусов устанавливаем, что  $AH = 2\sqrt{15}$ . Таким образом,  $AH > AB$ , что противоречит рассматриваемому случаю.

рассматриваемому случаю.

II случай.  $AB < AH < 3AB$  (рис. 18). Здесь пересечение ромбов — это четырехугольник  $ABEK$ , объединение состоит из ромба  $ABCD$  и двух треугольников  $AMH$  и  $BHE$ .

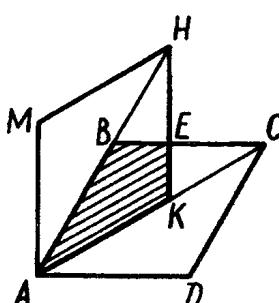


Рис. 18.

ромба  $ABCD$  и двух треугольников  $AMH$  и  $BHE$ .

Из  $\Delta AMH$  по теореме косинусов устанавливаем, что  $AH = b\sqrt{3}$ . Тогда  $BH = b\sqrt{3} - a$ . Легко показать, что  $\angle BEH = 90^\circ$ ,  $\angle EBH = 60^\circ$ . Отсюда  $S_{BHK} = \frac{(\sqrt{3}b - a)^2 \sqrt{3}}{8}$ . Осталось отметить, что  $S_{AHK} = \frac{b^2 \sqrt{3}}{4}$ , а  $S_{ABEK} = S_{AHK} - S_{BHK}$ .

Теперь можно составить систему

$$\begin{cases} \frac{b^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} + \frac{(\sqrt{3}b - a)^2 \sqrt{3}}{8} = 23\sqrt{3}, \\ \frac{b^2 \sqrt{3}}{4} - \frac{(\sqrt{3}b - a)^2 \sqrt{3}}{8} = 5\sqrt{3}. \end{cases}$$

После надлежащих преобразований легко получить

$$\begin{cases} a = 4\sqrt{2}, \\ b = 2\sqrt{6}, \end{cases}$$
  

$$\begin{cases} a = 2\sqrt{6}, \\ b = 4\sqrt{2}. \end{cases}$$

Если  $b = 2\sqrt{6}$ , то  $AH = 6\sqrt{2} > a = 4\sqrt{2}$ , что соответствует рассматриваемому случаю. Если  $b = 4\sqrt{2}$ , то  $AH = 4\sqrt{6} > a = 2\sqrt{6}$ . И этот результат подходит. Таким образом, площади ромбов принимают одно из двух значений  $16\sqrt{3}$  или  $12\sqrt{3}$ .

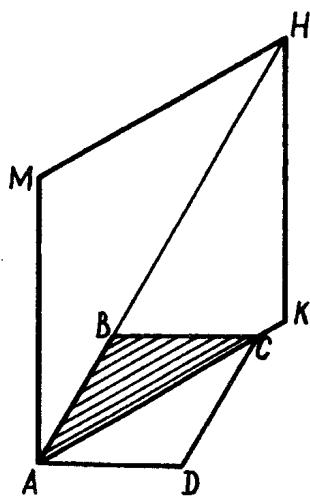


Рис. 19.

III случай.  $AH > 3AB$  (рис. 19). Теперь пересечение ромбов — это треугольник  $ABC$ , а объединение состоит из ромба  $AMHK$  и треугольника  $ACD$ .

Имеем

$$\begin{cases} \frac{b^2 \sqrt{3}}{2} + \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 23\sqrt{3}, \\ \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 5\sqrt{3}. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} b = 6, \\ a = 2\sqrt{5}. \end{cases}$$

Однако  $AH = b\sqrt{3} = 6\sqrt{3} < 3a = 6\sqrt{5}$ , что не удовлетворяет рассматриваемому случаю.

*Ответ.*  $S_{ABCD} = 16\sqrt{3}$  и  $S_{AMHK} = 12\sqrt{3}$  или  $S_{ABCD} = 12\sqrt{3}$  и  $S_{AMHK} = 16\sqrt{3}$ .

6.7. Основанием пирамиды  $SABCD$  служит прямоугольник  $ABCD$ , диагональ  $BD$  которого составляет со стороной  $BC$  угол  $\alpha$ . Все боковые ребра пирамиды имеют длину  $l$ , а величина угла  $ASC$  равна  $2\beta$ . Пирамида пересечена плоскостью, равноудаленной от всех ее вершин. Определить площадь сечения пирамиды этой плоскостью.

*Решение.* Заметим, что если плоскость пересекает отрезок в его середине, то концы отрезка равноудалены от

этой плоскости (докажите самостоятельно). Следовательно, секущая плоскость, о которой говорится в условии, должна пересекать ребра пирамиды в их серединах.

Возможны три принципиально различных положения секущей плоскости.

I случай.

(рис. 20).  $M, N, P, Q$  — середины соответственно ребер  $AS, BS, CS, DS$ .

Так как боковые ребра пирамиды равны, то ее вершина проектируется в центр описанной окружности основания, в данном случае в точку пересечения диагоналей прямоугольника.

Из  $\Delta OSC \quad OC = l \sin \beta. \quad AC = 2OC = 2l \sin \beta$ .

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC^2 \sin (180^\circ - 2\alpha) = 2l^2 \sin^2 \beta \sin 2\alpha.$$

Четырехугольник  $MNPQ$  гомотетичен прямоугольнику  $ABCD$  с коэффициентом гомотетии  $\frac{1}{2}$  и центром  $S$ . Следовательно,  $S_{MNPQ} = \frac{1}{4} S_{ABCD} = \frac{1}{2} l^2 \sin^2 \beta \sin 2\alpha$ .

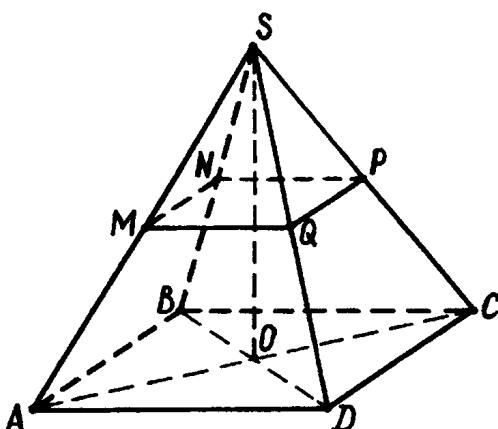


Рис. 20.

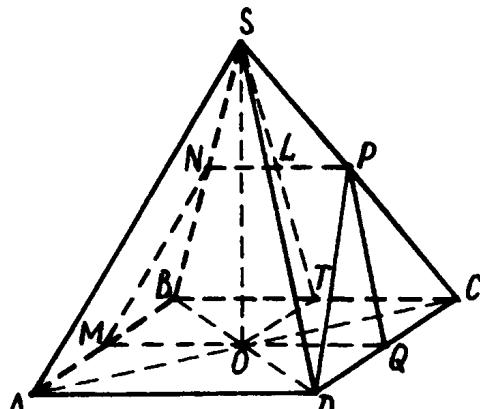


Рис. 21.

**II случай.** (рис. 21).  $M, N, P, Q$  — середины соответственно ребер  $AB, SB, SC, DC$ . Очевидно  $MNPQ$  — трапеция, причем  $O$  принадлежит  $MQ$ ,  $MQ = BC$ ,  $NP = \frac{1}{2}MQ$ . Несложно показать, что  $MQ = 2l \sin \beta \cos \alpha$ . Проведем  $OT \perp BC$ .  $L$  — точка пересечения прямых  $ST$  и  $NP$ . Так как  $MQ \perp$  пл.  $SOT$ , то

$OL \perp MQ$ . Очевидно  $SL = LT$ , тогда

$$OL = \frac{1}{2}ST = \frac{1}{2}\sqrt{SC^2 - TC^2} = \frac{l}{2}\sqrt{1 - \sin^2\beta \cos^2\alpha}.$$

$$S_{MNPQ} = \frac{MQ + NP}{2} \cdot OL = \frac{3}{4}l^2 \sin \beta \cos \alpha \sqrt{1 - \sin^2\beta \cos^2\alpha}.$$

**III случай.** (рис. 22).  $M, N, P, Q$  — середины соответственно ребер  $AD, AS, BS, BC$ .

По аналогии со вторым случаем можно показать, что

$$S_{MNPQ} = \frac{3}{4}l^2 \sin \beta \sin \alpha \sqrt{1 - \sin^2\beta \sin^2\alpha}.$$

Предлагаем читателям в этом убедиться самостоятельно.

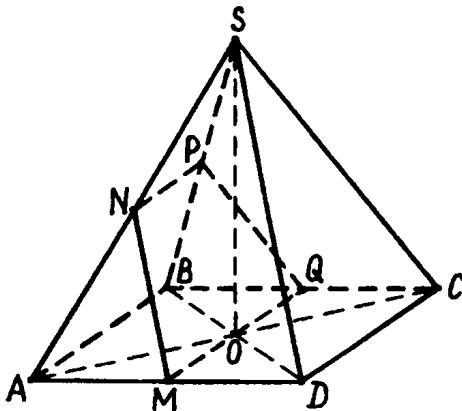


Рис. 22.

**II. В условии задачи фигурируют две касающиеся окружности, но не указан способ касания: внешний или внутренний.**

**В задаче даны две точки, делящие окружность на две дуги, кроме того известно, что некоторая прямая касается окружности, но не указано, на какой из двух дуг лежит точка касания.**

**6.8. Дан отрезок длины 20. Три окружности радиуса 4 имеют центры в концах отрезка или в его середине. Найдите радиус четвертой окружности, касающейся трех данных.**

*Решение.*  $O_1, O_2, O_3$  — центры окружностей радиуса 4 (рис. 23). Причем  $O_1O_3 = 20$ ,  $O_2$  — середина отрезка  $O_1O_3$ ,  $O_4$  — центр окружности, касающейся трех данных. Пусть

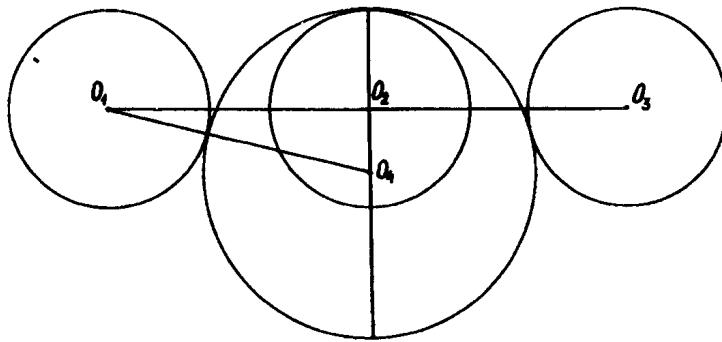


Рис. 23.

искомый радиус равен  $x$ . Тогда  $O_1O_4 = x + 4$ ,  $O_4O_2 = x - 4$ . Для прямоугольного треугольника  $O_1O_4O_2$  (докажите самостоятельно, что  $O_4O_2 \perp O_1O_3$ )  $(x + 4)^2 = (x - 4)^2 + 10^2$ .

Отсюда  $x = 6,25$ .

Опять-таки может создаться впечатление, что получен окончательный ответ. Но на самом деле это не так, потому что существует еще одно совершенно иное положение четвертой окружности — рис. 24. Имеем  $O_4O_1 = O_4O_2 = x - 4$ ,  $O_4O_3 = x + 4$ . Проведем  $O_4K \perp O_1O_2$ . Очевидно  $O_1K = KO_2 = 5$ . Из  $\Delta O_4KO_2$   $O_4K^2 = (x - 4)^2 - 5^2$ . Из  $\Delta O_4KO_3$

$O_4K^2 = (x+4)^2 - 15^2$ . Получаем  $(x-4)^2 - 5^2 = (x+4)^2 - 15^2$ . Отсюда  $x = 12,5$ .

Заметим, что существуют еще четыре случая положения центра четвертой окружности (центрами могут быть точки,

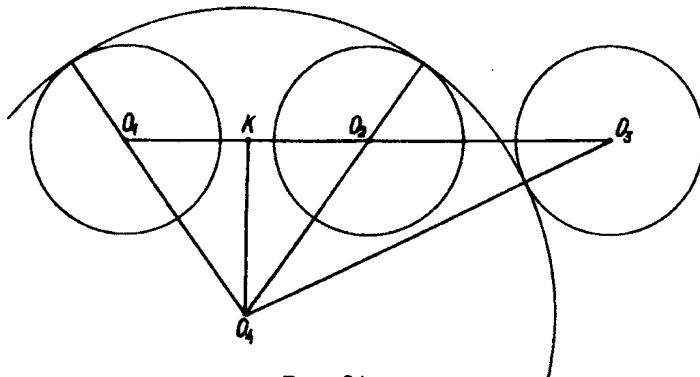


Рис. 24.

симметричные точке  $O_4$  относительно прямой  $O_1O_3$ , или относительно точки  $O_2$ ). Очевидно, что эти случаи будут давать уже ранее полученные результаты.

*Ответ.* 6,25 или 12,5.

6.9. Две окружности радиусов  $R$  и  $r$  ( $R > r$ ) касаютсяся в точке  $A$ . Определить сторону равностороннего треугольника,

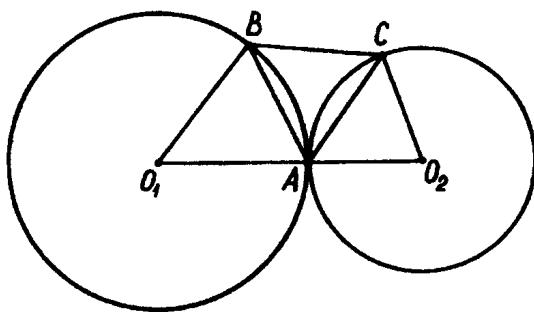


Рис. 25.

одна из вершин которого в точке  $A$ , а две другие лежат на разных окружностях.

*Решение.*

Нетрудно догадаться, что полное решение требует

рассмотрения двух случаев: данные окружности касаются внешним образом (рис. 25) и внутренним (рис. 26).

Пусть искомая сторона правильного треугольника равна  $a$ . Рассмотрим первый случай (рис. 25).

Пусть  $\angle O_1AB = \alpha$ ,  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Тогда  $\angle O_2AC = 120^\circ - \alpha$ . Из равнобедренного треугольника  $O_1AB$  по теореме

синусов находим, что  $a = 2R \cos \alpha$ , аналогично из  $\Delta O_2AC$   $a = 2r \cos (120^\circ - \alpha)$ . Имеем

$$a = 2r \cos (120^\circ - \alpha) = -r \cos \alpha + r\sqrt{3} \sin \alpha = -r \cos \alpha +$$

$$+ \sqrt{3} r \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\frac{ra}{2R} + \sqrt{3} r \sqrt{1 - \frac{a^2}{4R^2}}.$$

Отсюда  $a(2R + r) = r\sqrt{3} \cdot \sqrt{4R^2 - a^2}$ ,  $a^2(4R^2 + 4Rr + 4r^2) =$   
 $= 12r^2R^2$ ,

$$a = \frac{rR\sqrt{3}}{\sqrt{R^2 + Rr + r^2}}.$$

Во втором случае (рис. 26) легко показать (предлагаем читателям это сделать самостоятельно), что если  $\Delta ABC$  равносторонний и точка  $O_1$  лежит внутри круга с центром  $O_2$ , то точки  $C$  и  $B$  лежат в разных полуплоскостях относительно прямой  $AO_1$ .

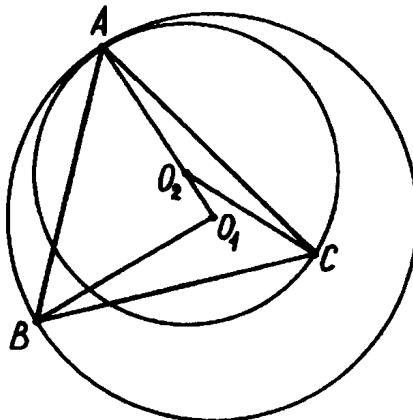


Рис. 26.

да  $\angle O_1AC = 60^\circ - \alpha$ .

Аналогично из равнобедренных треугольников  $O_1AB$  и  $O_2AC$  получаем соответственно  $a = 2R \cos \alpha$ ,  $a = 2R \cos (60^\circ - \alpha)$ . Отсюда нетрудно установить, что  $a = \frac{Rr\sqrt{3}}{\sqrt{R^2 - Rr + r^2}}$ .

Заметим, что если  $O_1$  лежит вне круга (или на окружности) с центром  $O_2$ , то точки  $B$  и  $C$  лежат в одной полуплоскости относительно  $AO_1$  (или точка  $C$  лежит на  $AO_1$ ), и ответ в этом случае не изменится.

Ответ.  $\frac{Rr\sqrt{3}}{\sqrt{R^2 + Rr + r^2}}$  или  $\frac{Rr\sqrt{3}}{\sqrt{R^2 - Rr + r^2}}$ .

6.10. Расстояние между центрами двух окружностей равно  $10r$ . Одна из окружностей имеет радиус  $5r$ , вторая  $6r$ . Некоторая прямая пересекает меньшую окружность в

точках  $A$  и  $B$  и касается большей в точке  $C$ . Найти длину хорды  $AB$ , если  $AB = 2BC$ .

*Решение.* Учитывая величины радиусов окружностей и расстояние между их центрами, устанавливаем, что данные

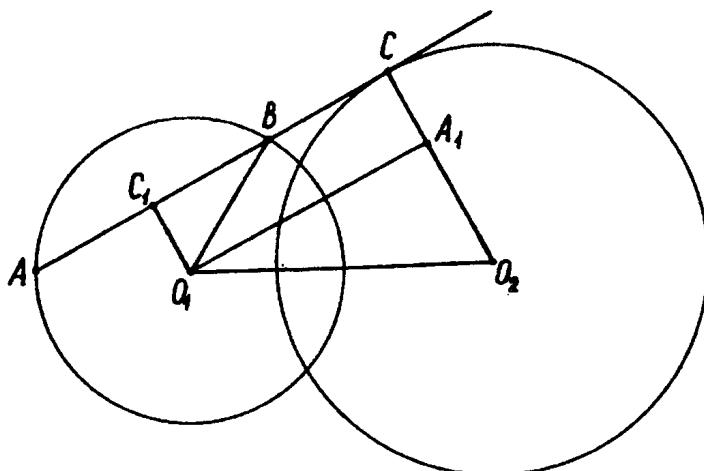


Рис. 27.

окружности имеют две общие точки (рис. 27).  $O_2C \perp AB$ . Проведем  $O_1C_1 \parallel O_2C$ ,  $O_1A_1 \parallel C_1C$ . Очевидно  $O_1C_1CA_1$  — прямоугольник и  $AC_1 = C_1B$ . Пусть  $AC_1 = C_1B = x$ . Тогда, учитывая условие,  $BC = x$ . Отсюда  $O_1A_1 = 2x$ . Пусть  $O_1C_1 = y$ . Имеем  $O_2A_1 = O_2C - A_1C = 6r - y$ . Из  $\Delta O_1C_1B$   $25r^2 = x^2 + y^2$ . Из  $\Delta O_1A_1O_2$   $100r^2 = 4x^2 + (6r - y)^2$ . После несложных преобразований устанавливаем, что  $2x = 2r\sqrt{21}$ , т. е.  $AB = 2r\sqrt{21}$ .

Было бы хорошо, если читатель заметит, что приведенное решение не является полным. В самом деле, проведем касательную к большей окружности перпендикулярно  $O_1O_2$  (рис. 28). Здесь точка  $C$  принадлежит прямой  $O_1O_2$ , и условие  $AB = 2BC$  очевидно выполняется. Из  $\Delta O_1AC$   $AC^2 = O_1A^2 - O_1C^2 = 25r^2 - 16r^2 = 9r^2$ . Итак,  $AB = 2BC = 6r$ .

*Ответ.*  $2r\sqrt{21}$  или  $6r$ .

6.11. Дан равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = BC$ ). В точке  $M$  к окружности, вписанной в треугольник, проведена касательная, перпендикулярная к стороне  $BC$ .  $D$  — точка пересечения касательной со стороной  $BC$ . Определить

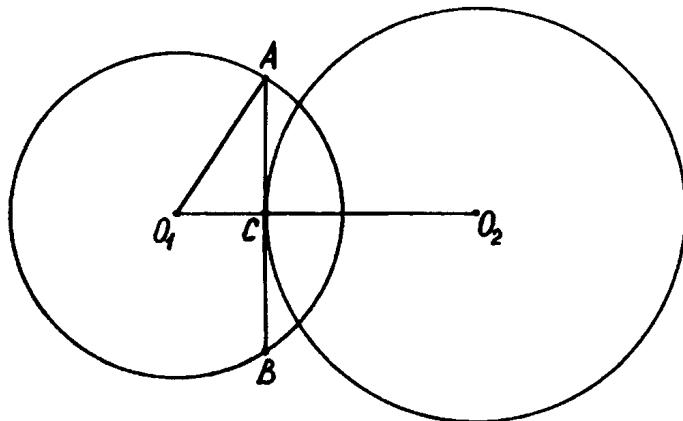


Рис. 28.

площадь треугольника  $ABC$ , если радиус вписанной окружности равен  $r$ , а площадь треугольника  $MBD$  равна  $S$ .

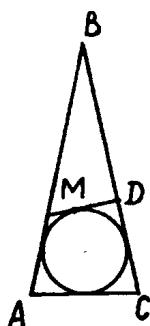


Рис. 29.  
Решение.

Известно, что работать с крупным чертежом удобней, чем с маленьким. Как нам кажется, этот тривиальный факт в данной задаче играет решающую роль.

На рис. 29 построены рав-

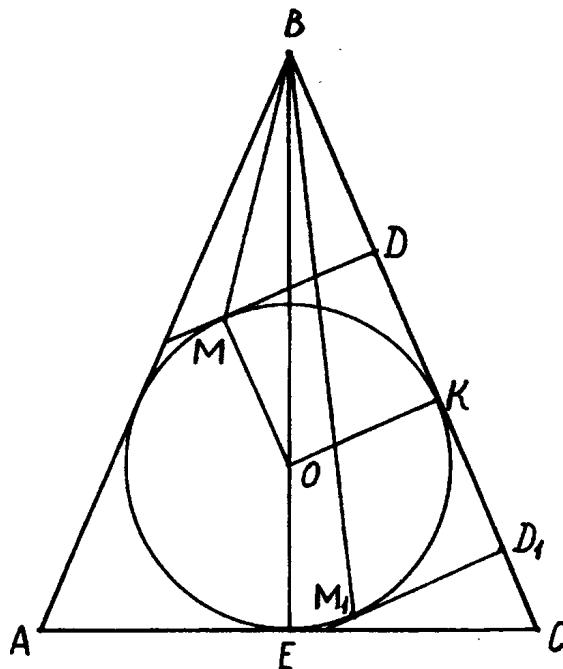


Рис. 30.

нобедренный треугольник  $ABC$  и вписанная в него окружность.  $MD$  — касательная, о которой говорится в условии.

А если чертеж увеличить? — рис. 30. Теперь несравненно легче заметить, что можно провести еще одну касательную  $M_1D_1$ , удовлетворяющую условию. (Ведь на рис. 29 вписанная окружность почти «не оставила места» для касательной  $M_1D_1$ .)

**I случай.**  $K$  — точка касания вписанной окружности со стороной  $BC$ . Очевидно  $OMDK$  — квадрат. Тогда  $MD = r$ .

Так как  $S_{MBD} = S$ , то  $BD = \frac{2S}{r}$ . Далее,  $BK = BD + DK =$

$= \frac{2S}{r} + r$ . Из  $\Delta OVK$

$$BO = \sqrt{\left(\frac{2S}{r} + r\right)^2 + r^2} = \frac{1}{r} \sqrt{4S^2 + 4Sr^2 + 2r^4}.$$

$\Delta OVK \sim \Delta CBE$ . Отсюда  $\frac{OK}{BK} = \frac{EC}{BE}$ ,  $EC = \frac{rBE}{BK}$ .

$$S_{ABC} = BE \cdot EC = BE \cdot \frac{rBE}{BK} = \frac{(BO + OE)r}{BK} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{r} \sqrt{4S^2 + 4Sr^2 + 2r^4} + r\right)^2 r}{\frac{2S}{r} + r} = \frac{\left(\frac{1}{r} \sqrt{4S^2 + 4Sr^2 + 2r^4} + r\right)^2 r^2}{2S + r^2}.$$

**II случай.** Покажем схематичное решение.

$$\begin{aligned} M_1OKD_1 &— квадрат, \quad BD_1 = \frac{2S}{r}, \quad BK = \frac{2S}{r} - r, \quad BO = \\ &= \frac{1}{r} \sqrt{4S^2 - 4Sr^2 + 2r^4}, \\ S_{ABC} &= \frac{(BO + OE)r}{BK} = \frac{\left(\frac{1}{r} \sqrt{4S^2 - 4Sr^2 + 2r^4} + r\right)^2 r^2}{2S - r^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ. } \frac{\left(\frac{1}{r} \sqrt{4S^2 + 4Sr^2 + 2r^4} + r\right)^2 r^2}{2S + r^2}$$

$$\text{или } \frac{\left(\frac{1}{r} \sqrt{4S^2 - 4Sr^2 + 2r^4} + r\right)^2 r^2}{2S - r^2}.$$

**III. В задаче фигурируют объекты, которым приписываются определенные свойства, но не указан порядок соответствия между множеством объектов и множеством их свойств.**

Примеры.

1) В условии сказано, что треугольник  $ABC$  равнобедренный, но не сказано, какие пары сторон равны.

2) Точка  $M$  делит отрезок  $AB$  на отрезки длиной  $a$  и  $b$ . При этом не уточнено, какой из них равен  $a$ , а какой —  $b$ .

3) Известно, что угол между пересекающимися прямыми  $AB$  и  $CD$  равен  $\alpha$ . Однако не указано, какой из углов —

$AMD$  или  $AMC$  ( $M$  — точка пересечения прямых) — острый.

6.12. Дан ромб со стороной, равной 1, и острым углом при вершине, равным  $\frac{\pi}{6}$ . Точка  $K$  лежит на стороне  $BC$ , причем  $BK = KC$ . Найти расстояние от вершины  $B$  до прямой  $AK$ .

*Решение.* Условие задачи нас «привязывает» к вершине  $B$ . Но при этом мы не знаем, является ли угол  $B$  острым или тупым.

I случай.  $\angle B = \frac{5\pi}{6}$  (рис. 31). Приведем  $BE \perp AK$ . Отрезок  $BE$  — искомый. Имеем:

$$S_{ABK} = \frac{1}{2} AB \cdot BK \sin \angle B = \frac{1}{4} \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{8}.$$

Из  $\Delta ABK$  по теореме косинусов

Рис. 32.

$$AK = \sqrt{AB^2 + BK^2 - 2AB \cdot BK \cos \frac{5\pi}{6}} = \frac{1}{2} \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}.$$

$$BE = \frac{2S_{ABK}}{AK} = \frac{1}{2\sqrt{5+2\sqrt{3}}}.$$

II случай.  $\angle B = \frac{\pi}{6}$  (рис. 32). Имеем

$$S_{ABK} = \frac{1}{8}, AK = \frac{1}{2}\sqrt{5-2\sqrt{3}}.$$

$$BE = \frac{2S_{ABK}}{AK} = \frac{1}{2\sqrt{5-2\sqrt{3}}}.$$

Ответ.  $\frac{1}{2\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$  или  $\frac{1}{2\sqrt{5-2\sqrt{3}}}$ .

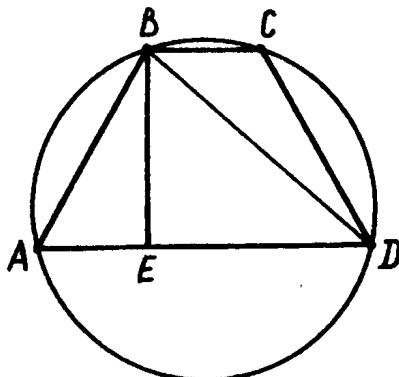


Рис. 33.

этому  $AB = CD = 2$ . Сторона  $AD$  должна отличаться от соседней стороны, равной 2, на единицу. Поэтому для  $AD$  возможны два значения:  $AD = 3$  или  $AD = 1$ .

I случай.  $AD = 3$  (рис. 33). Так как хорды  $AB$  и  $CD$  равны, то  $BC \parallel AD$  и  $ABCD$  — равнобедренная трапеция.

Проведем  $BE \perp AD$ . Легко показать, что  $AE = \frac{AD - BC}{2} = 1$ ,  $DE = 2$ . Из  $\Delta ABE$   $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{3}$ . Из  $\Delta BED$   $BD = \sqrt{7}$ . Ясно, что  $\angle BAD = 60^\circ$ .

Пусть радиус окружности равен  $R$ . Тогда  $BD = 2R \sin 60^\circ$ . Отсюда  $R = \frac{\sqrt{21}}{3}$ .

6.13. Длины соседних сторон вписанного в окружность четырехугольника отличаются на 1. Длина наименьшей из них также равна 1. Найти радиус окружности.

*Решение.* Пусть  $ABCD$  — четырехугольник, о котором говорится в условии. Например,  $BC$  — его наименьшая сторона,  $BC = 1$ .  $AB$  и  $CD$  соседние с  $BC$  стороны. По-

**II случай.**  $AD = 1$  (рис. 34). Очевидно  $ABCD$  — прямоугольник. Зная стороны прямоугольника, легко показать, что его радиус описанной окружности равен  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .

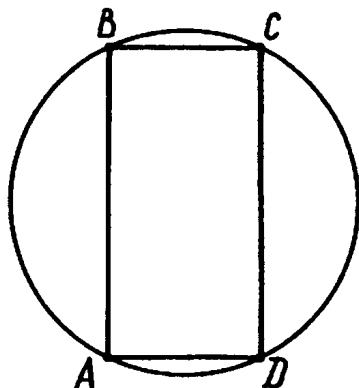


Рис. 34.

**Ответ.**  $\frac{\sqrt{21}}{3}$  или  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .

**6.14.** Периметр трапеции равен 112. Точка касания вписанной в трапецию окружности делит одну из боковых сторон на отрезки, равные 8 и 18. Вычислить основания этой трапеции.

**Решение.** Пусть  $ABCD$  — трапеция, о которой говорится в условии.  $M$  — точка касания вписанной окружности с боковой стороной  $AB$ . По

условию точка  $M$  делит  $AB$  на отрезки, равные 8 и 18. Налицо неопределенность: неизвестно, какой из отрезков —  $AM$  или  $MB$  — равен 8, а какой 18.

Сделаем чертеж — рис. 35. Имеем  $OM \perp AB$ ,  $\angle BAO = \angle OAD$ ,  $\angle ABO = \angle ABC$ . Угол  $BAD$  — острый, угол  $ABC$  — тупой. Отсюда  $\angle MAO < \angle MBO$ , следовательно,  $AM > MB$ , а значит,  $AM = 18$ ,  $MB = 8$ . И, казалось бы, неопределенность

условия задачи исчезает. Однако здесь сработал глубоко укоренившийся стереотип: изображать трапецию с двумя острыми углами при большем основании. Таким образом, нельзя утверждать, что  $\angle BAD$  — острый. Он может быть и тупым — рис. 36 (случай, когда  $\angle BAD = 90^\circ$ ),

условие задачи исключает, так как  $AM \neq MB$ ).

**I случай.**  $\angle BAD$  — острый (рис. 35).  $\angle BAD + \angle ABC = 180^\circ$ . Следовательно,  $\angle AOB = 90^\circ$ . Из  $\Delta AOB$   $OM = \sqrt{AM \cdot MB} = 12$ .

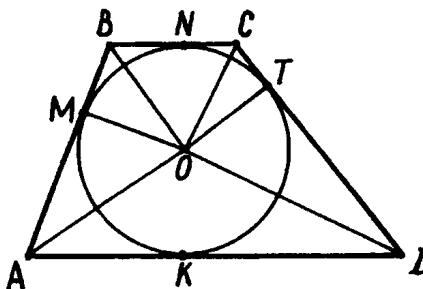


Рис. 35.

Так как в данную трапецию можно вписать окружность, то  $AB + CD = BC + AD = \frac{112}{2} = 56$ . Отсюда  $CD = 30$ .

Пусть  $CT = x$ , тогда  $DT = 30 - x$ . Из  $\Delta COD$   $OT^2 = CT \cdot TD$ ,  $144 = x(30 - x)$ . Отсюда  $x = 6$  или  $x = 24$ . Поскольку угол  $ADC$  — острый, то  $CT < TD$ . Значит,  $CT = 6$ ,  $TD = 24$ .  $CN = CT = 6$ ,  $DK = DT = 24$  ( $N$  и  $K$  — точки касания окружности с основаниями трапеции).  $BN = BM = 8$ ,  $AK = AM = 18$ . Отсюда  $BC = 14$ ,  $AD = 42$ .

II случай.  $\angle BAD$  — тупой (рис. 36). Поскольку в предыдущем случае для нахождения длин отрезков  $CT$  и  $TD$

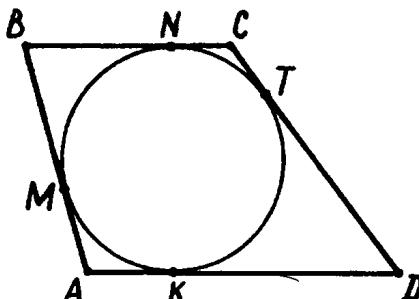


Рис. 36.

мы не использовали порядок соответствия чисел 8 и 18 длинам отрезков  $AM$  и  $MB$ , то сразу можем утверждать, что  $CT = 6$ ,  $TD = 24$ . Отсюда легко получить  $BC = 24$ ,  $AD = 32$ .

Однако и сейчас решение задачи нельзя считать полным. В

самом деле, углы при большем основании трапеции не обязательно острые, но (!) один из них непременно острый. А если отрезки с длинами 8 и 18 лежат именно на боковой стороне, которая в двух рассмотренных случаях образовала острый угол с основанием? (На наших рисунках это сторона  $CD$ .) Придется рассмотреть и этот случай.

Будем пользоваться теми же рисунками. Итак,  $CT = 8$ ,  $TD = 18$ ,  $MB = x$ . Имеем знакомое уравнение  $144 = x(30 - x)$ . Его корни  $x = 6$  или  $x = 18$ . Для рис. 35  $MB = 6$ , а для рис. 36  $MB = 18$ . Дальше — понятно.

*Ответ.* 14 и 42 или 24 и 32.

Сделаем одно замечание. Порой «алгебра» геометрической задачи может навести на мысль о многовариантности. Так, в только что разобранной задаче наличие двух корней  $x = 6$  и  $x = 18$ , наверное, могло бы стать своего рода подсказкой. Ведь даже если учащийся «зевнул» второй случай, то необходимость проверки реализации полученного промежуточного результата, возможно, сыграла бы свою роль.

6.15. В треугольнике  $ABC$   $\angle A = 75^\circ$ ,  $\angle B = 45^\circ$ . На стороне  $CA$  берется точка  $K$  так, что  $\frac{CK}{KA} = 3$ . На стороне  $CB$

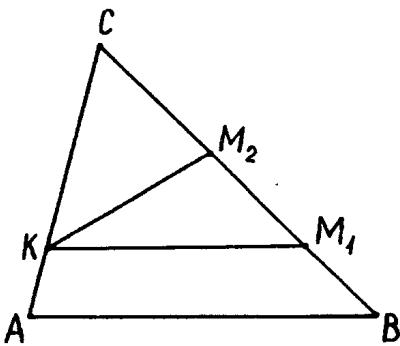


Рис. 37

берется точка  $M$  так, что прямая  $KM$  отсекает от треугольника  $ABC$  треугольник, ему подобный.

Определить  $\frac{KM}{AB}$ .

*Решение.* С большой степенью вероятности первая идея, которая может возникнуть, — это выбрать точку  $M$  так, чтобы  $KM \parallel AB$ . В этом случае  $\angle CKM = 75^\circ$ . Однако если провести  $KM$  так, что  $\angle CKM = 45^\circ$ , то мы также получим треугольник, подобный данному.

На рис. 37 этим двум случаям соответствуют точки  $M_1$  и  $M_2$ .

Для подобных треугольников  $ABC$  и  $KCM_1$  запишем  $\frac{KM_1}{AB} = \frac{CK}{AC} = \frac{3}{4}$ .

Для подобных треугольников  $ABC$  и  $M_2CK$  имеем  $\frac{KM_2}{AB} = \frac{CK}{CB}$ . Пусть  $AK = x$ . По теореме синусов  $\frac{CA}{\sin 45^\circ} = \frac{CB}{\sin 75^\circ}$ . Отсюда  $CB = \frac{4x \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2x(1 + \sqrt{3})$ . Таким образом,  $\frac{KM_2}{AB} = \frac{CK}{CB} = \frac{3x}{2(1 + \sqrt{3})x} = \frac{3(\sqrt{3} - 1)}{4}$ .

*Ответ.*  $\frac{3}{4}$  или  $\frac{3(\sqrt{3} - 1)}{4}$ .

6.16. В правильной треугольной призме две вершины верхнего основания соединены с серединами противоположных сторон нижнего основания. Угол между полученными прямыми равен  $\frac{\pi}{3}$ . Найти объем призмы, если длина стороны основания равна  $a$ .

*Решение.* На рис. 38 изображена правильная треугольная призма.  $D$  — середина ребра  $AB$ ,  $E$  — середина ребра  $BC$ .

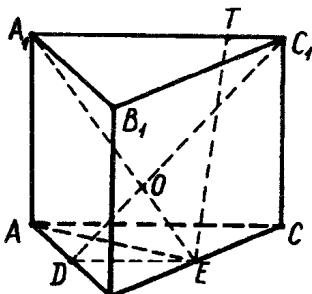


Рис. 38.

По условию угол между прямыми  $A_1E$  и  $C_1D$  равен  $\frac{\pi}{3}$ .

Следовательно, возможны два случая:

$$1) \angle A_1OC_1 = \angle DOE = \frac{\pi}{3};$$

$$2) \angle A_1OD = \angle C_1OE = \frac{\pi}{3}.$$

Рассмотрим первый случай. Очевидно, что  $A_1C_1ED$  — равнобедренная трапеция,

тогда  $DO = OE = DE = \frac{a}{2}$  ( $DE$  — средняя линия  $\Delta ABC$ ) и

$A_1O = OC_1 = A_1C_1 = a$ . Отсюда  $A_1E = \frac{3a}{2}$ . Высота призмы

$$H = AA_1 = \sqrt{A_1E^2 - AE^2} = \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Объем призмы } V = S_{ABC} \cdot H = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{3a^3\sqrt{2}}{8}.$$

Для второго случая имеем  $\angle EA_1C_1 = \frac{\pi}{6}$ . Проведем

$ET \perp A_1C_1$ . Тогда  $A_1T = \frac{1}{2}(DE + A_1C_1) = \frac{3a}{4}$ . Из  $\Delta EA_1T$

$A_1E = \frac{A_1T}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Следовательно,  $A_1E = AE$ , что невозможно,

так как  $A_1E$  — наклонная, а  $AE$  — ее проекция на плоскость  $ABC$ .

*Ответ.*  $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$ .

6.17. В основании пирамиды — правильный треугольник со стороной  $\sqrt{6}$ . Боковые грани пирамиды равновелики. Одно из боковых ребер равно  $3\sqrt{2}$ . Найти объем пирамиды.

*Решение.* Так как ребра основания данной пирамиды равны, а боковые грани равновелики, то равны и высоты боковых граней, проведенные из вершины пирамиды. А отсюда следует, что равны прямоугольные треугольники, об-

разованные высотой пирамиды и высотами боковых граней. Следовательно, боковые грани данной пирамиды образуют равные углы с плоскостью основания. Значит (докажите самостоятельно!), точка  $O$  — проекция вершины пирамиды на плоскость  $ABC$  — равноудалена от прямых, содержащих стороны основания.

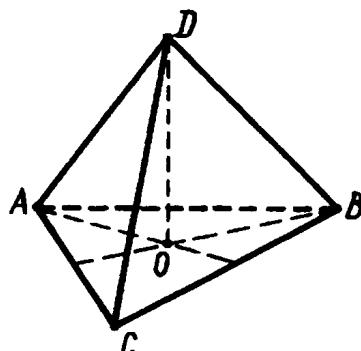


Рис. 39.

случай (рис. 39).

Очевидно в этом случае пирамида является правильной, и  $DA = DB = DC = 3\sqrt{2}$ ,  $AO = \sqrt{2}$ .

$$\text{Высота пирамиды } H = DO = \sqrt{AD^2 - OA^2} = 4.$$

$$\text{Объем пирамиды } V = \frac{1}{3} S_{ABC} H = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 2\sqrt{3}.$$

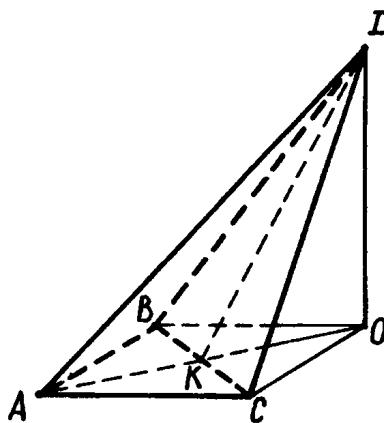


Рис. 40.

Если  $O$  — центр вневписанной окружности (рис. 40), то легко показать, что  $AO = 2AK = 3\sqrt{2}$  ( $K$  — середина  $BC$ ).

Следовательно,  $AD \neq 3\sqrt{2}$ . Отсюда  $DC = DB = 3\sqrt{2}$ . Имеем  $H = OD = \sqrt{DC^2 - OC^2} = 2\sqrt{3}$ .

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 3.$$

Ответ.  $2\sqrt{3}$  или 3.

6.18. Через вершину

$B_1$  куба  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  проведена плоскость, пересекающая ребра  $BC$  и  $AB$  и образующая с гранью  $ABCD$  угол  $\alpha$ , причем в сечении получен равнобедренный треугольник. Найти площадь сечения, если ребро куба равно  $a$ .

*Решение.* Пусть секущая плоскость пересекает ребра  $BC$  и  $AB$  соответственно в точках  $N$  и  $M$ .

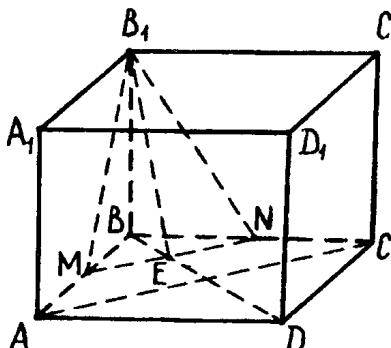


Рис. 41.

Возможны три случая: основанием равнобедренного треугольника может служить  $MN$ , или  $B_1M$ , или  $B_1N$  (очевидно достаточно из двух последних случаев рассмотреть один).

I случай (рис. 41). Здесь  $MB_1 = NB_1$ . Тогда  $MB = BN$  и  $BD \perp MN$ . По теореме о трех перпендикулярах  $B_1E \perp MN$  и, следовательно,  $\angle B_1EB = \alpha$ .

$$S_{MB_1N} = \frac{S_{MBN}}{\cos \alpha} = \frac{EB \cdot ME}{\cos \alpha} = \frac{BE^2}{\cos \alpha} = \frac{a^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a^2 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

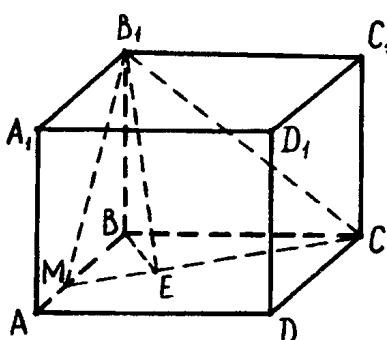


Рис. 42.

II случай. Имеем  $MB_1 = MN$ .  $\Delta MB_1B = \Delta MBN$  по гипотенузе и катету, тогда  $BB_1 = BN$ . Следовательно,  $N = C$  (рис. 42). Проведем  $BE \perp MC$ .  $\angle B_1EB = \alpha$ . Пусть  $CM = x$ . Отсюда  $MB = \sqrt{x^2 - a^2}$ .  $BE = a \operatorname{ctg} \alpha$ . Имеем  $MB \cdot CB = MC \cdot BE$ . Тогда

$$\sqrt{x^2 - a^2} \cdot a = xa \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$x = \frac{a \sin \alpha}{\sqrt{-\cos 2\alpha}},$$

$$S_{MB_1C} = \frac{1}{2} MC \cdot B_1E = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \sin \alpha}{\sqrt{-\cos 2\alpha}} \cdot \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{a^2}{2 \sqrt{-\cos 2\alpha}}.$$

Ответ.  $\frac{a^2 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$  или  $\frac{a^2}{2 \sqrt{-\cos 2\alpha}}$ .

6.19.  $S$  — вершина треугольной пирамиды  $SABC$ . Боковые ребра пирамиды равны, а боковые грани равновелики. Найти объем пирамиды, если известно, что боковые ребра равны по  $l$ , а  $\angle ASB = 2\alpha$ .

*Решение.* Поскольку боковые грани равновеликие равнобедренные треугольники с равными боковыми сторонами, то синусы плоских углов при вершине  $S$  равны, т. е.  $\sin \angle ASB = \sin \angle BSC = \sin \angle ASC$ . Отсюда возникает необходимость в рассмотрении трех случаев.

I случай.  $\angle ASB = \angle ASC = \angle BSC = 2\alpha$ .

Воспользуемся хорошо известным фактом, что проекция прямой  $SC$  на плоскость  $ASB$  содержит биссектрису угла  $ASB$ .

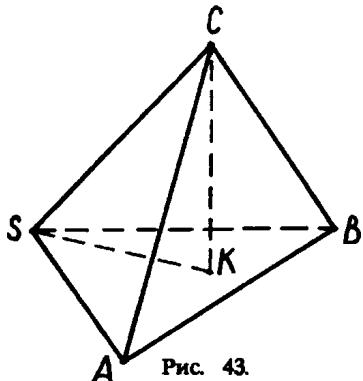


Рис. 43.

Наверное, для нас более привычно (удобно) рассматривать проекцию бокового ребра на основание пирамиды, чем на боковую грань. Поэтому «положим» данную пирамиду на боковую грань  $ASB$  (рис. 43).

$CK \perp \text{пл. } ASB$ ,  
 $\angle ASK = \angle KSB = \alpha$ . По теореме о трех косинусах (подробно об этой теореме можно прочитать в [1])  $\cos \angle CSB = \cos \angle CSK \cdot \cos \angle BSK$ , т.е.  $\cos 2\alpha = \cos \angle CSK \cos \alpha$ .

Отсюда  $\cos \angle CSK = \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha}$ .

$$\begin{aligned} \text{Объем пирамиды } V &= \frac{1}{3} S_{ASB} \cdot CK = \frac{1}{3} \frac{l^2 \sin 2\alpha}{2} \cdot l \cdot \sin \angle CSK = \\ &= \frac{l^3 \sin 2\alpha}{6} \sqrt{1 - \frac{\cos^2 2\alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{l^3 \sin^2 \alpha}{3} \sqrt{3 - 4 \sin^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Обратим внимание читателей, что при нахождении объема пирамиды нам было безразлично, принадлежит ли точка  $K$  грани  $ASB$  или нет.

II случай.  $\angle CSA = \angle BSA = \alpha$ ,  $\angle CSB = \pi - 2\alpha$  (рис. 44).

$$\begin{aligned} AQ \perp \text{пл. } CSB, \quad \angle CSQ &= \angle QSB = \frac{\pi}{2} - \alpha. \text{ Имеем } \cos \angle ASB = \\ &= \cos \angle ASQ \cdot \cos \angle BSQ, \cos 2\alpha = \cos \angle ASQ \cdot \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right), \end{aligned}$$

$$\cos \angle ASQ = \frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha}.$$

$$V = \frac{1}{3} S_{CSB} \cdot AQ = \frac{1}{3} \frac{l^2}{2} \sin(\pi - 2\alpha) \cdot l \cdot \sin \angle ASQ = \\ = \frac{l^3}{6} \sin 2\alpha \sqrt{1 - \frac{\cos^2 2\alpha}{\sin^2 \alpha}} = \frac{l^3 \cos^2 \alpha}{3} \sqrt{4 \sin^2 \alpha - 1}.$$

III случай.  $\angle BSC = \angle ASC = \pi - 2\alpha$ ,  $\angle ASB = 2\alpha$  (рис. 45).

Предлагаем читателю самостоятельно установить, что здесь мы получим результат, совпадающий с ответом в I случае.

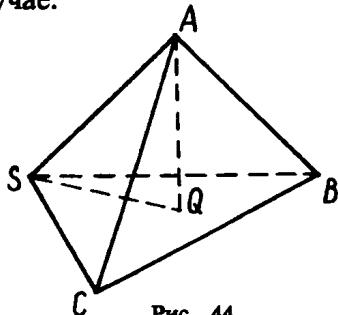


Рис. 44.

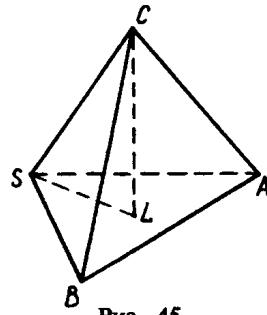


Рис. 45.

$$\text{Ответ. } \frac{l^3 \sin^2 \alpha}{3} \sqrt{3 - 4 \sin^2 \alpha} \text{ или } \frac{l^3 \cos^2 \alpha}{3} \sqrt{4 \sin^2 \alpha - 1}.$$

#### IV. Еще две задачи.

Сейчас вниманию читателя будут предложены две задачи, не имеющие непосредственного отношения к данному пункту, но полностью соответствующие вопросам, поднимаемым в настоящем параграфе.

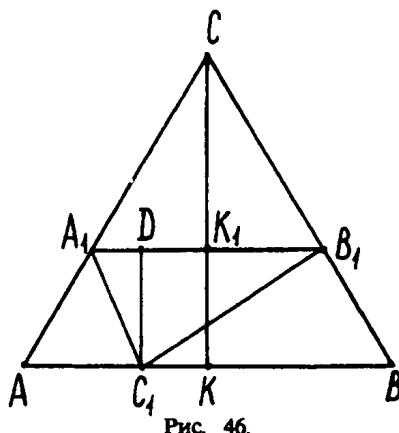


Рис. 46.

6.20. В правильный треугольник со стороной  $a$  вписан прямоугольный треугольник так, что его гипотенуза параллельна той стороне правильного треугольника, на которой лежит вершина. При какой длине гипотенузы его площадь будет наибольшей?

*Решение.* Проведем  $CK \perp AB$  (рис. 46).  $CK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Пусть  $A_1B_1 = x$ . Тогда  $CK_1 = \frac{x\sqrt{3}}{2}$ . Проведем  $C_1D \perp A_1B_1$ .  $C_1D = KK_1 = CK - CK_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{x\sqrt{3}}{2}$ .

Площадь треугольника  $A_1B_1C_1$   $S = \frac{1}{2}x \frac{a\sqrt{3} - x\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}x(a - x)$ . Как мы видим, вопрос о максимальной площади треугольника  $ABC$  связан с исследованием на наибольшее значение функции  $S(x) = -x^2 + ax$ . Эта функция квадратичная. Она принимает наибольшее значение при  $x = \frac{a}{2}$ .

И здесь, как никогда, уместно вспомнить название настоящего параграфа «Казалось бы решение завершено».

В самом деле, мы получили, что  $A_1B_1 = \frac{a}{2}$ , т. е.  $A_1B_1$  — средняя линия. Но как в таком случае треугольник  $A_1B_1C_1$  может быть прямоугольным? Значит,  $x = \frac{a}{2}$  не подходит. Но все же, где мы совершили ошибку?

Дело в том, что не при всяком положении отрезка  $A_1B_1$  можно найти на стороне  $AB$  такую точку  $C_1$ , что  $\angle A_1C_1B_1 = 90^\circ$ . Такая точка существует, если  $KK_1 \leq \frac{1}{2}A_1B_1$ , т. е.  $\frac{a\sqrt{3} - x\sqrt{3}}{2} \leq \frac{x}{2}$ ,  $x \geq \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}$ .

Таким образом, наша ошибка заключалась в том, что мы исследовали на наибольшее значение функцию  $S(x) = -x^2 + ax$  на  $D(S) = R$ . На самом деле, это исследование надо было проводить на промежутке  $I = \left[ \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}; a \right)$ . Сделаем это.

Функция  $S$  убывает на  $\left[ \frac{a}{2}; \infty \right)$ . Легко проверить, что  $\frac{a}{2} < \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}$ . Следовательно,  $\max_{x \in I} S(x) = S\left(\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}\right)$ .

*Ответ.*  $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}$ .

**6.21.** Боковая поверхность треугольной пирамиды равна  $S$ , а каждое из боковых ребер равно  $l$ . Найти плоские углы при вершине, зная, что они образуют арифметическую прогрессию с разностью  $\frac{\pi}{3}$ .

*Решение.* Предложим схему рассуждений, которую, как нам кажется, скорее всего выберет учащийся.

$\alpha - \frac{\pi}{3}, \alpha, \alpha + \frac{\pi}{3}$  — величины плоских углов при вершине пирамиды. Далее для поиска  $\alpha$  будет составлено уравнение  $\frac{1}{2} l^2 \sin \left( \alpha - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{1}{2} l^2 \sin \left( \frac{\pi}{3} + \alpha \right) + \frac{1}{2} l^2 \sin \alpha = S$ .

Возможен и другой путь, правда, менее вероятный, чем первый, даже в какой-то степени, неестественный. В условии задачи прямо указано, что существует пирамида с плоскими углами при вершине, образующими арифметическую прогрессию с разностью  $\frac{\pi}{3}$ . Проверим это, хотя не доверять условию задачи не принято.

По свойству плоских углов трехгранного угла имеет место следующая система:

$$\begin{cases} \alpha - \frac{\pi}{3} + \alpha + \alpha + \frac{\pi}{3} < 2\pi, \\ \alpha + \frac{\pi}{3} < \alpha - \frac{\pi}{3} + \alpha. \end{cases}$$

Однако эта система противоречива. Наше недоверие оправдано: такой пирамиды в природе не существует.

Итак, нам предложили искать нечто в том, что не существует. Странно? Хотя с логической точки зрения ничего странного нет. Ведь имеет формальное право существовать такая задача. Дано  $2 \cdot 2 = 5$ . Доказать, что  $2 \cdot 3 = 7$ .

А если оценить задачи с ложными данными не с позиций формальной логики, а с позиций здравого смысла? Такой анализ проведен в работе [10]. Мы лишь ограничимся следующими замечаниями.

Если условие задачи носит одновременно характер реализованной ситуации (например, дана пирамида..., дан конус..., и т. п.) и противоречивости, то умышленное предложение решить ее учащемуся, по меньшей мере, провокационно.

Однако не все экзаменаторы придерживаются такой точки зрения. Поэтому абитуриент должен знать, что иногда такие задачи встречаются на экзаменах. Кстати, не только «злой умысел» экзаменатора сталкивает абитуриента с «ложными» задачами. Все может оказаться гораздо проще — в условии по недосмотру допущена ошибка.

## Б. Параметр «расставляет ловушки».

В последние два-три десятилетия задачи с параметрами постоянно «гостят» на вступительных экзаменах многих вузов. Это, скорее всего, объясняется тем, что на задачах с параметрами можно проверить знание основных разделов школьной математики, уровень математического и логического мышления, первоначальные навыки исследовательской деятельности.

Высокая диагностическая ценность задач с параметрами выгодна для экзаменаторов — аргумент мало утешительный для абитуриентов. Более того, опыт показывает, что для многих эти задачи являются камнем преткновения. Поэтому не вызывает сомнений тот факт, что к «встрече с параметром» надо специально готовиться. Вместе с тем, в настоящем пункте мы не ставим перед собой цель познакомить читателя с основными приемами решения задач с параметрами (по правде говоря, в рамках одного пункта это сделать просто невозможно). Однако, рассказывая о «подводных рифах», этот класс задач нельзя обойти.

Все же какую роль мы отводим настоящему пункту? В первую очередь рекламную, т.е. мы хотим продемонстрировать абитуриенту, мало знакомому с параметром, что такого рода задачи, как минимум, коварны и их надо обязательно научиться решать.

Ниже будет предложен ряд примеров, по-нашему мнению, наиболее ярко подтверждающий сказанное выше.

**6.22.** Найти все значения параметра  $b$ , при которых система

$$\begin{cases} (\operatorname{ctg} x - 1)(x + b) = 0, \\ -1 < x < 1 \end{cases}$$

имеет только одно решение.

*Решение.* Уравнение  $\operatorname{ctg} x = 1$  на промежутке  $(-1 ; 1)$  имеет только один корень  $x = \frac{\pi}{4}$ . Значит, первое уравнение

системы имеет не более двух различных корней на промежутке  $(-1; 1)$ . Задача свелась к тому, чтобы найти все значения  $b$ , при которых уравнение  $x = -b$  не будет давать новых решений данной системы. Понятно, что  $-b = \frac{\pi}{4}$ , т.е.

$b = -\frac{\pi}{4}$ , — одно из искомых значений. Далее, с учетом условия  $-1 < x < 1$  значение  $x = -b$  не будет являться решением системы, если  $-b \leq -1$  или  $-b \geq 1$ , т.е.  $b \leq -1$  или  $b \geq 1$ .

На этом этапе важно не упустить, что найденные значения параметра не составляют окончательный ответ. В самом деле, область определения исходной системы — все числа, кроме  $x = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . В силу этого замечания, если  $b = 0$ , то  $x = -b$  не является решением системы.

*Ответ.*  $b \leq -1$ , или  $b = -\frac{\pi}{4}$ , или  $b = 0$ , или  $b \geq 1$ .

**6.23.** При каких действительных  $a$  множества решений уравнений  $4 \cos^2 x = a^2 - 6$  и  $1 - \cos 2x = \frac{a}{6}$  совпадают?

*Решение.* Первое из данных уравнений равносильно такому:  $\cos 2x = \frac{a^2 - 8}{2}$ , а второе —  $\cos 2x = 1 - \frac{a}{6}$ . Следующее требование представляется очевидным:

$$\frac{a^2 - 8}{2} = 1 - \frac{a}{6}.$$

Отсюда  $a = 3$  или  $a = -\frac{10}{3}$ . При этих значениях параметра множества корней уравнений совпадают.

Однако полученные результаты не дают полный ответ на вопрос, поставленный в задаче. Действительно, если исходные уравнения не имеют корней, то понятно, что множества их решений также совпадают. Поэтому возникла еще необходимость решить систему

$$\begin{cases} \left| \frac{a^2 - 8}{2} \right| > 1, \\ \left| 1 - \frac{a}{6} \right| > 1. \end{cases}$$

Отсюда

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 - 8 > 2, \\ a^2 - 8 < -2, \\ \frac{a}{6} - 1 > 1, \\ \frac{a}{6} - 1 < -1, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 > 10, \\ a^2 < 6, \\ a > 12, \\ a < 0. \end{array} \right.$$

Решением этой системы будет множество

$$(-\infty; -\sqrt{10}) \cup (-\sqrt{6}; 0) \cup (12; \infty).$$

Объединим полученные результаты в

*Ответ.*  $a < -\sqrt{10}$ , или  $-\sqrt{6} < a < 0$ , или  $a = 3$ , или  $a > 12$ .

**6.24.** При каких  $a$  множеством решений неравенства  $\sqrt{5-x} + \sqrt{x^2 + 2ax + a^2} \leq 3$  является отрезок числовой прямой?

*Решение.* Имеем  $\sqrt{5-x} \leq 3 - |x+a|$ . Правая часть этого неравенства задает семейство «уголков», вершины ко-

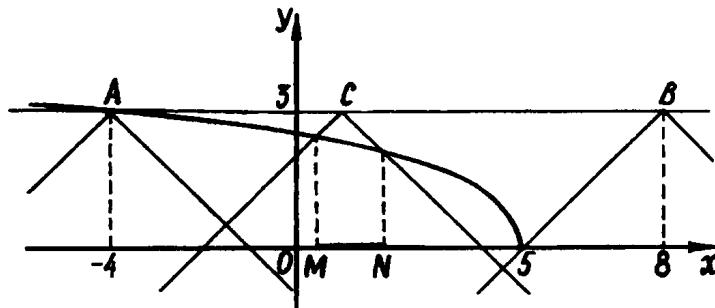


Рис. 47.

торых лежат на прямой  $y = 3$  (рис. 47). Если вершина «уголка» находится между точками  $A$  и  $B$ , то обязательно найдутся промежутки области определения, на которых график левой

части неравенства не выше графика правой части. На рис. 47 показано одно из промежуточных положений «уголка» с

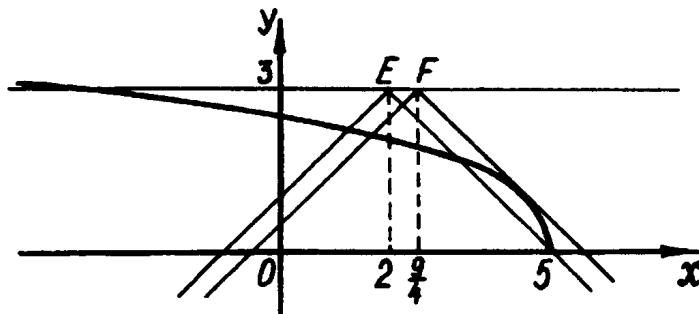


Рис. 48.

вершиной С. В этом случае решением исходного неравенства будут все точки отрезка MN. Легко показать (это видно по рисунку), что при  $a \in (-8; 4)$  вершина «уголка» находится между точками A и B, и возникает желание считать промежуток  $(-8; 4)$  искомым ответом. Но условие задачи требует, чтобы решением неравенства был отрезок числовой прямой. А если вершина «уголка» совпадает с любой из точек отрезка EF, включая E и не включая F (рис. 48, точка F соответствует моменту касания), то решением неравенства будет или отрезок и точка, или два отрезка. Определив координаты точек E и F, получаем

*Ответ.*  $\left( -8; -\frac{9}{4} \right] \cup (-2; 4).$

**6.25.** При каких значениях параметра  $a$  система уравнений

$$\begin{cases} y = a(x - 3), \\ \frac{1}{\log_x 2} + \frac{1}{\log_2 x} = 1 \end{cases}$$

не имеет решений?

*Решение.* Система

$$\begin{cases} y = a(x - 3), \\ xy = 2, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \\ y \neq 1 \end{cases}$$

равносильна исходной.

Теперь представляется целесообразным перейти на графический язык.

Первое уравнение системы задает семейство прямых, проходящих через точку  $(3; 0)$ . Четыре других соотношения системы порождают правую ветвь гиперболы  $y = \frac{2}{x}$ , из которой «выколоты» две точки  $(1; 2)$  и  $(2; 1)$  (рис. 49).

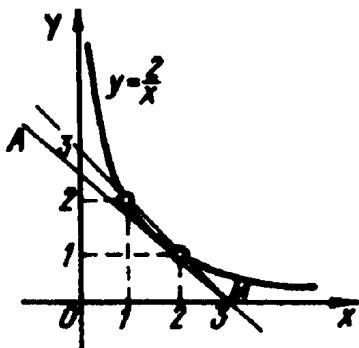


Рис. 49.

Ясно, что если прямая семейства  $y = a(x - 3)$  вращается внутри угла  $OMA$  ( $MA$  — касательная к гиперболе), то система не имеет решений. Найдем угловой коэффициент прямой  $MA$ .

Пусть  $(x_0; y_0)$  — координаты точки касания прямой  $MA$  с

гиперболой  $y = \frac{2}{x}$ . Тогда уравнение касательной имеет вид

$$y - y_0 = -\frac{2}{x_0^2}(x - x_0).$$

Прямая  $MA$  проходит через точку  $(0; 3)$ , значит, координаты этой точки удовлетворяют уравнению прямой, т.е.

$$-y_0 = -\frac{2}{x_0^2}(3 - x_0).$$

Но  $y_0 = \frac{2}{x_0}$ . Отсюда получаем уравнение

$$-\frac{2}{x_0} = -\frac{2}{x_0^2}(3 - x_0),$$

корнем которого будет  $x_0 = \frac{3}{2}$ .

Тогда угловой коэффициент прямой  $MA$  равен  $-\frac{8}{9}$ .

При указанном повороте параметр  $a$  принимает все значения из промежутка  $\left(-\frac{8}{9}; 0\right]$ . (Заметим, что мы включили  $a = 0$ , поскольку прямая  $MO$  не пересекает гиперболу.)

Важно при записи ответа не упустить, что существует еще одна прямая семейства, а именно  $y = -x + 3$ , проходящая через «дырки» в гиперболе. Поэтому при  $a = -1$  система также не имеет решений.

*Ответ.*  $a = -1$  или  $-\frac{8}{9} < a \leq 0$ .

6.26. Найти все  $a$ , при которых системы

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 0, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

равносильны.

*Решение.* Перепишем первую систему в виде

$$\begin{cases} y = -x + \pi k, \\ x^2 + y^2 = a, \text{ где } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Первое уравнение системы задает семейство параллельных прямых, изображенное на рис. 50. Для случая  $a > 0$

второе уравнение системы задает семейство окружностей.

Разумеется, что все решения второй из исходных систем содержатся среди решений первой. Обратное требование выполняется лишь тогда, когда окружности  $x^2 + y^2 = a$  имеют общие точки только с прямой  $y = -x$ . Расстояние между соседними прямыми равно  $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ , поэтому для радиуса окружности полу-

учаем ограничение  $\sqrt{a} < \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ . Отсюда  $0 \leq a < \frac{\pi^2}{2}$ . Поскольку мы рассматриваем случай  $a > 0$ , то значение  $a = 0$  требует проверки. Очевидно оно подходит.

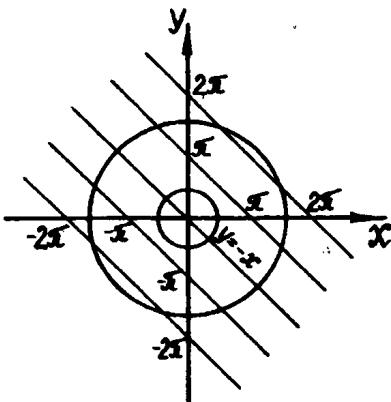


Рис. 50.

Вывод о том, что решение завершено, преждевременный. Действительно, ведь при  $a < 0$  исходные системы решений не имеют, а следовательно, они равносильны. Кстати, с подобной ситуацией мы встречались в задаче 6.23.

*Ответ.*  $a < \frac{\pi^2}{2}$ .

6.27. Найти все  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} axy + x - y + \frac{3}{2} = 0, \\ x + 2y + xy + 1 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

*Решение.* Очевидно ни при каких  $y$  пара  $(-2; y)$  не является решением данной системы. Тогда из второго уравнения системы получаем  $y = \frac{-x-1}{x+2}$ . С учетом последнего, первое уравнение системы можно преобразовать к следующему:  $2x^2(1-a) + x(9-2a) + 8 = 0$ . Это уравнение имеет единственное решение, если  $1-a=0$  или  $D = (9-2a)^2 - 64(1-a) = 0$ , т. е. при  $a=1$  или  $a = \frac{-7 \pm 4\sqrt{2}}{2}$ .

Но эти найденные значения параметра  $a$  не исчерпывают ответ задачи. Поучительный момент заключается в том, что требованию задачи удовлетворяет и тот случай, когда рассматриваемое квадратное уравнение имеет два (!) различных корня. Однако один из них обязательно должен быть равен  $-2$ .

Подставив  $x = -2$  в соответствующее уравнение, получим  $a = -\frac{1}{2}$ . Решение будет полностью «чистым», если мы убедимся, что при  $a = -\frac{1}{2}$  уравнение имеет два корня, из которых только один равен  $-2$ .

*Ответ.*  $a = 1$ , или  $a = \frac{-7 \pm 4\sqrt{2}}{2}$ , или  $a = -\frac{1}{2}$ .

6.28. Действительные  $x$ ,  $y$ ,  $a$  таковы, что

$$\begin{cases} x + y = a - 1, \\ xy = a^2 - 7a + 14. \end{cases}$$

При каких  $a$  сумма  $x^2 + y^2$  принимает наибольшее значение?

*Решение.* Имеем

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= (x + y)^2 - 2xy = (a - 1)^2 - 2a^2 + 14a - 28 = \\&= -a^2 + 12a - 27.\end{aligned}$$

Рассмотрим функцию  $f(a) = -a^2 + 12a - 27$ . Очевидно при  $a = 6$  эта функция принимает наибольшее значение.

С первого взгляда представляется очень соблазнительным считать ответом  $a = 6$ . Однако при таком  $a$  исходная система принимает вид

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 8 \end{cases}$$

и решений не имеет.

Этот факт не случаен. Ведь мы не выяснили при каких  $a$  исходная система имеет решения. Сделаем это.

Первоначальная система будет совместной, если дискриминант квадратного уравнения  $t^2 - t(a - 1) + a^2 - 7a + 14 = 0$  принимает неотрицательные значения. Имеем  $D = -3a^2 + 26a - 55$ . Решением неравенства  $D \geq 0$  будет промежуток  $\left[\frac{11}{3}; 5\right]$ . Именно при всех  $a$  из этого отрезка (и только этих) исходная система имеет решения.

Функция  $f$  возрастает на  $(-\infty; 6]$ . Поскольку  $\left[\frac{11}{3}; 5\right] \subset (-\infty; 6]$ , то  $\max_{\left[\frac{11}{3}; 5\right]} f(a) = f(5)$ .

*Ответ.*  $a = 5$ .

Заметим, что «ловушки» в этой задаче и в 6.20 во многом схожи.

**6.29.** При каких действительных  $a$  уравнение

$$(a + 1)2^{2x} + 2^x + 3 - a = 0$$

имеет единственное решение?

*Решение.* Произведем замену  $2^x = y$ ,  $y > 0$ . Тогда получаем  $(a + 1)y^2 + y + 3 - a = 0$ .

Естественно в первую очередь рассмотреть случай, когда  $a = -1$ . Тогда полученное уравнение имеет корень  $y = -4$ . Но  $y > 0$ , следовательно,  $a = -1$  не входит в ответ.

Если  $a \neq -1$ , то имеем квадратное уравнение. Теперь важно не упустить все случаи, которые обеспечивают наличие единственного корня у исходного уравнения: а) квадратное

уравнение имеет один двойной положительный корень; б) один корень — положительный, другой — равен нулю; в) один корень — положительный, другой — отрицательный.

Для случая а) имеем  $D = 4a^2 - 8a - 11 = 0$ , т. е.  $a = \frac{2 \pm \sqrt{15}}{2}$ . Если  $D = 0$ , то квадратное уравнение имеет двойной корень  $y = -\frac{1}{2(a+1)}$ , который должен быть положительным. Отсюда  $a < -1$ . Но этому требованию корни дискриминанта не удовлетворяют.

Случай б). Если один из корней квадратного уравнения равен нулю, то  $a = 3$ . Но при таком значении параметра другой корень будет отрицательным, что нам не подходит.

Обеспечим выполнение случая в) следующим требованием, полученным с помощью теоремы Виета:

$$\frac{3-a}{a+1} < 0.$$

Отсюда  $a < -1$  или  $a > 3$ . (Заметим, что для квадратного уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$  условие  $\frac{c}{a} < 0$  достаточно для наличия двух различных корней, поэтому в рассматриваемом случае было бы лишним решать еще неравенство  $D > 0$ .)

*Ответ.*  $a < -1$  или  $a > 3$ .

6.30. Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых только один корень уравнения

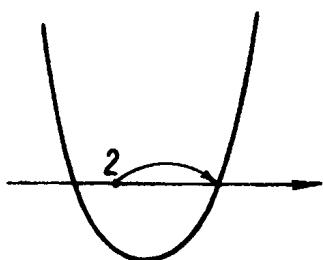


Рис. 51.

$$x^2 + 2(a-3)x + 9 - 2a = 0$$

удовлетворяет неравенству  
 $x < 2$ .

*Решение.* Если дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в левой части уравнения, положительный, то число 2 должно находиться между корнями или совпадать с большим из них (рис. 51). Первый случай реализуется, если

$f(2) < 0$  ( $f$  — квадратный трехчлен), т. е.  $2a + 1 < 0$ ,  $a < -\frac{1}{2}$ . Второй случай полностью описывается системой

$$\begin{cases} f(2) = 0, \\ x_0 < 2, \text{ где } x_0 \text{ — абсцисса вершины параболы.} \end{cases}$$

Легко убедиться, что эта система решений не имеет. Чтобы решение задачи стало полным, необходимо еще рассмотреть случай, когда  $D = 0$ . Имеем  $\frac{1}{4}D = (a - 3)^2 - 9 + 2a = 0$ . Отсюда  $a = 0$  или  $a = 4$ . Если  $a = 0$ , то уравнение имеет один двойной корень  $x = 3$ , что не подходит. Если  $a = 4$ , то получаем  $x = -1$ .

*Ответ.*  $a < -\frac{1}{2}$  или  $a = 4$ .

### Упражнения.

6.31. Две боковые стороны треугольника 26 и 30, а высота, опущенная на третью сторону, — 24. Вычислить медиану треугольника, проведенную к третьей стороне.

6.32. Точка  $M$  удалена от сторон угла в  $60^\circ$  на расстояния  $\sqrt{3}$  и  $3\sqrt{3}$  (основания перпендикуляров, опущенных из  $M$  на стороны угла, лежат на сторонах, а не на их продолжениях). Прямая, проходящая через  $M$ , пересекает стороны угла и отсекает треугольник периметра 12. Найти площадь этого треугольника.

6.33. Около равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $AC = BC$ ) описана окружность радиуса  $R$ . Угол  $C$  треугольника имеет величину  $\alpha$  ( $\alpha < \frac{\pi}{2}$ ). Точка  $E$  — середина дуги  $BC$  описанной окружности. Найти радиус окружности, касающейся внешним образом описанной окружности в точке  $E$  и прямой  $AB$ .

6.34. Две прямые, перпендикулярные стороне  $AC$  треугольника  $ABC$ , делят этот треугольник на три равновеликие части. Известно, что отрезки этих прямых, заключенные внутри треугольника, равны между собой и равны стороне  $AC$ . Найти углы треугольника  $ABC$ .

6.35. Каждый плоский угол трехгранного угла с вершиной  $S$  имеет величину  $60^\circ$ . На ребрах трехгранного угла взяты соответственно точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  так, что  $SA = 2a$ ,  $SB = SC = a$ . Найти радиус сферы, касающейся ребер угла и плоскости  $ABC$ .

**6.36.** В основании пирамиды  $SABCD$  с вершиной  $S$  лежит равнобокая трапеция  $ABCD$  с меньшим основанием  $AB = a$  и острым углом  $\alpha$ . Высота  $SO$  пирамиды равна  $h$ . Прямая  $AO$  пересекает сторону  $CD$  в точке  $K$ , являющейся ее серединой. Найдите угол, образованный боковой гранью  $SBC$  с плоскостью основания, если  $AO:OK = 8:1$  и  $\angle AOB = 90^\circ$ .

**6.37.** Основанием призмы  $ABC A_1 B_1 C_1$  служит правильный треугольник  $ABC$ , длина стороны которого равна  $2a$ . Ортогональной проекцией призмы на плоскость  $ABC$  является трапеция с боковой стороной  $AB$  и площадью в два раза больше площади основания. Найти высоту призмы, если  $AB_1 = b$ .

**6.38.** В основании правильной четырехугольной пирамиды  $SABCD$  лежит квадрат  $ABCD$  с длиной стороны, равной  $a$ . Плоскости боковых граней образуют с плоскостью основания пирамиды углы, равные  $\alpha$ . На сторонах  $AD$  и  $BC$  основания взяты точки  $E$  и  $F$  так, что  $AE = \frac{2}{3}a$  и  $CF = \frac{a}{3}$ .

Через эти точки проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания пирамиды угол  $\beta$ . Найти площадь получившегося сечения.

**6.39.** Длина апофемы боковой грани правильной треугольной пирамиды равна  $k$ . Пирамида пересечена плоскостью, равноудаленной от всех ее вершин. Найдите площадь получившегося сечения, если боковое ребро пирамиды составляет с плоскостью ее основания угол величиной  $\beta$ .

**6.40.** Дан отрезок длины 2. Три окружности радиуса 2 имеют центры в концах отрезка и в его середине. Найдите радиус четвертой окружности, касающейся трех данных.

**6.41.** В треугольнике  $ABC$   $AB = c$ ,  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $\sin \angle BAC = \frac{3}{5}$ ,  $\sin \angle ABC = \frac{5}{13}$ ,  $5a + 13b + 65c = 320$ . Найти  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

**6.42.** Основанием пирамиды  $SABCD$  служит прямоугольник  $ABCD$ , длина диагонали которого равна  $d$ , а  $\angle CAD = \varphi$ . Плоскости противоположных боковых граней  $ASB$  и  $CSD$  составляют с плоскостью основания пирамиды углы, величиной  $\alpha$  и  $2\alpha$  соответственно. Определите объем пирамиды, если известно, что  $AS = BS$ .

**6.43.** В прямоугольном параллелепипеде  $ABCDA_1B_1C_1D_1$   $AB = a$ ,  $BC = a\sqrt{7}$ . Угол между прямыми  $CB_1$  и  $BD_1$  равен  $45^\circ$ . Найти  $AA_1$ .

**6.44.** Дан куб с основаниями  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$ , где  $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$ . В угол  $A$  куба вписан шар радиуса  $R = 0,5$ . Найти радиус шара, касающегося граней трехгранного угла куба с вершиной  $C$  и данного шара, при условии, что ребро куба  $a = 1,5$ .

**6.45.** В основании четырехугольной пирамиды лежит выпуклый четырехугольник, две стороны которого равны 6, а две другие равны 10. Высота пирамиды равна 7. Все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом  $60^\circ$ . Найти объем пирамиды.

**6.46.** При каких значениях  $a$  система

$$\begin{cases} (\operatorname{tg} x - \sqrt{3})(x - a) = 0, \\ 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

имеет только одно решение?

**6.47.** При каких значениях  $c$  система

$$\begin{cases} (\operatorname{ctg} x + \sqrt{3})(x + c) = 0, \\ 2 \leq x < 4 \end{cases}$$

имеет только одно решение?

**6.48.** При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$\frac{x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + 3a - 2}{x^2 - 6x + 5} = 0$$

имеет единственное решение?

**6.49.** При каких значениях  $a$  множества решений уравнений

$$\sin^2 x = 2a^2 - a \text{ и } \cos 2x = 3 - 4a$$

совпадают?

**6.50.** Найти  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} 3y + 2 + xy = 0, \\ x(y + 1 - a) + y(2a - 3) + a + 3 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

**6.51.** Действительные числа  $x$ ,  $y$ ,  $a$  таковы, что

$$\begin{cases} x + y = 2a - 1, \\ x^2 + y^2 = a^2 + 2a - 3. \end{cases}$$

При каком значении  $a$  произведение  $xy$  принимает наименьшее значение?

6.52. При каких значениях параметра  $a$  сумма квадратов корней уравнения  $4x^2 - 28x + a = 0$  равна 22,5?

6.53. При каком значении параметра  $a$  сумма квадратов корней уравнения  $x^2 + x\sqrt{a^2 - 4a} - a - 2 = 0$  принимает наименьшее значение?

6.54. Найти все значения  $p$ , при которых уравнение  $(p - 4)9^x + (p + 1)3^x + 2p - 1 = 0$  не имеет решений.

6.55. Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = \sqrt{x^2 - 9}, \\ 5x - 4y + a = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

6.56. При каких  $a$  система

$$\begin{cases} 2^{x+y} - 2^{2x-y} = 1 - 2^a, \\ 2^{4x} - 2^{x+3y+1} = 3 \cdot 2^{a+2y} - 2^{2y+2} \end{cases}$$

имеет единственное решение?

## § 7. Умный гору обойдет\*

Наверное, Вам, уважаемый читатель, неоднократно встречались задачи, решения которых можно было провести разными способами. И, конечно, Вы старались найти тот, который вел к цели быстрее. Уметь обнаружить рациональные решения особенно важно тогда, когда Вы оказались в жесткой атмосфере конкурсного экзамена, где постоянно над абитуриентом нависает угроза цейтнота.

Зачастую по закону зловредности длинное решение менее замаскировано, чем короткое. Скорее всего это явление имеет психологические корни. Так, всем понятно, что без «решательных» навыков на экзамене делать нечего. Но навыки формируют лишь путем решения большого числа однотипных задач. Однако эта полезная работа в качестве приложения имеет определенные недостатки и в первую очередь — формирование шаблонного мышления. Очевидно, здесь мы сталкиваемся с извечной проблемой поиска золотой середины. Поэтому, к сожалению, как и в предыдущем параграфе, мы вынуждены ограничиться лишь банальной рекомендацией. Как правило, видно, что выбранный путь решения сопряжен с большими техническими сложностями. В таких случаях бывает полезно еще раз проанализировать условие задачи, а самое главное, попытаться найти ее конкретные особенности, позволяющие обнаружить нетрадиционную идею.

### A. Когда модуль можно не раскрывать.

Одним из распространенных (а порой единственным возможным) способом решения задач, содержащих модуль, есть процесс его раскрытия. И, наверное, не раз читателю пришлось испытать все прелести такой «творческой» работы. Однако для некоторых примеров (подчеркнем, именно некоторых) знание ряда популярных свойств модуля может значительно сократить решение.

Напомним некоторые из них.

*Свойство 1.* Для любого действительного  $a$   $|a| \geq 0$ .

*Свойство 2.*  $|a| + |b| = a + b \Leftrightarrow a \geq 0 \text{ и } b \geq 0$ .

*Свойство 3.*  $|a| + |b| = |a + b| \Leftrightarrow ab \geq 0$ .

---

\* Название параграфа заимствовано в [4].

*Свойство 4.*  $|a| + |b| = |a - b| \Leftrightarrow ab \leq 0$ .

*Свойство 5.* Для любых действительных  $a$  и  $b$   $|a| + |b| \geq |a + b|$ .

*Свойство 6.*  $|a| - |b| \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 \geq 0$ .

7.1. Решить уравнение  $|x - 2| + |x - 1| = x - 5$ .

*Решение.* Поскольку левая часть данного уравнения неотрицательна, то  $x \geq 5$ . Это позволяет раскрыть модуль и перейти к системе, равносильной исходному уравнению.

$$\begin{cases} x - 2 + x - 1 = x - 5, \\ x \geq 5. \end{cases}$$

Отсюда получаем

*Ответ.* Нет решений.

7.2. Решить неравенство

$$\log_4 \frac{4x - 5}{|x - 1|} \geq \frac{1}{2}.$$

*Решение.* Понятно, что областью определения исходного неравенства есть промежуток  $\left(\frac{5}{4}; \infty\right)$ . Поэтому можно сразу перейти к равносильной системе

$$\begin{cases} \log_4 \frac{4x - 5}{x - 1} \geq \frac{1}{2}, \\ x > \frac{5}{4}. \end{cases}$$

Далее

$$\begin{cases} \frac{4x - 5}{x - 1} \geq 2, \\ x > \frac{5}{4}, \end{cases}$$
$$\begin{cases} \frac{2x - 3}{x - 1} \geq 0, \\ x > \frac{5}{4}. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим

*Ответ.*  $x \geq \frac{3}{2}$ .

7.3. Решить уравнение  $|\cos x| = \frac{\cos x}{(x + 3/2)^2}$ .

*Решение.* Легко понять, что при  $\cos x < 0$  данное уравнение решений не имеет. Отсюда запишем:

$$\begin{cases} \cos x = -\frac{\cos x}{2}, \\ \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 1, \\ \cos x > 0. \end{cases}$$

Эта система равносильна совокупности

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 1, \\ \cos x > 0. \end{cases}$$

Уравнение системы имеет два корня:  $x = -\frac{1}{2}$  или  $x = -\frac{5}{2}$ . Так как  $\cos\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$ ,  $\cos\left(-\frac{5}{2}\right) < 0$ , то второй корень не подходит.

*Ответ.*  $x = -\frac{1}{2}$  или  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

7.4. Решить уравнение  $|x^2 + x - 2| + |x - 3| = x^2 + 1$ .

*Решение.* Пусть  $x^2 + x - 2 = a$  и  $3 - x = b$ . Поскольку  $a + b = x^2 + 1$ , то, применяя свойство 2, можно сразу перейти к системе, равносильной данному уравнению:

$$\begin{cases} x^2 + x - 2 \geq 0, \\ 3 - x \geq 0. \end{cases}$$

Ее решением будет

*Ответ.*  $x \leq -2$  или  $1 \leq x \leq 3$ .

Заметим, что в решении этого уравнения можно использовать свойство 4.

7.5. Решить систему

$$\begin{cases} x + y = 9, \\ |x - 3| + |y - 1| = 5. \end{cases}$$

*Решение.* Перепишем данную систему в таком виде:

$$\begin{cases} x - 3 + y - 1 = 5, \\ |x - 3| + |y - 1| = 5. \end{cases}$$

Отсюда получаем  $|x - 3| + |y - 1| = x - 3 + y - 1$ . Следовательно, исходная система равносильна такой:

$$\begin{cases} x + y = 9, \\ x - 3 \geq 0, \\ y - 1 \geq 0. \end{cases}$$

Ее решения — это все точки отрезка  $AB$  прямой  $x + y = 9$  (рис. 52).

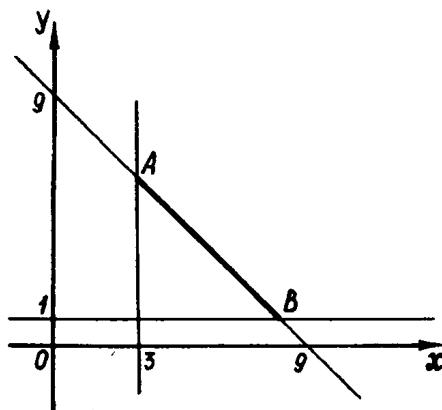


Рис. 52.

**7.6. Решить систему**

$$\begin{cases} |x - y| = x + y, \\ |x + y| = x - y. \end{cases}$$

*Решение.*

Имеем

$$|x - y| + |x + y| = x - y + x + y. \text{ Отсюда } x + y \geq 0 \text{ и } x - y \geq 0.$$

Тогда данная система равносильна такой:

$$\begin{cases} x - y = x + y, \\ x + y = x - y, \\ x + y \geq 0, \\ x - y \geq 0. \end{cases}$$

Отсюда

*Ответ.*  $x \geq 0$  и  $y = 0$ .

**7.7. Решить уравнение**  $\left| \frac{8x}{x^3 - 8} \right| + |x| = \frac{x^4}{|x^3 - 8|}$ .

*Решение.* Преобразуем правую часть уравнения, не изменяя область определения последнего. Имеем  $\frac{x^4}{|x^3 - 8|} = \left| \frac{x^4}{x^3 - 8} \right| = \left| \frac{8x}{x^3 - 8} + x \right|$ . Тогда исходное уравнение становится таким:

$$\left| \frac{8x}{x^3 - 8} \right| + |x| = \left| \frac{8x}{x^3 - 8} + x \right|.$$

В силу свойства 3 это уравнение равносильно неравенству

$$\frac{8x}{x^3 - 8} \cdot x \geq 0.$$

Отсюда  $\frac{8x^2}{x^3 - 8} \geq 0$ , т.е.  $\begin{cases} x^3 - 8 > 0, \\ x = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2, \\ x = 0. \end{cases}$

*Ответ.*  $x > 2$  или  $x = 0$ .

Одной из разновидностей свойства 4 есть утверждение о том, что уравнение  $|x - a| + |x - b| = b - a$  при  $b \geq a$  равносильно неравенству  $a \leq x \leq b$ . Впрочем, этот факт имеет простую геометрическую интерпретацию. Это уравнение говорит о том, что сумма расстояний на координатной прямой от точки с координатой  $x$  до точек с координатами  $a$  и  $b$  равна  $b - a$ .

### 7.8. При каких $a$ уравнение

$$|x + a^3| + |x + 1| = 1 - a^3$$

имеет не менее четырех различных решений, являющихся целыми числами?

*Решение.* Вначале заметим, что  $a^3 \leq 1$ , так как левая часть уравнения неотрицательна. Воспользуемся свойством 4. Искомые значения переменной  $x$  — это координаты точек числовой прямой, у которых сумма расстояний до точек  $-a^3$  и  $-1$  равна  $1 - a^3$ , т.е. длине отрезка  $[-1; -a^3]$ . Следовательно, координата каждой точки указанного отрезка, и только она, есть корень уравнения. Для завершения решения достаточно потребовать, чтобы отрезок  $[-1; -a^3]$  содержал четыре целых числа. Ясно, что этими числами будут  $-1, 0, 1, 2$ . Отсюда получаем условие  $2 \leq -a^3$ , т.е.  $a \leq -\sqrt[3]{2}$ .

*Ответ.*  $a \leq -\sqrt[3]{2}$ .

### 7.9. Решить систему

$$\begin{cases} |x + y - 4| = \pi, \\ |x - 3| + |y - 1| = 3. \end{cases}$$

*Решение.* Выгодно данную систему переписать так:

$$\begin{cases} |x - 3 + y - 1| = \pi, \\ |x - 3| + |y - 1| = 3. \end{cases}$$

Тогда, применяя свойство 5, сразу получаем

*Ответ.* Нет решений.

### 7.10. Решить неравенство

$$|\lg x + 1| + \left| \lg \left( x + \frac{1}{x} \right) - 1 \right| \geq \lg(x^2 + 1).$$

*Решение.* Так как в данном неравенстве  $x > 0$ , то следующие преобразования правой части сохранят равносильность

$$\text{переходов. Имеем } \lg(x^2 + 1) = |\lg(x^2 + 1)| = \left| \lg x \left( x + \frac{1}{x} \right) \right| = \\ = \left| \lg x + \lg \left( x + \frac{1}{x} \right) \right| = \left| \lg x + 1 + \lg \left( x + \frac{1}{x} \right) - 1 \right|.$$

Итак, исходное неравенство равносильно такому:

$$|\lg x + 1| + \left| \lg \left( x + \frac{1}{x} \right) - 1 \right| \geq \left| \lg x + 1 + \lg \left( x + \frac{1}{x} \right) - 1 \right|.$$

Теперь понятно (свойство 5), что это неравенство выполняется при всех допустимых  $x$ , т.е. его решением будет область определения неравенства.

*Ответ.*  $x > 0$ .

### 7.11. Решить неравенство

$$\frac{(|x+5| - |x-2|)(|x+3| - |x|)}{|x-7| - |x+2|} \leq 0.$$

*Решение.* Здесь чрезвычайно эффективно работает свойство 6. Имеем неравенство, равносильное данному:

$$\frac{((x+5)^2 - (x-2)^2)((x+3)^2 - x^2)}{(x-7)^2 - (x+2)^2} \leq 0.$$

$$\text{Далее } \frac{7(2x+3) \cdot 3(2x+3)}{-9(2x-5)} \leq 0,$$

$$\frac{(2x+3)^2}{2x-5} \geq 0.$$

$$\text{Ответ. } x = -\frac{3}{2} \quad \text{или} \quad x > \frac{5}{2}.$$

### 7.12. Решить уравнение

$$|\sin|x| \cdot \cos|x|| \cdot |3 - 4\sin^2|x|| \cdot |4\cos^2|x| - 3| = \frac{1}{2}.$$

*Решение.* Заметив, что  $\cos x = \cos|x|$ , а  $\sin^2 x = \sin^2|x|$ , левую часть данного уравнения можно преобразовать так:

$$|\sin|x| \cdot \cos|x|| \cdot |3 - 4\sin^2|x|| \cdot |4\cos^2|x| - 3| = |\sin|x| \cos|x|| \times \\ \times |\sin^2|x|| \cdot |4\cos^2|x| - 3| = |(3\sin|x| - 4\sin^3|x|) \times \\ \times (4\cos^3|x| - 3\cos|x|)| = |\sin|3x| \cdot \cos|3x|| = \frac{1}{2} |\sin|6x||.$$

Таким образом, исходное уравнение равносильно уравнению  $|\sin|6x|| = 1$ , а это, в свою очередь, такому —  $\cos|6x| = 0$ , т.е.  $\cos 6x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Ответ.*  $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}, k \in \mathbb{Z}$ .

## Б. Помогают свойства функций.

С каждым уравнением (неравенством, системой) связаны конструирующие их аналитические выражения. Последние в свою очередь могут задавать функции одной или нескольких переменных. Поэтому присутствие функций, а точнее их свойства, не могут не влиять на решения задач такого рода. Просто в одних случаях мы как бы негласно используем свойства функций, в других — явно ссылаемся на них. Порой «гласное» смещение акцентов в сторону свойств функций может оказать существенную пользу в поиске рациональных идей решения. Подтвердим сказанное примерами.

7.13. Решить уравнение

$$\sqrt{11x+3} - \sqrt{2-x} = \sqrt{9x+7} - \sqrt{x-2}.$$

*Решение.* Конечно, это иррациональное уравнение можно решить путем традиционного возвведения обеих частей в квадрат. Однако, сравнив области определений функций  $y = \sqrt{x-2}$  и  $y = \sqrt{2-x}$ , приходим к выводу, что область определения исходного уравнения — одноэлементное множество  $\{2\}$ . Подставив  $x = 2$  в данное уравнение, приходим к выводу, что

*Ответ.*  $x = 2$ .

7.14. Решить неравенство  $\log_x \log_2(4^x - 6) > 0$ .

*Решение.* Обычно при решении логарифмических неравенств такого вида приходится рассматривать два случая  $0 < x < 1$  или  $x > 1$ , переходя к соответствующей совокупности двух систем. Но для данного неравенства полезно заметить, что  $4^x - 6 > 0$ , следовательно,  $x > 1$ . Таким образом, исходное неравенство равносильно следующему:

$$\log_2(4^x - 6) > 1.$$

Отсюда  $4^x - 6 > 2$ ,  $2^{2x} > 2^3$ ,  $x > \frac{3}{2}$ .

*Ответ.*  $x > \frac{3}{2}$ .

7.15. Решить неравенство  $\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 2 \geq 0$ .

*Решение.* Как правило, примеры такого вида решаются с помощью замены  $\sqrt[4]{x} = t$ . Вместе с тем, поскольку области значений функций  $y = \sqrt{x}$  и  $y = \sqrt[4]{x}$  — все неотрицательные числа, то исходное неравенство выполняется при всех допустимых  $x$ , т.е.

*Ответ.*  $x \geq 0$ .

7.16. Решить уравнение  $\sqrt{x^3 + 2} + \sqrt{x^3 - 2} = 1$ .

*Решение.* Опять-таки имеем стандартное иррациональное уравнение. Тем не менее не будем спешить возводить в квадрат. Так,  $x^3 \geq 2$ ,  $x^3 + 2 \geq 4$ , значит,  $\sqrt{x^3 + 2} \geq 2$  (функция  $y = \sqrt{t}$  возрастающая), и левая часть исходного уравнения не меньше 2.

*Ответ.* Нет решений.

7.17. Решить уравнение  $\sqrt{x - 2} - \sqrt{x + 3} = 4$ .

*Решение.* Поскольку  $0 \leq x - 2 < x + 3$  и функция  $y = \sqrt{t}$  возрастающая, то  $\sqrt{x - 2} < \sqrt{x + 3}$ .

Следовательно, левая часть данного неравенства на области определения принимает только отрицательные значения.

*Ответ.* Нет решений.

7.18. Решить неравенство  $\sqrt{x} - \sqrt{x + \sqrt{x}} < \frac{1}{16}$ .

*Решение.* Рассуждая как в предыдущем примере, приходим к выводу, что данное неравенство выполняется при всех  $x$  из области определения.

*Ответ.*  $x \geq 0$ .

7.19. Решить уравнение  $\sqrt[3]{x + 7} + \sqrt[3]{x - 1} = 2$ .

*Решение.* Традиционный метод решения уравнений такого вида хорошо известен. Впрочем, легко заметить, что  $x = 1$  — корень. Левая часть уравнения задает возрастающую функцию, правая — константу. Следовательно, данное уравнение может иметь не более одного корня. Но один уже есть, значит, он и составляет

*Ответ.*  $x = 1$ .

7.20. Решить уравнение  $\sqrt{x - 1} + \sqrt{x} = \frac{1}{x}$ .

*Решение.* В настоящем уравнении, как и в предыдущем, легко угадать корень  $x = 1$ . Функция  $y = \sqrt{x - 1} + \sqrt{x}$  возрастает на  $D(y) = [1, \infty)$ . На этом же множестве функция

$y = \frac{1}{x}$  убывает. Поэтому  $x = 1$  — единственный корень исходного уравнения.

*Ответ.*  $x = 1$ .

7.21. Решить уравнение  $x^2 + x + 12\sqrt{x+1} = 36$ .

*Решение.* Это уравнение легко «превратить» в рациональное четвертой степени. Поиск корней последнего затруднен, и учащийся должен обладать высокой степенью изобретательности, чтобы справиться с этой задачей. Попробуем выбрать иной путь, менее традиционный.

Как и в предыдущих двух примерах, несложно обнаружить, что  $x = 3$  — корень. Область определения исходного уравнения — промежуток  $[-1, \infty)$ . Но теперь уже, в отличие от ранее рассмотренных задач, левая часть уравнения не задает монотонную функцию. И вроде бы мы опять выбрали нерезультативную идею. Однако снова легко заметить, что на  $(0; \infty)$  указанная функция возрастает, причем корень  $x = 3$  принадлежит этому промежутку. Значит, на  $(0; \infty)$  данное уравнение имеет единственный корень. Осталось исследовать поведение функции  $y = x^2 + x + 12\sqrt{x+1}$  на отрезке  $[-1; 0]$ . Очевидно, что при  $x \in [-1; 0]$   $x^2 + x < 0$ , а  $12\sqrt{x+1} \leq 12$ . Следовательно, на  $[-1; 0]$  исходное уравнение корней не имеет.

*Ответ.*  $x = 3$ .

7.22. Решить уравнение

$$\sin^4 x + 2\cos^3 x + 2\sin^2 x - \cos x + 1 = 0.$$

*Решение.* Заменой  $\cos x = t$  можно свести это уравнение к алгебраическому четвертой степени. И при определенном опыте с этим уравнением справиться можно. Однако есть путь, который ведет к цели гораздо быстрее.

Перепишем исходное уравнение в таком виде:

$$(\sin^2 x + 1)^2 + \cos x \cos 2x = 0.$$

Так как  $(\sin^2 x + 1)^2 \geq 1$ , а  $\cos x \cos 2x \geq -1$ , то полученное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin^2 x + 1 = 1, \\ \cos x \cos 2x = -1. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x \cos 2x = -1. \end{cases}$$

Множество корней первого уравнения системы удобно представить в виде объединения двух множеств:  $\{2\pi m, m \in Z\}$  и  $\{\pi + 2\pi n, n \in Z\}$ .

Все числа из второго множества являются корнями второго уравнения системы, и ни одно число из первого множества этому требованию не удовлетворяет.

*Ответ.*  $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$ .

## В. Выгодно применить теорему Виета.

7.23. При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$x^2 + (3a + 9)(a - 1)x + (a + 3)(a - 2) = 0$$

имеет корни разных знаков?

*Решение.* Вряд ли у учащегося возникнет желание обратиться к формуле корней квадратного уравнения. Понятно, что здесь работает теорема Виета. Однако перед тем, как ее применить, надо предварительно убедиться, что данное уравнение имеет корни. (Например, утверждение, что сумма корней уравнения  $x^2 - 2x + 3 = 0$  равна 2, ошибочно, так как это уравнение вообще корней не имеет.) Поэтому «любовое» решение этой задачи — это поиск решений системы

$$\begin{cases} (3a + 9)^2(a - 1)^2 - 4(a + 3)(a - 2) > 0, \\ (a + 3)(a - 2) < 0. \end{cases}$$

Но первое неравенство системы является лишним требованием. Поясним это.

Пусть  $f(x)$  — квадратичная функция, определяемая левой частью данного уравнения. Второе неравенство системы означает, что  $f(0) < 0$ . А для квадратичной функции  $f$  с положительным старшим коэффициентом этого требования вполне достаточно для наличия двух различных корней.

Итак, решение неравенства  $(a + 3)(a - 2) < 0$  определяет

*Ответ.*  $-3 < a < 2$ .

7.24. Найти произведение корней уравнения

$$z^{\log_3 3x} = 25 \sqrt[3]{z^4}.$$

*Решение.* Запишем цепочку уравнений, равносильных данному:

$$\log_3 3z \cdot \log_3 z = \log_3 (25 \sqrt[3]{z^4}),$$

$$(\log_5 3 + \log_5 z) \log_5 z = 2 + \frac{4}{3} \log_5 z,$$

$$\log_5^2 z + (\log_5 3 - \frac{4}{3}) \log_5 z - 2 = 0.$$

Пусть  $\log_5 z = t$ . Имеем квадратное уравнение

$t^2 + (\log_5 3 - \frac{4}{3})t - 2 = 0$ . Но с такими коэффициентами его решать не хочется. Впрочем, этого делать и не надо. Используя результаты предыдущей задачи, приходим к выводу: полученное уравнение имеет два различных корня  $t_1$  и  $t_2$  (старший коэффициент и свободный член имеют разные знаки). Значит, исходное уравнение имеет два корня  $z_1$  и  $z_2$  такие, что  $t_1 = \log_5 z_1$  и  $t_2 = \log_5 z_2$ .

Далее с помощью теоремы Виета запишем

$$\log_5 z_1 + \log_5 z_2 = \frac{4}{3} - \log_5 3.$$

$$\text{Отсюда } \log_5 z_1 z_2 = \log_5 \frac{5^{\frac{4}{3}}}{3}, \quad z_1 z_2 = \frac{5^{\frac{4}{3}}}{3}.$$

$$\text{Ответ. } \frac{5^{\frac{4}{3}}}{3}.$$

7.25. Найти корни уравнения  $3^x \cdot 4^{\frac{x^2+2}{3}} = 144$ , принадлежащие области определения функции  $y = \lg(x^2 + 10x)$ .

*Решение.* Прологарифмируем обе части данного уравнения. Имеем:

$$x \lg 3 + \frac{x^2 + 2}{3} \lg 4 = \lg 144,$$

$$2x^2 \lg 2 + 3x \lg 3 + 4 \lg 2 - 6 \lg 12 = 0.$$

Это уравнение имеет два различных корня (старший коэффициент и свободный член имеют разные знаки). Их можно найти. Вот они:

$$x = \frac{-3 \lg 3 \pm \sqrt{9 \lg^2 3 - 32 \lg^2 2 + 48 \lg 2 \cdot \lg 12}}{4 \lg 2}.$$

Ясно, что без надлежащих преобразований чрезвычайно сложно определить, какой из корней принадлежит области определения функции  $y = \lg(x^2 + 10x)$ , т.е. удовлетворяет условию  $x < -10$  или  $x > 0$ .

Ситуация вынуждает нас заново проанализировать задачу и попытаться найти более результативную идею.

Перепишем данное уравнение в таком виде:

$$3^x \cdot 4^{\frac{x+2}{3}} = 3^2 \cdot 4^2,$$

кстати, шаг не такой уж замаскированный. Теперь легко обнаружить, что  $x = 2$  — корень. Еще раз обратимся к квадратному уравнению. Зная, что оно имеет корень  $x = 2$ , с помощью теоремы Виета находим второй корень  $x = 1 - \frac{3}{2} \log_2 12$ . Теперь видно, что области определения функции  $y = \lg(x^2 + 10x)$  принадлежит только первый корень.

*Ответ.*  $x = 2$ .

### Г. Всегда ли нужна производная?

Задачи, связанные с поиском наибольших и наименьших значений геометрических величин, неспроста пользуются большой популярностью у составителей экзаменационных заданий: ведь чтобы решить подобную задачу, абитуриенту приходится комбинировать приемы и методы из весьма различных разделов школьного курса математики.

Первое, что приходит в голову, — составить с помощью заданных параметров функцию и исследовать ее на наибольшее и наименьшие значения. У такого подхода тем не менее есть недостаток: во многих геометрических задачах этот привычный путь решения сопряжен со значительными техническими трудностями. В условиях экзамена, где так важно не ошибиться и дорого время, этот недостаток особенно ощутим.

Часто, однако, удается избавиться от громоздких выкладок, обойдясь чисто геометрическими рассуждениями.

Вот примеры.

**7.26.** На отрезках  $AB$  и  $AC$  как на диаметрах построены полуокружности. В общую часть двух образовавшихся полукругов вписана окружность максимального радиуса. Найдите радиус этой окружности, если  $AB = 4$ ,  $AC = 2$ ,  $\angle BAC = 120^\circ$ .

*Решение.*

Пусть  $O_1$  и  $O_2$  — середины соответственно отрезков  $AB$  и  $AC$  (рис. 53).

Тогда  $O_1O_2 = \sqrt{AO_1^2 + AO_2^2 - 2AO_1 \cdot AO_2 \cdot \cos 120^\circ}$ ,  $O_1O_2 = \sqrt{7}$ .

Пусть  $r$  — радиус окружности, о которой говорится в условии задачи,  $O$  — ее центр.

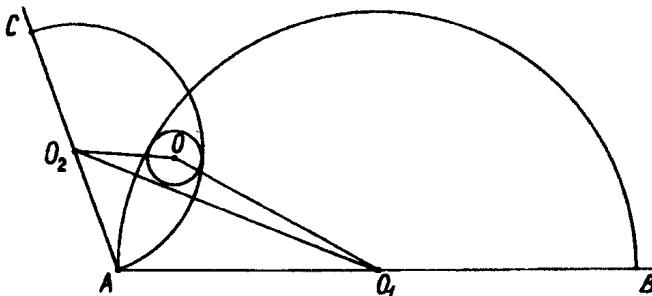


Рис. 53.

Для точек  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O$  имеем  $O_1O + OO_2 \geq O_1O_2$  или  $1 - r + 2 - r \geq \sqrt{7}$ . Отсюда  $r \leq \frac{3 - \sqrt{7}}{2}$ . Очевидно знак равенства достигается лишь в том случае, когда точка  $O$  принадлежит отрезку  $O_1O_2$ .

*Ответ.*  $\frac{3 - \sqrt{7}}{2}$ .

7.27. На плоскости дан равносторонний треугольник  $ABC$  со стороной 1. Найти максимальное расстояние между такими точками  $P$  и  $Q$ , лежащими в данной плоскости вне треугольника  $ABC$ , что  $\angle APB = 60^\circ$  и  $BQ^2 + QC^2 = 1$ .

*Решение.* Поскольку  $BQ^2 + QC^2 = 1$ , то  $\angle CQB = 90^\circ$ , а следовательно, точка  $Q$  лежит на окружности, построенной на отрезке  $BC$  как на диаметре (рис. 54).

Точка  $P$  лежит на одной из двух дуг, опирающихся на хорду  $AC$ , градусные меры которых равны по  $240^\circ$ . На рисунке показана одна дуга,  $O_1$  ее центр,  $\angle AO_1C = 120^\circ$ .

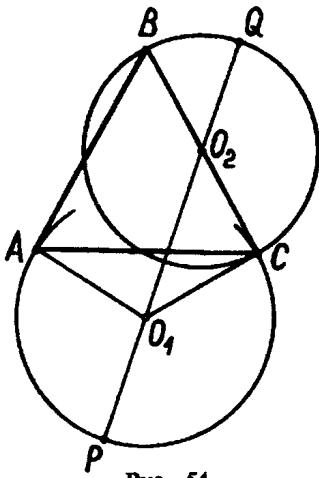


Рис. 54.

Имеем  $PQ \leq PO_1 + O_1O_2 + O_2Q$ . Значит, расстояние  $PQ$  будет максимальным, если точки  $P$ ,  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $Q$  лежат на одной прямой. На рисунке отмечено искомое положение точек  $P$  и  $Q$ .

Из  $\Delta AO_1C$  находим  $O_1C = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .  $\angle O_1CO_2 = \angle O_1CA + \angle ACO_2 = 90^\circ$ . Из  $\Delta O_1CO_2$   $O_1O_2 = \sqrt{O_1C^2 + CO_2^2} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{7}{12}}$ .

Итак,  $PQ = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{3}} + \frac{1}{2}$ .

Понятно, что если мы бы выбрали другую дугу, опиравшуюся на хорду  $AC$ , то длина отрезка  $PQ$  оказалась меньше полученной.

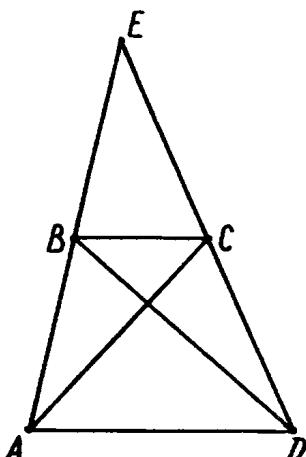


Рис. 55.

*Ответ.*  $\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{3}} + \frac{1}{2}$ .

7.28. Найти периметр треугольника наибольшей площади, образованного большим основанием и продолжением боковых сторон трапеции, если известно, что длина верхнего основания трапеции в два раза меньше длины ее нижнего основания, а диагонали равны 5 см и 6 см.

*Решение.*  $BC$  и  $AD$  — основания трапеции (рис. 55). Причем  $BC = \frac{1}{2} AD$ . Следовательно,  $BC$  — средняя линия  $\Delta AED$ .

Тогда  $S_{BEC} = \frac{1}{4} S_{AED}$ ,  $S_{ABCD} = \frac{3}{4} S_{AED}$ ,  $\frac{4}{3} S_{ABCD} = S_{AED}$ . Значит, площадь треугольника  $AED$  достигает максимального значения при максимальной площади трапеции  $ABCD$ . Очевидно  $S_{ABCD} \leq \frac{1}{2} AC \cdot BD$ , т.е. площадь данной трапеции максимальна, если ее диагонали перпендикулярны.

Итак, искомый периметр — это периметр треугольника с перпендикулярными медианами.

$$P_{AED} = AE + ED + AD = 2AB + 2CD + AD = 2 \sqrt{\frac{4}{9} AC^2 + \frac{1}{9} BD^2} +$$

$$+ 2 \sqrt{\frac{4}{9} BD^2 + \frac{1}{9} AC^2} + \sqrt{\frac{4}{9} AC^2 + \frac{4}{9} BD^2}, P_{AED} = \\ = \frac{26 + 4\sqrt{34} + 2\sqrt{61}}{3}.$$

**7.29.** В треугольнике  $ABC$  биссектриса, проведенная из вершины  $A$ , имеет длину 2 см и  $AB = 2AC$ . На стороне  $AB$  взята точка  $M$ , а на стороне  $AC$  точка  $N$  так, что  $BM = AN$ . Найти наименьшее возможное расстояние от середины отрезка  $MN$  до вершины  $A$ .

*Решение.* Спроектируем точки  $M$ ,  $N$ ,  $Q$  и  $B$  на биссектрису угла  $BAC$ , где  $Q$  — середина отрезка  $MN$  (рис. 56). Тогда  $AN_1 = M_1B_1$ ,  $N_1E = M_1E$  (докажите!). Пусть  $AC = m$ ,  $AB = 2m$ ,  $\angle BAE = \angle EAC = \alpha$ .  $AE = AN_1 + N_1E = \frac{1}{2}AB_1 = m \cos \alpha$ .

Отсюда  $AQ \geq AE = m \cos \alpha$ . Следовательно, искомое расстояние принимает наименьшее значение, когда середина  $Q$  отрезка  $MN$  лежит на биссектрисе. (Покажите, что существует положение точек  $M$  и  $N$ , при котором указанный случай реализуется.)

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 2\alpha = \frac{1}{2} AB \cdot AK \sin \alpha + \frac{1}{2} AC \cdot AK \cdot \sin \alpha$$

или

$$m^2 \sin 2\alpha = m \sin \alpha + 2m \sin \alpha.$$

$$\text{Отсюда } m \cos \alpha = 1,5.$$

*Ответ.* 1,5 см.

**7.30.** В параболу  $y = ax^2 + bx + c$  вписан четырехугольник  $ABCD$  с диагоналями  $AC$  и  $BD$  наибольшей площади. Найдите координаты вершины  $C$ , если  $A (-3; -4)$ ,  $B (-2; -1)$ ,  $D (1; -4)$ .

*Решение.* Так как точки  $A$ ,  $B$ ,  $D$  лежат на параболе, то их координаты удовлетворяют ее уравнению.

Тогда

$$\begin{cases} -4 = 9a - 3b + c, \\ -1 = 4a - 2b + c, \\ -4 = a + b + c, \end{cases} \begin{cases} a = -1, \\ b = -2, \\ c = -1. \end{cases}$$

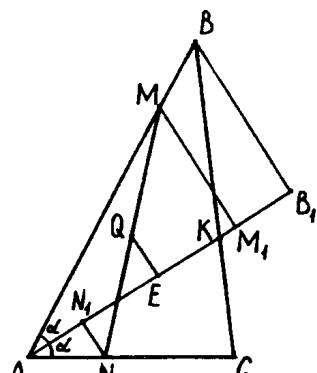


Рис. 56.

Уравнение заданной параболы таково:  $y = -(x + 1)^2$ . В условии указано, что  $AC$  — диагональ четырехугольника  $ABCD$ , значит, точка  $C$  лежит на дуге  $BD$  параболы (рис. 57). Для решения задачи достаточно найти координаты точки  $C$ , при которых площадь  $\Delta DBC$  максимальна, что в свою очередь равносильно поиску на дуге  $BD$  точки, максимально удаленной от прямой  $BD$ .

Пусть  $l$  — касательная к параболе, параллельная  $BD$ . В силу характера выпуклости квадратичной функции все точки параболы лежат в одной полуплоскости относительно прямой  $l$ . Следовательно, точкой, максимально удаленной от прямой  $BD$ , будет точка касания.

Так как прямая  $BD$  невертикальная, то ее уравнение имеет вид  $y = kx + d$ . Зная координаты точек  $B$  и  $D$ , легко установить, что  $k = -1$ . Значит, угловой коэффициент касательной  $l$  равен  $-1$ . Имеем  $y'(x_0) = -1$ , где  $x_0$  — абсцисса

точки касания. Отсюда  $-2(x_0 + 1) = -1$ ,  $x_0 = -\frac{1}{2}$ .

*Ответ.*  $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4})$ .

7.31. К кривой  $y = x^2 + bx + 2$  в точках с абсциссами  $x_1 = -1$  и  $x_2 = -3$  проведены касательные. При каком значении  $b$  периметр треугольника, образованного проведенными касательными и осью  $OY$ , будет наименьшим?

*Решение.* Уравнение касательных к заданной параболе в точках с абсциссами  $x_1 = -1$  и  $x_2 = -3$  соответственно имеют вид  $y = (b - 2)x + 1$ ,  $y = (b - 6)x - 7$  (покажите это!). Отсюда две вершины треугольника, о котором говорится в условии, имеют координаты  $M(0; 1)$  и  $N(0; -7)$ , а третья  $K(-2; 5 - 2b)$  (рис. 58). Следовательно, задача сводится к

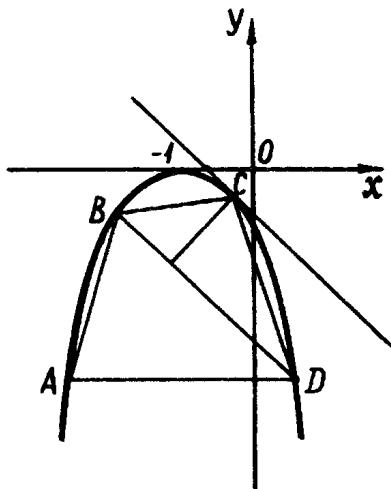


Рис. 57.

скости относительно прямой  $l$ . Следовательно, точкой, максимально удаленной от прямой  $BD$ , будет точка касания.

Так как прямая  $BD$  невертикальная, то ее уравнение имеет вид  $y = kx + d$ . Зная координаты точек  $B$  и  $D$ , легко установить, что  $k = -1$ . Значит, угловой коэффициент касательной  $l$  равен  $-1$ . Имеем  $y'(x_0) = -1$ , где  $x_0$  — абсцисса

точки касания. Отсюда  $-2(x_0 + 1) = -1$ ,  $x_0 = -\frac{1}{2}$ .

*Ответ.*  $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4})$ .

7.31. К кривой  $y = x^2 + bx + 2$  в точках с абсциссами  $x_1 = -1$  и  $x_2 = -3$  проведены касательные. При каком значении  $b$  периметр треугольника, образованного проведенными касательными и осью  $OY$ , будет наименьшим?

*Решение.* Уравнение касательных к заданной параболе в точках с абсциссами  $x_1 = -1$  и  $x_2 = -3$  соответственно имеют вид  $y = (b - 2)x + 1$ ,  $y = (b - 6)x - 7$  (покажите это!). Отсюда две вершины треугольника, о котором говорится в условии, имеют координаты  $M(0; 1)$  и  $N(0; -7)$ , а третья  $K(-2; 5 - 2b)$  (рис. 58). Следовательно, задача сводится к

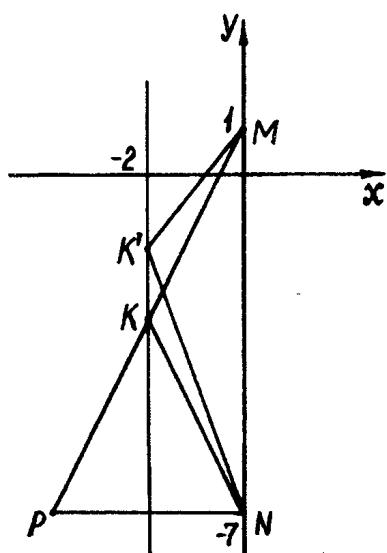


Рис. 58.

тому, чтобы на прямой  $x = -2$  найти такое положение точки  $K$ , при котором сумма  $MK + KN$  была бы наименьшей.

Покажем, что искомая точка — это точка пересечения прямой  $x = -2$  и прямой  $PM$ , где точка  $P$  симметрична точке  $N$  относительно прямой  $x = -2$ . Пусть  $K'$  — произвольная точка прямой  $x = -2$ , отличная от  $K$ . Имеем  $MK' + K'N = MK' + PK' > MP = PK + KM = KN + KM$ .  $\triangle MKN$  равнобедренный. Тогда ордината точки  $K$  равна  $-3$ . Отсюда  $5 - 2b = -3$ ,  $b = 4$ .

*Ответ. 4.*

7.32. В основании прямой призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  лежит ромб  $ABCD$  с углом  $\angle A = 60^\circ$ . Длины всех ребер призмы равны 1. Точка  $F$  — середина ребра  $DC$ , а точка  $M$  лежит на прямой  $A_1F$ . Определите наименьшее значение суммы площадей треугольников  $MBB_1$  и  $MCC_1$ .

*Решение.* Пусть  $MK$  и  $ML$  — высоты соответственно треугольников  $MBB_1$  и  $MCC_1$  (рис. 59).  $M_1$  — проекция точки  $M$  на плоскость  $ABC$ .  $M_1B = MK$ ,  $M_1C = ML$  (докажите!).

$$S_{MBB_1} + S_{MCC_1} = \frac{1}{2} BB_1 \cdot M_1B + \frac{1}{2} CC_1 \cdot M_1C = \frac{1}{2} (M_1B + M_1C).$$

Как и в предыдущей задаче, сумма  $M_1B + M_1C$  принимает наименьшее значение, если  $M_1$  — точка пересечения прямых  $AF$  и  $BE$ , где точка  $E$  симметрична точке  $C$  относительно прямой  $AF$  (рис. 60). Проведем  $DN \perp AF$ .

$$DN = \frac{2S_{ADF}}{AF} = \frac{AD \cdot DF \cdot \sin 120^\circ}{\sqrt{AD^2 + DF^2 - 2AD \cdot DF \cdot \cos 120^\circ}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}.$$

$$CE = 2CH = 2DN = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

$$M_1B + M_1C = BE = \sqrt{BC^2 + CE^2 - 2BC \cdot CE \cdot \cos(60^\circ + \varphi)},$$

$$\text{где } \varphi = \angle FCE. \cos \varphi = \cos \angle NDF = \frac{DN}{DF} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

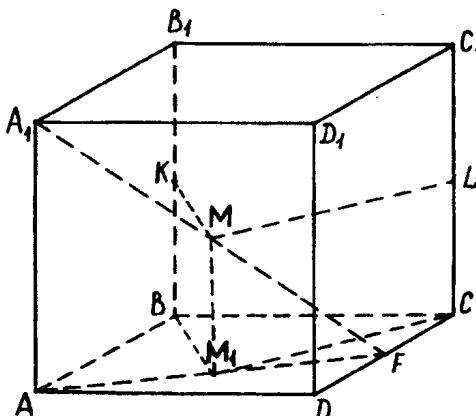


Рис. 59.

После несложных вычислений по-

$$\text{лучаем } BE = \sqrt{\frac{13}{7}}.$$

$$\text{Ответ. } \frac{1}{2} \sqrt{\frac{13}{7}}.$$

7.33. Ребро правильного октаэдра имеет длину  $a$ . Определить кратчайшее расстояние по поверхности октаэдра между серединами двух параллельных ребер.

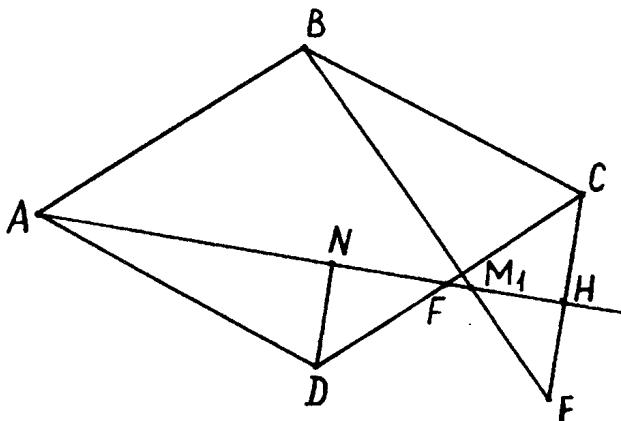


Рис. 60.

*Решение.* На рис. 61 изображен октаэдр.  $M$  и  $N$  — середины ребер  $DE$  и  $BF$ .

Расположим грани  $DEC$ ,  $EFC$  и  $BFC$  в одной плоскости так, как показано на рис. 62. Ясно, что  $DEFB$  — равнобедренная трапеция. Задача свелась к тому, чтобы найти расстояние между серединами боковых ребер трапеции, т.е.

длину средней линии  $MN$ . Поскольку  $EF = a$  и  $DB = 2a$ , то  $MN = \frac{3}{2}a$ .

*Ответ.*  $\frac{3}{2}a$ .

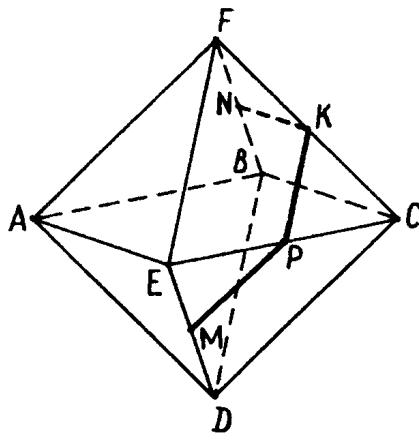


Рис. 61.

7.34. Прямоугольник  $ABCD$  со сторонами  $AB = 2$  и  $AD = 4$  служит основанием пирамиды  $SABCD$ , у которой ребро  $SA = 5$  является высотой. Через самое длинное боковое ребро пирамиды и точку, лежащую на боковой стороне основания, проведена плоскость так, что полученное сечение пирамиды имеет наименьший периметр. Найдите

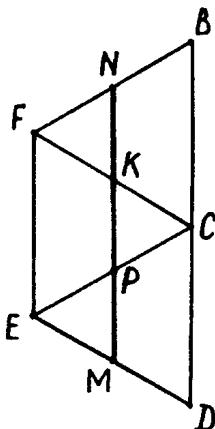


Рис. 62.

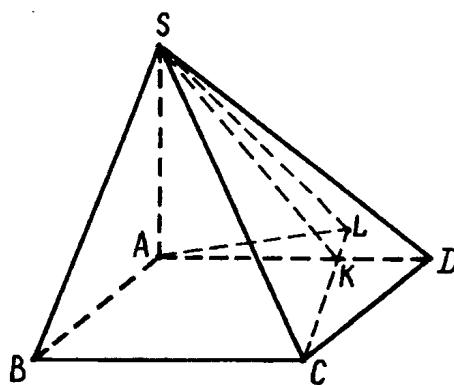


Рис. 63.

площадь сечения.

*Решение.* На рис. 63 изображена пирамида  $SABCD$ ,  $AB = 2$ ,  $AD = 4$ . Понятно, что  $SC$  — наибольшее боковое ребро.  $SCK$  — сечение, о котором говорится в условии.

Сделаем развертку данной пирамиды (рис. 64). Теперь видно, что если точка  $K$  совпадет с точкой  $K'$ , то периметр сечения  $SCK$  будет наименьшим.

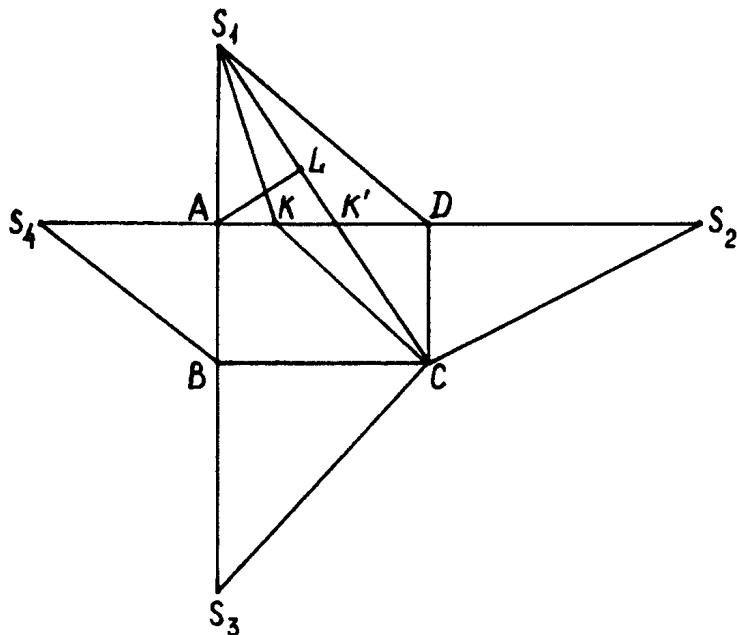


Рис. 64.

Из подобия треугольников  $S_1AK'$  и  $S_1BC$  получаем  
 $\frac{S_1A}{AK'} = \frac{S_1B}{BC}$ ,  $\frac{5}{AK'} = \frac{7}{4}$ ,  $AK' = \frac{20}{7}$ .

Имеем  $S_{SKC} = \frac{S_{AKC}}{\cos\varphi}$  (рис. 63), где  $\varphi$  — угол между сесущей плоскостью и плоскостью основания. Проведем  $AL \perp CK$ . Тогда  $\angle ALS = \varphi$ ,  $\operatorname{tg}\varphi = \frac{SA}{AL}$ .

Опять-таки обратимся к развертке.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{SA}{AL} = \frac{S_1K'}{AK'} = \frac{\sqrt{5^2 + \left(\frac{20}{7}\right)^2}}{\frac{20}{7}} = \frac{\sqrt{1625}}{20}. \quad \text{Отсюда}$$

легко получить  $\cos\varphi = \frac{4}{9}$ .

$$\text{Итак, } S_{SKC} = \frac{\frac{1}{2} AK \cdot CD}{46} = \frac{45}{7}.$$

*Ответ.*  $\frac{45}{7}$ .

7.35. В треугольной пирамиде  $SABC$  все ребра имеют

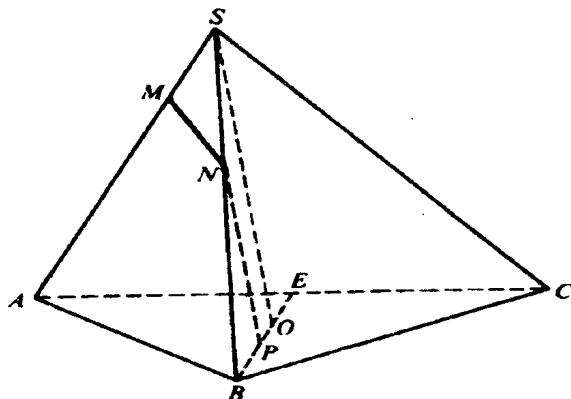


Рис. 65.

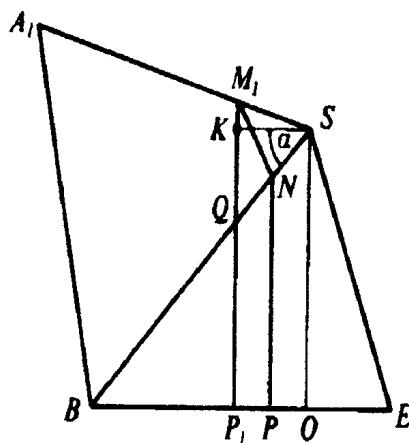


Рис. 66.

жит медиане  $BE$   $\Delta ABC$  (рис. 65).

одинаковую длину, равную  $l$ . На ребре  $SA$  взята точка  $M$  так, что  $SM = \frac{1}{4} l$ , на ребре  $SB$  — точка  $N$ , а на плоскости  $ABC$  — точка  $P$ . Найти наименьшую величину суммы длин отрезков  $MN$  и  $NP$ .

*Решение.* Длина отрезка  $NP$  минимальна, если  $P$  — проекция точки  $N$  на плоскость  $ABC$ . Очевидно  $P$  принадле-

В плоскости  $SBE$  строим треугольник  $SA_1B$ , равный треугольнику  $ASB$  (рис. 66). На стороне  $SA_1$  отметим точку  $M_1$  так, что  $SM_1 = \frac{1}{4}l$ . Проведем  $M_1P_1 \perp BE$ .

$MN + NP = M_1N + NP \geq M_1P_1$ , причем равенство достигается, когда точка  $N$  совпадает с точкой  $Q$ . Проведем  $SK \perp M_1P_1$ . Пусть  $\angle KSB = \angle SBE = \alpha$ . Высота  $SO$  пирамиды

равна  $l\sqrt{\frac{2}{3}}$ . (Покажите!) Тогда

$$M_1P_1 = M_1K + SO = \frac{l}{4}\sin(60^\circ - \alpha) + l\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{l}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\right) + l\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{l}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}\right) + l\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{l}{8}\left(1 + 7\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

Ответ.  $\frac{l}{8}\left(1 + 7\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ .

#### Д. Неожиданный шаг.

По сути дела, для многих примеров настоящего параграфа мы старались находить рациональные решения. В одних случаях результативная идея мало отличалась от «школьной», в других — носила нетрадиционный характер. Конечно, оценка метода решения задачи с позиций традиционности (нестандартности) во многом субъективна: насколько непривычен для учащегося предложенный прием, настолько он и нестандартен. И, наверное, самая высокая степень нестандартности идеи — это полная ее неожиданность.

В этом пункте мы хотим предложить читателю несколько задач, решение которых основано на выборе неожиданной (так нам представляется) идеи.

**7.36.** При каких значениях параметра  $a$  модуль разности корней уравнения  $x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$  принимает наибольшее значение?

*Решение.* Конечно, можно найти корни  $x_1$  и  $x_2$  данного квадратного уравнения, а затем исследовать на наибольшее и наименьшее значения функцию  $f(a) = |x_1 - x_2|$ . А можно поступить и так.

Переписав данное в условии уравнение в виде  $(x - 3)^2 + (a - 2)^2 = 1$ , построим его график в системе координат  $xa$  (рис. 67). Теперь идея решения становится прозрачной.

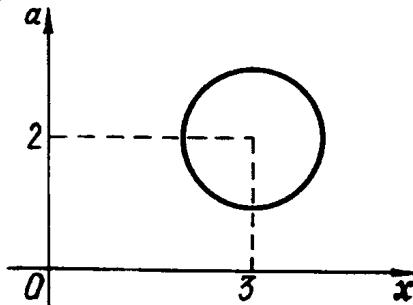


Рис. 67.

что эта прямая должна проходить через центр окружности.

*Ответ.*  $a = 2$ .

7.37. Найти уравнение касательной к графику функции  $y = \sqrt{1 - x^2}$  в точке с абсциссой  $x_0 = 0$ .

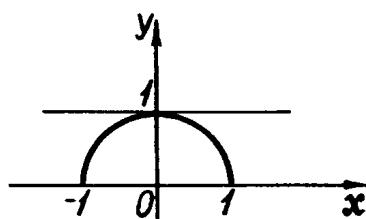


Рис. 68.

Очевидно модуль разности корней уравнения примет наибольшее значение в том случае, когда точки пересечения окружности с прямой, параллельной оси абсцисс, будут наиболее друг от друга удалены. Понятно,

*Решение.* Несложно получить результат, решив эту задачу традиционно. Но если заметить, что графиком данной функции является полуокружность (рис. 68), то сразу имеем

*Ответ.*  $y = 1$ .

7.38. Найти наименьшее значение функции

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2 - x} + \sqrt{1 + x^2 - x\sqrt{3}}$$

на промежутке  $(0; \infty)$ .

*Решение.* Если для исследования данной функции использовать производную, то здорово придется повозиться.

Выберем иной путь (неожиданный).

Отложим два перпендикулярных отрезка  $OA$  и  $OB$ , а также отрезок  $OM$  так, что  $OA = OB = 1$ ,  $OM = x$  (весь  $x > 0$ ),  $\angle MOB = 30^\circ$ ,  $\angle MOA = 60^\circ$  (рис. 69).

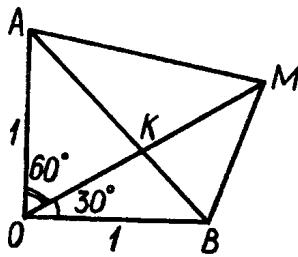


Рис. 69.

По теореме косинусов из треугольников  $OMB$  и  $OMA$  получаем  $MB = \sqrt{1 + x^2 - x\sqrt{3}}$  и  $MA = \sqrt{1 + x^2 - x}$ . Кроме того,  $MA + MB \geq AB = \sqrt{2}$ , причем равенство достигается (и это существенно) лишь в том случае, когда точка  $M$  совпадает с точкой  $K$ , т.е. при  $x = OK = \sqrt{3} - 1$  (в этом можно легко убедиться).

*Ответ.*  $\sqrt{2}$ .

7.39. Решить систему

$$\begin{cases} 2x + 2y = 11, \\ \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{(x-7)^2 + (y-2)^2} = 5. \end{cases}$$

*Решение.* Методом подстановки решение этой системы можно свести к решению «неприятного» иррационального

уравнения. Вместе с тем в этой задаче, как и в предыдущей, удобно перейти на графический язык.

Второе уравнение системы означает, что сумма расстояний от точки  $M(x, y)$  до точек  $A(3; -1)$  и  $B(7; 2)$  равна 5 (рис. 70). Имеем

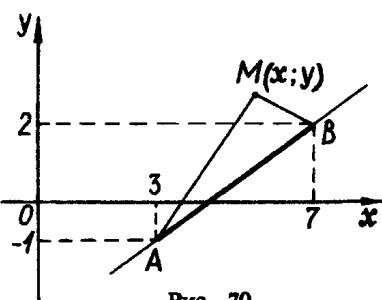


Рис. 70.

$AM + MB \geq AB = 5$ , причем в этом неравенстве знак равенства достигается тогда и только тогда, когда точка  $M$  будет принадлежать отрезку  $AB$ , т.е. ее координаты будут удовлетворять требованиям  $y = \frac{3}{4}x - \frac{13}{4}$  (уравнение прямой  $AB$ ),  $x \in [3; 7]$ ,  $y \in [-1; 2]$ . Итак, исходная система равносильна такой:

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x - \frac{13}{4}, \\ 2x + 2y = 11, \\ 3 \leq x \leq 7, \\ -1 \leq y \leq 2. \end{cases}$$

Решив ее, получим

*Ответ.*  $x = 5$  и  $y = \frac{1}{2}$ .

7.40. Решить уравнение  $\sqrt{\frac{1 + 2x\sqrt{1 - x^2}}{2}} + 2x^2 = 1$ .

*Решение.* Поскольку в данном уравнении  $|x| \leq 1$ , то можем положить  $x = \cos\alpha$ , где  $\alpha \in [0; \pi]$ . Имеем:

$$\sqrt{\frac{1 + 2\cos\alpha\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{2}} = 1 - 2\cos^2\alpha,$$

$$\sqrt{\frac{1 + \sin 2\alpha}{2}} = -\cos 2\alpha.$$

Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 1 + \sin 2\alpha = 2 - 2\sin^2 2\alpha, \\ \cos 2\alpha \leq 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \begin{cases} \sin 2\alpha = -1, \\ \sin 2\alpha = \frac{1}{2}, \\ \cos 2\alpha \leq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \\ \alpha = \frac{5\pi}{12} + \pi n, \text{ где } n \text{ и } k \text{ — целые.} \\ \cos 2\alpha \leq 0. \end{cases} \end{cases}$$

Так как  $\alpha \in [0; \pi]$ , то подходят только  $\alpha_1 = \frac{3\pi}{4}$  и  $\alpha_2 = \frac{5\pi}{12}$ .

*Ответ.*  $x = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  или  $x = \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ .

7.41. Решить уравнение  $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$ .

*Решение.* Введем векторы  $\vec{n} = (1; 1)$ ,  $\vec{m} = (\sqrt{x-2}; \sqrt{4-x})$ . Тогда левая часть уравнения равна  $\vec{m} \cdot \vec{n}$ . Поскольку  $|\vec{m}| |\vec{n}| = \sqrt{1^2 + 1^2} \times \sqrt{x-2 + 4-x} = 2$ , то левая часть уравнения не превосходит 2.

Оценим правую часть. Имеем  $x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 + 2 \geq 2$ . Следовательно, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 11 = 2, \\ \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 2. \end{cases}$$

Первое уравнение системы имеет единственный корень  $x = 3$ , который удовлетворяет и второму уравнению.

*Ответ.*  $x = 3$ .

7.42. Боковые ребра треугольной пирамиды имеют одинаковую длину  $l$ . Два плоских угла при вершине пирамиды равны  $\alpha$ , а третий —  $\beta$ . Найти объем пирамиды.

*Решение.* Можно предложить следующий план решения, который неестественным не назовешь. Так как боковые ребра пирамиды равны, то вершина проектируется в центр описанной окружности основания. Поскольку мы не знаем вид треугольника, лежащего в основании, то придется рассматривать три случая: треугольник остроугольный, прямоугольный, тупоугольный. Понятно, что при таком подходе решение становится трудоемким.

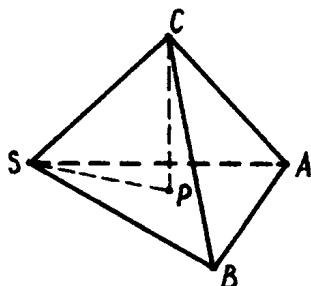


Рис. 71.

Часто бывает удобно пирамиду, имеющую равные плоские углы при вершине, «положить» на одну из боковых граней (этот прием мы уже использовали в задаче 6.19). В данном случае положим пирамиду на боковую грань, содержащую угол  $\beta$ .

На рис. 71  $\angle BSA = \beta$ ,  $\angle BSC = \angle CSA = \alpha$ ,  $CP \perp \text{пл. } ASB$ .

Применим известное соотношение (теорема о трех косинусах). Имеем  $\cos \angle CSB = \cos \angle CSP \cdot \cos \angle BSP$ . Отсюда  $\cos \angle CSP = \frac{\cos \alpha}{\frac{\beta}{2}}$ . (Легко показать, что  $\angle BSP = \angle PSA = \frac{\beta}{2}$ ).

$$V = \frac{1}{3} S_{ASB} \cdot CP = \frac{1}{3} \frac{l^2}{2} \sin \beta \cdot l \cdot \sin \angle CSP = \frac{l^3}{6} \sin \beta \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \angle CSP} = \\ = \frac{l^3}{6} \sin \beta \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \frac{\beta}{2}}} = \frac{l^3}{3} \sin \frac{\beta}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{\beta}{2} - \cos^2 \alpha}.$$

Заметим, что в нашем решении не играло роль положение точки  $P$  относительно треугольника  $ASB$ .

*Ответ.*  $\frac{l^3}{3} \sin \frac{\beta}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{\beta}{2} - \cos^2 \alpha}$ .

## Е. Еще две задачи.

**7.43.** На стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  взяты две точки  $K$  и  $P$  так, что  $KP = \frac{1}{3}AB$ . На сторонах  $AC$  и  $BC$  взяты соответственно точки  $M$  и  $N$  так, что прямая  $AB$  параллельна прямой  $MN$ . При каком значении отношения  $AM:MC$  площадь четырехугольника  $KMNP$  будет наибольшей?

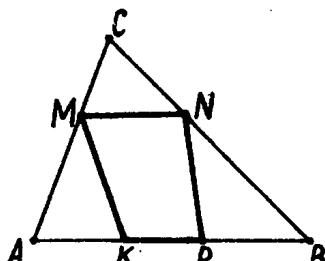


Рис. 72.

**Решение.** Очевидно  $KMNP$  — трапеция (рис. 72). Если заметить, что площадь этой трапеции не зависит от положения точек  $K$  и  $P$  на стороне  $AB$  (при сохранении соотношения  $KP = \frac{1}{3}AB$ ), то

решение задачи можно существенно упростить. Действительно, выберем точку  $K$  так, чтобы  $A = K$  (рис. 73).

$$\text{Пусть } \frac{CM}{AC} = x, \quad x \in [0; 1], \quad S_{ABC} = S, \quad Q(x) = S_{AMNP} = \\ = S_{ABC} - S_{MCN} - S_{NPB} = S - x^2S - \frac{BP \cdot BN}{BC \cdot BA} \cdot S = S(1 - x^2 - \frac{2}{3}(1-x)).$$

Задача свелась к тому, чтобы исследовать на наибольшее значение квадратичную функцию  $Q(x)$  на отрезке  $[0; 1]$ .

Результат исследования покажет, что  $\max_{[0; 1]} Q(x) = Q\left(\frac{1}{3}\right)$ .

Итак,  $\frac{MC}{AC} = \frac{1}{3}$ , значит,  $\frac{AM}{MC} = 2$ .

*Ответ. 2.*

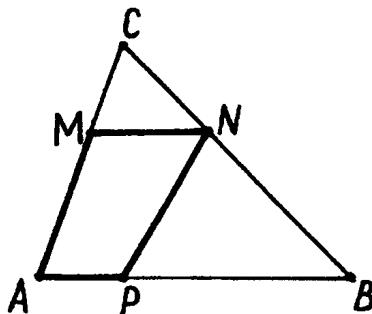


Рис. 73.

**7.44.** В кубе  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  точки  $M$ ,  $N$ ,  $P$  — середины ребер  $BC$ ,  $C_1D_1$ ,  $AA_1$  соответственно. Найти отношение объемов многогранников, на которые плоскость  $MNP$  делит куб.

*Решение.* На рис. 74 показано, как строить сечение куба плоскостью  $MNP$ . Легко показать, что получившееся сече-

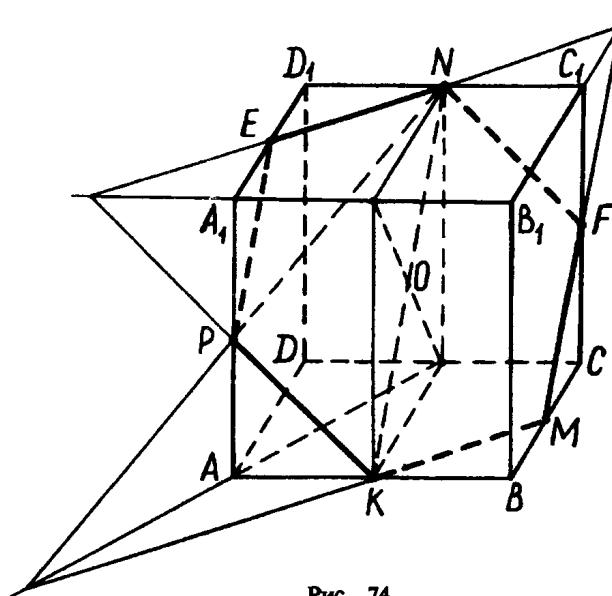


Рис. 74.

ние — правильный шестиугольник. Объем одной из частей куба, о которой говорится в условии, можно, например, найти, определив сумму объемов пирамид  $BPNFK$ ,  $APEB$ ,  $BKMB$ ,  $C_1B_1NF$ . Однако, обнаружив, что плоскость  $MNP$  проходит через центр симметрии куба точку  $O$  (на рисунке показано, как это сделать), можно сразу записать

*Ответ.* 1.

### Упражнения

**7.45.** Решить неравенство

$$|x + 3| + |x - 4| < x - 7.$$

**7.46.** Решить неравенство

$$\log_2 \frac{3x - 8}{|x - 2|} > 1.$$

**7.47.** Решить уравнение

$$(x - 2)^2 |\cos x| = \cos x.$$

**7.48.** Решить уравнение

$$\frac{\sin x}{(x-4)^2} + |\sin x| = 0.$$

**7.49.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 7, \\ |x - 1| + |y - 2| = 4. \end{cases}$$

**7.50.** Решить уравнение

$$|x^2 - 6x + 5| + 6|x + 1| = x^2 + 11.$$

**7.51.** Решить уравнение

$$\left| \frac{27x}{x^3 - 27} \right| + |x| = \frac{x^4}{|x^3 - 27|}.$$

**7.52.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |x + y - 5| = 7, \\ |x - 1| + |y - 4| = 6. \end{cases}$$

**7.53.** Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \left| x + \frac{1}{y} \right| + \left| \frac{10}{3} - x + y \right| = \frac{10}{3} + y + \frac{1}{y}, \\ x^2 + y^2 = \frac{82}{9}, \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям  $x > 0$  и  $y < 0$ .

**7.54.** При каких действительных  $a$  уравнение

$$a^3 + a^2 |a + x| + |a^2 x + 1| = 1$$

имеет не менее четырех решений, являющихся целыми числами?

**7.55.** Решить уравнение

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{3x+5} = \sqrt{3-x} + \sqrt{6x-4}.$$

**7.56.** Решить неравенство

$$\log_x \log_2 (3^x - 4) > 0.$$

**7.57.** Решить неравенство

$$|x| + \sqrt{x^2 - 4} \geq 2.$$

**7.58.** Решить неравенство

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}} + x > 4.$$

**7.59.** Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \geq 2(1 - x).$$

**7.60.** Решить уравнение

$$\sqrt{2x - 3} - \sqrt{2x - 1} = 1.$$

**7.61.** Решить уравнение

$$\sqrt{x - 4} + \sqrt{4x - 7} = 3.$$

**7.62.** Решить уравнение

$$\sqrt{x + 3} + \sqrt{x - 1} = \frac{2}{x}.$$

**7.63.** Решить уравнение

$$x^2 + 2x + 15\sqrt{x+2} = 38.$$

**7.64.** При каких  $a$  уравнение

$$x^2 + (3a^2 + 2a - 1)x + 2a^2 + a - 1 = 0$$

имеет корни разных знаков?

**7.65.** Найти произведение корней уравнения

$$(5x)^{4\log x/2 + 1} = 1994x^5.$$

**7.66.** Найти произведение корней уравнения

$$(3x)^{3\log_6 2x - 4} = 1994x^{\log_6 x}.$$

**7.67.** Решить уравнение

$$3^x \cdot 8^{\frac{x}{x+2}} = 6.$$

**7.68.** Решить уравнение

$$2^{\frac{3-x}{x+1}} \cdot 5^{\frac{2-x}{x}} = 10.$$

**7.69.** Найдите длины сторон параллелограмма  $ABCD$  наибольшей площади, если известно, что его вершина  $A$

удалена от середин сторон  $BC$  и  $CD$  на 6 и 8 единиц соответственно.

7.70. Две дуги окружностей радиусами  $R$  с центрами в точках  $A$  и  $B$  таких, что  $AB = R$ , пересекаются в точке  $C$ . Впишите в криволинейный треугольник  $ABC$  равнобедренную трапецию наибольшей площади.

7.71. Даны точки  $A(0; 3)$ ,  $B(4; 5)$ . На оси  $OX$  найти такую точку  $C$ , чтобы периметр треугольника  $ABC$  был наименьшим.

7.72. Боковые стороны трапеции перпендикулярны. Какое наибольшее значение может иметь площадь треугольника, образованного диагоналями и средней линией трапеции, если известно, что длины оснований трапеции равны  $a$  и  $b$ ?

7.73. На координатной плоскости рассматриваются правильные треугольники, у которых две вершины лежат на прямой  $y = x + 2$ , а координаты третьей вершины удовлетворяют неравенству  $x^2 \leq y \leq x + 2$ . Найдите наибольшее возможное значение площади рассматриваемых треугольников.

7.74. К кривой  $y = -x^3 + bx$  в точках с абсциссами  $x_1 = 0$  и  $x_2 = -\frac{3}{2}$  проведены касательные. При каком значении  $b$  периметр треугольника, образованного проведенными касательными и осью  $OY$ , будет наименьшим?

7.75. Точка  $D$  является серединой ребра  $BB_1$  правильной треугольной призмы  $ABC A_1 B_1 C_1$ . На боковой грани  $AA_1C_1C$  взята точка  $E$ , на основании  $ABC$  — точка  $F$  так, что прямые  $EB_1$  и  $FD$  параллельны. Какой наибольший объем может иметь призма  $ABC A_1 B_1 C_1$ , если  $EB_1 = 1$ ,  $FD = \frac{3}{4}$ ,

$$EF = \frac{1}{2\sqrt{3}} ?$$

7.76. В основании четырехугольной пирамиды  $SABCD$  лежит параллелограмм  $ABCD$ . Известно, что расстояния от точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $S$  до середины ребра  $BC$  равны 4 см. При какой величине угла, образованного плоскостями  $ACS$  и  $SCD$ , объем пирамиды будет наибольшим?

7.77. Дан куб  $ABCDA'B'C'D'$  с ребром длиной 4. На середине ребра  $BC$  взята точка  $M$ , а на ребре  $A'D'$  на расстоянии 1 от вершины  $A'$  взята точка  $N$ . Найти длину

кратчайшего пути между точками  $M$  и  $N$  по поверхности куба.

7.78. В прямоугольном параллелепипеде  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  с ребрами  $AB = 5\sqrt{2}$ ,  $AD = 3\sqrt{2}$ ,  $AA_1 = 8$  через диагональ  $BD_1$  проведена плоскость, пересекающая ребро  $AA_1$  так, что сечение параллелепипеда этой плоскостью имеет наименьший периметр. Какой угол образует секущая плоскость с гранью  $ABCD$ ?

## § 8. На первый взгляд — стандартная задача

Если абитуриент для многих примеров предыдущего параграфа не смог бы найти нетрадиционный путь решения, то все равно у него осталась бы возможность справиться с задачей — с помощью привычных школьных рассуждений, правда, затратив при этом гораздо больше времени. Напротив, примеры настоящего параграфа лишают «решателя» такого выбора. Обычно, подобные задачи условно называют *нестандартными*.

Нестандартные задачи, опять-таки условно, можно разделить на два типа: нестандартные и стандартные по внешнему виду.

К первому типу можно отнести задачи, необычность условия которых сразу бросается в глаза. Поэтому, наверное, нет необходимости, перечисляя как можно больше признаков задач первого и второго типов, доводить ситуацию до абсурда. Заметим лишь следующее. Довольно часто задача первого типа представляет нечто вроде «функционального винегрета», т.е. ее конструируют функции из различных разделов школьной математики. Характерный пример:

Решить уравнение  $2^{|y|} - \cos y + \lg(1 + x^2 + |y|) = 0$ .

Уже «внешний вид» подобной задачи подсказывает абитуриенту, что для ее решения надо придумать что-то нетрадиционное (решение смотрите под номером 8.1).

С задачами второго типа иная ситуация. Их внешняя «успокоительная стандартность» — своего рода коварство. Поэтому для решения подобных задач особенно важны такие качества, как сообразительность, интуиция, высокая логическая культура. При этом мы вовсе не хотим сказать, что второй тип задач более сложный, чем первый: ощущение необходимости поиска нетрадиционной идеи еще не означает, что такова будет найдена.

Все же в выборе материала настоящего параграфа мы отдали предпочтение второму типу задач.

8.2. Решить уравнение  $4 \cos^4 \frac{x}{4} = \cos \frac{x}{2} + 2 \cos^2 \frac{x}{4} \cos 2x$ .

*Решение.* Какие-либо попытки упростить это уравнение к успеху не приведут (в этом читатель может убедиться

самостоятельно). Кстати, это замечание можно отнести ко всем следующим задачам.

Представим данное уравнение в таком виде:

$$4 \cos^4 \frac{x}{4} = 2 \cos^2 \frac{x}{4} - 1 + 2 \cos^2 \frac{x}{4} \cos 2x,$$

$$4 \cos^4 \frac{x}{4} - 2 \cos^2 \frac{x}{4} (1 + \cos 2x) + 1 = 0.$$

Теперь становится ясным, что последнее уравнение выгодно рассматривать как квадратное относительно  $\cos^2 \frac{x}{4}$ , для которого  $\frac{1}{4}D = (1 + \cos 2x)^2 - 4$ . Так как  $(1 + \cos 2x)^2 \leq 4$ , то уравнение будет иметь решение, если  $\cos 2x = 1$ . Поэтому исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos 2x = 1, \\ 4 \cos^4 \frac{x}{4} - 4 \cos^2 \frac{x}{4} + 1 = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \cos 2x = 1, \\ 2 \cos^2 \frac{x}{4} = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 2x = 1, \\ \cos \frac{x}{2} = 0. \end{cases}$$

*Ответ.*  $x = \pi + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

8.3. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 - xy^2 + 4 = 0, \\ x^2 + y^2 + 4 = 4x + 2y. \end{cases}$$

*Решение.* Если «видеть» первое уравнение системы как квадратное относительно  $x$ , то его дискриминант будет равен  $y^4 - 16$ . Потребовав  $y^4 - 16 \geq 0$ , получим  $|y| \geq 2$ .

Перепишем второе уравнение системы так:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y = 0,$$

$$(x - 2)^2 + y^2 - 2y = 0.$$

Отсюда можно сделать вывод, что  $y^2 - 2y \leq 0$ , т. е.  $0 \leq y \leq 2$ .

Таким образом, если данная система имеет решения, то ими будут пары вида  $(x; 2)$ . Подставив  $y = 2$  в исходную систему, получим  $x = 2$ .

*Ответ.*  $(2; 2)$ .

**8.4.** Решить систему

$$\begin{cases} |xy - 2| = 6 - x^2, \\ 2 + 3y^2 = 2xy. \end{cases}$$

*Решение.* Из первого уравнения системы следует, что  $|x| \leq \sqrt{6}$ . Рассмотрим второе уравнение как квадратное относительно  $y$ . Его дискриминант  $D = 4x^2 - 24$  должен быть неотрицательным. Отсюда получаем  $|x| \geq \sqrt{6}$ .

Следовательно исходная система может иметь решения лишь вида  $(\sqrt{6}; y)$  или  $(-\sqrt{6}; y)$ .

Подставив в систему поочередно  $x = \sqrt{6}$  и  $x = -\sqrt{6}$ , получим соответственно  $y = \sqrt{\frac{2}{3}}$  и  $y = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ .

*Ответ.*  $\left(\sqrt{6}; \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ ,  $\left(-\sqrt{6}; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ .

**8.5.** Решить уравнение  $\sqrt{4x^2 - 1} + \sqrt{4x - 1} = 1$ .

*Решение.* Область определения данного уравнения — это промежуток  $\left[\frac{1}{2}; \infty\right)$ . Перепишем данное уравнение так:

$$\sqrt{4x - 1} = 1 - \sqrt{4x^2 - 1}.$$

При  $x \geq \frac{1}{2}$  имеем  $\sqrt{4x - 1} \geq 1$ , а  $1 - \sqrt{4x^2 - 1} \leq 1$ . Следовательно, корнем исходного уравнения может быть только  $x = \frac{1}{2}$ . Проверка это подтверждает.

*Ответ.*  $x = \frac{1}{2}$ .

**8.6.** Решить систему

$$\begin{cases} 3 - (y + 1)^2 = \sqrt{x - y}, \\ x + 8y = \sqrt{x - y} - 9. \end{cases}$$

*Решение.* Первое уравнение системы выгодно представить в таком виде:  $-(y + 1)^2 = \sqrt{x - y} - 3$ . Отсюда  $\sqrt{x - y} - 3 \leq 0$ , т. е.  $0 \leq x - y \leq 9$ . Но из второго уравнения

системы следует, что  $x - y \geq 9$ . Значит,  $x - y = 9$ . Тогда  $9 + y + 8y = 0$ ,  $y = -1$ . Отсюда получаем  $x = 8$ .

*Ответ.* (8; -1).

8.7. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^5 + y^5 = 1. \end{cases}$$

*Решение.* Из первого уравнения системы следует, что  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ . Тогда с учетом свойств функций вида  $y = t^n$ ,  $n \in N$ , на промежутке  $[-1; 1]$  можно записать  $x^5 \leq x^2$ ,  $y^5 \leq y^2$ . Отсюда  $1 = x^5 + y^5 \leq x^2 + y^2 = 1$ . Следовательно, если  $x < 1$  и  $y < 1$ , то система решений не имеет. Теперь становится понятным, что решением данной системы будет

*Ответ.* (0; 1), (1; 0).

8.8. Решить уравнение

$$\sin^3 x + \cos^3 x + \sin^2 x = 2.$$

*Решение.* Имеем  $\sin^3 x + \cos^3 x = 2 - \sin^2 x$ . Так как  $\cos^3 x \leq \cos^2 x$ ,  $\sin^3 x \leq \sin^2 x$ , то  $\sin^3 x + \cos^3 x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ .

В то же время  $2 - \sin^2 x \geq 1$ . Поэтому исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin^3 x + \cos^3 x = 1, \\ 2 - \sin^2 x = 1. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \begin{cases} \sin x = -1, \\ \sin^3 x + \cos^3 x = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin^3 x + \cos^3 x = 1, \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} \sin x = -1, \\ \cos^3 x = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos^3 x = 0. \end{cases} \end{cases}$$

*Ответ.*  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ,  $k \in Z$ .

**8.9. Решить уравнение**

$$(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^2 = 5 + \cos \left( \frac{\pi}{3} + 4x \right).$$

*Решение.* Запишем

$$\begin{aligned} (\sin x + \sqrt{3} \cos x)^2 &= \left( 2 \left( \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right) \right)^2 = \\ &= 4 \sin^2 \left( x + \frac{\pi}{3} \right) \leq 4. \end{aligned}$$

Но  $5 + \cos \left( \frac{\pi}{3} + 4x \right) \geq 4$ . Значит, корни исходного уравнения — это решения системы

$$\begin{cases} \cos \left( \frac{\pi}{3} + 4x \right) = -1, \\ \cos \left( x + \frac{\pi}{3} \right) = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}, \\ x = \frac{\pi}{6} + \pi n, \text{ где } n \text{ и } k \text{ — целые.} \end{cases}$$

*Ответ.*  $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$ ,  $n \in Z$ .

**8.10. Решить уравнение**

$$5^x - 3^x = 16.$$

*Решение.* Легко заметить, что  $x = 2$  — корень данного уравнения. Покажем, что он единственный.

Перепишем исходное уравнение в таком виде:

$\left( \frac{5}{3} \right)^x - 1 = \frac{16}{3^x}$ . Левая часть этого уравнения задает возрастающую функцию, а правая — убывающую. А, как известно, такие уравнения имеют не более одного корня.

*Ответ.*  $x = 2$ .

**8.11. Решить уравнение**

$$2 \sqrt{x-1} + 5x = \sqrt{(x^2 + 4)(x + 24)}.$$

*Решение.* Для решения этой задачи мы предложим читателю уже знакомый метод (см. 7.41).

Введя векторы  $\bar{m} = (2; x)$  и  $\bar{n} = (\sqrt{x-1}; 5)$ , оценим левую часть уравнения:

$$\bar{m} \cdot \bar{n} = 2\sqrt{x-1} + 5x \leq |\bar{m}| \cdot |\bar{n}| = \sqrt{(x^2 + 4)(x + 24)}.$$

Так как равенство возможно лишь при условии коллинеарности векторов  $\bar{m}$  и  $\bar{n}$ , то решения (если они существуют) следует искать среди решений уравнения  $\frac{\sqrt{x-1}}{2} = \frac{5}{x}$ , имеющего (в этом несложно убедиться) единственный корень  $x = 5$ . Проверка показывает, что  $x = 5$  удовлетворяет исходному уравнению.

*Ответ.*  $x = 5$ .

**8.12.** Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-8)^2} = 5, \\ 3xy - 10y = 3. \end{cases}$$

*Решение.* По-видимому, читатель заметил, что эта задача во многом похожа на задачу 7.39. Однако здесь метод подстановки бессилен.

Используя знакомую идею геометрической интерпретации, можно перейти к системе, равносильной данной. Имеем

$$\begin{cases} 4x - 3y + 4 = 0, \\ 3xy - 10y = 3, \\ 2 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

Решение этой системы не вызывает затруднений.

*Ответ.*  $x = 3,5$  и  $y = 6$ .

**8.13.** Решить систему

$$\begin{cases} x + \sqrt{1 - y^2} = 1, \\ y + \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{3}. \end{cases}$$

*Решение.* Поскольку в данной системе  $|x| \leq 1$  и  $|y| \leq 1$ , то можно положить  $x = \cos \alpha$ ,  $\alpha \in [0; \pi]$  и  $y = \cos \beta$ ,  $\beta \in [0; \pi]$  (эта идея знакома читателю по задаче 7.40).

Имеем

$$\begin{cases} \cos \alpha + \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = 1, \\ \cos \beta + \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Так как  $\alpha \in [0; \pi]$  и  $\beta \in [0; \pi]$ , то можно записать

$$\begin{cases} \cos \alpha + \sin \beta = 1, \\ \cos \beta + \sin \alpha = \sqrt{3}. \end{cases} \quad (*)$$

Возведем обе части каждого из уравнений этой системы в квадрат и сложим. Получим

$$2 + 2 \sin(\alpha + \beta) = 4,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = 1,$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Учитывая ограничения на  $\alpha$  и  $\beta$ , запишем  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ , т.е.  $\sin \beta = \cos \alpha$ .

Обратившись к системе (\*), получим  $\sin \beta = \cos \alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Значит,  $x = \cos \alpha = \frac{1}{2}$ ,  $y = \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Ответ.  $\left( \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ .

### Упражнения.

**8.14.** Решить уравнение

$$4 \cdot 3^{3x+1} + 4 = 5 \cdot 2^{9x}.$$

**8.15.** Решить уравнение

$$\frac{1}{\cos^2 x} + \cos^2 x = \cos 4x + \cos 2x.$$

**8.16.** Решить уравнение

$$\cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \left( 1 - 4 \cos^2 2x \right) - 2 \cos 4x = 3.$$

**8.17.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4 \sin \left( x + \frac{\pi}{8} \right) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x, \\ 0 < x \leqslant \frac{\pi}{8}. \end{cases}$$

**8.18.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3 \sin 3x + \cos y = -4, \\ x + y = \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

**8.19.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 1 - (x - 3)^2 = \sqrt{x - y}, \\ y^2 - 4 = \sqrt{x - y - 1}. \end{cases}$$

**8.20.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 - xy + 1 = 0, \\ x^2 + 2x = -y^2 - 2y - 1. \end{cases}$$

**8.21.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 4, \\ x^2 y^2 + 1 = 2 y^2. \end{cases}$$

**8.22.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 - |xy| + 2 = 0, \\ 8 - x^2 = (x + 2y)^2. \end{cases}$$

**8.23.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x + 3)^3 = 3 - 2y, \\ z^2 + 4y^2 = 8y, \\ (2z - x)(x + 3) = 5x + 16 \end{cases}$$

при условии  $z \geq 0$ .

# ОТВЕТЫ. УКАЗАНИЯ. РЕШЕНИЯ

## §1. «Коварные» вопросы теории

1.1. Нет. Если руководствоваться таким определением, то никаких два целых числа не имеют наименьшего общего кратного. Например, для чисел 8 и 6 общим кратным будут 0, 24, -24, 48, -48 и т.д., т.е. числа вида  $24n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . Понятно, что среди этих чисел нет наименьшего. Поэтому приведенное определение следует уточнить, потребовав от наименьшего общего кратного быть натуральным числом.

1.2. Приведенные определения верны. Однако они не являются эквивалентными. Несложно показать, что число  $d = \text{НОД}(a; b)$  по определению 1 является также  $\text{НОД}(a; b)$  и по определению 2. Но обратное утверждение неверно. Действительно, по определению 1  $\text{НОД}(8; 12) = 4$ , а по определению 2  $\text{НОД}(8; 12)$  равен 4 или -4. Пусть читателя не смущают подобные «разночтения». Такие факты еще раз подчеркивают, что в выборе определений существует разумная, основанная на целесообразности степень свободы. Кстати, в школьной математике принято определение 1.

1.3. Такой парой является  $(0; 0)$ . Вместе с тем, если придерживаться определения 2, то  $\text{НОД}(0; 0) = 0$ .

1.4. а) Нет. По этому определению любое натуральное число является простым.

б) Нет. По этому определению вообще не существует простых чисел, так как любое натуральное число  $n$  делится на  $n$ ,  $-n$ , 1, -1.

в) Нет. По этому определению 1 является простым числом.

г) Определение верное.

д) Определение верное.

1.5. а) Утверждение верное. Действительно, если  $p + \alpha = q$ , где  $p$  и  $q$  — рациональные числа, а  $\alpha$  — иррациональное, то  $\alpha = q - p$ , т.е. получим, что иррациональное число равно рациональному — противоречие.

б) Утверждение неверно. В самом деле,  $0 \cdot \alpha = 0$ , где  $\alpha$  — иррациональное число. Верным будет такое утверждение: произведение рационального числа, отличного от нуля, на иррациональное есть число иррациональное.

в) Утверждение неверно. Например,  $-\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$ . Приведем менее тривиальный пример. Понятно, что числа  $\alpha = 0,101001000100001\dots$ ,  $\beta = 0,010110111011110\dots$  — иррациональные. Но  $\alpha + \beta = 0,(1)$  — число рациональное.

г) Утверждение неверно. Например,  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ ;  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = 6$  и т.п.

1.6. Нет. Это определение следует уточнить, добавив требование  $n > 1$ . Вообще, говоря о степени с натуральным показателем, надо приводить два определения: одно уже нами уточненное, другое отдельно для  $n = 1$ , т.е. по определению  $a^1 = a$ .

1.7. Нет. Надо еще добавить, что  $a \neq 0$ .

1.8.  $b^2 = a$ .

1.9.  $b^2 = a$  и  $b \geq 0$ .

1.10. В первую очередь заметим, что наличие выражения  $\sqrt[n]{a^n}$  позволяет утверждать, что  $n \neq 1$ .

Если  $\frac{m}{n} = k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ , то при  $k > 0$  равенство выполняется при всех  $a$ , если  $k \leq 0$ , то только при  $a \neq 0$ .

Рассмотрим случай, когда число  $\frac{m}{n}$  не является целым.

Если  $\frac{m}{n} > 0$ , то равенство выполняется только при  $a \geq 0$ .

Если  $\frac{m}{n} < 0$ , то  $a > 0$ .

1.11. а) Нет, не следует. Ведь если какой-то из множителей  $x$  или  $y$  равен нулю, то данное выражение также будет определено.

б) Да, следует.

$$1.12. \sqrt{xy} = \begin{cases} \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}, & \text{если } x \geq 0 \text{ и } y \geq 0; \\ \sqrt{-x} \cdot \sqrt{-y}, & \text{если } x \leq 0 \text{ и } y \leq 0. \end{cases}$$

$$1.13. \lg(xy) = \begin{cases} \lg x + \lg y, & \text{если } x > 0 \text{ и } y > 0; \\ \lg(-x) + \lg(-y), & \text{если } x < 0 \text{ и } y < 0. \end{cases}$$

1.14. Нет. Надо добавить, что  $a \neq 0$ .

1.15. Верно лишь для квадратного трехчлена с положительным старшим коэффициентом.

1.16. Нет, не следует. Действительно, если  $a = 0$ , то из условия  $b^2 - 4ac = 0$  получаем, что  $b = 0$ , и исходное уравнение имеет бесконечно много корней при  $c = 0$  и не имеет корней при  $c \neq 0$ .

1.17. Верно. Ведь из условия  $b^2 - 4ac < 0$  следует, что  $a \neq 0$ , и данное в условии уравнение — квадратное с отрицательным дискриминантом.

1.18. Да, получим.

1.19. Не всегда. Так, когда  $D(\varphi) \subset D(f) \cap D(g)$  (т.е. прибавление выражения  $\varphi(x)$  сужает область определения исходного уравнения), можно корни потерять. Например, прибавление к обеим частям уравнения  $x^2 - x - 2 = 0$  выражения  $\sqrt{x}$  ведет к потере корня  $x = -1$ .

1.20. Если уравнение  $g(x) = 0$  имеет корни, отличные от корней уравнения  $f(x) = 0$ , причем эти корни принадлежат  $D(f)$ , то уравнение  $f(x)g(x) = 0$  является следствием уравнения  $f(x) = 0$ ; если  $D(g) \subset D(f)$ , то может оказаться, что уравнение  $f(x) = 0$  есть следствие уравнения  $f(x)g(x) = 0$ . (Например, уравнение  $\sin x = 0$  является следствием уравнения  $\sqrt{x} \cdot \sin x = 0$ ).

Понятно, что рассматриваемые уравнения могут быть и равносильными.

1.21. Уравнения равносильны.

1.22. А.

- а) сужается: 1), 5)  $n$  и  $k$  — четные, 10), 11);
- б) расширяется: 2), 6), 7), 8), 9)  $n$  — нечетное, 12);
- в) не изменяется: 3), 4), 5)  $n$  — нечетное, 9)  $n$  — четное.

Б. а) уже: 1), 3), 5)  $n$  и  $k$  — четные или  $n$  — нечетное,  $k$  — четное, 10), 11);

б) равно: 2), 4), 5)  $n$  — четное,  $k$  — нечетное или  $n$  и  $k$  — нечетные, 7), 8), 9), 12).

1.23. а) Определение неверное. Если требовать, что  $a_n > a_{n-1}$ , надо еще добавить  $n > 1$ .

б) Определение верное.

1.24. а) Утверждение верное.

б) Утверждение неверное. Например, последовательность с общим членом  $a_n = \frac{n}{n+1}$  ограничена сверху единицей. Но эта последовательность не имеет наибольшего элемента.

в) Утверждение неверное. См. предыдущий пример.

г) Утверждение верное. Наименьшим элементом будет  $a_1$ .

1.25. Неверно. Например, последовательность 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, ...,  $n$ , 0, ... не является ограниченной сверху. В то же время она не есть бесконечно большая.

1.26. Неверно. Арифметическая прогрессия с разностью равной нулю является ограниченной последовательностью.

1.27. Неверно. Таким свойством обладает каждый член, кроме первого, а в конечной прогрессии — еще кроме последнего.

1.28. Неверно. Надо добавить, что  $a_1 \neq 0$ .

1.29. Может. Последовательность 1, 1, ... обладает требуемыми свойствами.

1.30. Это утверждение верно лишь для геометрической прогрессии с положительными членами.

1.31. Неверно. Например, прогрессия, у которой  $a_1 = -1$ ,  $q = 2$ , возрастающей не является.

1.32. Может. Например,  $a_1 = -1$ ,  $q = \frac{1}{2}$ .

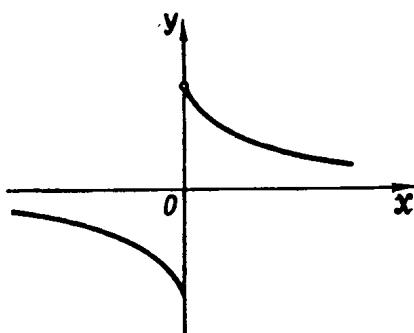


Рис. 75.

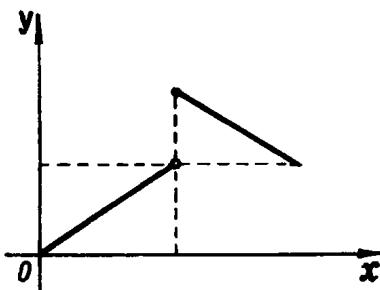


Рис. 76.

1.33. а) Определение неверное. Например, на рис. 75 изображен график функции, которая удовлетворяет всем требованиям определения, но нечетной не является. Требование, чтобы  $x$  и  $-x$  были различными, является лишним.

б) Определение верное. Хотя и здесь аналогичное требование ( $x$  и  $-x$  различны) является лишним.

1.34. Нет, не может. Это следует из того, что график нечетной функции симметричен относительно точки  $(0, 0)$ .

1.35. Может. Функция  $y = 0$  одновременно является как четной, так и нечетной.

1.36. Функция  $y = \frac{1}{x}$  не яв-

ляется убывающей. Эта функция убывает на каждом из промежутков  $(-\infty; 0)$  и  $(0; +\infty)$ .

1.37. Может. Например,  $y = \arctg x$ .

1.38. а) Нет, не может. Действительно, разным значениям аргумента монотонной функции соответствуют разные значения функции. Понятно, что четная функция таким свойством не обладает.

б) Может. Например,  $y = x^3$ .

1.39. Нет, не может. См. 1.38 а).

1.40. Может. См. рис. 76.

1.41. Примером такой функции может служить функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

1.42. Нет, не может. Например, пусть  $f$  — возрастающая функция,  $x_0$  — точка максимума. Тогда существует окрестность точки  $x_0$  такая, что для всех  $x$  из этой окрестности выполняется неравенство  $f(x_0) \geq f(x)$ . Пусть  $x_1$  и  $x_2$  из этой окрестности, причем  $x_1 < x_0 < x_2$ . Тогда для возрастающей функции  $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$ . Получили противоречие.

1.43. Неверно. Если функции  $f$  и  $g$  возрастающие, а  $D(f) \cap D(g) = \emptyset$  или  $D(f) \cap D(g)$  — одноэлементное множество, то о характере монотонности функции  $f + g$  речь идти не может. Например,  $f(x) = \arcsin x$ ,  $g(x) = \sqrt{x - 2}$ . Эти функции возрастающие. Однако функция  $f + g$  не определена.

1.44. Может. Например,  $y = \lg|x|$  или  $y = \frac{x^3}{x}$ .

1.45. Может. Например,  $f(x) = -\sin x$ ,  $g(x) = \frac{x}{2} + \sin x$ . Эти функции не являются монотонными. Но  $f(x) + g(x) = \frac{x}{2}$  — возрастающая функция.

1.46. Не всякая линейная функция обратима. Линейная функция  $y = kx + l$  при  $k = 0$  не является обратимой.

1.47. Может. Например, функция  $y = \sqrt{-x^2}$  является как четной, так и обратимой.

1.48. Нет, неверно. Например, функции  $y = -x^3$  и  $y = -\sqrt[3]{x}$  являются взаимно обратными, но не все общие точки их графиков лежат на прямой  $y = x$ . Верным будет такое утверждение: общие точки графиков любых двух взаимно обратных возрастающих функций лежат на прямой  $y = x$ .

1.49. Может. См. рис. 76.

1.50. Нет, неверно. Например, функции  $f(x) = -x + \sin x$  и  $g(x) = x + \sin x$  периодическими не являются. Вместе с тем функция  $f(x) + g(x) = 2\sin x$  — периодическая.

1.51. Нет, неверно. Например, функции  $f(x) = \sqrt{\sin x - 1}$  и  $g(x) = \operatorname{tg} x$  — периодические. Но функция  $f + g$  не определена.

1.52. Нет, неверно. Например, функции  $f(x) = \{x\}$  (дробная часть числа) и  $g(x) = \sin x$  — периодические, причем  $D(f) \cap D(g) = \mathbb{R}$ . Однако функция  $f(x) + g(x) = \{x\} + \sin x$  периодической не является.

Приведем верное утверждение: если функции  $f$  и  $g$  периодические, причем  $D(f) \cap D(g) \neq \emptyset$  и существуют соизмеримые периоды функций  $f$  и  $g$ , то функция  $f + g$  — периодическая.

1.53. Может. Рассмотрим функции  $f(x) = \cos x + \cos(\sqrt{2}x)$  и  $g(x) = 1 - \cos(\sqrt{2}x)$ .  $f(x) + g(x) = 1 + \cos x$  — функция периодическая. Осталось показать, что функция  $f$  непериодическая. Для этого покажем, что уравнение  $f(x) = 2$  имеет только один корень  $x = 0$ .

Запишем  $\cos \frac{1 + \sqrt{2}}{2}x \cdot \cos \frac{1 - \sqrt{2}}{2}x = 1$ . Это уравнение равносильно совокупности двух систем

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1 + \sqrt{2}}{2}x = 2\pi m, \\ \frac{1 - \sqrt{2}}{2}x = 2\pi n, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1 + \sqrt{2}}{2}x = \pi + 2\pi k, \\ \frac{1 - \sqrt{2}}{2}x = \pi + 2\pi p, \end{array} \right. \text{где } m, n, k, p \text{ — целые.}$$

Для первой системы при  $x \neq 0$  имеем  $\frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$  — противоречие. Значит, первая система имеет единственное решение  $x = 0$ . Аналогичным противоречием показывается, что вторая система вообще решений не имеет.

Интересно заметить, что существуют периодические функции  $f$  и  $g$ , основные периоды которых несоизмеримы, однако функция  $f + g$  — периодическая, причем имеет глав-

ный период. Обозначим  $M$  множество чисел вида  $a + b\sqrt{2}$ , где  $a$  и  $b$  — целые.

$$f(x) = \begin{cases} b, & \text{если } x = a + b\sqrt{2}, \\ 0, & \text{если } x \notin M, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -a, & \text{если } x = a + b\sqrt{2}, \\ 0, & \text{если } x \notin M. \end{cases}$$

Легко показать, что главные периоды функций  $f$  и  $g$  соответственно равны 1 и  $\sqrt{2}$ , а функция  $f + g$  имеет период  $1 + \sqrt{2}$ .

1.54. Нет, не существует. По определению число 0 не может быть периодом функции.

1.55. Существует. Это функция Дирихле. Действительно, поскольку сумма двух рациональных чисел — число рациональное, а сумма рационального и иррационального — число иррациональное, то прибавление к аргументу функции Дирихле рационального числа не изменяет ее значения. Еще отметим, что функция Дирихле определена на  $R$ .

1.56. Пусть такая функция существует. Возьмем  $x \in D(f)$ . Если  $x$  — иррациональное число, то  $f(x) = f(x - x) = f(0)$ , т.е. эта функция определена в точке  $x = 0$ , а следовательно, и во всех иррациональных точках. Пусть  $q$  — рациональное число, а  $\alpha$  — иррациональное. Тогда  $(q - \alpha) \in D(f)$ . Имеем  $f(q - \alpha) = f(q - \alpha + \alpha) = f(q)$ . Значит, рассматриваемая функция определена во всех рациональных точках. Итак,  $D(f) = R$ . Возьмем  $(x + q) \in D(f)$ , где  $q$  — рациональное число,  $q \neq 0$ . Для иррационального числа  $\alpha - q$  ( $\alpha$  — иррационально) запишем  $f(x + q) = f(x + q + \alpha - q) = f(x + \alpha) = f(x)$ . Следовательно, рациональное число  $q$  — период функции  $f$ , что противоречит требованию задачи.

Вывод: такой функции не существует.

1.57. Не всегда. Функции  $f(x) = \cos x + \cos 2x$  и  $g(x) = 1 - \cos x$  имеют главные периоды, равные  $2\pi$ . Однако функция  $f(x) + g(x) = 1 + \cos 2x$  имеет главный период  $\pi$ .

1.58. Не всегда. Функции  $f(x) = 1 + \cos x$  и  $g(x) = 1 - \cos x$  имеют главный период  $\pi$ . Но функция  $f(x) + g(x) = 2$  вообще главного периода не имеет.

1.59. а) Функция  $y$  — периодическая (при условии, что  $f(g(x))$  существует).

б) Функция  $y$  может быть как периодической, так и непериодической. Например,  $f(x) = \sin x$ ,  $g(x) = 2x$ , функция  $f(g(x)) = \sin 2x$  — периодическая;  $f(x) = \sin x$ ,  $g(x) = \sqrt{x}$ , функция  $f(g(x)) = \sin \sqrt{x}$  — непериодическая.

в) Понятно, что функция  $y$  может быть непериодической. Однако можно привести такой пример, когда она будет периодической.

Пусть  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$

Функции  $f$  и  $g$  — непериодические. Вместе с тем функция  $f(g(x)) = 1$  — периодическая.

1.60. а) Функция  $f + g$  непрерывна в точке  $x_0$ .

б) Понятно, что легко привести пример, когда функция  $f + g$  будет разрывной в точке  $x_0$ . Однако она может оказаться и непрерывной. Например, функции  $f(x) = \{x\}$  и  $g(x) = [x]$  разрывны во всех целых точках, однако  $f(x) + g(x) = x$  — непрерывная функция.

в) Функция  $f + g$  разрывна в точке  $x_0$ .

1.61. На рис. 77 показан пример функции, возрастающей

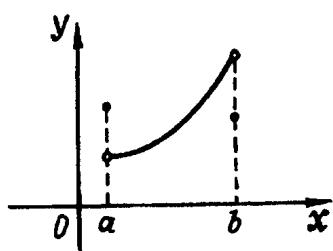


Рис. 77.

на  $(a; b)$ , но не являющейся возрастающей на  $[a; b]$ . Ответ на поставленный вопрос будет утвердительным, если функция  $f$  будет непрерывной в точках  $x = a$  и  $x = b$  (в крайнем случае непрерывной справа в точке  $x = a$  и слева — в точке  $x = b$ ).

1.62. Да, существует. Это, например, функция Дирихле.

1.63. Нет, неверно. Пример такой функции показан на рис. 78.

1.64. а) Существует. Например,

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \text{ — рациональное,} \\ -x, & \text{если } x \text{ — иррациональное.} \end{cases}$$

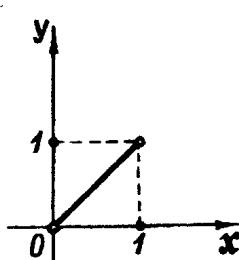


Рис. 78.

Для этой функции  $D(f) = R$  и она непрерывна только в одной точке  $x = 0$ .

Мы не будем приводить строгого доказательства этого факта. Ограничимся следующим замечанием: интуитивно понятно, что лишь в точке  $x = 0$  бесконечно малому приращению аргумента

та соответствует бесконечно малое приращение функции.

Отметим, что для построения примеров подобного рода достаточно рассмотреть функции  $f$  и  $g$  такие, что  $D(f) = D(g) = R$  и непрерывных в точке  $x_0$ , где  $x_0$  — единственный корень уравнения  $f(x) = g(x)$ . Тогда функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \text{ — рациональное,} \\ g(x), & \text{если } x \text{ — иррациональное,} \end{cases}$$

непрерывна только в точке  $x_0$ .

б) Существует. Например,

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x \text{ — рациональное,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное.} \end{cases}$$

Эта функция непрерывна только во всех точках вида  $\pi n$ , где  $n \in Z$ .

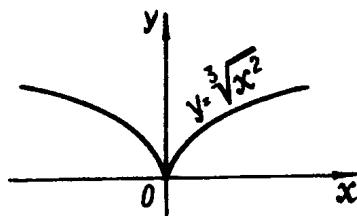


Рис. 79.

1.65. Нет, неверно. См. пример 1.60 б).

1.66. Нет, неверно. График функции  $y = \sqrt[3]{x^2}$  имеет в точке  $x = 0$  касательную (рис. 79), однако эта функция недифференцируема в точке  $x = 0$ .

1.67. а) Существует. Например,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \text{ — рациональное,} \\ -x^2, & \text{если } x \text{ — иррациональное.} \end{cases}$$

Функция  $f$  дифференцируема только в точке  $x = 0$ ,  $f'(0) = 0$ .

б) Существует. Например,

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & \text{если } x \text{ — рациональное,} \\ \sin x, & \text{если } x \text{ — иррациональное.} \end{cases}$$

Эта функция дифференцируема только во всех точках вида  $2\pi n$ , где  $n \in Z$ , причем ее производная в этих точках равна 1.

1.68. Данная функция или квадратичная, или линейная.

1.69. Нет, неверно. На рис. 80 показан график функции, непрерывной и возрастающей на  $I$ , но в точке  $x_0 \in I$  недифференцируемой.

1.70. Нет, нельзя. Функция  $f$  может оказаться недифференцируемой в точке  $x_0$ . Например, для функции  $y = |x|$  точка  $x = 0$  — критическая, но эта функция недифференцируема в этой точке.

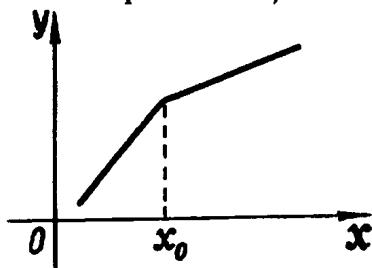


Рис. 80.

1.71. Нет, не всегда. Для функции  $f(x) = \sqrt{x}$   $f(x) \geq f(0)$  для всех  $x \in D(f)$ , однако точка  $x = 0$  не является точкой минимума функции  $f$ .

1.72. Точка  $x_1$  — точка максимума. Точку  $x_2$  можно считать как точкой максимума, так и точкой минимума. Точка  $x_3$  — точка минимума.

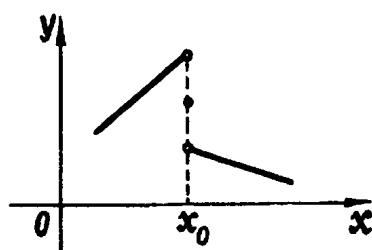


Рис. 81.

1.73. Нет, нельзя. На рис. 81 показан пример функции, которая удовлетворяет всем перечисленным свойствам, однако точка  $x_0$  не является точкой экстремума.

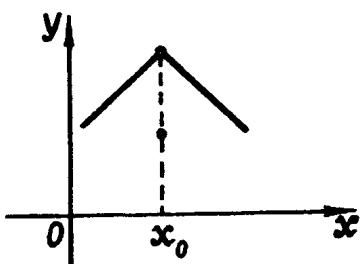


Рис. 82.

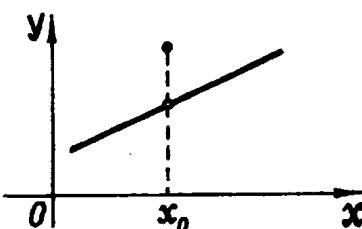


Рис. 83.

1.74. Точка  $x_0$  может оказаться и точкой минимума. См. рис. 82.

1.75. На рис. 83 показан пример функции, удовлетворяющей перечисленным требованиям. Однако точка  $x_0$  является точкой экстремума.

## §2. Осторожно! Простая задача!

2.1. См. рис. 84. 2.2. См. рис. 84. Указание. Здесь важно не забыть, что выражение  $x^{\frac{1}{3}}$  определено только для неотрицательных значений переменной.

2.3. См. рис. 85. Указание. Функция не определена в точках

$$x = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

2.4. См. рис. 86. Указание. При применении фор-

мулы  $\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \sin x$  происходит

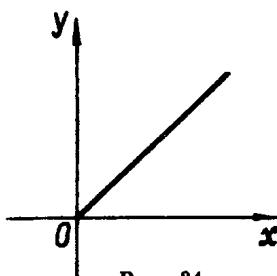


Рис. 84.

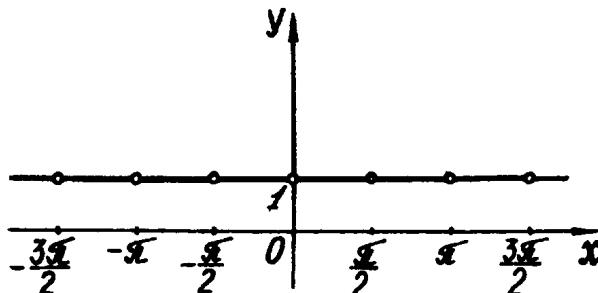


Рис. 85.

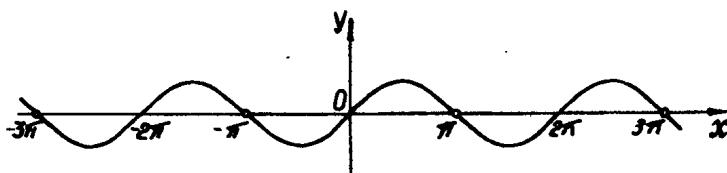


Рис. 86.

расширение области определения. 2.5. См. рис. 87. Здесь, как и в предыдущей задаче, нужно не забыть, что «исчезновение» в результате преобразований выражения  $\operatorname{tg} 2x$  расширяет область определения исходного выражения. 2.6. См. рис. 88. 2.7. См. рис. 89. Указание. Область определения данной функции  $D(y) = [-1; 1]$ . 2.8. См. рис. 90. 2.9. См. рис. 91. Указание.  $\pi$  — наибольшее значение функции  $y = \arccos x$ . 2.10. См. рис. 92. 2.11. См. рис. 93. 2.12. См. рис. 94.

2.13. См. рис. 95. Указание. Применяя формулу логарифм степени, важно понимать, что  $\lg(f(x))^{2k} = 2k\lg|f(x)|$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ . 2.14. См. рис. 96. 2.15. См. рис. 97. Указание. При переходе от выражения  $\frac{1}{\log_{f(x)} a}$  к выражению  $\log_a f(x)$  происходит расширение области определения на множество кор-

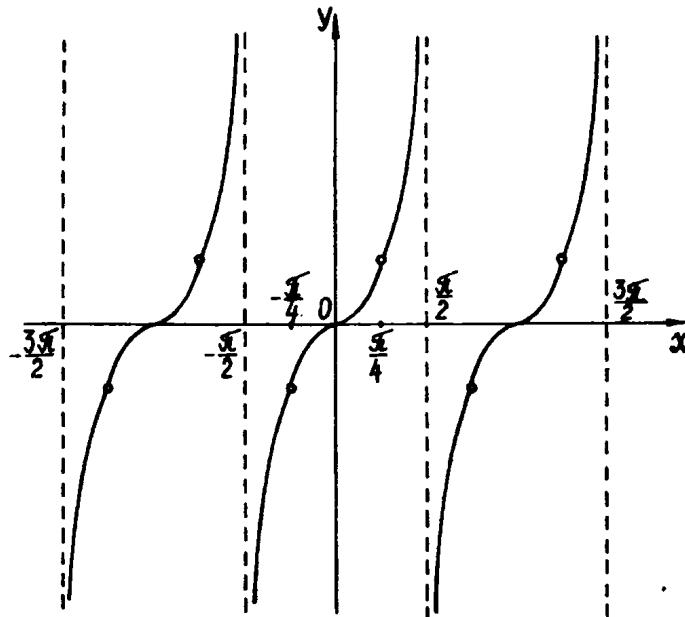


Рис. 87.

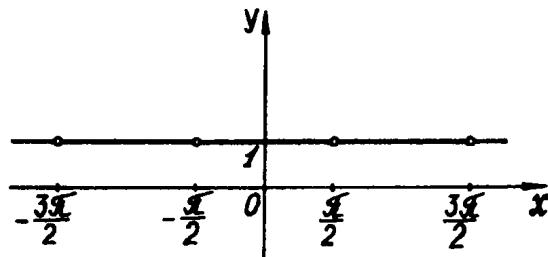


Рис. 88.

ней уравнения  $f(x) = 1$ . 2.16. См. рис. 98. Указание. Найдите область определения функции. 2.17. См. рис. 99.

2.18. Графиком данной функции является кривая  $y = 2 - \sin x$ . 2.19. См. рис. 100. Указание. При применении

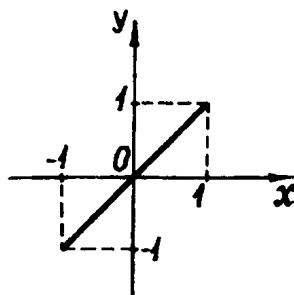


Рис. 89.

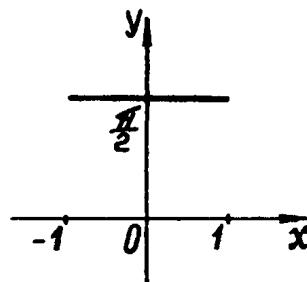


Рис. 90.

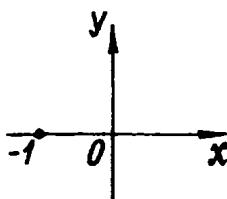


Рис. 91.

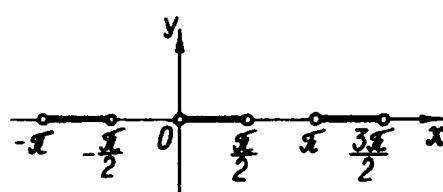


Рис. 92.

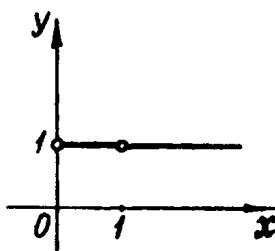


Рис. 93.

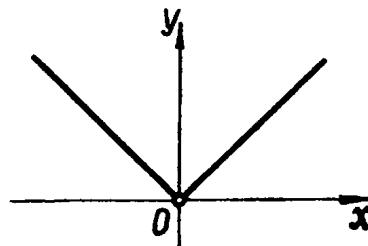


Рис. 95.

формулы  $\log_a f(x) - \log_a g(x) = \log_a f\left(\frac{x}{g(x)}\right)$  происходит расширение области определения. 2.20. См. рис. 101. 2.21. а)  $a \geq 1$ . См. указание к задаче 2.32. б)  $a \geq 2$ . Указание. Преобразуя выражение, стоящее в левой части ра-

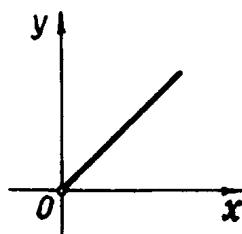


Рис. 94.

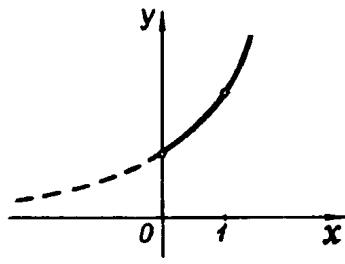


Рис. 96.

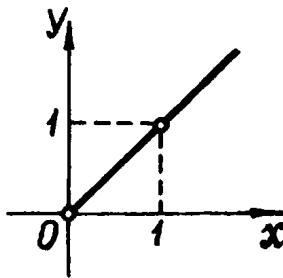


Рис. 97.

венства, следует воспользоваться тождеством  $\sqrt[2k+1]{a^{2n}} = \sqrt[k]{|a|^n}$ .

- б) При  $a \in N$   
 $a \neq 1$ . 2.22.  $-\sqrt{a^2 b}$ ,  
 если  $a < 0$ , и  $\sqrt{a^2 b}$ ,  
 если  $a \geq 0$ . 2.23. Ес-  
 ли  $a \neq 0$ , то  $b \geq 0$ ;  
 если  $a = 0$ , то  $b$  —  
 любое. 2.24.

$\sqrt{2 - \sin x} \sqrt{3 - \cos y}$ .  
 2.25. а)  $6 - 2\pi$ . б)  
 $6\pi - 16$ . Указание.  
 Здесь важно учесть  
 области значений  
 функций  $y = \arcsin x$   
 и  $y = \arccos x$ .

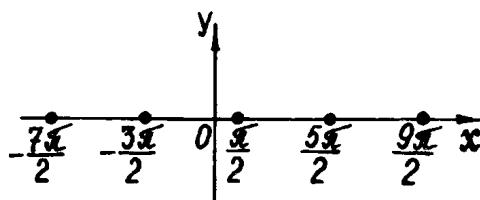


Рис. 98.

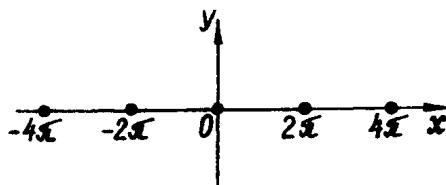


Рис. 99.

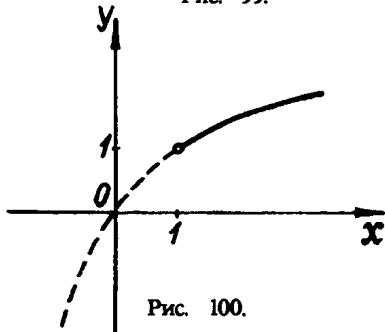


Рис. 100.

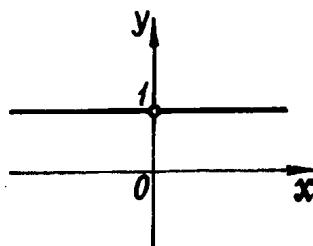


Рис. 101.

- 2.26. Нет решений. 2.27.  $x < 1$  или  $x > 1$ . 2.28.  $-5$ . 2.29. Нет  
 решений. 2.30.  $x < -3$  или  $x > -3$ . 2.31.  $x < 3$  или  $x > 3$ .  
 Заметим, что во всех упражнениях 2.32 — 2.49 нет необ-

- ходимости применять метод интервалов.
- 2.32.  $x < 0$  или  $x > 0$ . 2.33. 0. 2.34.  $x < 0$  или  $x > 0$ . 2.35.  $x > 0$ . 2.36.  $x < 0$ .  
 2.37.  $x < 0$  или  $x > 0$ . 2.38.  $x < 1$  или  $x > 1$ . 2.39.  $x < 1$  или  $x > 1$ . 2.40.  $x < 1$  или  $x > 1$ . 2.41. Нет решений. 2.42.  $x < 3$  или  $x > 3$ . 2.43.  $x < 2$ , или  $2 < x < 3$ , или  $x > 3$ . 2.44.  $-1 < x < 0$  или  $x > 0$ . 2.45.  $1 < x < 4$  или  $x > 4$ .  
 2.46.  $1 < x < 2$  или  $x > 2$ . 2.47.  $x = -2$  или  $x \geq 1$ . 2.48.  $3 < x < -2$  или  $x < -3$ . 2.49.  $x = 3$  или  $x \leq -2$ . 2.50-2.63. Нет решений. 2.53. Указание. Левая часть уравнения неотрицательна, правая — неположительна. Однако левая и правая части обращаются в нуль при различных значениях  $x$ .
- 2.57. Указание. Правая и левая части уравнения разных знаков. 2.61-2.63. Указание. Воспользуйтесь свойством 3).
- 2.64. 0. 2.65. 2. 2.66. 3. 2.67.  $-3$ . 2.68.  $-2$ . 2.69. 0. Указание.  
 $x - |x| \leq 0$  в то время, как  $x^2 \geq 0$ . 2.70.  $x \geq 0$ . 2.71.  $x \geq \frac{3}{2}$ .  
 2.72.  $-1 \leq x \leq 1$ . 2.73.  $x < 1$ . 2.74.  $x > 0$ . 2.75.  $x < 3$ . 2.76.  $x$  — любое. 2.77.  $x < 3$  или  $x > 3$ . 2.78.  $x$  — любое. 2.79. Нет решений. 2.80.  $x < -3$  или  $x > -3$  и  $x \neq \frac{3}{2}$ . Указание.

Решением данного неравенства является область его определения.

2.81.  $x < -1$ , или  $-1 < x < 1$ , или  $x > 1$ . 2.82.  $x < 0$  или  $x > 0$ . 2.83.  $x$  — любое. 2.84. Нет решений. 2.85.  $x = 2$  или  $x = -2$ . 2.86.  $x$  — любое. 2.87.  $x < 0$  или  $x > 0$ . Указание. Обратите внимание на то, что данное неравенство строгое. 2.88.  $x$  — любое. Указание. Заметим, что при  $x = 0$  правая часть неравенства отрицательна.

2.89.  $x$  — любое. 2.90.  $x < 0$  или  $x > 0$ . 2.91.  $x < 0$  или  $x > 0$ . 2.92.  $x$  — любое. 2.93.  $x < 0$  или  $x > 0$ . 2.94.  $x$  — любое. 2.95.  $x < 0$ . 2.96.  $x$  — любое. 2.97.  $x > 0$ . 2.98. Нет решений. 2.99.  $x \geq 0$ . 2.100. Нет решений. 2.101.  $x \leq 0$ . 2.102.  $x < 0$  или  $x > 0$ . 2.103.  $x > 0$ . 2.104. Нет решений. 2.105.  $x < 0$  или  $x > 0$ . 2.106.  $x < 0$ . 2.107.  $x$  — любое. Указание. При любом  $x$   $|x| + x \geq 0$ . 2.108.  $x < 0$  или  $x > 0$ . 2.109.  $x = 0$ . 2.110. Нет решений. 2.111.  $x < 0$  или  $x > 0$ . 2.112. Нет решений. 2.113.  $x > 0$  и  $x \neq 1$ . 2.114.  $x \leq 0$  или  $x = 1$ . 2.115.  $x = -1$  или  $x \geq 0$ . 2.116.  $x < 0$  и  $x \neq -1$ . 2.117.  $x \leq 0$ . 2.118.  $x > 0$  и  $x \neq 1$ . 2.119.  $x \geq 0$  и  $x \neq 1$ . 2.120.  $x < 0$  и  $x \neq -1$ . 2.121.  $x \leq 0$  и  $x \neq -1$ . 2.122. 0. 2.123. 0. 2.124. Нет решений. 2.125. Нет решений. 2.126. 0. 2.127. Нет решений. 2.128. 0. 2.129. 1. 2.130. 2. 2.131.  $x$  — любое. 2.132.  $x \geq 0$ . 2.133.  $x \leq 0$ . 2.134. 3. Указание. Область определения дан-

ного уравнения  $x \geq 3$ . 2.135.  $x \geq 0$ . Указание. См. теорему 13. 2.136.  $x \leq 1$ . 2.137. 2. 2.138.  $x = 0$  или  $x = 2$ . 2.139. Нет решений. 2.140. Нет решений. 2.141. Нет решений. 2.142.  $x \geq 2$ . 2.143.  $x$  — любое. 2.144.  $x < 0$  или  $x > 0$ . 2.145.  $x > -3$ . 2.146. 0. 2.147.  $0 \leq x < 1$ . 2.148.  $x \geq 0$ . 2.149.  $x > 0$ . 2.150.  $x \geq 0$ . 2.151.  $x > 0$ . 2.152. 0. 2.153. Нет решений. 2.154.  $x$  — любое. 2.155.  $x < 0$  или  $x > 0$ . 2.156.  $x = -3$  или  $x \geq 0$ . 2.157. Нет решений. 2.158. 0. 2.159.  $x \geq 0$ . 2.160.

$x \geq -\frac{3}{2}$ . 2.161.  $x > 0$ . 2.162. а) (1)  $\Leftrightarrow$  (2); б) (2)  $\Rightarrow$  (1); в)

(1)  $\Rightarrow$  (2); г) (1)  $\Leftrightarrow$  (2); д) (1)  $\Leftrightarrow$  (2); е) (1)  $\Leftrightarrow$  (2); ж) (1)  $\Leftrightarrow$  (2); з) (1)  $\Rightarrow$  (2); и) никакое из данных уравнений не может являться следствием другого; к) (1)  $\Rightarrow$  (2); л) (1)  $\Leftrightarrow$  (2); м) (1)  $\Leftrightarrow$  (2); н) (1)  $\Leftrightarrow$  (2); о) (1)  $\Rightarrow$  (2); п) (1)  $\Leftrightarrow$  (2); р) (1)  $\Rightarrow$  (2); с) (1)  $\Leftrightarrow$  (2). Указание. Данные уравнения не имеют решений, а следовательно, равносильны. т) (1)  $\Rightarrow$  (2). Указание. Первое уравнение решений не имеет, значит, любое уравнение (с одной переменной) может являться его следствием. Кстати, второе уравнение имеет, по крайней мере, один действительный корень, например,  $x = -1$ ; у) (1)  $\Rightarrow$  (2); ф) (1)  $\Leftrightarrow$  (2); х) (1)  $\Rightarrow$  (2); ц) (1)  $\Leftrightarrow$  (2); и) (1)  $\Rightarrow$  (2); ю) (1)  $\Rightarrow$  (2); ѿ) (1)  $\Rightarrow$  (2); ѿ) (2)  $\Rightarrow$  (1); Ѽ) (1)  $\Leftrightarrow$  (2); Ѽ) (1)  $\Rightarrow$  (2).

2.163. Если  $a = -2$ , то  $x$  — любое; если  $a = 2$ , то решений нет; если  $a \neq \pm 2$ , то  $x = \frac{1}{a-2}$ . 2.164. Если  $a = 1$ , то  $x$  — любое; если  $a = 5$ , то решений нет; если  $a \neq 1$  и  $a \neq 5$ , то  $x = \frac{1}{a-5}$ . 2.165. Если  $a = 0$  и  $b = 0$ , то  $x$  — любое; если

$a = 0$ , а  $b \neq 0$ , то решений нет; если  $a \neq 0$ , то  $x = \frac{b}{a}$ . 2.166.

Если  $a = -2$ , то решений нет; если  $a \neq -2$ , то  $x = 2$ . 2.167.

Если  $a = -3$ , то решений нет; если  $a \neq -3$ , то  $x = a$ . 2.168.

Если  $a \neq 2$ , то  $x = a$ . 2.169. Если  $a = -7$  или  $a = 7$ , то

решений нет; если  $a \neq \pm 7$ , то  $x = 7$ . 2.170. Если  $a = 0$ , то

решений нет; если  $a \neq 0$ , то  $x = -2a$ . 2.171. Если  $a = 1$  или

$a = 3$ , то решений нет; если  $a \neq 1$  и  $a \neq 3$ , то  $x = a$ . 2.172.

Если  $a = 1$ , то  $x = 3$ ; если  $a = 3$ , то  $x = 1$ ; если  $a \neq 1$

и  $a \neq 3$ , то  $x = 1$  или  $x = 3$ . 2.173. Если  $a = 0$ , то  $x < 0$  или

$x > 0$ ; если  $a = 2$ , то решений нет; если  $a \neq 0$  и  $a \neq 2$ , то

$x = a$ . 2.174. Если  $a = 0$ , то  $x < 2$  или  $x > 2$ ; если  $a = 2$ , то

решений нет; если  $a \neq 0$  и  $a \neq 2$ , то  $x = a$ . 2.175. Если  $a < 0$ , то решений нет; если  $a \geq 0$ , то  $x = a^2 + 3$ . 2.176. Если  $a > 0$ , то решений нет; если  $a \leq 0$ , то  $x = a^2$ . 2.177. Если  $a = 0$ , то  $x \geq 0$ ; если  $a \neq 0$ , то  $x = 0$ . 2.178. Если  $a \leq 1$ , то  $x = 1$ ; если  $a > 1$ , то  $x = 1$  или  $x = a$ . 2.179. Если  $a \leq 1$ , то решений нет; если  $a > 1$ , то  $x = a$ . 2.180. Если  $a \leq -1$ , то  $x = -a$ ; если  $a > -1$ , то  $x = 1$  или  $x = -a$ . 2.181. Если  $a \leq -1$ , то решений нет; если  $a > -1$ , то  $x = 1$ . 2.182. Если  $a \leq 0$ , то  $x = 0$ ; если  $a > 0$ , то  $x = a$ . 2.183. Если  $a \leq 0$ , то  $x = -a$ ; если  $a > 0$ , то  $x = a$  или  $x = -a$ . 2.184. Если  $a < 0$ , то  $x = a$  или  $x = -a$ ; если  $a \geq 0$ , то  $x = a$ . 2.185. Если  $|a| > 1$ , то  $x = a$ , или  $x = -1$ , или  $x = 1$ ; если  $|a| \leq 1$ , то  $x = 1$  или  $x = -1$ . 2.186. Если  $a < -1$ , то  $x = a$ , или  $x = -1$ , или  $x = 1$ ; если  $-1 \leq a < 1$ , то  $x = a$  или  $x = 1$ ; если  $a \geq 1$ , то  $x = a$ . 2.187. Если  $a = 0$ , то  $x = 0$ ; если  $a \neq 0$ , то решений нет. 2.188. Если  $a = 0$ , то  $x = 1$ ; если  $a \neq 0$ , то нет решений. 2.189. Нет решений. 2.190. Если  $a \geq 0$ , то  $x = \pm a$ ; если  $a < 0$ , то нет решений. 2.191. Если  $a = 0$ , то  $x = 3$ ; если  $a \neq 0$ , то нет решений. 2.192. Если  $a = 0$ , то  $x = 3$ ; если  $a \neq 0$ , то нет решений. 2.193. Нет решений. 2.194. Если  $a < 0$ , то  $a < x < 0$ ; если  $a = 0$ , то нет решений; если  $a > 0$ , то  $0 < x < a$ . 2.195. Если  $a < 0$ , то  $2a < x < a$ ; если  $a = 0$ , то нет решений; если  $a > 0$ , то  $a < x < 2a$ . 2.196. Если  $a < 0$ , то  $x < 2a$ ; если  $a = 0$ , то  $x < 0$ ; если  $a > 0$ , то  $x < a$  или  $a < x < 2a$ . 2.197. Если  $a < 0$ , то  $x = a$  или  $x \leq 2a$ ; если  $a = 0$ , то  $x \leq 0$ ; если  $a > 0$ , то  $x \leq 2a$ . 2.198. Если  $a = 0$ , то  $x = 0$ ; если  $a \neq 0$ , то нет решений. 2.199. Если  $a > 0$ , то  $x > 0$ ; если  $a \leq 0$ , то нет решений. 2.200. Если  $a \leq 0$ , то  $x \geq 0$ ; если  $a > 0$ , то  $x = 0$ . 2.201. Если  $a < 0$ , то  $x \geq 0$ ; если  $a \geq 0$ , то  $x > a^2$ . 2.202. Если  $a \geq 0$ , то  $0 \leq x \leq a^2$ ; если  $a < 0$ , то нет решений. 2.203. Если  $a < 0$ , то  $x \geq 0$ ; если  $a = 0$ , то  $x > 0$ ; если  $a > 0$ , то  $x \geq a$ . 2.204. Если  $a \leq 0$ , то  $x \geq 0$ ; если  $a > 0$ , то  $x \geq a$ . 2.205. Если  $a \leq 0$ , то  $a \leq x \leq 0$ ; если  $a > 0$ , то  $x = a$ . 2.206. Если  $a \leq -1$ , то  $x > -a$ ; если  $a > -1$ , то  $-a < x < 1$  или  $x > 1$ . 2.207. Если  $a < 2$ , то  $a \leq x < 2$  или  $x > 2$ ; если  $a = 2$ , то  $x > 2$ ; если  $a > 2$ , то  $x \geq a$ . 2.208. Если  $a > 0$ , то  $2 - a < x \leq a + 2$ ; если  $a \leq 0$ , то нет решений. 2.209. Если  $a \leq 0$ , то  $x = \pm \sqrt{-a}$ ; если  $a > 0$ , то нет решений. 2.210. Если  $a > 0$ , то  $x = 0$  или  $x \leq -a$ ; если  $a \leq 0$ , то  $x \leq -a$ .

**2.211.** Если  $a < 0$ , то  $a < x < 0$  или  $x > 0$ ; если  $a \geq 0$ , то  $x > a$ . **2.212.** Если  $a < 1$ , то  $x = a$  или  $x \geq 1$ ; если  $a \geq 1$ , то  $x \geq 1$ . **2.213.** Если  $a > -2$ , то  $-a < x < 2$  или  $x < -a$ ; если  $a \leq -2$ , то  $x < 2$ . **2.214.** Если  $a \leq 0$ , то  $x$  — любое; если  $a > 0$ , то  $x \leq \log_2 a$ . **2.215.** Если  $a < 0$ , то  $x$  — любое; если  $a = 0$ , то решений нет; если  $a > 0$ , то  $x > -\log_2 a$ . **2.216.** Если  $a \neq 0$ , то  $x$  — любое; если  $a = 0$ , то  $x < 1$  или  $x > 1$ . **2.217.**  $a \leq 3$ . **2.218.**  $a = -2$ . **2.219.**  $4 < a \leq 5$ . **2.220.** а)  $a \leq 3$ ; б)  $a \geq 5$ . **2.221.**  $a = -4$  или  $a = -13$ . **2.222.**  $a = 20$ . **2.223.**

$$a) -8 < a < -6 \text{ или } -6 < a < 2; \quad b) a = -2 \text{ или } -\frac{1}{40} < a < 0,$$

$$\text{или } a > 0. \ 2.224. -\frac{19}{3} < a \leq -5. \ 2.225. a \leq -3. \ 2.226. a)$$

$$a = 81 \text{ или } a < 0; \text{ б) } a = 1 \text{ или } a \leq 0; \text{ в) } 0 < a < 1 \text{ или } a > 1; \\ \text{ г) } a < -4 \text{ или } a \geq -2; \text{ д) } -1 \leq a < 1. \quad 2.227. \quad a \geq -4. \quad 2.228.$$

$$a \leq \frac{6}{5}. \quad 2.229. \quad a \leq -1 \text{ или } a \geq 1. \quad 2.230. \quad a = 0. \quad 2.231. \quad a < -\frac{1}{2}.$$

**Указание.** Первое уравнение или имеет бесконечно много корней, или вообще их не имеет. Второе уравнение имеет один корень или ни одного. Следовательно, о равносильности может идти речь только тогда, когда данные уравнения корней не имеют. 2.232.  $a = 1$  или  $a = \frac{6 - \sqrt{11}}{25}$ .

### §3. Откуда берутся посторонние корни

$$3.31. \quad 3. \quad 3.32. \quad -\frac{4}{3}. \quad 3.33. \quad (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$k \in \mathbb{Z}$ ,  $k \neq 0$ . Указание. Из корней уравнения  $2 - 3\sin x - \cos 2x = 0$  следует исключить те, которые не удовлетворя-

$$\text{ют условия } \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2}, \\ x \neq -\frac{\pi}{3} \end{cases} \quad 3.34. \quad \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad \text{Указание.}$$

Несложно перейти к уравнению — следствию  $2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x + 2 = 0$ , имеющему своими решениями все числа вида  $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . Однако исходному уравнению удовлетворяют лишь те из чисел указанной

$n = 2k + 1$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . 3.35.  $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Указание. Исход-

ное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin(x + \frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin x \neq -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

3.36.  $\frac{\pi}{7} + \frac{2\pi k}{7}$ ,  $k \neq 7l + 3$ ,  $k, l$  — целые. *Решение.* Данное в условии уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin 2x \sin 4x - \sin x \sin 4x = \sin x \sin 2x, \\ \sin 4x \neq 0. \end{cases}$$

Применяя к каждому из слагаемых уравнения формулу  $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$ , получим

$$\begin{cases} \cos 2x - \cos 6x + \cos 5x - \cos x = 0, \\ \sin 4x \neq 0. \end{cases}$$

Отсюда, проводя очевидные преобразования, получаем

$$\begin{cases} \sin 2x = 0, \\ \sin \frac{x}{2} = 0, \\ \cos \frac{7x}{2} = 0, \\ \sin 4x \neq 0. \end{cases}$$

Ясно, что ни одно из решений первого и второго уравнений совокупности системы не удовлетворяют. Имеем

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi k}{7}, \\ x \neq \frac{\pi n}{4}, \quad n \text{ и } k \text{ — целые.} \end{cases}$$

Мы пришли к необходимости исключить из серии  $\frac{\pi}{7} + \frac{2\pi k}{7}$

числа, которые могут быть представлены в виде  $\frac{\pi n}{4}$ . Один эффективный метод решения такого типа задач читатель может найти в [2]. 3.37.  $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$ ,  $k \neq 3n + 1$ , или  $\frac{\pi m}{5}$ ,  $m \neq 5p$ ,  $k, m, p, n$  — целые. 3.38.  $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}$ ,  $k \neq 3n + 1$ , или

$\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi m}{5}$ ,  $m \neq 5p + 2$ ,  $k, m, p, n$  — целые. Указание. Преобразовав левую часть уравнения к виду  $-4\operatorname{tg}4x(1 + \cos 3x)$ , перейдите к равносильной системе

$$\begin{cases} -\cos 4x - \cos 4x \cos 3x = \sin 4x \sin 3x, \\ \sin 4x \neq 0. \end{cases}$$

Откуда несложно получить

$$\begin{cases} 2\cos \frac{3x}{2} \cos \frac{5x}{2} = 0, \\ \sin 4x \neq 0. \end{cases}$$

3.39. 0. Указание. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 9 - 2^x = \frac{8}{2^x}, \\ x \neq 3. \end{cases}$$

3.40. 10. 3.41. Нет решений. 3.42.  $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Указание. Здесь важно не упустить, что применение формулы  $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  расширяет область определения ровно на множество чисел вида  $\pi n$ . 3.43.  $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . 3.44. Нет решений. Решение. Проведем необходимые преобразования:

$$\frac{2\cos^2 x + 2\sin x \cos x}{2\sin^2 x + 2\sin x \cos x} + \sin x \left( \frac{\cos x \cos \frac{x}{2} + \sin x \sin \frac{x}{2}}{\cos x \cos \frac{x}{2}} \right) = -2,$$

$$\frac{2\cos x(\cos x + \sin x)}{2\sin x(\cos x + \sin x)} + \sin x \frac{\cos \frac{x}{2}}{\cos x \cos \frac{x}{2}} = -2.$$

Теперь ясно, что исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x = -2, \\ \cos x + \sin x \neq 0, \\ \cos \frac{x}{2} \neq 0. \end{cases}$$

Получаем

$$\begin{cases} \operatorname{tg}x = -1, \\ \operatorname{tg}x \neq -1, \\ \cos\frac{x}{2} \neq 0. \end{cases}$$

**3.45.**  $\pi k, k \in \mathbb{Z}$ . **Указание.** Преобразуя дробь  $\frac{3\sin 4x + 2\sin 2x}{3\cos 4x + 2\cos 2x + 3} = \frac{2\sin 2x(3\cos 2x + 1)}{2\cos 2x(3\cos 2x + 1)} = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}$ , легко перейти к системе, равносильной данному уравнению:

$$\begin{cases} \frac{2\operatorname{tg}x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + 2\operatorname{tg}x = 0, \\ \cos 2x \neq -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} \operatorname{tg}x = 0, \\ \operatorname{tg}^2 x = 2, \\ \cos 2x \neq -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Именно здесь важно проявить бдительность, заметив, что решения уравнений  $\operatorname{tg}^2 x = 2$  и  $\cos 2x = -\frac{1}{3}$  в точности совпадают. **3.46.** Нет решений. **3.47.**  $(-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

**3.48.**  $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ . **Указание.** Используя формулу  $\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$ , покажите, что  $1 - \sin 3x = (1 + \sin x) \times (2\sin x - 1)^2$ . После чего уже не сложно получить систему, равносильную исходному уравнению:

$$\begin{cases} 3(2\sin x - 1) = 2\cos 2x - 7, \\ \sin x \neq -1, \\ \sin x \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

**3.49. 9. 3.50.** Нет решений. **Указание.** Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2x^2 + x - 1 = 0, \\ x > 0, \\ x \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

**3.51.**  $\pm \frac{\pi}{3} + \pi k$ ,  $k \in Z$ . *Решение.* Преобразуем правую часть уравнения:

$$\sin^4 x + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{\cos^2 x + 3\cos^2 x \sin^4 x}{\sin^2 x}.$$

Отсюда

$$\sin^4 x + \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{ctg}^2 x + 3\cos^2 x \sin^2 x.$$

Теперь, приводя подобные слагаемые, важно не забыть о требовании  $\sin x \neq 0$ . Получаем систему

$$\begin{cases} \sin^2 x (\sin^2 x - 3\cos^2 x) = 0, \\ \sin x \neq 0, \end{cases}$$

из которой уже совсем не сложно получить ответ.

**3.52.** Нет решений. **3.53.**  $\frac{3}{4}$ . **3.54.** 0. **3.55.**  $4 - \sqrt{11}$ . *Указание.*

Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \lg((5-x)(3-x)) = 1, \\ x < 3. \end{cases}$$

**3.56.** 37. **3.57.** 1. **3.58.** -10. **3.59.** Нет решений. *Указание.*

При переходе в левой части уравнения от выражения  $\frac{2}{\log_{\sqrt{x}} 10}$  к выражению  $2\lg\sqrt{x}$  происходит расширение области определения и возникает опасность приобретения постороннего корня  $x = 1$ . Поэтому исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \lg(\sqrt{3+x} - 1) = 2\lg\sqrt{x}, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

**3.60.** 2. *Указание.* После несложных преобразований

$$\log_x 27 \log_x x = \frac{\log_x 27}{\log_x 9} = \log_9 27 = \frac{3}{2}$$

«исчезают» логарифмы, стоящие в левой части уравнения. Поэтому к полученному уравнению необходимо подключить условия  $x > 0$  и  $x \neq 1$ .

**3.61.** 1. **3.62.**  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ ,  $\pi n$ ,  $k, n$  — целые. **3.63.**  $x = \frac{3\pi}{4}$ ,

$y = 5 - \frac{3\pi}{2}$ . *Решение.* Преобразуя второе уравнение системы, получаем

$$\begin{cases} \operatorname{tg}3x = \operatorname{tg}\frac{y-5}{2}, \\ 2x + \log_{\frac{x}{16}} \frac{\pi^2 x}{16} = \log_{\frac{x}{\pi}} \frac{64x^6}{\pi^3} - 2^{\log_2 y}. \end{cases}$$

Перейдем к равносильной системе

$$\begin{cases} \operatorname{tg}3x = \operatorname{tg}\frac{y-5}{2}, \\ 2x + \log_{\frac{x}{4}} \frac{\pi^5}{4^5 x^5} + y = 0, \\ y > 0. \end{cases}$$

Отсюда имеем

$$\begin{cases} \operatorname{tg}3x = \operatorname{tg}\frac{y-5}{2}, \\ 2x - 5 + y = 0, \\ x > 0, \\ y > 0, \\ x \neq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi k}{4}, \\ y = 5 - \frac{\pi k}{2}, \\ x > 0, \\ y > 0, \\ x \neq \frac{\pi}{4}, \\ x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \quad k \text{ и } n \text{ — целые.} \end{cases}$$

Уже неравенства  $x > 0$  и  $y > 0$  оставляют для  $k$  лишь три возможности:  $k = 1$ ,  $k = 2$ ,  $k = 3$ . Однако  $k = 1$  и  $k = 2$  не удовлетворяют двум последним неравенствам системы соответственно. При  $k = 3$  получаем указанный выше ответ.

**3.64.** Нет решений. **Указание.** Нужно не забыть, что  $x$  — натуральное число, большее единицы. **3.65.**  $2\pi k$ ,  $k \in N$ .

**3.66.**  $\arccos \frac{1}{10} + 2\pi k$ ,  $k \in Z$ . **3.67.**  $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ ,  $k \in Z$ . **3.68**

$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ ,  $k \in Z$ . **Решение.** Следующая система равносиль-

на исходному уравнению:

$$\begin{cases} 1 + \operatorname{tg}^2 x - \sin 2x + \cos 2x + \sqrt{3}(\cos x - \sin x) = \operatorname{tg}^2 x, \\ \operatorname{tg} x > 0, \\ \operatorname{tg} x \neq 1. \end{cases}$$

Преобразуем уравнение системы:

$$\begin{cases} (\cos x - \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) + \sqrt{3}(\cos x - \sin x) = 0, \\ \operatorname{tg} x > 0, \\ \operatorname{tg} x \neq 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\cos x - \sin x)(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}) = 0, \\ \operatorname{tg} x > 0, \\ \operatorname{tg} x \neq 1. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 1, \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \operatorname{tg} x > 0, \\ \operatorname{tg} x \neq 1. \end{cases}$$

Ясно, что ни одно решение первого уравнения совокупности системе не удовлетворяет. Теперь осталось выяснить, какие из чисел вида  $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , удовлетворяют первому неравенству системы. 3.69.  $-\frac{5\pi}{3}$ . Указание. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2}, \\ -6 < x < 0, \\ x^2 + 6x + 10 \neq 0, \\ \sin 2x > 0. \end{cases}$$

3.70.  $\frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ ,  $n, k$  — целые. Решение. Возведя обе части исходного уравнения в квадрат, получаем уравнение-следствие

$$2\sin x \sin 2x = 5\cos x + 4\sin 2x.$$

Воспользовавшись формулами  $\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$  и  $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ , имеем

$$\cos x - \cos 3x = 5\cos x + 4\sin 2x,$$

$$4\cos^3 x + 8\cos x \sin x + \cos x = 0.$$

Получаем совокупность

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ 4\cos^2 x + 8\sin x + 1 = 0. \end{cases}$$

Отсюда несложно получить

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x = -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ x = (-1)^{m+1} \frac{\pi}{6} + \pi m, \quad k, m \text{ — целые.} \end{cases}$$

Проверка показывает, что все решения первого уравнения совокупности удовлетворяют исходному уравнению. Из второй же серии в ответ следует включить только те числа, которые соответствуют четным значениям  $m$ , т.е.

$m = 2n, n \in \mathbb{Z}$ . 3.71.  $\frac{1}{3}, \frac{7 + \sqrt{13}}{6}$ . Решение. Умножим

обе части уравнения на выражение

$$\sqrt{x^2 + 3x - 2} - \sqrt{x^2 - x + 1}.$$

Имеем

$$4x - 3 = (4x - 3)(\sqrt{x^2 + 3x - 2} - \sqrt{x^2 - x + 1})$$

или

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 3x - 2} - \sqrt{x^2 - x + 1} = 1, \\ 4x - 3 = 0. \end{cases}$$

Следует понимать, что корень  $x = \frac{3}{4}$  — посторонний.

Являясь корнем уравнения  $\sqrt{x^2 + 3x - 2} - \sqrt{x^2 - x + 1} = 0$ , он не удовлетворяет исходному уравнению. Теперь, складывая исходное уравнение с равносильным ему уравнением

$\sqrt{x^2 + 3x - 2} - \sqrt{x^2 - x + 1} = 1$ , получаем  $\sqrt{x^2 + 3x - 2} = 2x - 1$ . Отметим, что последнее уравнение равносильно исходному. Его несложно решить. 3.73. -1. 3.74. 2. 3.75.  $\frac{\pi k}{14}$ ,  $k \neq 14n$ ,  $k, n$  — целые. Указание. Умножив обе части уравнения на  $\sin x$ , важно понимать, что такое преобразование неизбежно приведет к появлению посторонних корней вида *пт.* 3.76.  $\frac{11 - \sqrt{85}}{2}$ . 3.77. 1 или 5. 3.78. 6. 3.79. -1.

*Решение.* Здесь удобно перейти к уравнению-следствию

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}2x + \operatorname{arctg}3x) = \operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right),$$

$$\frac{\operatorname{tg} \operatorname{arctg}2x + \operatorname{tg} \operatorname{arctg}3x}{1 - \operatorname{tg} \operatorname{arctg}2x \operatorname{tg} \operatorname{arctg}3x} = 1,$$

$$\frac{5x}{1 - 6x^2} = 1.$$

Отсюда  $x = \frac{1}{6}$  или  $x = -1$ . Осталось завершить решение проверкой. Легко заметить, что при  $x = \frac{1}{6}$  левая часть исходного уравнения принимает положительное значение. Это сразу позволяет нам сделать вывод, что  $x = \frac{1}{6}$  корнем не является. При  $x = -1$   $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}(-2) < -\frac{\pi}{4}$  и  $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}(-3) < -\frac{\pi}{4}$ . Отсюда  $-\pi < \operatorname{arctg}(-2) + \operatorname{arctg}(-3) < -\frac{\pi}{2}$ . Последнее неравенство означает, что  $x = -1$  — ко-

рень. (См. еще решение 3.28.) 3.80.  $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ . 3.81. 1.

3.82.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . 3.83.  $-\operatorname{arctg}\frac{6}{\pi} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . *Решение.* Переписав данное уравнение в виде

$$\arcsin\left(\frac{\pi}{6} + \operatorname{ctgx}\right) = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{6}{\pi} + \operatorname{tg}x\right),$$

перейдем к уравнению-следствию

$$\sin \arcsin\left(\frac{\pi}{6} + \operatorname{ctgx}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{6}{\pi} + \operatorname{tg}x\right)\right),$$

$$\frac{\pi}{6} + \operatorname{ctgx} = \frac{6}{\pi} + \operatorname{tgx}.$$

Решая последнее уравнение относительно  $\operatorname{tgx}$ , получаем совокупность

$$\begin{cases} \operatorname{tgx} = \frac{\pi}{6}, \\ \operatorname{tgx} = -\frac{6}{\pi}. \end{cases}$$

Проверка показывает, что ни один корень первого уравнения не входит в область определения исходного.

#### § 4. Как корни не потерять

$$4.12. -4 \text{ или } 6. \quad 4.13. -3 \text{ или } 11. \quad 4.14. 3 + \sqrt{2} \text{ или } 3.$$

*Указание.* Данное уравнение равносильно такому:

$$\log_3(x-2) + \log_3|x-4| = 0,$$

и если забыть поставить знак модуля, то произойдет потеря корня  $x = 3$ .

*4.15. 1. Решение.* Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} |x^2 + x - 6| = x^2 + 2x + 1, \\ x > -1, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Заметим, что неравенства системы страхуют от приобретения посторонних решений.

Имеем

$$\begin{cases} x^2 + x - 6 = x^2 + 2x + 1, \\ x^2 + x - 6 = -x^2 - 2x - 1, \\ x > -1, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Этой системе удовлетворяет лишь  $x = 1$ .

$$4.16. -10. \quad 4.17. 2. \quad 4.18. 2 \text{ или } 1 - \sqrt{33}.$$

*Решение.* Из исходного уравнения несложно получить

$$\log_{\frac{1}{4}}|x+2|-1=\log_{\frac{1}{4}}(4-x)+\log_{\frac{1}{4}}(x+6).$$

Перейдем к равносильной системе

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{4}} 4 |x+2| = \log_{\frac{1}{4}} ((4-x)(x+6)), \\ x > -6, \\ x < 4. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} 4|x+2| = (4-x)(x+6), \\ x > -6, \\ x < 4, \\ x \neq -2. \end{cases}$$

Решив последнюю систему, легко получить ответ.

**4.19.** 1, или 2, или  $\frac{16}{9}$ . *Указание.* Следующее уравнение равносильно исходному

$$\log_2^2 x - 3 \log_2 |3x-4| \log_2 x + 2 \log_2^2 |3x-4| = 0.$$

Это уравнение является однородным относительно  $\log_2 x$  и  $\log_2 |3x-4|$ .

Здесь мы хотим предостеречь читателя от грубой и, к сожалению, широко распространенной ошибки считать уравнение

$$\left( \frac{\log_2 x}{\log_2 |3x-4|} \right)^2 - 3 \left( \frac{\log_2 x}{\log_2 |3x-4|} \right) + 2 = 0$$

равносильным исходному.

Однако использованное преобразование (деление обеих частей уравнения на  $\log_2^2 |3x-4|$ ) сужает область определения ровно на множество корней уравнения  $\log_2 |3x-4| = 0$ .

Поэтому для сохранения равносильности следует перейти к совокупности

$$\begin{cases} \log_2 |3x-4| = 0, \\ \log_2 x = 0, \\ \left( \frac{\log_2 x}{\log_2 |3x-4|} \right)^2 - 3 \frac{\log_2 x}{\log_2 |3x-4|} + 2 = 0. \end{cases}$$

**4.20.** 1 или  $\sqrt{3}$ . **4.21.** 1 или 4 или  $\frac{1}{4\sqrt{8}}$ . *Указание.* Дан-

ное уравнение равносильно совокупности

$$\begin{cases} x = 1, \\ \frac{10}{\log_x 4x} + \frac{21}{\log_x 16x} - \frac{6}{\log_x \frac{x}{2}} = 0. \end{cases}$$

4.22.  $\pi k$  или  $(-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$ ,  $k, n$  — целые. 4.23.  $\frac{\pi}{2} + \pi k$  или  $\pm \arctg \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi n$ ,  $k, n$  — целые. *Решение.* Нужно сразу заметить, что числа вида  $\frac{\pi}{2} + \pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ , — корни исходного уравнения. Теперь, не опасаясь потерять корни, перейдем к уравнению алгебраическому относительно  $\operatorname{tg} x$ :

$$\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{8}{3 \operatorname{tg} x}.$$

Имеем

$$\begin{cases} 3 \operatorname{tg}^2 x (1 + \operatorname{tg}^2 x) + 3 \operatorname{tg}^2 x (1 - \operatorname{tg}^2 x) = 4 (1 - \operatorname{tg}^4 x), \\ \operatorname{tg} x (1 - \operatorname{tg}^2 x) \neq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \operatorname{tg}^4 x + 3 \operatorname{tg}^2 x - 2 = 0, \\ \operatorname{tg} x (1 - \operatorname{tg}^2 x) \neq 0. \end{cases}$$

Отсюда  $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{2}$ .

$$4.24. -\frac{1}{2} \arctg \frac{\sqrt{3}}{5} + \frac{\pi k}{2} \text{ или } \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad k, n \text{ — целые.}$$

*Указание.* Использование равенств

$$\operatorname{tg} \left( 2x + \frac{5\pi}{3} \right) = \frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} \frac{5\pi}{3}}{1 - \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} \frac{5\pi}{3}} \text{ и } \operatorname{ctg} 2x = \frac{1}{\operatorname{tg} 2x}$$

с целью перехода к алгебраическому уравнению относительно  $\operatorname{tg} 2x$  — скорее всего, наиболее естественный путь решения данной задачи. Однако такой подход сопряжен с риском потери корней. Действительно, ведь указанные преобразования сужают область определения на множество чисел вида  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ . Поэтому прежде, чем перейти к уравнению

$$\frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} \frac{5\pi}{3}}{1 - \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} \frac{5\pi}{3}} = \frac{2}{\operatorname{tg} 2x} + \frac{1}{3} \operatorname{ctg} \frac{13\pi}{6},$$

следует проверить, нет ли среди чисел указанного вида корней исходного уравнения.

$$4.25. -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{3}}{13} + \frac{\pi k}{2} \text{ или } \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad k, n \text{ — целые.}$$

$$4.26. \operatorname{arctg} \frac{5}{3} + \pi n \text{ или } \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k, n \text{ — целые.}$$

$$4.27. -\operatorname{arctg} \frac{6 + \sqrt{3}}{11} + \pi n \text{ или } \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k, n \text{ — целые.}$$

*Решение.* Заметим, что все числа вида  $\frac{\pi}{2} + \pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ , — корни исходного уравнения.

Теперь, применяя формулу тангенса суммы, имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} -\sqrt{3} = \frac{(2 \operatorname{ctg} x + 3) \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} x \right)}{\operatorname{tg} x + \frac{\sqrt{3}}{3}}, \\ \operatorname{tg} x \neq \sqrt{3}. \end{array} \right.$$

Решая уравнение системы, получаем

$$\operatorname{tg} x = -\frac{6 + \sqrt{13}}{11}.$$

4.28. — 7 или 1. *Решение.* Данное уравнение равносильно такому:

$$\sqrt[3]{x+7} + \sqrt[3]{|x-1|} = 2.$$

Полученное уравнение равносильно совокупности двух систем

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt[3]{x+7} + \sqrt[3]{x-1} = 2, \\ x \geq 1, \end{array} \right.$$
  

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt[3]{x+7} - \sqrt[3]{x-1} = 2, \\ x < 1. \end{array} \right.$$

Ввиду того, что функция  $f(x) = \sqrt[3]{x+7} + \sqrt[3]{x-1}$  монотонно возрастает, то  $x = 1$  (этот корень найден просто подбором) является единственным решением уравнения первой системы.

Решим уравнение  $\sqrt[3]{x+7} - \sqrt[3]{x-1} = 2$ .

Произведем следующую замену:  $\sqrt[3]{x+7} = u$ ,  
 $\sqrt[3]{x-1} = v$ . Тогда

$$\begin{cases} u - v = 2, \\ u^3 - v^3 = 8. \end{cases}$$

Отсюда несложно получить

$$\begin{cases} u = 0, \\ v = -2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} u = 2, \\ v = 0. \end{cases}$$

Далее

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+7} = 0, \\ \sqrt[3]{x-1} = -2, \\ x < 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \sqrt[3]{x+7} = 2, \\ \sqrt[3]{x-1} = 0, \\ x < 1. \end{cases}$$

Несложно убедиться, что вторая система решений не имеет.

## § 5. Если Вы переходите к совокупности

5.11.  $\pm 3$  или  $\frac{1}{2} + k$ , где  $k = -3, -2, -1, 0, 1, 2$ .

*Решение.* Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt{9-x^2} = 0, \\ 2 \sin 2\pi x + 5 \cos \pi x = 0, \\ -3 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Понятно, что задача свелась к поиску корней уравнения  $2 \sin 2\pi x + 5 \cos \pi x = 0$ , удовлетворяющих неравенству  $|x| \leq 3$ .

Имеем

$$\begin{cases} 4 \sin \pi x \cos \pi x + 5 \cos \pi x = 0, \\ -3 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \pi x = 0, \\ -3 \leq x \leq 3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + k, \\ -3 \leq x \leq 3, \text{ где } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Теперь все подходящие  $k$  несложно найти, решив систему

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + k \leq 3, \\ \frac{1}{2} + k \geq -3, \\ k \in Z. \end{cases}$$

5.12.  $\pm \frac{7}{2}$  или  $1 + 2k$ , где  $k = -2, -1, 0, 1$ . 5.13.  $-3$  или  $2$ .

5.14. 3 или 4. *Указание.* Несложно исходное уравнение преобразовать к виду  $(x^2 - 9)(3^x - 3^{\sqrt{x}+2}) = 0$ . Переход к совокупности

$$\begin{cases} x^2 - 9 = 0, \\ 3^x - 3^{\sqrt{x}+2} = 0 \end{cases}$$

приводит к появлению постороннего корня  $x = -3$ .

Поэтому на решение указанной совокупности следует наложить ограничение  $x \geq 0$ .

5.15.  $-1$ . *Указание.* Преобразовав данное в условии уравнение к виду

$$\log_3(4-x) \cdot (\log_{(4-2x)}(1-x)(2-x) - 1) = 0,$$

перейдем к системе

$$\begin{cases} \log_3(4-x) = 0, \\ \log_{(4-2x)}(1-x)(2-x) = 1, \\ x < 1. \end{cases}$$

Отметим, что если пренебречь последним условием системы, то в ответ неизбежно попадет посторонний корень  $x = 3$ .

5.16.  $-\frac{\pi}{4} + \pi k$ ,  $k = 1, 0, -1, -2, \dots$  *Решение.* Переходим к равносильной системе

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(3-x) = 0, \\ \operatorname{tg} x + 1 = 0, \\ x < 3, \\ \operatorname{tg} x \geq -1. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} x = 2, \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x < 3, \\ \operatorname{tg} x \geq -1. \end{cases}$$

Несложно убедиться, что  $\operatorname{tg} 2 < -1$ , откуда следует, что  $x = 2$  — посторонний корень. Подходящие значения для  $k$  найдем из условия  $-\frac{\pi}{4} + \pi k < 3$ .

$$5.17. (-1)^k \arcsin \frac{2\sqrt{5}}{5} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

*Решение.* Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3 + 5 \cos 2x = 0, \\ \sqrt{3 - 2 \cos 2x + 5 \sin x} = 4 \sin x - 2, \\ 3 - 2 \cos 2x + 5 \sin x \geq 0. \end{cases}$$

Второе уравнение совокупности решений не имеет. Первое уравнение и неравенство удобно переписать в таком виде

$$\begin{cases} 8 - 10 \sin^2 x = 0, \\ 4 \sin^2 x + 5 \sin x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \sin x = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \\ \sin x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \\ 4 \sin^2 x + 5 \sin x + 1 \geq 0. \end{cases}$$

Системе удовлетворяет лишь  $\sin x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

$$5.18. x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad y = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad k, n \text{ — целые. Ука-}$$

*зание.* Исходная система равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos 2y = -2, \\ \cos y = 0, \\ 2\sin^2 x = 1, \\ \sin x \geq 0. \end{cases}$$

5.19.  $[1; 3] \cup \{-2\}$ . Указание. Еще раз предостережем читателя от ошибки, считать систему

$$\begin{cases} 2^x - 2 \geq 0, \\ -x^2 + x + 6 \geq 0, \end{cases}$$

равносильной исходному неравенству.

При таком подходе теряется решение  $x = -2$ . Лучше всего от исходного неравенства перейти к совокупности

$$\begin{cases} (2^x - 2) \sqrt{-x^2 + x + 6} > 0, \\ (2^x - 2) \sqrt{-x^2 + x + 6} = 0. \end{cases}$$

5.20.  $[2; 3] \cup \left(3; \frac{7}{2}\right] \cup \{4\}$ . 5.21.  $\left[-\frac{9}{8}; -1\right) \cup \{-2, 2\}$ .

5.22.  $\left[\frac{9}{5}; 2\right) \cup (2; 3] \cup \{1\}$ . 5.23.  $(5; \infty) \cup \{4\}$ .

5.24.  $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; 5\right] \cup \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ .

*Решение.* Перейдем к совокупности

$$\begin{cases} \sqrt{5 + 9x - 2x^2} (\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x) < 0, \\ \sqrt{5 + 9x - 2x^2} (\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x) = 0. \end{cases}$$

Неравенство совокупности равносильно системе

$$\begin{cases} -1 < \operatorname{ctg} x < 0, \\ 2x^2 - 9x - 5 < 0. \end{cases}$$

Имеем

$$\begin{cases} x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{3\pi}{4} + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}, \\ -\frac{1}{2} < x < 5. \end{cases}$$

Отсюда  $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left(\frac{3\pi}{2}; 5\right)$ .

Решением уравнения  $\sqrt{5 + 9x - 2x^2} (\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x) = 0$  является множество  $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, 5\right\}$ . Объединение полученных результатов дает указанный выше ответ.

**5.25. 2. Решение.** Преобразуем исходное уравнение:

$$5 \sin 2x \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{tg} x - 15 \sin 2x + 9 = 0.$$

$$\text{Отсюда } (\operatorname{tg} x - 3)(5 \sin 2x - 3) = 0.$$

Последнее уравнение равносильно совокупности

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 3, \\ \sin 2x = \frac{3}{5}. \end{cases}$$

Теперь важно проявить бдительность и заметить, что решения уравнения  $\operatorname{tg} x = 3$  содержатся среди решений второго уравнения совокупности. Чтобы в этом убедиться, достаточно уравнение  $\sin 2x = \frac{3}{5}$  решить, используя формулу

$$\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

$$\text{Имеем } \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{3}{5}.$$

$$\text{Откуда } \operatorname{tg} x = 3 \text{ или } \operatorname{tg} x = \frac{1}{3}.$$

Это значит, что отрезок  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  содержит ровно два корня исходного уравнения:  $\operatorname{arctg} 3$  и  $\operatorname{arctg} \frac{1}{3}$ .

**5.26. 5. Указание.** Переходя к совокупности

$$\begin{cases} 2x^2 - x - 6 = 0, \\ \cos \pi x = 0, \end{cases}$$

нужно не упустить, что  $x = -\frac{3}{2}$  является корнем, как первого, так и второго уравнения.

**5.27.** Если  $a \in (-\infty; 1] \cup \{5\}$ , то один корень; если  $a \in (1; 5) \cup (5; \infty)$ , то два корня. **Указание.** Нужно заметить, что уравнение  $t^2 - (a+3)t + 4a - 4 = 0$  при  $a = 5$  имеет кратный корень  $t = 4$ .

5.28. Рис. 102. Решение. Ясно, что надо потребовать от каждого из уравнений  $x^2 - (a+b)x + 1 = 0$  и  $x^2 - (a-b)x + 1 = 0$  иметь два различных корня. Однако «тонкость» заключается в том, что при  $b = 0$  их корни (если они существуют) совпадают.

Тогда искомое множество — точки, координаты которых удовлетворяют системе

$$\begin{cases} |a+b| > 2, \\ |a-b| > 2, \\ b \neq 0. \end{cases}$$

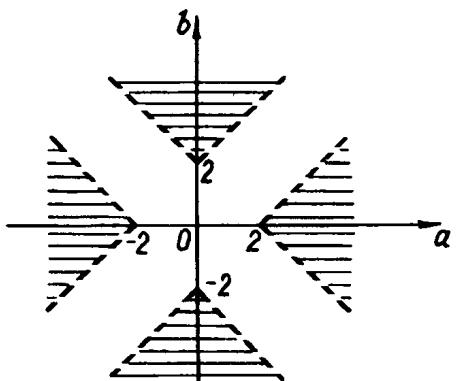


Рис. 102.

## § 6. Казалось бы, решение завершено

6.31.  $4\sqrt{37}$  или  $2\sqrt{193}$ .

*Решение. I случай.* Основание высоты  $BD$  принадлежит стороне  $AC$  (рис. 103). Пусть  $AB = 26$ ,  $BC = 30$ ,  $BD = 24$ . Тогда находим

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{26^2 - 24^2} = 10,$$

$$DC = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{30^2 - 24^2} = 18.$$

Отсюда  $AC = AD + DC = 28$ .

Для того, чтобы вычислить длину медианы  $BM$ , достроим треугольник  $ABC$  до параллелограмма  $ABCK$ . Теперь, применяя теорему о сторонах и диагоналях параллелограмма, имеем  $BK^2 + AC^2 = 2(AB^2 + BC^2)$ .

Подставляя числовые данные, находим

$$BK = 8\sqrt{37}, BM = \frac{1}{2}BK = 4\sqrt{37}.$$

*II случай.* Основание высоты лежит на продолжении стороны (рис. 104). В этом случае  $AC = DC - AD = 8$ .

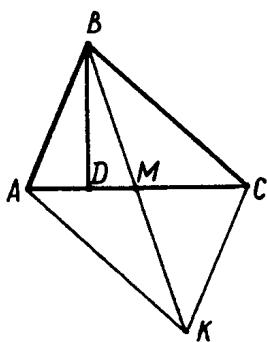


Рис. 103.

Теперь, воспользовавшись тем же приемом, что и в первом случае, несложно получить  $BM = \sqrt{772} = 2\sqrt{193}$ .

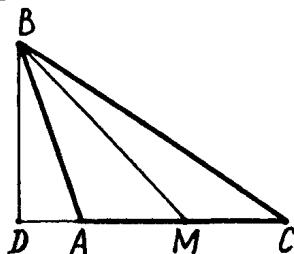


Рис. 104.

По теореме косинусов с учетом введенных обозначений  $BC = \sqrt{x^2 + y^2 - xy}$ . Отсюда получаем уравнение

$$x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - xy} = 12.$$

Для того, чтобы получить еще одно уравнение, выразим площадь треугольника  $BAC$  двумя способами. С одной стороны

$$2S_{BAC} = \frac{xy\sqrt{3}}{2}, \text{ а с другой}$$

$$2S_{BAC} = 2S_{BMA} + 2S_{CMA} = \sqrt{3}y + 3\sqrt{3}x.$$

Теперь можно записать систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - xy} = 12, \\ xy = 2y + 6x, \end{cases}$$

которая, как несложно убедиться, решений не имеет.

**II случай.** Рассмотрим ситуацию, когда точка  $M$  расположена так, как показано на рис. 106.

Сохраним соответствующие обозначения.

Очевидно в этом случае система уравнений выглядит так:

$$\begin{cases} x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - xy} = 12, \\ xy = 6x - 2y. \end{cases}$$

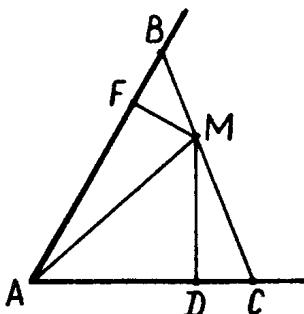


Рис. 105.

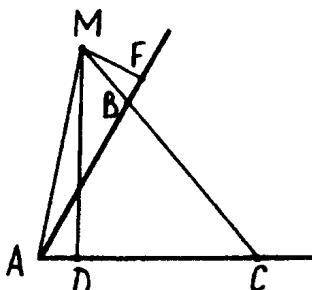


Рис. 106.

Полученная система имеет единственное решение  $x = 4$ ,  $y = 4$ .

$$6.33. \text{ Если } 0 < \alpha < \frac{\pi}{3}, \text{ то } \frac{R \left( \cos \alpha + \sin \frac{\alpha}{2} \right)}{1 - \sin \frac{\alpha}{2}} \text{ или}$$

$$\frac{R \left( \cos \alpha - \sin \frac{\alpha}{2} \right)}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}; \text{ если } \alpha = \frac{\pi}{3}, \text{ то } \frac{R \left( \cos \alpha + \sin \frac{\alpha}{2} \right)}{1 - \sin \frac{\alpha}{2}}; \text{ если}$$

$$\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}, \text{ то } \frac{R \left( \cos \alpha + \sin \frac{\alpha}{2} \right)}{1 - \sin \frac{\alpha}{2}} \text{ или } \frac{R \left( \sin \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha \right)}{1 - \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

*Решение.* Здесь источником второго решения является

неоднозначное положение точки  $E$  на описанной окружности.

Действительно, ведь выбор дуги  $BC$  может быть сделан двумя способами.

I случай  
(рис. 107).  
Обозначим радиус окружности с цент-

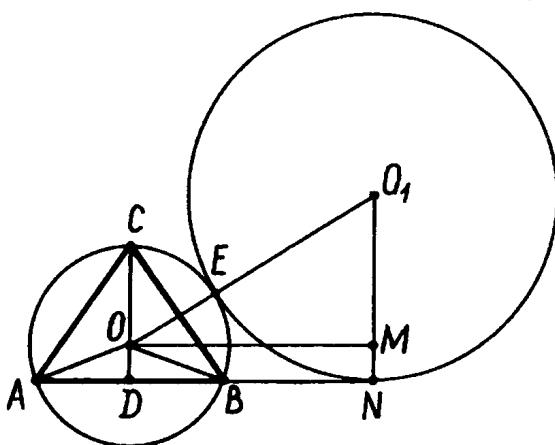


Рис. 107.

ром в точке  $O_1$ .  $O_1N = x$ . Тогда  $OO_1 = OE + EO_1 = R + x$ . Кроме того,  $\angle O_1OM = \angle BCD = \frac{\alpha}{2}$  как углы со взаимно перпендикулярными сторонами, а  $\angle BOD = \alpha$  как угол, равный половине центрального угла, опирающегося на дугу  $AB$ .

Из треугольника  $O_1OM$   $O_1M = OO_1 \sin \angle O_1OM = (R + x) \sin \frac{\alpha}{2}$ . С другой стороны  $O_1M = O_1N - MN = O_1N - OD = x - R \cos \alpha$ . Получаем уравнение

$$x - R \cos \alpha = (R + x) \sin \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{Отсюда } x = \frac{R \left( \cos \alpha + \sin \frac{\alpha}{2} \right)}{1 - \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

II случай (рис. 108). Здесь, сохраняя прежние обозначения, имеем

$$O_1 M = (R + x) \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$O_1 M = O_1 N + MN = O_1 N + OD = x + R \cos \alpha.$$

Решая уравнение  $(R + x) \sin \frac{\alpha}{2} = R \cos \alpha + x$ , получаем

$$x = \frac{R \left( \sin \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha \right)}{1 - \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

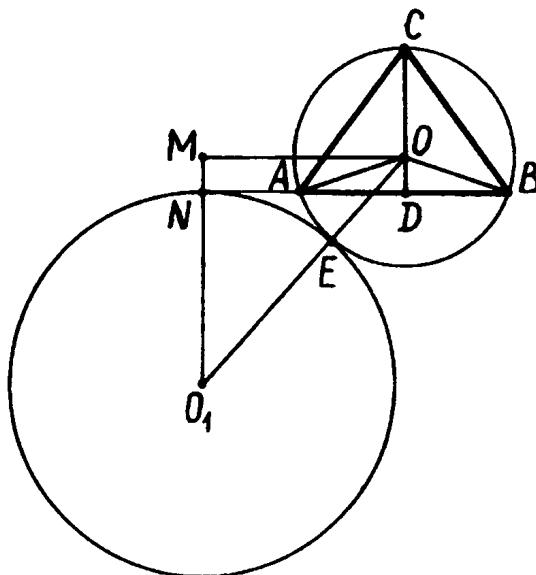


Рис. 108.

Теперь важно не сделать преждевременный вывод, что решение задачи завершено. Действительно, нетрудно понять, что при  $\alpha < \frac{\pi}{3}$  точки  $O$  и  $O_1$  находятся в одной полуплоскости относительно прямой  $AB$ , а при  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  (точки  $E$  и  $A$  совпадают), задача вообще не имеет решения.

Итак, рассмотрим случай  $\alpha < \frac{\pi}{3}$  (рис. 109).

$O_1N$  — радиус окружности с центром в точке  $O_1$ . Пусть

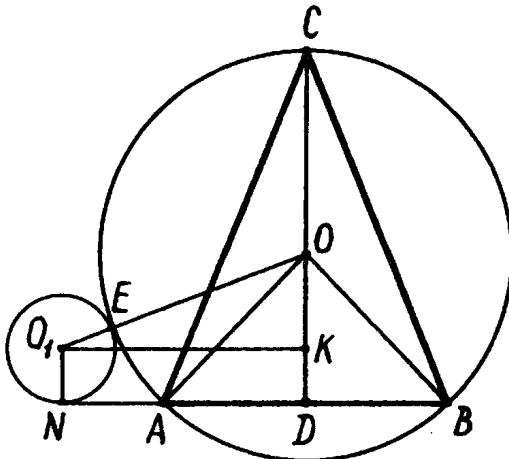


Рис. 109.

$O_1N = O_1E = x$ , тогда  $O_1O = R + x$ . Несложно установить, что  $\angle OO_1K = \frac{\alpha}{2}$ ,  $\angle BOD = \alpha$ ,  $OD = R \cos \alpha$  и  $OK = OD - KD = = OD - O_1N = R \cos \alpha - x$ .

С другой стороны, из треугольника  $OO_1K$   $OK = = (R + x) \sin \frac{\alpha}{2}$ .

Получаем уравнение  $(R + x) \sin \frac{\alpha}{2} = R \cos \alpha - x$ .

$$\text{Отсюда } x = \frac{R \left( \cos \alpha - \sin \frac{\alpha}{2} \right)}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

6.34.  $\operatorname{arctg} \sqrt{6}$ ,  $\operatorname{arctg} \sqrt{6}$ ,  $\pi - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{6}$  или  $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{6}}{2}$ ,  $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{6}}{8}$ ,  $\pi - \operatorname{arctg} \sqrt{6}$ .

*Решение. I случай.* Углы  $BAC$  и  $BCA$  — острые (рис. 110).  $NM \perp AC$ ,  $EK \perp AC$  и  $NM = EK = AC$ . Кроме того,

$$S_{AMN} = S_{CEK} = \frac{1}{3} S_{ABC}.$$

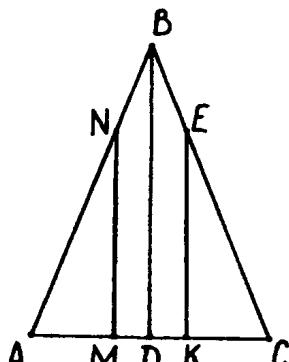


Рис. 110.

лучить  $\frac{BD}{EK} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ .

$$\operatorname{tg} \angle BCD = \frac{BD}{DC} = \frac{BD}{0,5 EK} = \sqrt{6}.$$

Отсюда  $\angle BCD = \angle BAC = \operatorname{arctg} \sqrt{6}$ , а  $\angle CBA = \pi - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{6}$ .

**II случай.** Рассмотрим ситуацию, когда один из углов, прилежащих к стороне  $AC$ , тупой (рис. 111). Здесь  $NM = EK = AC$  и  $S_{ANM} = S_{BKE} = \frac{1}{3} S_{ABC}$ . Проведем отрезки

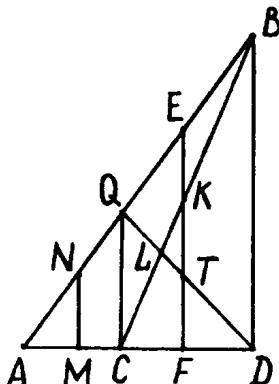


Рис. 111.

равную  $DF$ ), а следовательно,  $FT = NM$  сразу вытекает, что треугольник  $AQD$  равнобедренный.

Покажем, что треугольник  $ABC$  равнобедренный.  
Действительно, треугольники  $ANM$  и  $CED$  равновеликие прямоугольные и имеют пару равных катетов  $NM = EK$ . Отсюда следует, что  $\Delta ANM \cong \Delta CED$  и  $\angle BAC = \angle BCA$ .

Поскольку  $S_{CBD} = \frac{1}{2} S_{ABC}$ ,  
 $S_{CDE} = \frac{1}{3} S_{ABC}$  и  $\Delta CBD \cong \Delta CED$ , то несложно по-

$QC$  и  $BD$  параллельно  $NM$  и  $EF$ , а также отрезок  $DQ$  ( $F$  и  $T$  — точки пересечения прямой  $EK$  с отрезками  $AD$  и  $DQ$  соответственно).

Понятно, что  $\frac{BE}{BQ} = \frac{EK}{QC}$  и  $\frac{DF}{DC} = \frac{FT}{QC}$ , но  $\frac{BE}{BQ} = \frac{DF}{DC}$ , а значит,  $\frac{EK}{QC} = \frac{FT}{QC}$ , откуда  $EK = FT = NM$ .

Теперь заметим, что  $S_{KBE} = S_{FTD}$  (каждый из этих треугольников имеет высоту,  $S_{FTD} = S_{MNA}$ , откуда с учетом

Покажем, что отрезки  $NM$  и  $TF$  делят треугольник  $AQD$  на три равновеликие части. Для этого достаточно доказать, что  $S_{AQD} = S_{ABC}$ .

Действительно,  $S_{ABC} = S_{AQLC} + S_{QBL}$ , а  $S_{AQD} = S_{AQLC} + S_{CLD}$ , но  $S_{QBL} = S_{CLD}$  (здесь мы использовали известное свойство трапеции, в данном случае трапеции  $DCQB$ ).

Остальное несложно, и мы предлагаем читателю завершить решение самостоятельно.

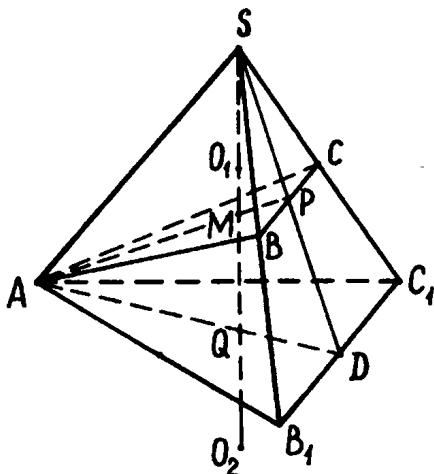


Рис. 112.

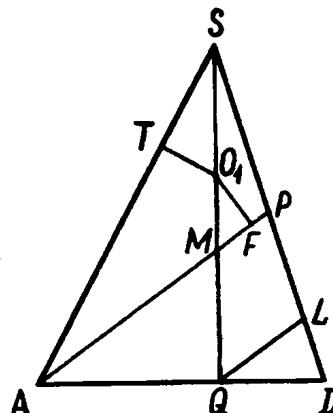


Рис. 113.

6.35.  $\frac{2a\sqrt{2}}{5 \pm \sqrt{11}}$ . Решение. Здесь существование второго решения обусловлено тем, что центр сферы может лежать как в одном, так и в другом полупространстве относительно плоскости  $ABC$  (на рис. 112 это точки  $O_1$  и  $O_2$ ).

I случай. Центр сферы расположен в одном полупространстве с точкой  $S$ . Удобно рассматривать правильный тетраэдр с боковыми ребрами  $SA = SB_1 = SC_1 = 2a$ , а треугольник  $ABC$  как сечение этого тетраэдра. Ясно, что центр сферы расположен на высоте  $SQ$  тетраэдра  $AB_1C_1S$ .

Рассмотрим треугольник  $ASD$  (рис. 113).  $SD = AD = a\sqrt{3}$ ,  $AS = 2a$ .  $T$  и  $F$  — точки касания сферы с прямыми  $AS$  и  $AP$  соответственно.  $AQ = 2QD$ . Легко получить

$$SQ = 2a \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad \text{Проведем } QL \parallel AP. \quad \frac{DL}{LP} = \frac{QD}{QA} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{QM}{MS} = \frac{LP}{PS} = \frac{LP}{PD} = \frac{2}{3}. \text{ Отсюда } \frac{MS}{SQ} = \frac{3}{5} \text{ и } MS = \frac{6a}{5} \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Пусть  $TO_1 = FO_1 = x$ . Из треугольников  $TSO_1$  и  $FO_1M$

$$\frac{x}{\sin \angle TSO_1} + \frac{x}{\cos \angle FO_1M} = MS, \text{ но } \sin \angle TSO_1 = \frac{AQ}{AS} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ и}$$

$$\operatorname{tg} \angle FO_1M = \operatorname{tg} \angle MAQ = \frac{MQ}{AQ} = \frac{2\sqrt{2}}{5}.$$

Имеем  $\cos \angle FO_1M = \frac{5}{\sqrt{33}}$ .

Теперь получаем уравнение

$$x\sqrt{3} + \frac{x\sqrt{33}}{5} = \frac{6a\sqrt{2}}{5\sqrt{3}},$$

откуда  $x = \frac{2a\sqrt{2}}{5 + \sqrt{11}}$ .

Второй случай читатель может рассмотреть самостоятельно.

6.36.  $\arctg \frac{3h}{\sqrt{5}a \sin \left( \alpha + \arcsin \frac{2}{3} \right)}$  или  
 $\arctg \frac{h\sqrt{7}}{\sqrt{3}a \arcsin \left( \alpha + \arcsin \frac{2\sqrt{7}}{7} \right)}.$

*Решение. I случай.* Точка  $O$  расположена внутри трапеции  $ABCD$  (рис. 114).

Пусть  $OK = x$ ,  $AO = 8x$ ,  $AK = BK = 9x$ . Треугольники  $AOB$  и  $BOK$  прямоугольные ( $\angle AOB = \angle BOK = 90^\circ$ ).

Имеем  $BO = \sqrt{BK^2 - OK^2} = \sqrt{(9x)^2 - x^2} = 4x\sqrt{5}$ .

$$AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = \sqrt{(8x)^2 + (4x\sqrt{5})^2} = 12x.$$

Отсюда  $12x = a$  и  $x = \frac{a}{12}$ . Введем обозначения  $\angle ABO = \beta$ ,

$$\angle OBE = \varphi. \quad \sin \beta = \frac{AO}{AB} = \frac{2}{3}. \quad \text{Тогда } \varphi = 180^\circ - \alpha - \arcsin \frac{2}{3}.$$

Проведем  $OE \perp BC$ . Из треугольника  $OBE$

$$OE = OB \sin \varphi = \frac{a\sqrt{5}}{3} \sin \left( \alpha + \arcsin \frac{2}{3} \right).$$

Угол  $SEO$  — искомый.

$$\operatorname{tg} \angle SEO = \frac{SO}{OE} = \frac{3h}{\sqrt{5}a \sin \left( \alpha + \arcsin \frac{2}{3} \right)}.$$

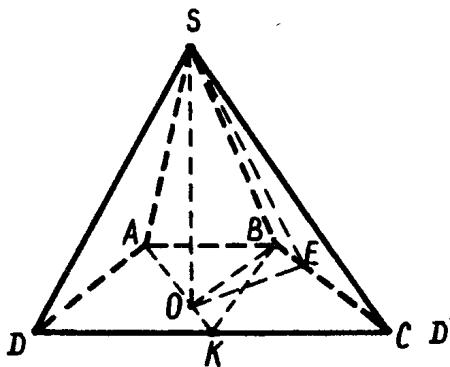


Рис. 114.

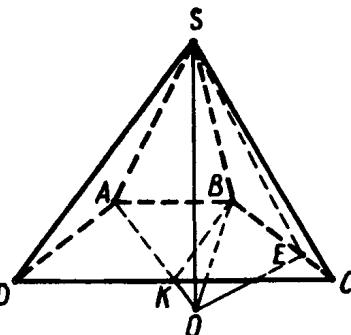


Рис. 115.

**II случай.** Точка  $O$  расположена вне трапеции (рис. 115). Сохраним прежние обозначения. Теперь  $AK = KB = 7x$ .

$$BO = \sqrt{(7x)^2 - x^2} = 4x\sqrt{3},$$

$$AB = \sqrt{(8x)^2 + (4x\sqrt{3})^2} = 4x\sqrt{7}, \quad \sin \beta = \frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

Дальнейшее решение аналогично приведенному в первом случае.

$$6.37. \sqrt{b^2 - 7a^2} \text{ или } \sqrt{b^2 - 3a^2}.$$

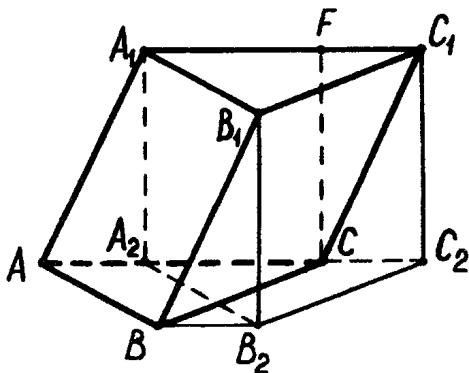


Рис. 116.

**Решение. I случай.** Грань  $AA_1C_1C$  перпендикулярна плоскости основания (рис. 116).

Так как площадь трапеции  $ABB_2C_2$  в два раза больше площади треугольника  $ABC$ , то площади параллелограмма  $BCC_2B_2$  и треугольника  $ABC$  равны. Отсюда можно заключить,

что  $CC_2 = FC_1 = \frac{1}{2} AC = a$ . Но тогда  $A_1F = A_2C = a$ , а значит, точка  $A_2$  — середина отрезка  $AC$ .  $A_2C_2 = A_2C + CC_2 = 2a$ . Кроме того,  $A_2B_2 = AB = 2a$  и  $B_2C_2 = BC = 2a$ , т.е. треугольник  $A_2B_2C_2$  равносторонний.

Имеем  $CB_2 = a\sqrt{3}$ ,  $AB_2 = \sqrt{AC^2 + CB_2^2} = \sqrt{(2a)^2 + (a\sqrt{3})^2} = a\sqrt{7}$ .

$$\text{Отсюда } B_1B_2 = \sqrt{AB_1^2 - AB_2^2} = \sqrt{b^2 - 7a^2}.$$

**II случай.** Грань  $BB_1C_1C$  перпендикулярна плоскости основания (рис. 117).

Аналогично первому случаю можно показать, что точка

$B_2$  — середина стороны  $BC$  треугольника  $ABC$ . Тогда  $AB_2 = a\sqrt{3}$ . Из треугольника  $AB_2B_1$   $B_1B_2 = \sqrt{AB_1^2 - AB_2^2} = \sqrt{b^2 - 3a^2}$ .

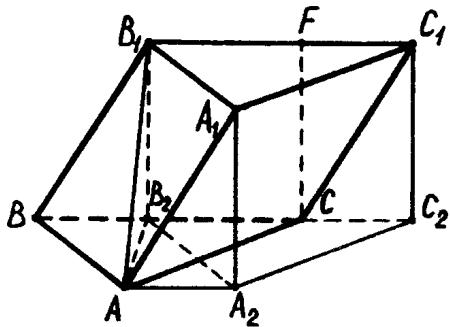


Рис. 117.

**6.38.** Если ортогональная проекция сечения принадлежит большей части основания пирамиды, то

$$S = \frac{2a^2 \sin \alpha}{9 \sin(\alpha + \beta)} \left( 1 + \frac{2 \sin \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \right)$$

при  $\beta \in [0; \arctg(3 \operatorname{tg} \alpha)]$ ,  $S = \frac{a^2 \sin \alpha}{9 \sin(\beta - \alpha)} \left( 1 - \frac{2 \sin \alpha \cos \beta}{\sin(\beta - \alpha)} \right)$

при  $\beta \in [\arctg(3 \operatorname{tg} \alpha); \frac{\pi}{2}]$ ; если ортогональная проекция сечения принадлежит меньшей части основания пирамиды, то  $S = \frac{a^2 \sin \alpha}{9 \sin(\alpha + \beta)} \left( 2 + \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \right)$ .

**Решение.** Пусть  $ABCDS$  — данная пирамида (рис. 118).  $M$  и  $N$  — точки пересечения ребер  $SA$  и  $SB$  с секущей плоскостью.  $K$ ,  $Q$  и  $P$  — середины отрезков  $AB$ ,  $MN$  и  $EF$  соответственно,  $\angle QKP = \alpha$ ,  $\angle QPK = \beta$ . Ясно, что четырехугольник  $ENMF$  — равнобедренная трапеция с основаниями  $EF$  и  $MN$ .  $EF = a$ ,  $KP = \frac{2}{3}a$ .

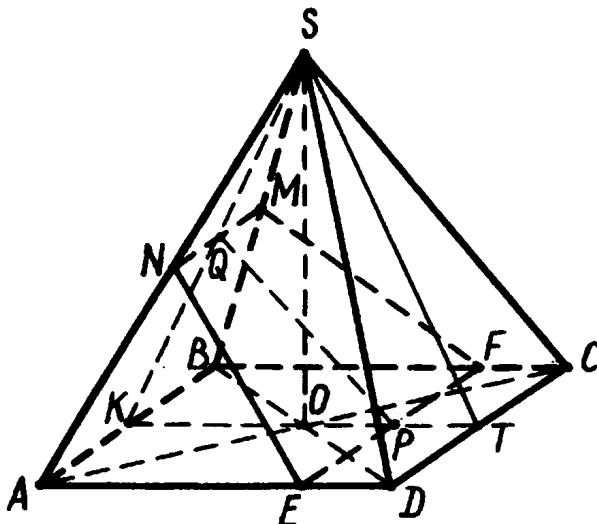


Рис. 118.

В треугольнике  $KQP$

$$\frac{KP}{\sin(\pi - (\alpha + \beta))} = \frac{QP}{\sin \alpha} = \frac{KQ}{\sin \beta}.$$

Отсюда  $QP = \frac{2a \sin \alpha}{3 \sin(\alpha + \beta)}$  и  $KQ = \frac{2a \sin \beta}{3 \sin(\alpha + \beta)}$ .

Из подобия треугольников  $ABS$  и  $NMS$

$$\frac{MN}{AB} = \frac{SQ}{SK} = \frac{SK - KQ}{SK} = 1 - \frac{KQ}{SK},$$

и, так как  $SK = \frac{a}{2 \cos \alpha}$ , получаем

$$MN = AB \left(1 - \frac{KQ}{SK}\right) = a \left(1 - \frac{4 \sin \beta \cos \alpha}{3 \sin(\alpha + \beta)}\right).$$

Тогда

$$S_{ENMP} = \frac{EF + NM}{2} \cdot QP = \frac{2a^2 \sin \alpha}{9 \sin(\alpha + \beta)} \left(1 + \frac{2 \sin \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)}\right).$$

Ясно, что приведенное решение соответствует той геометрической конфигурации, когда точка  $Q$  принадлежит отрезку  $KS$  (в том числе и вырожденные случаи  $Q = K$  и  $Q = S$ ). В этом случае  $\beta$  изменяется от 0 ( $Q = K$ ) до  $\operatorname{arctg}(3 \operatorname{tg} \alpha)$  ( $Q = S$ ).

Рассмотрим случай  $\beta \in [\arctg(3 \tg \alpha); \frac{\pi}{2}]$  (рис. 119).

Здесь  $\angle QPO = \beta$ ,  $\angle QTO = \alpha$ ,  $PT = \frac{a}{3}$ . Тогда из треугольника  $PTQ$   $QP = \frac{a \sin \alpha}{3 \sin(\beta - \alpha)}$  и  $TQ = \frac{a \sin \beta}{3 \sin(\beta - \alpha)}$ .

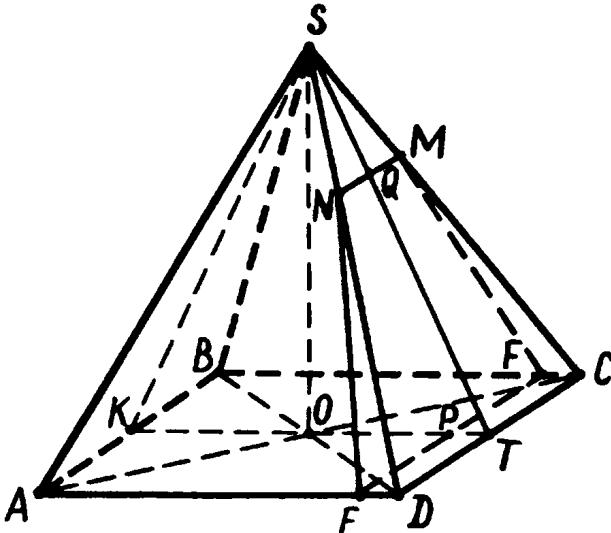


Рис. 119.

Из подобия треугольников  $DCS$  и  $NMS$

$$\frac{MN}{CD} = \frac{SQ}{ST} = \frac{ST - TQ}{ST} = 1 - \frac{TQ}{ST}.$$

Отсюда  $MN = CD \left(1 - \frac{TQ}{ST}\right) = a \left(1 - \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{3 \sin(\beta - \alpha)}\right)$  и

$$S_{EPMN} = \frac{EF + MN}{2} PQ = \frac{a^2 \sin \alpha}{9 \sin(\beta - \alpha)} \left(1 - \frac{2 \sin \alpha \cos \beta}{\sin(\beta - \alpha)}\right).$$

Осталось рассмотреть тот случай, когда ортогональная проекция сечения принадлежит меньшей из двух частей основания пирамиды, т.е. прямоугольнику  $EFCD$  (рис. 120).

В этом случае  $\angle QPT = \beta$ ,  $\beta \in [0; \frac{\pi}{2}]$ .

Дальнейшее решение аналогично приведенному в первом случае.

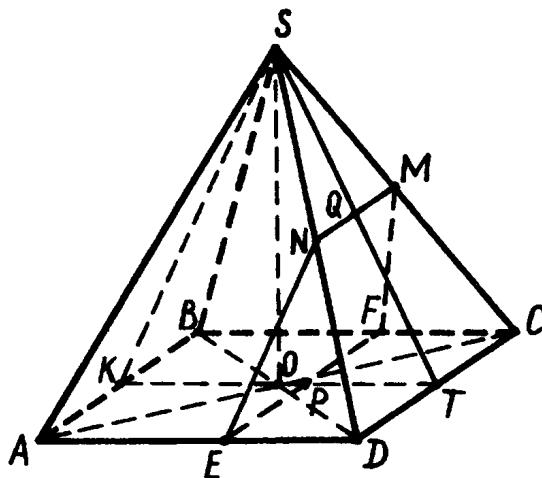


Рис. 120.

$$6.39. \frac{3\sqrt{3}k^2 \cos^2 \alpha}{4}, \text{ или } \frac{k^2 \sqrt{3} \cos \alpha}{4}, \text{ или } \frac{k^2 \sqrt{3} \cos^2 \alpha}{\cos \beta}, \text{ где}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + 4 \operatorname{tg}^2 \beta}}.$$

I случай. Сечение проходит через середины боковых ребер пирамиды (рис. 121).  $SABC$  — данная в условии пирамида.

$SD = k$ ,  $\angle SCO = \beta$ . Пусть  $\angle SDO = \alpha$ .  $\operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{tg} \beta$ ,

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + 4 \operatorname{tg}^2 \beta}}.$$

$$DO = SD \cos \alpha = k \cos \alpha.$$

$$DC = 3DO = 3k \cos \alpha,$$

$$DB = \sqrt{3} DO = k \sqrt{3} \cos \alpha.$$

$$\text{Тогда } S_{ABC} = DB \cdot DC = \\ = 3\sqrt{3} k^2 \cos^2 \alpha \text{ и}$$

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{4} S_{ABC} = \\ = \frac{3\sqrt{3} k^2 \cos^2 \alpha}{4},$$

Рис. 121.

$$\text{где } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + 4 \operatorname{tg}^2 \beta}}.$$

II случай. Сечение проходит через середины ребер  $AC$  и  $BC$  основания и середину бокового ребра  $SC$  (рис. 122).

Воспользуемся результатами, полученными при рассмотрении первого случая.

$$S_{ASB} = DB \cdot SD = k^2 \sqrt{3} \cos \alpha \text{ и } S_{MNP} = \frac{1}{4} S_{ASB} = \frac{k^2 \sqrt{3} \cos \alpha}{4}.$$

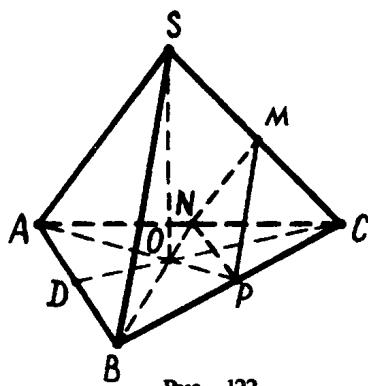


Рис. 122.

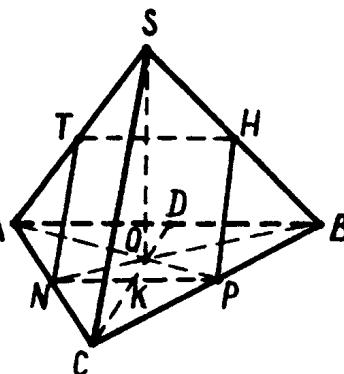


Рис. 123.

**III случай.** Секущая плоскость проходит через середины ребер  $AC$ ,  $BC$ ,  $SA$  и  $SB$  (рис. 123).  $TH \parallel AB \parallel NP$  и  $TN \parallel SC \parallel HP$ , кроме того,  $SC \perp AB$ , а значит,  $HP \perp NP$  и, следовательно, четырехугольник  $THPN$  — прямоугольник.

Так же, как и во втором случае, воспользуемся ранее полученными результатами.

$$NP = DB = k\sqrt{3} \cos \alpha. SC = \frac{OC}{\cos \beta} = \frac{2OD}{\cos \beta} = \frac{2k \cos \alpha}{\cos \beta}.$$

$$HP = \frac{1}{2} SC = \frac{k \cos \alpha}{\cos \beta}.$$

$$\text{Тогда } S_{THPN} = NP \cdot HP = \frac{k^2 \sqrt{3} \cos^2 \alpha}{\cos \beta}.$$

$$6.40. \frac{1}{8} \text{ или } \frac{1}{4}.$$

**Решение.** Обозначим концы данного отрезка и его середину через  $O_1$ ,  $O_3$  и  $O_2$  соответственно.

**I случай.** Четвертая окружность касается окружностей с центрами в точках  $O_1$  и  $O_3$ , внешним образом, а окружности с центром в точке  $O_2$  — внутренним (рис. 124).

$$\text{Имеем } O_1O_4^2 = O_1O_2^2 + O_2O_4^2.$$

Тогда, обозначив радиус искомой окружности через  $x$ , получаем уравнение

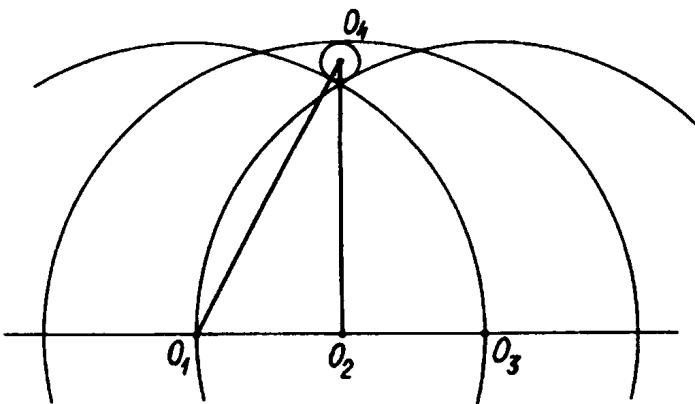


Рис. 124.

$$(2+x)^2 = 1 + (2-x)^2,$$

откуда  $x = \frac{1}{8}$ .

**II случай.** Четвертая окружность касается окружностей  $O_2$  и  $O_3$  внутренним образом, а окружности  $O_1$  — внешним (рис. 125). Из треугольника  $O_2KO_4$ ,  $O_2O_4^2 - O_2K^2 = KO_4^2$ , а из треугольника  $O_1KO_4$ ,  $O_1O_4^2 - O_1K^2 = KO_4^2$ .

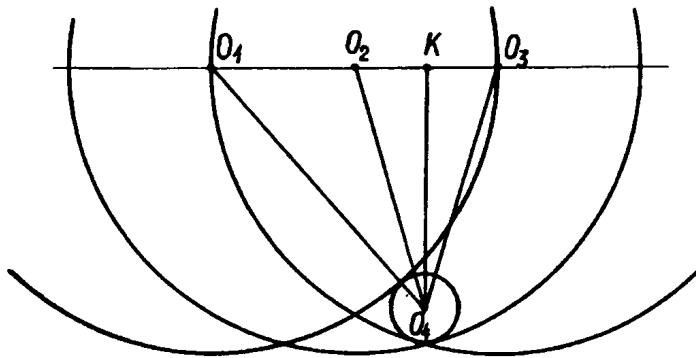


Рис. 125.

Получаем уравнение

$$(2-x)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = (2+x)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2, \quad x = \frac{1}{4}.$$

$$6.41. \quad a = 8, \quad b = \frac{200}{39}, \quad c = \frac{128}{39} \text{ или } a = 3, \quad b = \frac{25}{13}, \quad c = \frac{56}{13}.$$

*Решение.* Найдем  $\sin \angle C = \sin(180^\circ - (\angle A + \angle B)) = \sin(\angle A + \angle B) = \sin \angle A \cos \angle B + \sin \angle B \cos \angle A$ .

I случай. Угол  $A$  — тупой, угол  $B$  — острый.  
 $\cos \angle A = -\frac{4}{5}$ ,  $\cos \angle B = \frac{12}{13}$ ,  $\sin \angle C = \frac{16}{65}$ . Имеем  $2R = \frac{40}{3}$ ,

$$a = \frac{40}{3} \cdot \frac{3}{5} = 8, \quad b = \frac{40}{3} \cdot \frac{5}{13} = \frac{200}{39}, \quad c = \frac{40}{3} \cdot \frac{16}{65} = \frac{128}{39}.$$

II случай. Угол  $A$  — острый, угол  $B$  — тупой.  
 $\cos \angle A = \frac{4}{5}$ ,  $\cos \angle B = -\frac{12}{13}$ ,  $\sin \angle C = -\frac{16}{65}$ .

Ясно, что  $\angle C$  не может быть углом треугольника.

III случай. Углы  $A$  и  $B$  — острые.  $\cos \angle A = \frac{4}{5}$ ,  
 $\cos \angle B = \frac{12}{13}$ ,  $\sin \angle C = \frac{56}{65}$ ,  $2R = 5$ .  $a = 5 \cdot \frac{3}{5} = 3$ ,  $b = 5 \cdot \frac{5}{13} = \frac{25}{13}$ ,  
 $c = 5 \cdot \frac{56}{65} = \frac{56}{13}$ .

6.42. Если проекция вершины  $S$  на плоскость основания принадлежит ему, то  $\frac{1}{3} d^3 \frac{\sin \varphi \cos^2 \varphi \sin \alpha \sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}$ ; в противном

случае  $-\frac{1}{3} d^3 \sin \varphi \cos^2 \varphi \sin 2\alpha$ .

*Решение.* I случай. Пусть  $ABCD S$  — данная пирамида.  $\angle SEO = \alpha$ ,  $\angle SFO = 2\alpha$ ,  $\angle CAD = \varphi$ ,  $AC = d$  (рис. 126).

Так как  $AS = BS$ , то  $AO = BO$ , и, значит, точка  $O$  принадлежит оси симметрии прямоугольника  $ABCD$ .  $EF = AD = d \cos \varphi$ ,  $CD = d \sin \varphi$ .

Пусть высота  $SO$  пирамиды равна  $h$ .  $EO = h \operatorname{ctg} \alpha$ ,  $OF = h \operatorname{ctg} 2\alpha$ ,  $EF = EO + OF$ .

$$\begin{aligned} \text{Отсюда } h \operatorname{ctg} \alpha + h \operatorname{ctg} 2\alpha &= d \cos \varphi, \quad h = \frac{d \cos \varphi}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} 2\alpha} = \\ &= \frac{d \cos \varphi \sin \alpha \sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } V = \frac{1}{3} AD \cdot DC \cdot SO = \frac{1}{3} d^3 \frac{\sin \varphi \cos^2 \varphi \sin \alpha \sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}.$$

II случай. Пусть точка  $O$  лежит вне прямоугольника  $ABCD$  (рис. 127).

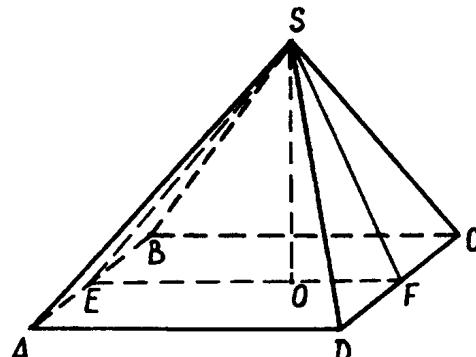


Рис. 126.

Здесь  $EO - FO = EF$ . Имеем  $h \operatorname{ctg} \alpha - h \operatorname{ctg} 2\alpha = d \cos \varphi$   
и  $h = \frac{d \cos \varphi}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha} = d \cos \varphi \sin 2\alpha$ .

$$V = \frac{1}{3} d^3 \sin \varphi \cos^2 \varphi \sin 2\alpha.$$

6.43. а или  $a\sqrt{42}$ . Решение. На рис. 128 изображен данный в условии параллелепипед.  $AB = a$ ,  $BC = a\sqrt{7}$ .

Пусть  $AA_1 = DD_1 = x$ .

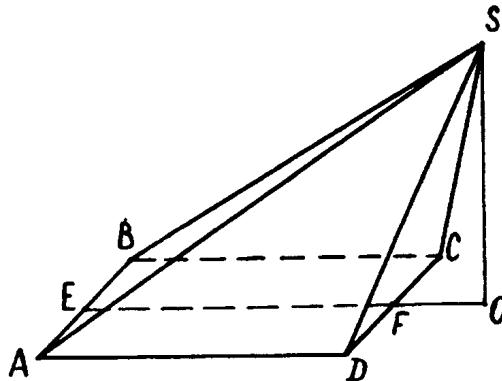


Рис. 127.

На прямой  $AD$  отложим отрезок  $DK = AD = a\sqrt{7}$ . Ясно, что  $CB_1 \parallel KD_1$ , и, значит, угол между прямыми  $CB_1$  и  $BK$  равен углу между прямыми  $KD_1$  и  $BK$ .

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 8a^2, \quad BD_1^2 = BD^2 + DD_1^2 = 8a^2 + x^2.$$

$$D_1K^2 = B_1C^2 = BC^2 + BB_1^2 = 7a^2 + x^2. BK^2 = AB^2 + AK^2 = 29a^2.$$

Теперь, используя теорему косинусов для треугольника  $BD_1K$ , имеем

$$BD_1^2 + D_1K^2 - 2 \cdot BD_1 \cdot D_1K \cos \angle BD_1K = BK^2.$$

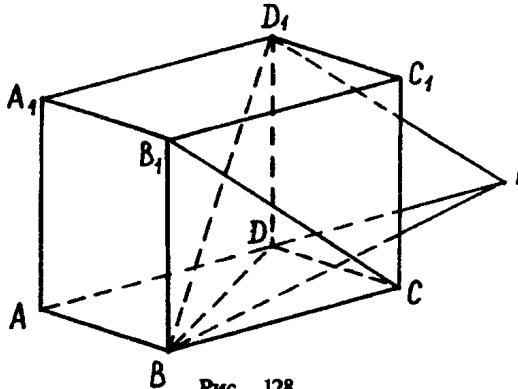


Рис. 128.

Здесь существование второго решения связано с тем, что в условии прямо не указано, какой из двух углов —  $BD_1K$  или смежный с ним, равен  $45^\circ$ . Этим двум возможным случаям и

соответствуют следующие уравнения:

$$1) 8a^2 + x^2 + 7a^2 + x^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(8a^2 + x^2)(7a^2 + x^2)} = 29a^2.$$

$$2) 8a^2 + x^2 + 7a^2 + x^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(8a^2 + x^2)(7a^2 + x^2)} = 29a^2.$$

$$6.44. 1, \text{ или } \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \text{ или } \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

*Решение.* Несложно доказать, что если шар касается граней трехгранных углов, то его центр лежит на прямой, содержащей диагональ куба.

Существуют две возможности для внешнего касания шаров.

I случай. Рассмотрим диагональное сечение куба  $AA_1C_1C$  (рис. 129).  $O_1$  — центр шара, вписанного в трехгранный угол с вершиной  $A$ .

Пусть радиус шара с центром в точке  $O_2$  равен  $x$ .

$$KK_1 = PO_2 = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1P^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + x\right)^2 - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2} = \sqrt{2x}.$$

$$AK = O_1K \operatorname{ctg} \angle C_1AC = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad K_1C = O_2K_1 \operatorname{ctg} \angle A_1CA = x\sqrt{2},$$

$$AC = a\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Имеем  $AC = AK + KK_1 + K_1C$ . Отсюда получаем уравнение  $\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2x} + x\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ , имеющее единственный корень  $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ .

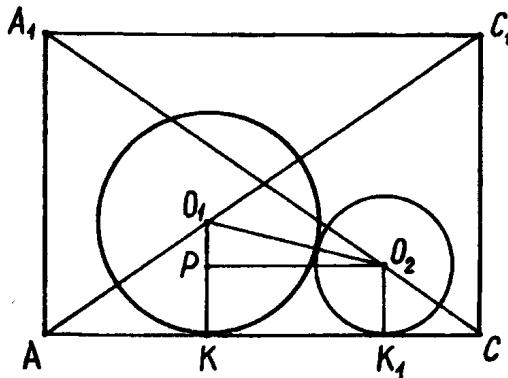


Рис. 129.

II случай (рис. 130). Здесь  $O_2K_1=x$ ,  $O_2P=x-\frac{1}{2}$ ,  $K_1K=O_1P=\sqrt{O_1O_2^2-O_2P^2}=\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{2x}$ .  $K_1C=O_2K_1 \operatorname{ctg} \angle O_2CK_1=x\sqrt{2}$ ,  $AK=O_1K \operatorname{ctg} \angle C_1AC=\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Имеем  $AK_1=K_1C-AC=x\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ,  $K_1K=AK_1+AK=x\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Получаем уравнение  $x\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2x}$ .

Отсюда  $x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ .

Теперь важно не упустить, что существует еще одна возможность взаимного расположения шаров, удовлетворяющая условию задачи, а именно внутреннее касание (рис. 131). Очевидно, что в этом случае искомый радиус равен 1.

6.45.  $\frac{196\sqrt{3}}{9}$ . Решение. Покажем, что четырехугольник, лежащий в основании пирамиды, дельтоид.

Действительно, так как все боковые грани пирамиды составляют с плоскостью основания равные углы, то вершина

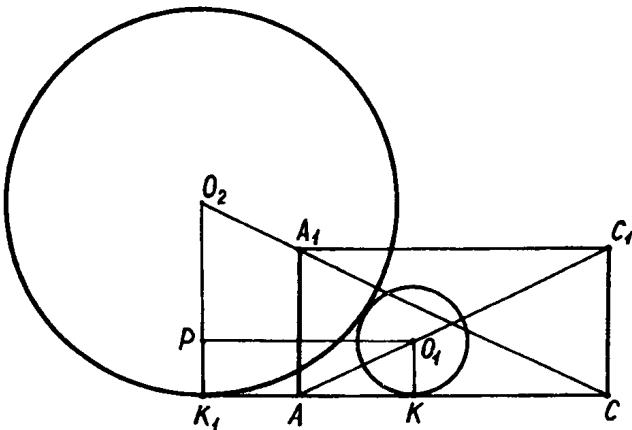


Рис. 130.

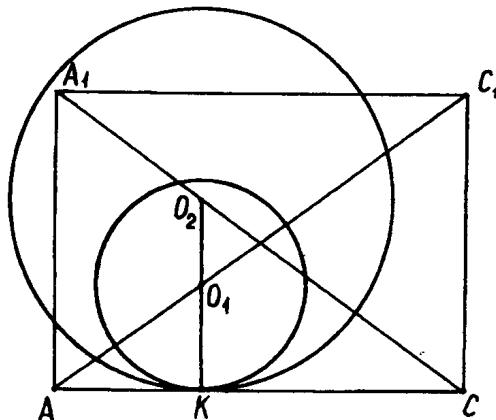


Рис. 131.

пирамиды равноудалена от прямых, содержащих стороны основания. Но если предположить, что данный четырехугольник — параллелограмм, то ни одна точка пространства таким свойством обладать не может. Получили противоречие.

**I случай.** Вершина пирамиды проектируется в центр окружности, вписанной в основание (рис. 132).

Пусть  $OK$  — радиус этой окружности.

Из треугольника  $SKO$   $OK = SO \operatorname{ctg} \angle SKO = \frac{7\sqrt{3}}{3}$ . Тогда

$$S_{ABCD} = OK \cdot p = \frac{112\sqrt{3}}{3} \quad (p — \text{полупериметр основания}).$$

$$\text{Имеем } V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \frac{784\sqrt{3}}{9}.$$

Здесь надо признать, что мы с Вами, уважаемый читатель, попали в ловушку, хорошо замаскированную автором задачи.

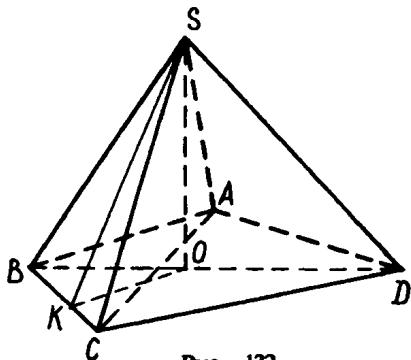


Рис. 132.

Дело в том, что дельтоид с такими сторонами (6 и 10) и радиусом вписанной окружности, равным  $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ , вообще не существует.

Действительно, с одной стороны, как мы установили ранее,  $S_{ABCD} = \frac{112\sqrt{3}}{3}$ , с другой —  $S_{ABCD} = AB \cdot AD \sin \angle BAD =$

$$= 60 \sin \angle BAD.$$

$$\text{Отсюда } \sin \angle BAD = \frac{28\sqrt{3}}{45} > 1.$$

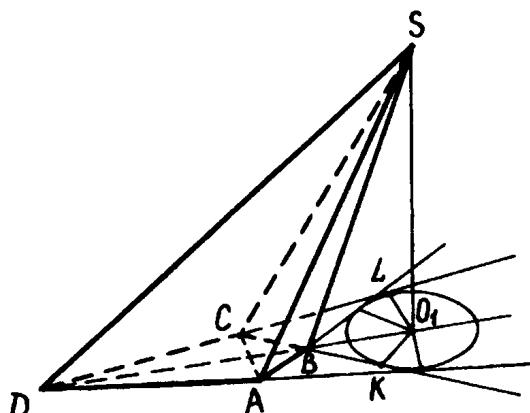


Рис. 133.

II случай. Вершина пирамиды проектируется в центр окружности, касающейся продолжений сторон дельтоида (рис. 133).

$$\begin{aligned} \text{Здесь } O_1L = O_1K = \frac{7\sqrt{3}}{3}. \quad S_{ABCD} &= 2S_{DBC} = 2(S_{DO_1C} - S_{BO_1C}) = \\ &= 2 \left( \frac{1}{2} DC \cdot O_1L - \frac{1}{2} BC \cdot O_1K \right) = 10 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{3} - 6 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{3} = \frac{28\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{28\sqrt{3}}{3} \cdot 7 = \frac{196\sqrt{3}}{9}.$$

$$6.46. \quad a < 1, \text{ или } a = \frac{\pi}{3}, \text{ или } a = \frac{\pi}{2}, \text{ или } a \geq 2.$$

*Указание.* Данная в условии система равносильна следующей:

$$\begin{cases} \begin{aligned} &\tg x = \sqrt{3}, \\ &x = a, \end{aligned} \\ \begin{aligned} &1 \leq x < 2, \\ &x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \end{cases}$$

Первое уравнение совокупности имеет единственный удовлетворяющий системе корень  $x = \frac{\pi}{3}$ . Теперь для того, чтобы не допустить появления новых решений, нужно потребовать: решение второго уравнения или не удовлетворяет по крайней мере одному из неравенств системы, или совпадает с ранее полученным.

$$6.47. c \leq -4, \text{ или } c = -\pi, \text{ или } c = -\frac{5\pi}{6}, \text{ или } c > -2.$$

6.48.  $a = 1$  или  $a = -1$ . Указание. В случае равенства нулю дискриминанта уравнения  $x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + 3a - 2 = 0$  мы получаем кратный корень  $x = 5$ , не входящий в область определения исходного уравнения.

$$6.49. a < -\frac{1}{2}, \text{ или } 0 < a \leq \frac{1}{2}, \text{ или } a \geq 1.$$

Указания. Перепишем уравнение  $\sin^2 x = 2a^2 - a$  в виде  $\cos 2x = 1 + 2a - 4a^2$ .

Теперь нужные значения  $a$  можно найти, решив совокупность

$$\begin{cases} 1 + 2a - 4a^2 = 3 - 4a, \\ |3 - 4a| > 1, \\ |1 + 2a - 4a^2| > 1. \end{cases}$$

$$6.50. a = \frac{11}{12}, \text{ или } a = 1, \text{ или } a = 3.$$

$$6.51. a = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Решение. Очевидно данная система имеет решения при тех же значениях  $a$ , что и уравнение

$$x^2 + (2a - 1 - x)^2 = a^2 + 2a - 3,$$

т.е.

$$2x^2 + 2x(1 - 2a) + 3a^2 - 6a + 4 = 0.$$

Имеем  $\frac{D}{4} = -2a^2 + 8a - 7 \geq 0$ . Отсюда  $2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq a \leq 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Переписав второе уравнение исходной системы в виде  
 $(x+y)^2 - 2xy = a^2 + 2a - 3$ , получаем  
 $xy = \frac{(2a-1)^2 - (a^2 + 2a - 3)}{2} = \frac{3}{2}a^2 - 3a + 2$ .

Таким образом, задача свелась к следующей: найти  $a$ , при которых функция  $f(a) = \frac{3}{2}a^2 - 3a + 2$  на отрезке  $\left[2 - \frac{\sqrt{2}}{2}; 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$  принимает свое наименьшее значение.

**6.52.** Таких  $a$  не существует.

*Решение.* Вначале предложим читателю «решение», с которым нам не раз приходилось встречаться.

Имеем  $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 49 - \frac{a}{2}$ . Поскольку  $x_1^2 + x_2^2 = 22,5$ , то получаем «ответ»  $a = 53$ . Однако при найденном значении  $a$  исходное уравнение корней не имеет. В этом решении мы столкнулись с одной из «популярнейших» ошибок, связанной с применением теоремы Виета: вести речь о корнях, предварительно не выяснив, существуют они или нет. Так, в данном примере в первую очередь необходимо было установить, что лишь при  $a \leq 49$  исходное уравнение имеет корни. Только после этого можно обратиться к выкладкам, приведенным выше.

**6.53.**  $a = 0$ .

*Решение.* Найдем дискриминант данного квадратного уравнения. Имеем  $D = a^2 + 8$ . Здесь важно не сделать ошибочный вывод о том, что уравнение имеет два корня при любом  $a$ . Оно действительно имеет два корня при любом, но допустимом  $a$ , т.е. при  $a \leq 0$  или  $a \geq 4$ .

Используя теорему Виета, запишем  $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-\sqrt{a^2 - 4a})^2 - 2(-a - 2) = a^2 - 2a + 4$ . Таким образом, для получения ответа осталось найти наименьшее значение квадратичной функции  $f(a) = a^2 - 2a + 4$  на множестве  $(-\infty; 0] \cup [4; \infty)$ . Поскольку при  $a \leq 0$   $f(a) \geq f(0) = 4$ , а при  $a \geq 4$   $f(a) \geq f(4) = 12$ , то функция  $f$  на указанном множестве принимает наименьшее значение в точке  $a = 0$ .

**6.54.**  $p < \frac{3}{7}$  или  $p \geq 4$ .

*Решение.* Произведем замену  $3^x = y$ . Тогда задача сводится к поиску тех значений параметра  $p$ , при которых система

$$\begin{cases} (p - 4)y^2 + (p + 1)y + 2p - 1 = 0, \\ y > 0 \end{cases}$$

не имеет решений.

Очевидно  $p = 4$  условию задачи удовлетворяет.

Пусть  $p \neq 4$ . Тогда уравнение системы является квадратным и при  $D = (p + 1)^2 - 4(p - 4)(2p - 1) < 0$  решений не имеет. Имеем  $p < 3/7$  или  $p > 5$ . Осталось рассмотреть еще одну возможность: квадратное уравнение  $(p - 4)y^2 + (p + 1)y + 2p - 1 = 0$  решения имеет, однако ни одно из них не является положительным.

В этом случае нужные значения  $p$  лучше всего найти, решив систему

$$\begin{cases} (p + 1)^2 - 4(p - 4)(2p - 1) \geq 0, \\ \frac{p + 1}{p - 4} > 0, \\ \frac{2p - 1}{p - 4} > 0, \end{cases}$$

которую несложно получить, используя теорему Виета.

6.55.  $a = -9$ , или  $a < -15$ , или  $a \geq 15$ .

*Решение.* Сразу перейдем к равносильной системе

$$\begin{cases} y^2 = \left(\frac{4y - a}{5}\right)^2 - 9, \\ x = \frac{4y - a}{5}, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Ясно, что число решений этой системы в точности равно количеству неотрицательных корней уравнения

$$9y^2 + 8ay - a^2 + 225 = 0.$$

Найдем значения  $a$ , при которых дискриминант последнего равен нулю.

$$\frac{D}{4} = 16a^2 + 9(a^2 - 225) = 0.$$

Отсюда  $a = 9$  или  $a = -9$ .

Подставляя найденные значения параметра в уравнение, устанавливаем, что подходит лишь  $a = -9$ .

Те значения параметра, при которых указанное выше уравнение имеет корни разных знаков, также удовлетворяют условию задачи.

По теореме Виета имеем  $-a^2 + 225 < 0$ . Откуда  $|a| > 15$ . И последнее. При  $a = \pm 15$  один из корней уравнения равен нулю, однако при  $a = -15$  второй корень является положительным, что очевидно нас не устраивает.

$$6.56. a = 0 \text{ или } \log_2 \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \leq a < \log_2 \frac{5 + \sqrt{5}}{2}.$$

*Решение.* Умножив второе уравнение системы на  $2^{-2y}$ , получим

$$\begin{cases} 2^{x+y} - 2^{2x-y} = 1 - 2^a, \\ 2^{4x-2y} - 2 \cdot 2^{x+y} = 3 \cdot 2^a - 4. \end{cases}$$

Пусть  $2^{x+y} = u$ ,  $2^{2x-y} = v$ , где  $u > 0$ ,  $v > 0$ . Отсюда имеем

$$\begin{cases} u - v = 1 - 2^a, \\ v^2 - 2u = 3 \cdot 2^a - 4. \end{cases}$$

Подставив  $u = v + 1 - 2^a$  во второе уравнение системы, получим квадратное уравнение  $v^2 - 2v - 2^a + 2 = 0$ .

Требование единственности решения исходной системы может послужить поводом для предъявления аналогичного требования к полученному квадратному уравнению. Однако, столкнувшись с ситуациями подобного рода, важно не упустить, что в результате замены значения новой переменной могут быть ограничены каким-либо множеством. Поэтому вопрос о количестве решений должен быть непосредственно связан с этим множеством. Так, в настоящей задаче в ходе замены установлено, что  $v > 0$ . Вместе с тем и  $u > 0$ . Тогда с учетом последней системы получим  $v > 2^a - 1$ . Таким образом, надо найти значения параметра, при которых уравнение  $v^2 - 2v - 2^a + 2 = 0$  имеет единственное решение для  $v > 0$  и  $v > 2^a - 1$ .

Очевидно необходимо, чтобы  $D \geq 0$ , т.е.  $2^a - 1 \geq 0$ . Поэтому значение переменной  $v$  можно ограничить лишь одним неравенством  $v > 2^a - 1$ . Если  $D = 0$ , т.е.  $a = 0$ , то рассматриваемое уравнение имеет единственный корень  $v = 1$ , удовлетворяющий требованию  $v > 2^a - 1$ . Если  $D > 0$ , то число

$2^a - 1$  должно или находиться в корневом промежутке, или совпадать с меньшим корнем. Отсюда искомые значения параметра  $a$  найдем, решив совокупность

$$\begin{cases} f(2^a - 1) < 0, \\ f(2^a - 1) = 0, \\ 2^a - 1 < v_0, \text{ где } v_0 \text{ — вершина параболы.} \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что ее решением будет промежуток  $\left[ \log_2 \frac{5 - \sqrt{5}}{2}; \log_2 \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right]$ .

## § 7. Умный гору обойдет

7.45. Нет решений. Решение. Так как ясно, что при  $x < 7$  левая часть неравенства может принимать лишь неотрицательные значения, то сразу перейдем к равносильной системе

$$\begin{cases} x + 3 + x - 4 < x - 7, \\ x \geq 7. \end{cases}$$

7.46.  $x > 4$ . Указание. Данное в условии неравенство равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} \log_2 \frac{3x - 8}{x - 2} > 1, \\ x > \frac{8}{3}. \end{cases}$$

7.47. 1 или  $\frac{\pi}{2} + \pi k$ , где  $k \in Z$ . Решение. Поскольку выражение, стоящее в левой части уравнения, принимает только неотрицательные значения, то решение следует искать на множестве чисел, удовлетворяющих условию  $\cos x \geq 0$ . Имеем

$$\begin{cases} (x - 2)^2 \cos x = \cos x, \\ \cos x \geq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ x = 1, \\ x = 3, \\ \cos x \geq 0. \end{cases}$$

**7.48.** 5 или  $\pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ . **7.49.** Все точки отрезка  $AB$  прямой  $x + y = 7$ , где  $A(1; 6)$ ,  $B(5; 2)$ . *Решение.* Перепишем первое уравнение системы в виде  $(x - 1) + (y - 2) = 4$ . Тогда с учетом второго уравнения получаем  $|x - 1| + |y - 2| = (x - 1) + (y - 2)$ .

Последнее равенство возможно лишь при условии  $x \geq 1$ ,  $y \geq 2$ .

Итак, исходная система равносильна такой:

$$\begin{cases} x + y = 7, \\ x \geq 1, \\ y \geq 2. \end{cases}$$

**7.50.**  $-1 \leq x \leq 1$  или  $x \geq 5$ . *Решение.* Запишем

$$|x^2 - 6x + 5| + |6x + 6| = (x^2 - 6x + 5) + (6x + 6).$$

Теперь ясно, что данное уравнение равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 5 \geq 0, \\ x + 1 \geq 0. \end{cases}$$

**7.51.**  $x = 0$  или  $x > 3$ . *Указание.* Перепишите выражение, стоящее в правой части уравнения, в виде  $\left| \frac{27x}{x^3 - 27} + x \right|$ .

**7.52.** Нет решений. *Решение.* Из условия следует

$$|x + y - 5| = |(x - 1) + (y - 4)| > |x - 1| + |y - 4|,$$

что очевидно невозможно.

**7.53.**  $x = \frac{1}{3}$ ,  $y = -3$  или  $x = 3$ ,  $y = -\frac{1}{3}$ . *Решение.* Перепишем первое уравнение так:

$$\left| x + \frac{1}{y} \right| + \left| \frac{10}{3} - x + y \right| = \left( x + \frac{1}{y} \right) + \left( \frac{10}{3} - x + y \right).$$

Теперь ясно, что исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} \geq 0, \\ \frac{10}{3} - x + y \geq 0, \\ x^2 + y^2 = \frac{82}{9}, \\ x > 0, \\ y < 0. \end{cases}$$

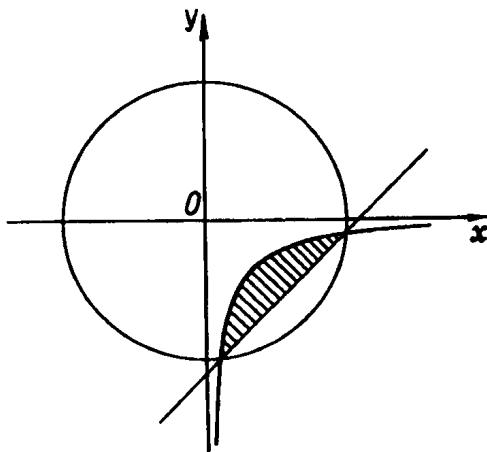


Рис. 134.

Для решения последней воспользуемся геометрической интерпретацией.

На координатной плоскости  $(x; y)$  неравенства системы задают множество точек, выделенное на рис. 134 штриховкой. Окружность  $x^2 + y^2 = \frac{82}{9}$  имеет с указанным множеством лишь две общие

точки  $A\left(\frac{1}{3}; -3\right)$  и  $B\left(3; -\frac{1}{3}\right)$ .

$$7.54. a \leq -3 \text{ или } -\frac{\sqrt{3}}{3} \leq a \leq \frac{1}{2}.$$

*Решение.* Заметим, что  $a = 0$  условию задачи удовлетворяет. Пусть  $a \neq 0$ . Тогда перепишем данное уравнение в виде

$$|x - (-a)| + |x - \left(-\frac{1}{a^2}\right)| = (-a) - \left(-\frac{1}{a^2}\right).$$

Теперь ясно, что решениями уравнения являются все числа из отрезка  $\left[-\frac{1}{a^2}; -a\right]$ .

Таким образом, задача свелась к поиску тех значений  $a$ , при которых указанный выше отрезок содержит не менее четырех целых чисел. Понятно, что ответ не изменится, если мы эту же задачу решим для симметричного отрезка  $\left[a; \frac{1}{a^2}\right]$ . Из условия  $a < \frac{1}{a^2}$  следует, что  $a < 1$ .

Естественно рассмотреть следующие случаи.

I случай.  $0 < a < 1$ . Тогда условие задачи будет выполняться, если  $\frac{1}{a^2} \geq 4$ . Имеем  $0 < a \leq \frac{1}{2}$ .

**II случай.**  $-1 < a < 0$ . Тогда потребуем  $\frac{1}{a^2} \geq 3$ . Здесь  $-\frac{\sqrt{3}}{3} \leq a < 0$ .

**III случай.**  $-2 < a \leq -1$ . Для этого случая  $\frac{1}{a^2} \geq 2$ . Очевидно требуемых  $a$  нет.

**IV случай.**  $-3 < a \leq -2$ . Здесь, так же, как и в предыдущем случае, соответствующая система

$$\begin{cases} -3 < a \leq -2, \\ \frac{1}{a^2} > 1 \end{cases}$$

решений не имеет.

**V случай.** Ясно, что при  $a \leq -3$  условие задачи выполняется.

**7.55.**  $x = 3$ . **7.56.**  $x > \log_3 6$ . **Указание.** Здесь нет необходимости рассматривать два случая. Ни одно из решений неравенства  $x < 1$  не входит в область определения.

**7.57.**  $|x| \geq 2$ . **Указание.** Область определения данного неравенства —  $(-\infty; -2] \cup [2; \infty)$ . На этом множестве уже первое из слагаемых, стоящих в левой части, не меньше 2.

**7.58.**  $x > 3$ . **Решение.** Областью определения данного неравенства является объединение двух лучей  $(-\infty; -3)$  и  $(3; \infty)$ .

При  $x < -3$  левая часть неравенства принимает отрицательные значения и поэтому решение следует искать на множестве  $(3; \infty)$ .

Оценим первое слагаемое, стоящее в левой части.

При  $x > 3$   $\frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}} > \frac{x}{\sqrt{x^2}} = 1$ . Отсюда  $\frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}} + x > 4$

при всех  $x \in (3; \infty)$ .

**7.59.**  $x > 1$ . **Решение.** Рассмотрим два случая.

**I случай.** Если  $x \leq -1$ , то  $\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \leq 0$ , а  $2(1 - x) > 0$ .

**II случай.** Если  $x \geq 1$ , то  $\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \geq 0$ , а  $2(1 - x) \leq 0$ ,

а, значит, при таких  $x$  неравенство выполняется.

**7.60.** Нет решений. *Решение.* Так как функция  $y = \sqrt{x}$  монотонно возрастает на всей области определения, а  $2x - 3 < 2x - 1$ , то  $\sqrt{2x - 3} - \sqrt{2x - 1} < 0$ .

**7.61.**  $x = 4$ . *Решение.* Функция  $y = \sqrt{x-4} + \sqrt{4x-7}$  монотонно возрастает на области определения, а следовательно, данное уравнение имеет не более одного решения. Остается заметить, что  $x = 4$  — корень.

**7.62.**  $x = 1$ . *Решение.* Функция  $y = \sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}$  возрастает на  $[1; \infty)$ . На этом же множестве функция  $y = \frac{2}{x}$  монотонно убывает. Тогда данное уравнение может иметь не более одного корня.

**7.63.**  $x = 2$ . *Решение.* Область определения данного уравнения —  $[-2; \infty)$ .

Рассмотрим два случая.

I случай.  $-2 \leq x \leq 0$ . Тогда  $x^2 + 2x \leq 0$  и  $15\sqrt{x+2} \leq 15\sqrt{2}$ . Отсюда  $x^2 + 2x + 15\sqrt{x+2} \leq 15\sqrt{2} < 38$ .

II случай.  $x \geq 0$ . На этом множестве функция  $y = x^2 + 2x + 15\sqrt{x+2}$  монотонно возрастает и остается лишь заметить, что  $x = 2$  — корень.

**7.64.**  $-1 < a < \frac{1}{2}$ . **7.65.** 4. *Решение.* Прологарифмировав обе части уравнения по основанию 10, получим

$$\left(4 \lg \frac{x}{2} + 1\right) \lg 5x = \lg 1994x^5,$$

$$(4 \lg x - 4 \lg 2 + 1)(\lg 5 + \lg x) = \lg 1994 + 5 \lg x.$$

После несложных преобразований имеем

$$\lg^2 x + (\lg 5 - \lg 2 - 1) \lg x - \lg 2 \lg 5 - \frac{1}{4} \lg 1994 + \frac{1}{4} \lg 5 = 0.$$

Очевидно выражение  $-\left(\lg 2 \lg 5 + \frac{1}{4} \lg \frac{1994}{5}\right)$  отрицательно, что гарантирует для полученного уравнения существование двух корней.

Обозначим эти корни  $x_1$  и  $x_2$ . Тогда, используя теорему Виета, имеем

$$\lg x_1 + \lg x_2 = 1 + \lg 2 - \lg 5,$$

$$\text{Отсюда } \lg(x_1 x_2) = \lg 4.$$

$$7.66. \sqrt{6}. \quad 7.67. \quad 1 \text{ или } -\log_3 36.$$

*Решение.* Заметим, что  $x = 1$  — корень данного уравнения. Теперь, прологарифмировав обе части уравнения по основанию 10, после очевидных преобразований получаем

$$x^2 + \frac{(3 \lg 2 + 2 \lg 3 - \lg 6)}{\lg 3} x - \log_3 36 = 0.$$

Корни последнего уравнения удовлетворяют условию  $x_1 \cdot x_2 = -\log_3 36$ . Однако один из корней  $x = 1$  уже был найден ранее. Тогда  $x_2 = \frac{-\log_3 36}{x_1}$ .

7.68. 1 или  $-\lg 5$ .

7.69.  $\frac{8\sqrt{13}}{3}$  и  $\frac{4\sqrt{73}}{3}$ .

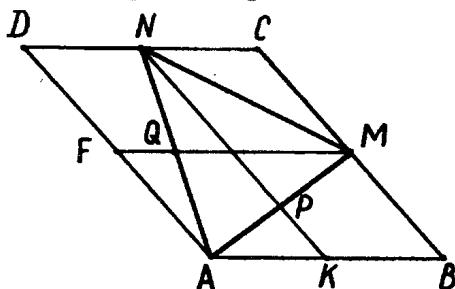


Рис. 135.

*Решение.* Пусть  $S_{ABCD} = S$  (рис. 135).

$$S_{ABM} = \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{1}{4} S.$$

$$S_{ADN} = \frac{1}{2} S_{ADC} = \frac{1}{4} S.$$

$$S_{MCN} = \frac{1}{4} S_{BCD} = \frac{1}{8} S.$$

Отсюда

$$S_{MAN} = S - \left( \frac{1}{4} S + \frac{1}{4} S + \frac{1}{8} S \right) = \frac{3}{8} S. S = \frac{8}{3} S_{MAN}.$$

Ясно, что площадь параллелограмма будет наибольшей при наибольшем значении площади треугольника  $MAN$ . Возможны два случая:  $\angle MAN = 90^\circ$  или  $\angle NMA = 90^\circ$ . В первом случае  $S_{MAN} = 24$ , во втором  $S_{MAN} = 6\sqrt{7}$ . Следовательно, наибольшее значение площади  $\Delta MAN$ , если  $\angle MAN = 90^\circ$ .

Тогда  $S = \frac{8}{3} \cdot 24 = 64$ .

Если  $F$  — середина  $AD$ , то  $MQ$  — средняя линия трапеции  $BCNA$ .

$$FQ = \frac{1}{2} DN = \frac{1}{4} DC,$$

$$QM = \frac{NC + AB}{2} = \frac{NC + DC}{2} = \frac{3}{4} DC,$$

$$DC = \frac{4}{3} QM.$$

Аналогично  $CB = \frac{4}{3}NP$ .

$$\text{Получаем } DC = \frac{4}{3} \sqrt{6^2 + 4^2} = \frac{8}{3} \sqrt{13},$$

$$CB = \frac{4}{3} \sqrt{8^2 + 3^2} = \frac{4}{3} \sqrt{73}.$$

**7.70. Решение.** Пусть  $MN$  — меньшее основание искомой трапеции (рис. 136).

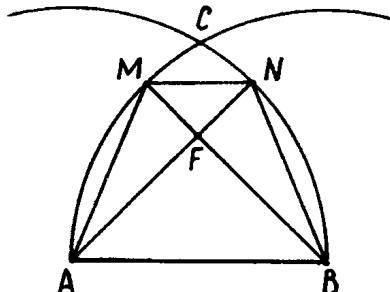


Рис. 136.

$AN = BM = R$ . Площадь трапеции  $AMNB$  принимает наибольшее значение, если  $\angle AFB = 90^\circ$ . Отсюда  $\angle NAB = 45^\circ$ .

$$7.71. C\left(\frac{3}{2}; 0\right).$$

**Решение.** Отобразим точку  $B$  симметрично относительно оси  $OX$  ( $B_1(4; -5)$ ) (рис. 137). Пусть  $C_1(x; 0)$  —

искомая точка.

$$P_{ABC_1} = AB + AC_1 + BC_1 = AB + AC_1 + B_1C_1.$$

Так как  $AC_1 + B_1C_1 \geq AB_1$ , то периметр будет наименьшим, если точки  $A, C_1, B_1$  лежат на одной прямой. Уравнение прямой  $AB_1$  имеет вид  $y = -2x + 3$ . При  $y = 0$   $x = \frac{3}{2}$ .

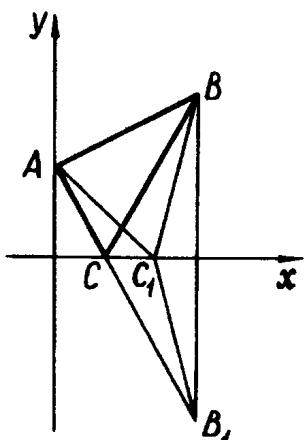


Рис. 137.

**7.72.**  $\frac{(a-b)^3}{16(a+b)}$ . **Решение.** Пусть  $OF = x$  — высота треугольника  $PQO$ ,  $OG = h_1$  — высота треугольника  $BOC$ ,  $BK = H$  — высота трапеции  $ABCD$  и  $EL = h_2$  — высота треугольника  $BEC$  (рис. 138).

Тогда  $PQ = MN - (MP + QN) = \frac{a-b}{2}$ . Из соображений подобия  $\frac{OF}{OG} = \frac{PQ}{BC}$ ,  $\frac{OR}{OG} = \frac{AD}{BC}$ .

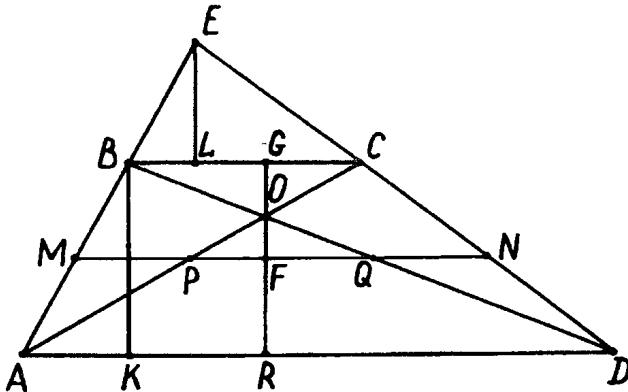


Рис. 138.

Имеем

$$\begin{cases} \frac{x}{h_1} = \frac{a-b}{2b}, \\ \frac{H-h_1}{h_1} = \frac{a}{b}, \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} \frac{x}{h_1} = \frac{a-b}{2b}, \\ \frac{H}{h_1} = \frac{a+b}{b}. \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе, получим после преобразований  $x = \frac{H(a-b)}{2(a+b)}$ .

Тогда  $S_{POQ} = \frac{1}{2} PQ \cdot OF = \frac{(a-b)^2 H}{8(a+b)}$ .

Таким образом,  $S_{POQ}$  максимальна при максимальном значении высоты трапеции, которая, в свою очередь, максимальна при максимальном значении высоты треугольника  $BEC$ , поскольку  $\frac{H+h_2}{h_2} = \frac{a}{b}$ ,  $H = \frac{h_2(a-b)}{b}$ .

Но из всех треугольников с заданным основанием и углом при вершине наибольшую высоту имеет равнобедренный. Поэтому  $\angle BAD = \angle CDA = 45^\circ$ ,  $H = \frac{a-b}{2}$  и

$$S_{POQ} = \frac{(a-b)^3}{16(a+b)}.$$

7.73.  $\frac{27\sqrt{3}}{32}$ . *Решение.* Очевидно, что третья вершина

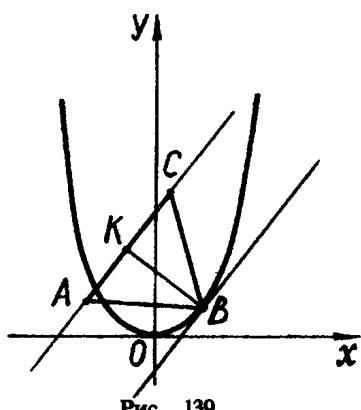


Рис. 139.

искомого треугольника принадлежит дуге параболы. Ясно также, что эта точка лежит на касательной, параллельной прямой  $y = x + 2$  (рис. 139). Уравнение касательной  $y = x - \frac{1}{4}$ , точка касания  $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ . Высота ис-комого треугольника  $BK = \frac{9\sqrt{2}}{8}$ .

$$\text{Отсюда } S_{ABC} = BK^2 \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{27\sqrt{3}}{32}.$$

$$7.74. b = \frac{27}{8}.$$

*Решение.* Найдем уравнения касательных в точках  $x = 0$  и  $x = -\frac{3}{2}$ :

$$y' = -3x^2 + b,$$

$$y(0) = 0,$$

$$y'(0) = b,$$

$$y\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{8} - \frac{3}{2}b,$$

$$y'\left(-\frac{3}{2}\right) = b - \frac{27}{4}.$$

Уравнения касательных  $y = bx$  и  $y = (b - \frac{27}{4})x - \frac{27}{4}$ .

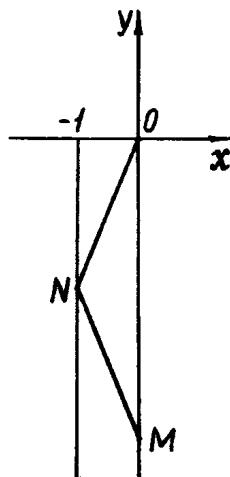


Рис. 140.

Касательная  $y = bx$  пересекает ось ординат в точке  $O(0; 0)$  (рис. 140), касательная  $y = (b - \frac{27}{4})x - \frac{27}{4}$  в точке  $M\left(0; -\frac{27}{4}\right)$ .

Найдем точку пересечения касательных:

$$\begin{cases} y = bx, \\ y = (b - \frac{27}{4})x - \frac{27}{4}, \end{cases} \begin{cases} x = -1, \\ y = -b. \end{cases}$$

Из всех треугольников с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $M\left(0; -\frac{27}{4}\right)$  и третьей вершиной, лежащей на прямой  $x = -1$ , наименьший периметр имеет равнобедренный.

Итак, координаты точки  $N\left(-1; -\frac{27}{8}\right)$ .

Отсюда  $b = \frac{27}{8}$ .

7.75.  $\frac{4\sqrt{3}}{27}$ .

*Решение.* Пусть  $BB_1 = LL_1 = h$ ,  $LB = L_1B_1 = l$  (рис. 141).  $\Delta FDB \sim \Delta L_1EB_1$ , коэффициент подобия  $k = \frac{FD}{EB_1} = \frac{3}{4}$  (рис. 142).

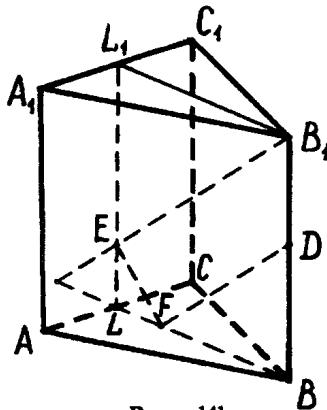


Рис. 141.

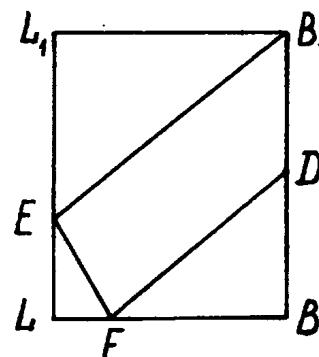


Рис. 142.

$$L_1E = \frac{4}{3}DB = \frac{2}{3}h, \quad EL = h - \frac{2}{3}h = \frac{h}{3}, \quad FB = \frac{3}{4}L_1B_1 = \frac{3}{4}l,$$

$$LF = l - \frac{3}{4}l = \frac{l}{4}.$$

Составим систему

$$\begin{cases} EF^2 = EL^2 + LF^2, \\ FD^2 = DB^2 + FB^2. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{h}{3}\right)^2 + \left(\frac{l}{4}\right)^2, \\ \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}l\right)^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} h = \frac{1}{2}, \\ l = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \end{cases}$$

Пусть  $AC = a$ . Ясно, что  $l \geq \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Отсюда  $a \leq \frac{2l}{\sqrt{3}}$ .

$$\text{Объем призмы } V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}h = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}.$$

Объем призмы будет наибольшим при наибольшем значении  $a$ .

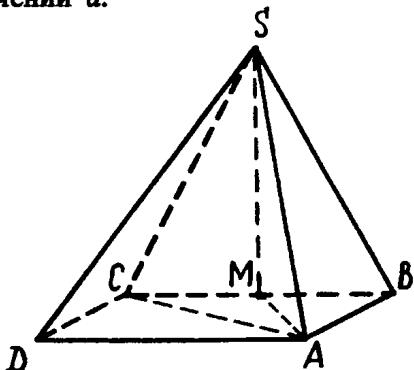


Рис. 143.

$$V_{\max} = \left(\frac{2l}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{4\sqrt{3}}{27}.$$

$$7.76. \arccos \frac{1}{3}.$$

*Решение.* Так как  $CM = MB = MS = MA = 4$  (рис. 143), то треугольники  $CSB$  и  $CAB$  — прямоугольные.

Очевидно высота пирамиды не больше  $SM$ , а высота параллелограмма не больше  $AM$ .

Значит, объем пирами-

ды будет наибольшим, если треугольники  $CSB$  и  $CAB$  — равнобедренные прямоугольные.

Угол между плоскостями  $SBC$  и  $ABC$  равен  $90^\circ$ . Найдем угол между плоскостями  $ACS$  и  $SCD$ . Воспользуемся теоремой косинусов для трехгранного угла.

Пусть искомый угол равен  $x$ ,  $\angle SCD = \gamma$ .

$$DS = \sqrt{SM^2 + DA^2 + AM^2} = 4\sqrt{6},$$

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{\frac{1}{2}DS}{DC} = \frac{2\sqrt{6}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\frac{\gamma}{2} = 60^\circ, \gamma = 120^\circ.$$

$$\cos x = \frac{\cos \angle DCA - \cos \angle SCD \cos \angle SCA}{\sin \angle SCD \sin \angle SCA} = \\ = \frac{\cos 90^\circ - \cos \gamma \cos 60^\circ}{\sin \gamma \sin 60^\circ} = \frac{1}{3},$$

$$x = \arccos \frac{1}{3}.$$

7.77.  $\sqrt{61}$ . Указание. Рассмотрим одну из разверток данного куба (рис. 144). Теперь ясно, что наименьшее рас-

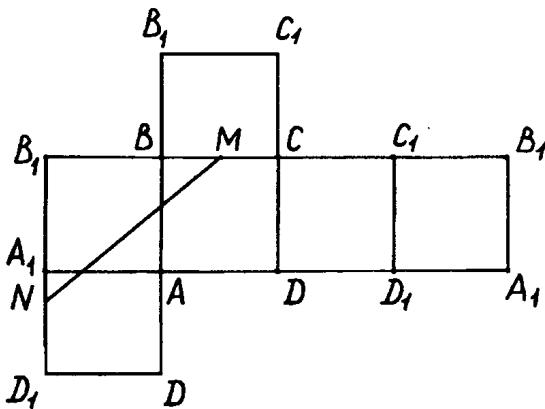


Рис. 144.

стояние между точками  $M$  и  $N$  по поверхности куба равно длине отрезка  $MN$ .  $MB_1 = 6$ ,  $B_1N = 5$ ,  $MN = \sqrt{MB_1^2 + B_1N^2} = \sqrt{61}$ . Предлагаем читателю самостоятельно рассмотреть другие способы развертки куба и убедиться, что результат  $\sqrt{61}$  «улучшить» нельзя.

7.78.  $45^\circ$ . Решение.  $D_1MBN$  — четырехугольник, получившийся в результате сечения куба плоскостью (рис. 145).

Так как  $D_1N \parallel MB$  и  $D_1M \parallel NB$ , то  $D_1MBN$  — параллелограмм, и ясно, что его периметр будет минимальным при минимальном значении суммы  $D_1M + MB$ . Повернем грань  $AA_1D_1D$  так, как показано на рис. 146. Теперь понятно, что указанная сумма примет минимальное значение в том случае, когда  $M$  — точка пересечения

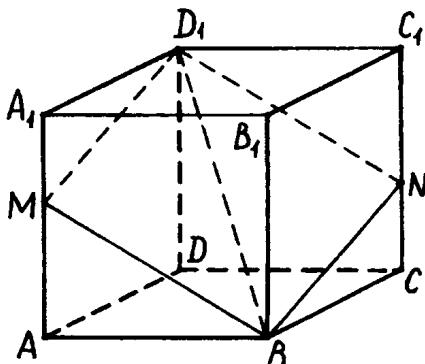


Рис. 145.

прямых  $D_1B$  и  $A_1A$ .

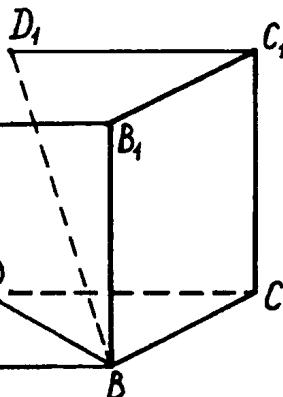


Рис. 146.

из подобия треугольников  $ABM$  и  $DBD_1$  имеем

$$\frac{AM}{AB} = \frac{DD_1}{DB}, \text{ отсюда } AM = 5. \text{ Тогда } MB = 5\sqrt{3}, MD_1 = 3\sqrt{3}.$$

Так как  $D_1B = \sqrt{132}$ , то несложно получить  $S_{D_1MBN} = 30\sqrt{2}$ .

Далее  $S_{ABCD} = 30$ ,  $S_{D_1MBN} \cos \varphi = S_{ABCD}$ , где  $\varphi$  — угол между плоскостью сечения и плоскостью основания. Имеем  $\varphi = 45^\circ$ .

## § 8. На первый взгляд — стандартная задача

8.1.  $x = y = 0$ . *Решение.* Запишем

$$2^{|x|} + \lg(1 + x^2 + |y|) = \cos y.$$

Очевидно, что  $x^2 + |y| \geq 0$ . Значит,  $\lg(1 + x^2 + |y|) \geq 0$ . Но  $2^{|x|} \geq 1$ . Следовательно, левая часть уравнения не меньше единицы, а правая — не больше. Таким образом, равенство может быть обеспечено лишь в том случае, если

$$\begin{cases} \cos y = 1, \\ |x| = 0, \\ x^2 + |y| = 0. \end{cases}$$

8.14.  $x = \frac{1}{3}$ . *Решение.* Перейдем к равносильному уравнению

$$12 \cdot 3^{3x} + 4 = 5 \cdot 8^{3x}, \quad 12 \left(\frac{3}{8}\right)^{3x} + 4 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{3x} = 5.$$

Так как функция  $y = 12 \left(\frac{3}{8}\right)^{3x} + 4 \left(\frac{1}{8}\right)^{3x}$  монотонно убывает, то последнее уравнение не может иметь более одного корня.

8.15.  $x = \pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ . *Решение.* Заметим, что  $\cos 4x + \cos 2x \leq 2$ . В то же время, используя неравенство Коши для двух неотрицательных чисел, имеем

$$\frac{1}{\cos^2 x} + \cos^2 x \geq 2 \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos^2 x} = 2.$$

Теперь ясно, что исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \frac{1}{\cos^2 x} + \cos^2 x = 2, \\ \cos 4x + \cos 2x = 2. \end{cases}$$

Далее

$$\begin{cases} \cos^2 x = 1, \\ \cos 2x = 1, \\ \cos 4x = 1. \end{cases}$$

Решением первого уравнения системы являются все числа вида  $\pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ . Несложно убедиться, что все эти числа удовлетворяют также двум другим уравнениям системы.

**8.16.**  $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ . *Решение.* Преобразуем данное уравнение:

$$\begin{aligned}-\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)(1 + 2\cos 4x) - 2\cos 4x - 1 &= 2, \\ (1 + 2\cos 4x)\left(1 + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) &= -2.\end{aligned}$$

Очевидно  $-1 \leq 1 + 2\cos 4x \leq 3$  и  $0 \leq 1 + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 2$ .

Отсюда  $(1 + 2\cos 4x)\left(1 + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) \geq -2$ .

Следовательно, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 1 + 2\cos 4x = -1, \\ 1 + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2. \end{cases}$$

**8.17.**  $x = \frac{\pi}{8}$ . *Решение.* Преобразуем уравнение системы.

Имеем

$$4\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x}, \quad 2\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{\sin 2x}.$$

Очевидно, что при  $0 < x \leq \frac{\pi}{8}$   $2\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) \leq 2\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ , а  $\frac{1}{\sin 2x} \geq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$ .

Получаем систему

$$\begin{cases} 2\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}, \\ \frac{1}{\sin 2x} = \sqrt{2}, \\ 0 < x \leq \frac{\pi}{8}. \end{cases}$$

**8.18.**  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ,  $y = \pi - 2\pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Решение.* Поскольку  $-3 \leq 3\sin 3x \leq 3$  и  $-1 \leq \cos y \leq 1$ , то исходная система равносильна такой:

$$\begin{cases} \sin 3x = -1, \\ \cos y = -1, \\ x + y = \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

**8.19.**  $x = 3, y = 2$ . Указание. Так как  $1 - (x - 3)^2 \leq 1$ , то из первого уравнения системы имеем  $0 \leq x - y \leq 1$ . Однако в область определения второго уравнения входят только те пары  $(x; y)$ , для которых  $x - y \geq 1$ . Отсюда получаем  $x - y = 1$ . Остальное несложно и мы предлагаем завершить решение самостоятельно.

**8.20.**  $x = -2, y = -1$ . Решение. Рассмотрим первое уравнение системы как квадратное относительно  $y$ . Тогда для существования решений необходимо  $D = x^2 - 4 \geq 0$ , т. е.  $|x| \geq 2$ .

Из второго уравнения имеем  $x^2 + 2x \leq 0$ , откуда  $-2 \leq x \leq 0$ .

Теперь ясно, что решение системы следует искать среди пар вида  $(-2; y)$ .

Получаем

$$\begin{cases} y^2 - xy + 1 = 0, \\ x^2 + 2x = -y^2 - 2y - 1, \\ x = -2. \end{cases}$$

**8.21.** Нет решений. Указание. Из первого уравнения системы  $x^2 \geq 2$ .

Перепишем второе уравнение в виде

$$y^2(x^2 - 2) + 1 = 0.$$

Ясно, что при  $x^2 \geq 2$  левая часть последнего уравнения может принимать только положительные значения.

**8.22.**  $x = 2\sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$  или  $x = -2\sqrt{2}, y = \sqrt{2}$ .

**8.23.**  $x = -4, y = 2, z = 0$  или  $x = -2, y = 1, z = 2$ .

Решение. Если рассмотреть второе уравнение системы как квадратное относительно  $y$ , то его дискриминант будет равен  $64 - 16z^2$ . Потребовав, чтобы  $64 - 16z^2 \geq 0$ , получим  $|z| \leq 2$ . С учетом того, что  $z \geq 0$ , запишем  $0 \leq z \leq 2$ .

Представим третье уравнение системы как квадратное относительно  $x$ . Имеем  $x^2 - 2x(z - 4) - 6z + 16 = 0$ .

$\frac{D}{4} = (z - 4)^2 + 6z - 16 \geq 0$ . Отсюда, не забыв, что  $z \geq 0$ , получим  $z \leq 0$  или  $z \geq 2$ . Сравнивая результаты, приходим к выводу, что  $z = 0$  или  $z = 2$ . Подставив найденные значения в исходную систему, легко получить ответ.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

1. *Определение.* Областью определения уравнения  $f(x) = g(x)$  называется множество  $D(f) \cap D(g)$ , где  $D(f)$  и  $D(g)$  — области определения функций  $f$  и  $g$ .

2. *Определение.* Если любой корень уравнения  $f_1(x) = g_1(x)$  является корнем уравнения  $f_2(x) = g_2(x)$ , то уравнение  $f_2(x) = g_2(x)$  называется следствием уравнения  $f_1(x) = g_1(x)$ .

3. *Определение.* Если любой корень уравнения  $f_1(x) = g_1(x)$  является корнем уравнения  $f_2(x) = g_2(x)$  и любой корень уравнения  $f_2(x) = g_2(x)$  является корнем уравнения  $f_1(x) = g_1(x)$ , то такие два уравнения называются равносильными (или эквивалентными).

4. *Определение.* Если любой корень уравнения  $f_1(x) = g_1(x)$ , принадлежащий множеству  $M$ , является корнем уравнения  $f_2(x) = g_2(x)$ , а любой корень уравнения  $f_2(x) = g_2(x)$ , принадлежащий множеству  $M$ , является корнем уравнения  $f_1(x) = g_1(x)$ , то такие два уравнения называются равносильными на множестве  $M$ .

### Утверждения о равносильности уравнений.

5. Уравнения  $f(x) = g(x)$  и  $f(x) - g(x) = 0$  равносильны.

6. Уравнения  $f(x) = g(x)$  и  $f(x) + \alpha = g(x) + \alpha$  равносильны для любого числа  $\alpha$ .

7. Уравнения  $f(x) = g(x)$  и  $\alpha f(x) = \alpha g(x)$  равносильны для любого числа  $\alpha \neq 0$ .

8. Уравнения  $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ , где  $a > 0$  и  $a \neq 1$ , и  $f(x) = g(x)$  равносильны.

9. Пусть для любого  $x \in M$   $f(x) \geq 0$  и  $g(x) \geq 0$ . Тогда уравнения  $f(x) = g(x)$  и  $(f(x))^n = (g(x))^n$ ,  $n \in N$ , равносильны на множестве  $M$ .

10. Пусть для любого  $x \in M$   $f(x) > 0$  и  $g(x) > 0$ . Тогда уравнения  $f(x) = g(x)$  и  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ , где  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , равносильны на множестве  $M$ .

11. Пусть  $D(f) \cap D(g) \subseteq D(\varphi)$ . Тогда уравнения  $f(x) = g(x)$  и  $f(x) + \varphi(x) = g(x) + \varphi(x)$  равносильны.

12. Пусть для любого  $x \in D(f) \cap D(g)$   $\varphi(x) \neq 0$ . Тогда уравнения  $f(x) = g(x)$  и  $f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$  равносильны.

### Утверждения об уравнениях-следствиях.

13. Уравнение  $(f(x))^{2n} = (g(x))^{2n}$ ,  $n \in N$ , является следствием уравнения  $f(x) = g(x)$ .

14. Уравнение  $f(x) = g(x)$  является следствием уравнения  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ , где  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

15. Пусть  $D(f) \cap D(g) \subseteq D(\varphi)$ . Тогда уравнение  $f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$  является следствием уравнения  $f(x) = g(x)$ .

16. Уравнение  $f(x) = g(x)$  является следствием уравнения  $f(x) + \varphi(x) = g(x) + \varphi(x)$ .

## Список использованной литературы

1. Габович И. Г. Алгоритмический подход к решению геометрических задач. — К.: Рад. шк., 1989. — 160 с.
2. Габович И. Г. Ответ в тригонометрическом уравнении // Квант. — 1977. — № 9. — С. 53-57.
3. Голубев В. И. Абсолютная величина числа в конкурсных экзаменах по математике. — Львов, 1991. — 96 с. — (Квантор; № 8).
4. Голубев В. И., Гольдман А. М., Дорофеев Г. В. Умный гору обойдет // Репетитор. — 1992. — № 5. — С. 7-16.
5. Горништейн П. И., Полонский В. Б., Якир М. С. Задачи с параметрами. Под ред. Г. В. Дорофеева. К.: РИА «Текст»; МП «ОКО», 1992. — 290 с.
6. Горништейн П. И., Полонский В. Б., Якир М. С. Необходимые условия в задачах с параметрами // Квант. — 1991. — № 11. — С. 44-49.
7. Горништейн П. И., Полонский В. Б., Якир М. С. Геометрические решения экстремальных геометрических задач // Там же. — 1992. — № 9. — С. 59-63.
8. Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х. Пособие по математике для поступающих в вузы. — М.: Наука, 1976. — 638 с.
9. Дорофеев Г. В. Квадратный трехчлен в задачах. — Львов, 1991. — 103 с. — ( Квантор; № 2).
10. Дорофеев Г. В. О существовании конфигурации в геометрических задачах // Математика в школе. — 1987. — № 5. — С. 40-44.
11. Задачи по математике. Уравнения и неравенства: Справ. пособие / Вавилов В. В., Мельников И. И., Олехник С. Н., Пасиченко П. И. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. — 240 с.
12. Задачи по математике. Начала анализа: Справ. пособие / Вавилов В. В., Мельников И. И., Олехник С. Н., Пасиченко П. И. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — 608 с.
13. Каплан Я. Л. Рівняння. — К.: Рад. шк., 1968. — 406 с.
14. Криволапов В. П. Задачі на властивості функцій / У світі математики. — К.: Рад. шк., 1979. — Вип. 10. — С. 153-160.

15. Кужель О. В. Контрприклади в математиці. — К.: Рад. шк., 1988. — 96 с.
16. Левіщенко С. С., Хільченко Л. О., Якір М. С. Графічний підхід до розв'язування рівнянь / У світі математики. — К.: Освіта, 1991. — Вип. 20. — С. 118-128.
17. Марков В. К. Системы алгебраических уравнений. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1968. — 72 с.
18. Мельников И. И., Сергеев Н. Н. Как решать задачи по математике на вступительных экзаменах. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. — 303 с.
19. Мерзляк А. Г., Палонский В. Б., Якір М. С. Неожиданный шаг или сто тринадцать красивых задач. — К.: Александрия, 1993. — 59 с.
20. Олехник С. Н., Потапов М. К., Пасиченко П. И. Нестандартные методы решения уравнений и неравенств. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991. — 144 с.
21. Потапов М. К., Олехник С. Н., Нестеренко Ю. В. Конкурсные задачи по математике. — М.: Наука, 1992. — 480 с.
22. Сборник задач по математике для поступающих во втузы / Под ред. М. И. Сканави. — М.: Высшая шк., 1988. — 431 с.
23. Субботин И. Я., Якір М. С. Обучающая функция ошибки // Математика в школе. — 1992. — № 2-3. — С. 27-28.
24. Шарыгин И. Ф. Задачи по геометрии. Планиметрия. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1986. — 224 с.
25. Шарыгин И. Ф. Откуда берутся задачи? // Квант. — 1991. — № 8. — С. 42-48.
26. Шваєцький М. Г. Абсолютні величини в шкільному курсі математики. — К.: Рад. шк., 1967. — 248 с.
27. Якір М. С. Что же такое красивая задача? // Математика в школе. — 1989. — № 6. — С. 41-46.

# СОДЕРЖАНИЕ

От авторов . . . . .	3
§ 1. «Коварные» вопросы теории . . . . .	5
§ 2. Осторожно! Простая задача! . . . . .	13
§ 3. Откуда берутся посторонние корни . . . . .	20
А. Расширение области определения. . . . .	21
Б. Умножение на выражение с переменной. . . . .	35
В. Применение немонотонной функции. . . . .	38
§ 4. Как корни не потерять . . . . .	47
§ 5. Если вы переходите к совокупности... . . . . .	60
А. Решение уравнений вида $f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$ . . . . .	60
Б. Решение нестрогих неравенств. . . . .	63
В. Сколько корней имеет уравнение? . . . . .	66
§ 6. Казалось бы, решение завершено... . . . . .	71
А. Многовариантные геометрические задачи. . . . .	72
Б. Параметр «расставляет ловушки». . . . .	102
§ 7. Умный гору обойдет . . . . .	115
А. Когда модуль можно не раскрывать. . . . .	115
Б. Помогают свойства функций. . . . .	121
В. Выгодно применить теорему Виета. . . . .	124
Г. Всегда ли нужна производная? . . . . .	126
Д. Неожиданный шаг. . . . .	136
Е. Еще две задачи. . . . .	141
§ 8. На первый взгляд — стандартная задача . . . . .	147
Ответы. Указания. Решения. . . . .	155
Приложение . . . . .	232
Список литературы . . . . .	234

**Учебное издание**

**Горнштейн Павел Исидорович,  
Мерзляк Аркадий Григорьевич,  
Полонский Виталий Борисович,  
Якир Михаил Семенович**

**ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ И ЕГО ПОДВОДНЫЕ  
РИФЫ**

*Редактор Коломеец О. В.*

*Корректор Виротовий И. С.*

*Технический редактор Вербовиков А. М.*

*Художник Курдюмов М. Л.*

ЛР № 064344 от 9.12.95. Подписано в печать 20.11.97.

Печать офсетная. Формат 84×108/32. Бумага книжно-журнальная.

Тираж 20 000 экз. Заказ 2221.

ООО «Илекса», 121354, г. Москва, а/я 282.

Творческое объединение «Гимназия», г. Харьков, ул. Тобольская, 46а

Заказы по телефонам: в Москве (095) 365-30-55,  
в Харькове (0572) 11-80-62, 32-98-50

Ордсна Трудового Красного Знамени  
Чеховский полиграфический комбинат Комитета РФ по печати  
142300, г. Чехов Московской области