Министерство науки и образования Российской Федерации
Московский Государственный Университет Геодезии и Картографии

Т. М. Королёва, Е. Г. Маркарян, Ю. М. Нейман

ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ВУЗЫ

ЧАСТЬ 1

МОСКВА

2008

УДК 517
Учебное пособие "Пособие по математике для поступающих в ВУЗы".
М.: Изд.МИИГАиК, 2008, 144 стр.

"Пособие по математике для поступающих в ВУЗы"предназначено выпускникам общеобразовательных учреждений (школ, гимназий, лицеев и т.р.) для подготовки к успешной сдаче ЕГЭ и обучению в ВУЗе. Оно может быть использовано на подготовительных курсах, факультативных занятиях в школах, а также для самостоятельных занятий учащихся.

Пособие составлено на основании программы по математике для средней школы. Его принципиальное отличие от большинства существующих пособий для подготовки к ЕГЭ состоит в том, что оно содержит теоретические основы арифметики, алгебры, геометрии и элементов математического анализа. По каждому из разделов приведены решения задач, часть из которых предлагались на ЕГЭ. Кроме того, пособие можно использовать как сборник задач. Все задачи для самостоятельного решения снабжены ответами.

Рецензенты:
профессор кафедры высшей математики МИИГАиК И.А. Лисеев
доцент кафедры высшей математики МГУПП А.О. Тимохина

Московский государственный университет
геодезии и картографии
2008

Оглавление

1 Действительные числа **5**

1.1 Элементы теории множеств и математической логики . . . 5
1.2 Множество натуральных чисел . . . 8
1.3 Множество рациональных чисел . . . 12
1.4 Действия с действительными числами . . . 15
1.5 Задачи для самостоятельного решения . . . 23
1.6 Ответы к задачам для самостоятельного решения . . . 28

2 Алгебраические выражения **29**

2.1 Основные понятия . . . 29
2.2 Многочлены . . . 30
2.2.1 Формулы сокращенного умножения . . . 30
2.2.2 Многочлены от одной переменной . . . 30
2.2.3 Квадратный трехчлен . . . 34
2.2.4 Разложение многочлена на множители . . . 36
2.3 Алгебраические дроби . . . 38
2.4 Иррациональные выражения . . . 41
2.5 Задачи для самостоятельного решения . . . 46
2.6 Ответы к задачам для самостоятельного решения . . . 50

3 Алгебраические уравнения, неравенства и системы **51**

3.1 Рациональные уравнения . . . 51
3.1.1 Уравнения с одной переменной . . . 51
3.1.2 Линейные уравнения . . . 51
3.1.3 Квадратные уравнения . . . 52
3.1.4 Рациональные уравнения высших степеней . . . 54
3.1.5 Задачи на составление уравнений . . . 57
3.2 Системы рациональных уравнений . . . 59
3.2.1 Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными . . . 59
3.2.2 Нелинейные системы уравнений . . . 60
3.2.3 Системы n уравнений с n неизвестными ($n > 2$) . . . 62
3.2.4 Задачи на составление систем уравнений . . . 63
3.3 Рациональные неравенства . . . 64
3.4 Уравнения и неравенства с переменной под знаком модуля . . . 68
3.5 Иррациональные уравнения и неравенства . . . 74
3.5.1 Иррациональные уравнения . . . 74
3.5.2 Иррациональные неравенства . . . 79
3.6 Задачи для самостоятельного решения . . . 82
3.7 Ответы к задачам для самостоятельного решения . . . 93

4 Числовые последовательности **95**
4.1 Основные понятия . . . 95
4.2 Арифметическая прогрессия . . . 96
4.3 Геометрическая прогрессия . . . 102
4.4 Задачи для самостоятельного решения . . . 110
4.5 Ответы к задачам для самостоятельного решения . . . 114

5 Функции и графики **115**
5.1 Понятие функции . . . 115
5.1.1 Определение функции и способы ее задания . . . 115
5.1.2 График функции . . . 117
5.2 Общие свойства функции . . . 118
5.2.1 Четные и нечетные функции . . . 118
5.2.2 Убывание и возрастание функций . . . 122
5.2.3 Периодические функции . . . 123
5.2.4 Наибольшее и наименьшее значения функции. Ограниченные функции 125
5.2.5 Исследование функции . . . 125
5.3 Обратная функция . . . 126
5.3.1 Взаимно однозначное отображение . . . 126
5.3.2 Обратная функция . . . 126
5.3.3 График обратной функции . . . 127
5.4 Основные элементарные функции . . . 127
5.4.1 Степенная функция $y = x^\alpha$ . . . 127
5.4.2 Показательная и логарифмическая функции . . . 129
5.4.3 Тригонометрические функции . . . 131
5.4.4 Обратные тригонометрические функции . . . 135
5.5 Суперпозиции функций и их графики . . . 139
5.5.1 Сложная функция . . . 139
5.5.2 Основные приемы построения графика сложной функции . . . 139
5.6 Задачи для самостоятельного решения . . . 142
5.7 Ответы к задачам для самостоятельного решения . . . 144

Глава 1

Действительные числа

1.1 Элементы теории множеств и математической логики

Понятие множества является одним из основных в математике. Это неопределяемое понятие, его можно лишь описать или пояснить на примерах. Можно сказать так : множество – это совокупность предметов (объектов) определенной природы. Например, множество точек на плоскости, множество треугольников с равной площадью и т.д.

Объекты множества называются его элементами. Множество принято обозначать заглавными латинскими буквами, а элементы – строчными буквами.

Если элемент x принадлежит множеству A, то этот факт записывается так : $x \in A$. Знак $\in$ называется знаком принадлежности. Если элемент x не содержится в множестве A, то этот факт записывается так : $x \notin A$.

В математике для числовых множеств приняты следующие обозначения :

N – множество натуральных чисел;

Z – множество целых чисел;

Q – множество рациональных чисел;

R – множество действительных чисел.

Множество, не имеющее элементов, называется пустым множеством и обозначается символом $\emptyset$.

В некоторых случаях множество можно задать перечислением элементов. Например, запись $A = \{0; 1; 2; 3\}$ означает, что множество A состоит только из элементов 0; 1; 2; 3.

Не все множества можно задать перечислением элементов. Это,например, множества, содержащие бесконечное число элементов. В подобных случаях задают множество с помощью характеристического свойства его элементов. Например, $A = \{x,\ 1 < x < 2\}$ означает, что элементами множества A являются все числа больше 1 и меньше 2.

Если два множества A и B состоят из одних и тех же элементов, то говорят, что A и B совпадают, или $A = B$.

Множество A называется подмножеством B, если каждый элемент множества A принадлежит множеству B. В этом случае пишут $A \subset B$. Знак $\subset$ называется знаком включения.

Например, пусть A – множество всех четных чисел, а Z – множество целых чисел. Тогда $A \subset Z$. Или A – множество всех ромбов, а B – множество всех параллелограммов. Тогда $A \subset B$.

Над множествами можно производить различные операции.

Пусть даны два множества A и B. Их *пересечением* называется множество C, состоящее из тех и только тех элементов, которые одновременно входят и в A, и в B.

Пересечение множеств A и B обозначают символом $A \cap B$ или

$$A \cap B = C = \{x, \quad x \in A \ \text{ и } \ x \in B\}. \tag{1.1.1}$$

На рис. 5.1.1 дана геометрическая иллюстрация пересечения множеств (множество $A \cap B$ заштриховано).

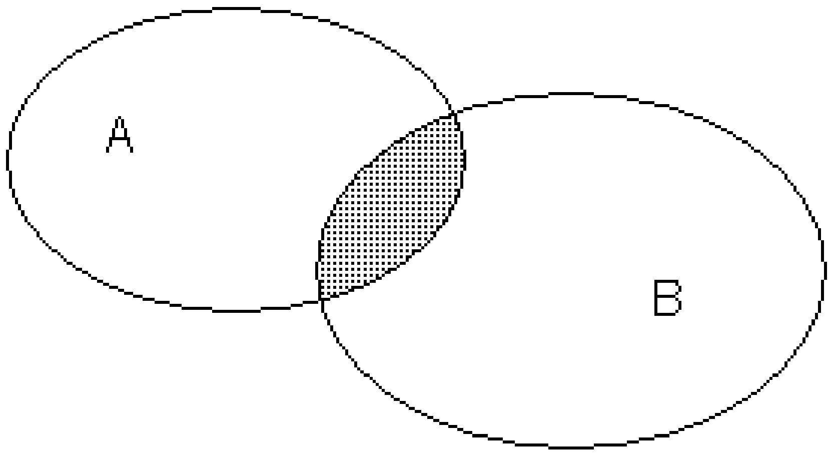


Рис. 1.1.1. Пересечение двух множеств A и B заштриховано.

Пример 1.1.1.

а). Пусть $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$, $\quad B = \{2; 4; 6; 8; 10\}$. Тогда $A \cap B = \emptyset$;

б). Пусть A – множество всех ромбов, B – множество всех прямоугольников. Тогда $A \cap B$ – множество всех прямоугольников с равными сторонами, т.е. множество всех квадратов;

в). Пусть A – множество всех натуральных чисел, делящихся на 3, а B – множество натуральных чисел, делящихся на 5. Тогда $A \cap B$ – множество натуральных чисел, делящихся на 15.

Заметим, что можно говорить о пересечении трех, четырех или любого конечного числа множеств.

Например, три пересекающихся множества изображены на рис. 1.1.2 ($A \cap B \cap C$ заштриховано).

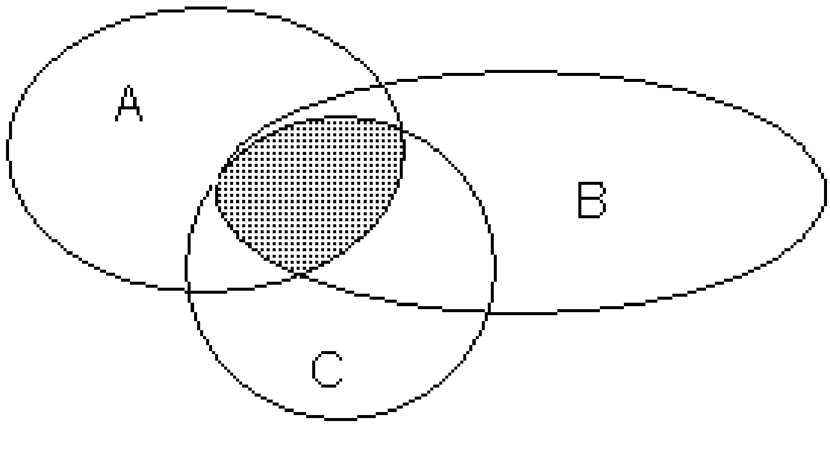


Рис. 1.1.2. Пересечение трех множеств A, B и C заштриховано.

Пусть даны два множества A и B. Их объединением называется множество C, состоящее из тех и только тех элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из данных множеств.

Объединение множеств A и B обозначают $A \cup B$. Таким образом, можно записать

$$A \cup B = \{x, \quad x \in A \quad \text{или} \quad x \in B\}. \tag{1.1.2}$$

На рис. 1.1.3 дана геометрическая иллюстрация объединения множеств (множество $A \cup B$ заштриховано).

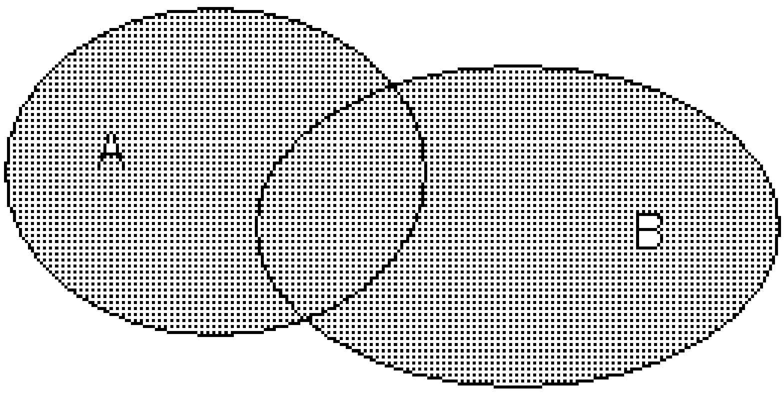


Рис. 1.1.3. Объединение двух множеств A и B заштриховано.

Заметим, что, если A и B имеют общие элементы, то в множество $A \cup B$ такие элементы входят только один раз.

Пример 1.1.2.

а). $A = \{1; 3; 5; 7\}$ и $B = \{2; 4; 6; 8\}$. Тогда $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

б). A – множество четных натуральных чисел, B – множество нечетных натуральных чисел. Тогда $A \cup B = N$ – множество натуральных чисел.

В математических предложениях (формулировках определений, аксиом, теорем и т.д.) часто повторяются отдельные слова и целые выражения. Поэтому при их записи полезно использовать символику математической логики.

Пусть даны два высказывания α и β. Если из истинности α следует истинность β, то пишут $\alpha \Longrightarrow \beta$. Знак $\Longrightarrow$ называется знаком следования. В этом случае говорят, что β есть необходимое условие для α, а α есть достаточное условие для β.

Пример 1.1.3.

а). Высказывание α – число x делится на 4; высказывание β – число x является четным. Тогда $\alpha \Longrightarrow \beta$, т.к., если x делится на 4, то оно обязательно четно;

б). Высказывание α – четырехугольник является ромбом; высказывание β – четырехугольник является параллелограммом. Тогда $\alpha \Longrightarrow \beta$.

Пусть даны два высказывания α и β. Если $\alpha \Longrightarrow \beta$ и $\beta \Longrightarrow \alpha$, то говорят, что высказывания α и β равносильны и пишут $\alpha \iff \beta$.

Во многих случаях вместо термина "равносильность"используют термин "необходимость и достаточность".

Пример 1.1.4.Для того, чтобы четырехугольник был параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы его диагонали в точке пересечения делились пополам. Здесь высказывание α – четырехугольник x является параллелограммом, высказывание β – диагонали четырехугольника x в точке пересечения делятся пополам; имеем $\alpha \Longrightarrow \beta$ и $\beta \Longrightarrow \alpha$, т.е. $\alpha \iff \beta$.

Знак $\iff$ называется знаком логической равносильности.

В записи математических высказываний вместо слова "существует"или "найдется"используют символ $\exists$, так называемый квантор существования, а вместо слов "любой", "каждый", "всякий" – символ $\forall$ – квантор всеобщности.

Например, запись $\forall\ x \in X$ означает : "для любого числа x из множества X"; а запись $\forall\ x \in X\ \exists\ y \in Y$ читается так : "для любого числа x из множества X найдется число y из множества Y".

1.2 Множество натуральных чисел

Понятие натурального числа возникло из потребности счета предметов. Натуральные числа можно сравнивать между собой, при этом ясно, какое из двух больше. Натуральные числа, расположенные в порядке возрастания, образуют ряд натуральных чисел или множество N :

$$N = \{1, 2; 3; 4; \ldots; n; \ldots; \}.$$

Это бесконечное множество, оно имеет наименьший элемент 1 и не имеет наибольшего элемента.

Если к множеству N добавить новое число – число нуль (0), то получим расширенный ряд натуральных чисел. Заметим, что нуль не является натуральным числом.

Для записи натурального числа используется десятичная система счисления. В этой системе вводится десять знаков, называемых цифрами : 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 0. В этой системе счисления число десять обозначается символом 10, а каждое натуральное число p представляется в виде :

$$p = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0, \tag{1.2.1}$$

где n – число из расширенного ряда чисел, a_n – одно из чисел $1,\ 2, \ldots,\ 9$, $a_0,\ a_1,\ \ldots,$ – одно из чисел $0,\ 1,\ 2, \ldots,\ 9$.

Для записи числа p, представленного в виде (1.2.1), используется принцип позиционного значения цифр. Например, цифра 3 может иметь значения : три единицы, если она занимает первое место справа, три десятка, если занимает второе место справа и т.д.

На основе этого принципа запись числа p будет такая :

$$p = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} \tag{1.2.2}$$

Результатом сложения или умножения двух натуральных чисел всегда является натуральное число. Относительно вычитания и деления этого сказать нельзя.

Если число m делится на число n нацело ($n < m,\ n,\ m \in N$), то m называется кратным числа n, а n – делителем числа m.

Если m кратно n, то существует число $k \in N$ такое, что $m = nk$. Например, множество чисел, кратных числу 5, записывается в виде $\{5n,\ n \in N\}$.

Если натуральное число m не делится нацело на натуральное число n, то рассматривают деление с остатком.

Вообще, для $\forall m,\ n \in N\ (m > n)$ имеет место формула деления

$$m = nk + r \tag{1.2.3}$$

Здесь $m,\ n,\ k,\ r$ – натуральные числа, $0 < r < n$. При делении нацело $r = 0$.

Вопрос о делении натурального числа m на натуральное число n нацело решается с помощью признаков делимости. Приведем некоторые из них.

Делимость суммы. Если каждое слагаемое делится на некоторое число, то и сумма делится на это число.

Делимость произведения. Если в произведении хотя бы один из сомножителей делится нацело на некоторое число, то и произведение делится на это число.

Признак делимости на 2. Для того,чтобы число $n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0}$ делилось на 2, необходимо и достаточно, чтобы его последняя цифра a_0 делилась на 2.

Заметим, что натуральные числа, делящиеся на 2, называются четными.

Запись четных чисел имеет вид

$$n = 2k,\ k \in N.$$

Все остальные натуральные числа называются нечетными и записываются в виде

$$m = 2k - 1,\ k \in N$$

.

Признак делимости на 5. Для того, чтобы число $n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0}$ делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы его последняя цифра a_0 была либо 0, либо 5.

Признак делимости на 3 (на 9). Для того, чтобы число $n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0}$ делилось на 3 (на 9), необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на 3 (на 9).

Признак делимости на 4 (на 25). Для того, чтобы число $n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0}$ делилось на 4 (на 25), необходимо и достаточно, чтобы число $\overline{a_1 a_0}$ делилось на 4 (на 25), либо $a_1 = a_0 = 0$.

Множество натуральных чисел состоит из единицы, простых и составных чисел. Натуральное число, большее единицы, называется простым, если оно не имеет делителей, кроме единицы и самого себя. Натуральное число, большее единицы, называется составным, если оно имеет хотя бы один делитель, отличный от единицы и самого себя.

Для любого натурального числа существует единственное его разложение на простые множители.

Если натуральные числа m_1 и m_2 делятся на одно и то же натуральное число n, то число n называется общим делителем. Наибольшее из общих делителей m_1 и m_2 называется наибольшим общим делителем m_1 и m_2 (НОД $(m_1,\ m_2)$).

Если НОД $(m_1,\ m_2) = 1$, то числа m_1 и m_2 называются взаимно простыми.

Наименьшим общим кратным натуральных чисел m_1 и m_2 называется наименьшее натуральное число, которое делится и на m_1, и на m_2 (НОК $(m_1,\ m_2)$).

Заметим, что НОК $(m_1,\ m_2)$ делится без остатка на НОД $(m_1,\ m_2)$.

Для отыскания НОД $(m_1,\ m_2)$ необходимо выполнить следующие операции.

1. Разложить каждое из данных чисел на простые множители.

2. Найти произведение тех простых множителей, которые входят в разложение каждого числа.

Отыскание НОК $(m_1,\ m_2)$ отличается только тем, что составляется произведение простых множителей, входящих в разложение хотя бы одного числа.

Пример 1.2.1. Частное от деления наименьшего общего кратного чисел 72 и 128 на их наибольший общий делитель равно

1) 168   2) 92   3) 84   4) 144

Решение. Напомним, что для отыскания наименьшего общего кратного (НОК) и наибольшего общего делителя (НОД) необходимо выполнить следующие операции.

1. Разложить каждое из данных чисел на простые множители : $72 = 2^3 \cdot 3^2$ и $128 = 2^7$.

2. Найти произведение простых множителей, входящих в разложение хотя бы одного из чисел. Это число и будет НОК. Заметим, что, если какой-то множитель входит в эти разложения в разных степенях, то в НОК он входит в наибольшей из степеней. Таким образом, $\text{НОК}(72, 128) = 2^7 \cdot 3^2$.

3. Найти произведение простых множителей, входящих в каждое из данных чисел. Это число и будет НОД. Заметим, что, если множитель входит в эти разложения в разных степенях, то в НОД он входит в наименьшей из степеней. Таким образом, $\text{НОД}(72, 128) = 2^3$. $\text{НОК} : \text{НОД} = \dfrac{2^7 \cdot 3^2}{2^3} = 2^4 \cdot 3^2 = 144$.

Ответ. 4.

Пример 1.2.2. Найдите НОД (3780, 7056).

Решение. Имеем

$$\begin{array}{r|l} 3780 & 2 \\ 1890 & 2 \\ 945 & 3 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 7056 & 2 \\ 3528 & 2 \\ 1764 & 2 \\ 882 & 2 \\ 441 & 3 \\ 147 & 3 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Следовательно, $3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$, $7056 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2$. Тогда $\text{НОД}\,(3780, 7056) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 252$.

Ответ. 252.

Пример 1.2.3. Сумма остатков от деления числа 126450747 на 2, 3, 4, 5, 9, 10, 25 равна

1) 21 2) 37 3) 35 4) 15

Решение. Так как в заданном примере число оканчивается цифрой 7, а наибольшее из чисел, меньших заданного и оканчивающихся четной цифрой, должно быть, очевидно, число 126450746, то остаток от деления заданного числа на 2 равен 1. Из тех же соображений, остаток от деления заданного числа на 5 равен 2. Из признаков делимости на 4 и на 25 следует, что ближайшими к заданному числу и меньшими его, делящимися соответственно на 4 и на 25 должны быть числа 126450744 и 126450725. Таким образом, остаток от деления на 4 равен 3, а остаток от деления на 25 равен 47–25=22. Так как сумма цифр заданного числа равна 36, то из признаков делимости на 3 и на 9 следует, что это число на 3 и на 9 делится без остатка. Число, меньшее заданного и делящееся без остатка на 10, должно заканчиваться числом 40, а потому остаток от деления на 10 равен 7. Таким образом, сумма остатков равна : $1 + 2 + 3 + 22 + 7 = 35$.

Ответ. 3.

Пример 1.2.4. Укажите наибольшие из чисел $\overline{34x5y}$, которые делятся на 36 (x, y – цифры.)

Решение. Число $\overline{34x5y}$ должно делиться нацело на 4 и на 9. Следовательно, по соответствующим признакам делимости должны выполняться равенства

$$3+4+x+5+y=9k, \qquad k\in N$$
$$\overline{5y}=4l, \qquad l\in N.$$

Число $\overline{5y}$ делится на 4, если $y\in\{2;6\}$.
Пусть $y=2$, тогда для x получим

$$14+x=9k, \quad \text{или} \quad x=4.$$

Пусть $y=6$, тогда $18+x=9k$ и $x\in\{0;9\}$.
Получено три числа: 34056, 34452 и 34956. Из них выбираем наибольшее.

Ответ. 34956.

Пример 1.2.5. Отцу 50 лет, а произведение возрастов трех его сыновей 4199. Найдите сумму возрастов его сыновей, если каждому из них меньше 20 лет

Решение. Среди делителей числа 4199 нет чисел 2, 3, 4, 5, 9. Следовательно, надо взять простые числа первых двух десятков и проверить их. Очевидно, что 7 и 11 не подходят, а 13, 17 и 19 являются делителями этого числа, и их произведение равно 4199, а сумма 49.

Ответ. 49.

Пример 1.2.6. Разность двух натуральных чисел равна 5, а сумма квадратов этих же чисел равна 157. Найдите сумму этих чисел.

Решение. Обозначим числа a и b. По условию

$$\begin{cases} a-b=5 \\ a^2+b^2=157 \end{cases}$$

Возведем в квадрат первое уравнение :
$a^2-2ab+b^2=25 \Longrightarrow 2ab=157-25=132;\ ab=66 \Longrightarrow a=11,\ b=6$ и $a+b=17$.

Ответ. 17.

Пример 1.2.7. Найдите все числа, которые при делении на 3 дают остаток 1, а при делении на 5 дают остаток 3. В ответе укажите такое наибольшее двузначное число.

Решение. Рассмотрим некоторое натуральное число n, которое при делении на 3 дает остаток 1, а при делении на 5 дает остаток 3. Это число можно представить как $n=3l+1$ и $n=5m+3$, где $l,\ m\in N$. Но это одно и то же число. Следовательно, должно выполняться равенство $3l+1=5m+3$ или $5m=3l-2$. Здесь l надо подобрать так, чтобы число $3l-2$ было бы кратно 5. Очевидно, что, если $l=5k+4$, то $3(5k+4)-2=15k+10$ кратно 5. Тогда общая запись всех чисел, удовлетворяющих условию задачи, имеет вид

$$n=3(5k+4)+1=15k+13,\ k\in N$$

и наибольшее двузначное число получается при $k = 5$, т.е. $n = 88$.

Ответ. 88.

1.3 Множество рациональных чисел

Поскольку операции вычитания и деления не всегда выполнимы в множестве натуральных чисел, возникает необходимость в его расширении, и вводятся так называемые целые числа и обыкновенные дроби вида $\frac{p}{q}$, где p и q – целые числа, $q \neq 0$.

Над дробями определены арифметические операции по следующим правилам .

Сложение дробей:

$$\frac{p}{q} + \frac{m}{n} = \frac{pn + qm}{qn}$$

Произведение дробей:

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} = \frac{p \cdot m}{q \cdot n}$$

Деление дробей:

$$\frac{p}{q} : \frac{m}{n} = \frac{pn}{qm}$$

Дробь $\frac{p}{q}$ называется несократимой, если числа p и q не имеют других общих делителей, кроме ± 1.

Если знаменатель дроби $q = 10^k$, $k \in N$, то дробь называется десятичной.

Каждую конечную десятичную дробь записывают в виде

$$a_0, a_1 a_2 \ldots a_k,$$

где $k \in N$, a_0- целое число, a_1, $a_2, \ldots, a_k$ – одно из чисел $0,\ 1,\ 2, \ldots, 9$.

Среди десятичных дробей особо отметим дробь $0,01$ (сотая часть целого), которая называется процентом.

Любая конечная десятичная дробь легко переводится в обыкновенную.

Так, например, $0,52 = \frac{52}{100} = \frac{13}{25}$.

Обращение обыкновенных дробей вида $\frac{p}{q}$ $(q \neq 1)$ в конечные десятичные дроби возможно только в случае, когда натуральное число q не имеет простых делителей, отличных от 2 и 5.

В противном случае несократимая дробь $\frac{p}{q}$, где q содержит простые множители, отличные от 2 и 5, может быть записана в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

Рассмотрим на конкретных примерах обращение бесконечной периодической дроби в обыкновенную.

Пример 1.3.1. Представьте в виде обыкновенных дробей следующие числа :
1) 0,(47)   2) 2,3(54)   3) –1,41(3)   4) 0,2(345)

Решение. 1). Обозначим $0,(47)=x$. Умножим равенство на 100. Тогда $47,(47)=100x$. Вычтем из последнего равенства предыдущее и получим

$$99x=47 \text{ и } x=\frac{47}{99}.$$

2). Обозначим $2,3(54)=x$ и умножим равенство на 10 (подведем период (54) к запятой). Тогда $23,(54)=10x$. Умножим последнее равенство на 100 (выведем один период за знак запятой). Тогда $2354,(54)=1000x$. Проведем вычитание : $2354,(54)-23,(54)=990x$ или $2331=990x$ и $x=\dfrac{2331}{990}=2\dfrac{351}{990}=2\dfrac{39}{110}$.

3). $-1,41(3)=x \implies -141,(3)=100x \implies -1413,(3)=1000x \implies -1413,(3)+141,(3)=900x \implies x=-\dfrac{1272}{900}=-1\dfrac{372}{900}=-1\dfrac{31}{75}$

4). $0,2(345)=x \implies 2,(345)=10x \implies 2345,(345)=10000x \implies 2345,(345)-2,(345)=9990x$; $x=\dfrac{2343}{9990}=\dfrac{781}{3330}$.

Ответ. 1) $\dfrac{47}{99}$ 2) $2\dfrac{39}{110}$ 3) $-1\dfrac{31}{75}$ 4) $\dfrac{781}{3330}$

Множество чисел, состоящее из всех чисел вида $\dfrac{p}{q}$, где $q-$ натуральное число, p – целое число, называется множеством рациональных чисел.

Пример 1.3.2. Вычислите (без использования калькулятора)
$(17,31^2-12,69^2)-(29,81^2-0,19^2)=A$

Решение. Воспользуемся формулой $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.
$17,31^2-12,69^2=(17,31-12,69)(17,31+12,69)=4,62\cdot 30$.
$29,81^2-0,19^2=(29,81-0,19)(29,81+0,19)=29,62\cdot 30$.
Тогда, $A=4,62\cdot 30-29,62\cdot 30=-25\cdot 30=-750$.

Ответ. -750.

Пример 1.3.3. Вычислите $\dfrac{1}{2\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 8}+\dfrac{1}{8\cdot 11}+\dfrac{1}{11\cdot 14}+\dfrac{1}{14\cdot 17}=S$

Решение. Представим слагаемое $\dfrac{1}{2\cdot 5}$ в виде $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}\right)$.
Аналогично, представляя каждое слагаемое суммы S, получим
$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{14}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{14}-\frac{1}{17}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{17}\right)=\frac{15}{3\cdot 34}=\frac{5}{34}.$$

Ответ. $\dfrac{5}{34}$.

Пример 1.3.4. Числитель и знаменатель дроби – положительные числа. Как изменится дробь, если числитель уменьшить на 34%, а знаменатель увеличить на 65% ?

1) уменьшится на 31% 2) уменьшится на 40% 3) уменьшится на 51% 4) уменьшится на 60%

Решение. Рассмотрим дробь $\dfrac{p}{q}$, $p > 0$, $q > 0$. Если числитель уменьшить на 34%, то его можно записать в виде

$$p - 0,34p = 0,66p.$$

Знаменатель после увеличения на 65% станет равным $q + 0,65q = 1,65q$.

Дробь после изменения запишется в виде $\dfrac{0,66}{1,65}\dfrac{p}{q} = 0,4\dfrac{p}{q}$, или составит 40% от первоначальной дроби $\dfrac{p}{q}$.

Следовательно, дробь уменьшилась на 60%.

Ответ. 4.

Пример 1.3.5. При делении числа 190 на части обратно пропорционально числам $3; \dfrac{1}{2}; 5$ получаются числа

1) $20; 155; 15$ 2) $20; 160; 10$ 3) $25; 150; 15$ 4) $25; 160; 5$

Решение. Чтобы разделить число на части обратно пропорционально данным числам, надо разделить это число на части прямо пропорционально числам, обратным данным. Такими числами являются $\dfrac{1}{3}; 2; \dfrac{1}{5}$. Найдем сумму этих чисел : $\dfrac{1}{3} + 2 + \dfrac{1}{5} = \dfrac{38}{15}$. Тогда искомые части будут соответственно равны : 1) $190 : \dfrac{38}{15} \cdot \dfrac{1}{3} = 25$; 2) $190 : \dfrac{38}{15} \cdot 2 = 150$; 3) $190 : \dfrac{38}{15} \cdot \dfrac{1}{5} = 15$.

Ответ. 3.

Пример 1.3.6. Объемы ежегодной добычи угля первой, второй и третьей шахтами относятся как 10 : 11 : 12. Первая шахта планирует уменьшить добычу угля на 10%, а вторая – на 4%. На сколько процентов должна увеличить годовую добычу угля третья шахта, чтобы суммарный объем добываемого за год угля не изменился ?

Решение. Обозначим через V суммарный объем ежегодной добычи угля. Тогда объем ежегодной добычи угля первой шахтой равен $\dfrac{10}{33}V$, второй $\dfrac{11}{33}V$ и третьей $\dfrac{12}{33}V$. В результате планируемого уменьшения добычи объем добычи первой шахтой станет $0,9 \cdot \dfrac{10}{33}V$, а второй $0,96\dfrac{11}{33}V$. Чтобы суммарный объем добычи не изменился, третья шахта должна иметь следующий годовой объем добычи :

$$V - 0,9\frac{10}{33}V - 0,96\frac{11}{33}V = \frac{4,48}{11}V.$$

Если считать первоначальный объем добычи третьей шахты за 100%, то процентный объем планируемой добычи x вычисляется так :

$$x = \frac{4,48 \cdot 100 \cdot 11}{11 \cdot 4} = 112\%.$$

Следовательно, третья шахта должна увеличить объем добычи на 12%.

Ответ. 12.

Пример 1.3.7. Ежемесячный доход семьи складывается из зарплаты отца и зарплаты матери. Зарплату отца увеличили на 40%, а зарплату матери на 15%, в результате чего семейный доход увеличился на 20%. Сколько процентов от семейного дохода составляла до повышения зарплата матери ?

Решение. Обозначим ежемесячный доход семьи как D, а зарплату матери как x. Тогда зарплата отца $D - x$. После увеличения зарплата матери будет $1,15x$, а отца $1,4(D - x)$, что составляет новый доход $1,2D$.

Имеет место равенство $1,4(D - x) + 1,15x = 1,2D$ или $0,2D = 0,25x$ и $x = 0,8D$.

Следовательно, зарплата матери до повышения составляла 80% семейного дохода.

Ответ. 80.

Пример 1.3.8. Цистерна заполняется керосином за 2 часа с помощью трех насосов, работающих вместе. Производительности насосов относятся как $1 : 2 : 7$. Сколько процентов объема цистерны будет заполнено за 1 час 12 минут совместной работы первого и третьего насосов ?

Решение. Обозначим объем цистерны как V, а общую производительность трех насосов как v. Тогда по условию задачи $V = 2v$. Производительности каждого из насосов соответственно равны $0,1v$; $0,2v$ и $0,7v$.

За 1 час 12 мин. первый и третий насосы, работая одновременно, заполнят объем, равный $0,8v \cdot 1,2 = 0,96v$.

Так как $v = \dfrac{V}{2}$, то этот объем равен $0,48V$. Следовательно, будет заполнено 48% от объема цистерны.

Ответ. 48.

Пример 1.3.9. К сплаву, содержащему 30% меди, добавили 80 граммов меди и получили сплав, содержащий 70% меди. Найдите количество граммов меди в первоначальном сплаве

Решение. Пусть V – первоначальный вес сплава в граммах и x – вес меди в нем. Тогда $x = 0,3V$. После добавки в сплав меди вес сплава стал $V + 80$, а меди в нем $x + 80$.

По условию $x + 80$ составляет 70% от $V + 80$, т.е. $x + 80 = 0,7(V + 80)$, где $V = \dfrac{10}{3}x$.

Тогда для x получили уравнение $\dfrac{4}{3}x = 24 \implies x = 18$ граммов.

Ответ. 18.

1.4 Действия с действительными числами

Если число α нельзя представить в виде несократимой дроби $\dfrac{p}{q}$, то его называют иррациональным.

Иррациональное число записывается в виде бесконечной непериодической десятичной дроби.

Факт существования иррациональных чисел продемонстрируем на примере.

Пример 1.4.1. Докажите, что не существует рационального числа, квадрат которого равен 2

<u>Решение.</u> Предположим, что существует несократимая дробь $\frac{p}{q}$ такая, что $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ или $p^2 = 2q^2$. Отсюда следует, что p^2 кратно 2, а значит, и p кратно 2. В противном случае, если p не делится на 2, т.е. $p = 2k - 1$, то $p^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1$ также не делится на 2. Следовательно, $p = 2k \implies p^2 = 4k^2 \implies 4k^2 = 2q^2 \implies q^2 = 2k^2$.

Поскольку q^2 кратно 2, то и q кратно 2, т.е. $q = 2m$.

Итак, числа p и q имеют общий множитель – число 2, а значит, дробь $\frac{p}{q}$ сократимая. Это противоречие означает, что сделанное предположение неверно, тем самым утверждение доказано.

Множество рациональных и иррациональных чисел называется множеством действительных чисел.

В множестве действительных чисел аксиоматически вводятся операции сложения и умножения : любым двум действительным числам a и b ставится в соответствие число $a + b$ и произведение $a \cdot b$.

Кроме того, в этом множестве вводятся отношения "больше", "меньше" и равенства :

$a > b$ тогда и только тогда, когда $a - b$ – положительное число;

$a < b$ тогда и только тогда, когда $a - b$ – отрицательное число;

$a = b$ тогда и только тогда, когда $a - b = 0$.

Перечислим *основные свойства числовых неравенств.*

1. Если $a > b$ и $b > c \implies a > c$.
2. Если $a > b$ и $c > 0 \implies ac > bc$.
3. Если $a > b$ и $c < 0 \implies ac < bc$.
4. Если $a > b$ и c – любое число $\implies a + c > b + c$.
5. Если a, b, c, d – положительные числа такие, что $a > b$ и $c > d \implies ac > bd$.

Следствие. Если a и b – положительные числа и $a > b \implies a^2 > b^2$.

6. Если $a > b$ и $c > d \implies a + c > b + d$.
7. Если $a > 0$, $b > 0$ и $a > b \implies \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Геометрическая интерпретация действительных чисел.

Возьмем прямую l, см. рис. 1.4.1, и зафиксируем на ней точку О – начало отсчета. Точка О разбивает прямую на две части – лучи. Луч, направленный вправо, назовем положительным лучом, а луч, направленный влево – отрицательным. На прямой отметим отрезок, принятый за единицу длины, т.е. вводим масштаб.

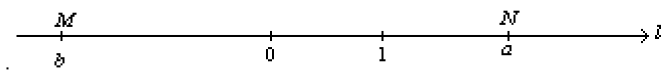


Рис. 1.4.1. Геометрическая интерпретация действительных чисел.

Прямая с выбранным началом отсчета, положительным направлением и масштабом называется числовой прямой.

Каждой точке числовой прямой можно поставить в соответствие действительное число по следующему правилу :

– точке O поставим в соответствие нуль;

– каждой точке N на положительном луче поставим в соответствие положительное число a, где a – длина отрезка ON ;

– каждой точке M на отрицательном луче поставим в соответствие отрицательное число b, где $b = -|OM|$ (длина отрезка OM, взятая со знаком минус).

Таким образом, между множеством всех точек числовой прямой и множеством действительных чисел устанавливается взаимно–однозначное соответствие, т.е. :

1) каждой точке на числовой прямой поставлено в соответствие одно и только одно действительное число;

2) разным точкам поставлены в соответствие разные числа;

3) нет ни одного действительного числа, которое не соответствовало бы какой–либо точке числовой прямой.

Пример 1.4.2. На числовой прямой отметьте точки, соответствующие числам :
1) $1\frac{5}{7}$ 2) $\sqrt{2}$ 3) $\sqrt{3}$

<u>Решение.</u> 1) Для того, чтобы отметить дробное число $\frac{12}{7}$, надо построить точку, соответствующую $\frac{1}{7}$.

Для этого надо отрезок длины 1 разделить на 7 равных частей. Эту задачу решаем так. Проводим произвольный луч из т.O и на этом луче отложим 7 равных отрезков. Получим отрезок OA, и из т.A проведем прямую до пересечения с 1.

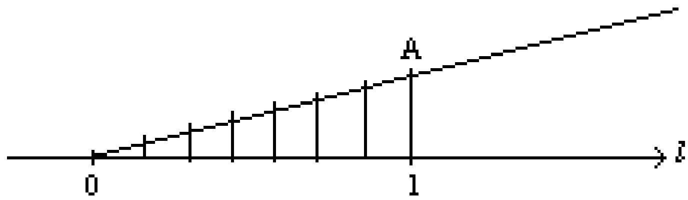


Рис. 1.4.2. Деление единичного отрезка на 7 равных частей.

Прямые, проведенные параллельно прямой A1 через концы отложенных отрезков, делят отрезок единичной длины на 7 равных частей (рис.1.4.2). Это дает возможность построить точку, изображающую число $1\frac{5}{7}$ (рис.1.4.3).

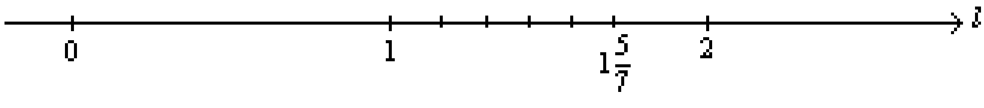


Рис. 1.4.3. Точка числовой оси, соответствующая числу $1\frac{5}{7}$.

2) Число $\sqrt{2}$ можно получить так. Построим прямоугольный треугольник с единичными катетами. Тогда длина гипотенузы равна $\sqrt{2}$; этот отрезок откладываем от O на числовой прямой (рис.1.4.4).

3) Для построения точки, удаленной от т.O на расстояние $\sqrt{3}$ (вправо) надо построить прямоугольный треугольник с катетами длиной 1 и $\sqrt{2}$. Тогда его гипотенуза имеет длину $\sqrt{3}$, что позволяет указать искомую точку на числовой оси.

Для действительных чисел определено понятие модуля (или абсолютной величины).

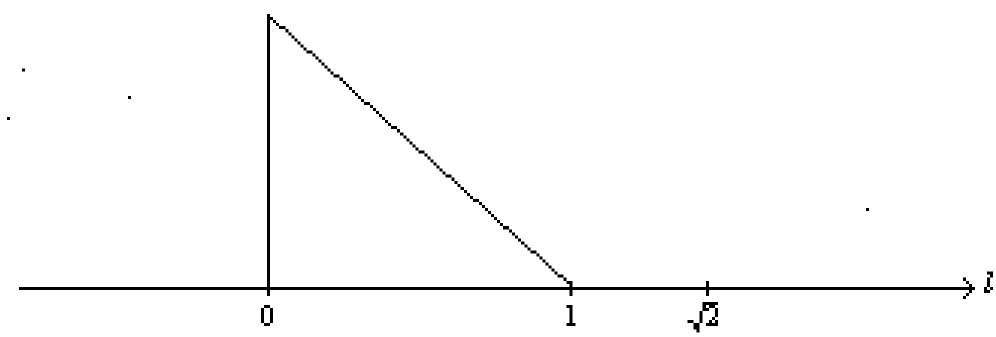


Рис. 1.4.4. Точка числовой оси, соответствующая числу $\sqrt{2}$.

Модулем действительного числа a называется :
– само это число, если a – положительное число;
– нуль, если a – нуль;
– $-a$, если a – отрицательное число.
Модуль числа a обозначается $|a|$.
Определение модуля (или абсолютной величины) можно записать в виде

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0 \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases} \tag{1.4.1}$$

Геометрически модуль числа a означает расстояние на числовой прямой от начала отсчета О до точки, соответствующей числу a.

Отметим некоторые свойства модуля.

1. Для любого числа a справедливо равенство $|a| = |-a|$.
2. Для любых чисел a и b справедливы равенства

$$|ab| = |a| \cdot |b|; \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0); \quad |a|^2 = a^2.$$

3. Для любого числа a справедливо неравенство $|a| \geqslant 0$.
4. Для любого числа a справедливо неравенство $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$.
5. Для любых чисел a и b справедливо неравенство

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|.$$

Рассмотрим следующие числовые множества.

Если $a < b$, то

1) отрезком $[a;b]$ называется множество всех действительных чисел α для каждого из которых справедливо : $a \leqslant \alpha \leqslant b$;

2) интервалом $(a;b)$ называется множество всех действительных чисел α, для каждого из которых справедливо : $a < \alpha < b$;

3) полуинтервалом $(a;b]$ называется множество всех действительных чисел α для каждого из которых справедливо : $a < \alpha \leqslant b$.

Аналогично можно ввести полуинтервал $[a;b)$.

4) лучом $[a;\infty)$ называется множество всех действительных чисел α, для каждого из которых справедливо : $\alpha \geqslant a$.

Аналогично можно ввести лучи $(a;\infty)$; $(-\infty;b)$; $(-\infty;b]$.

В некоторых случаях говорят о "промежутках", понимая под этим либо луч, либо отрезок, либо интервал, либо полуинтервал.

Множество R всех действительных чисел обозначают так : $(-\infty; \infty)$.

Для любого действительного числа a вводится понятие степени с натуральным показателем n, а именно

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n \text{ сомножителей}}, \quad n \geq 2 \quad \text{и} \quad a^1 = a.$$

Пусть a – любое отличное от нуля число, тогда по определению $a^0 = 1$.

Нулевая степень нуля не определена.

Пусть a – любое отличное от нуля число, m – любое целое число. Тогда число a^m определяется по правилу :

$$a^m = \begin{cases} a\,, \quad \text{если} \;\; m = 1; \\ \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots a}_{m \text{ раз}}, \quad \text{если} \;\; m \in N, \quad m \geqslant 2; \\ 1\,, \quad \text{если} \;\; m = 0; \\ \dfrac{1}{a^n}\,, \quad \text{если} \; m = -n, \quad n \in N; \end{cases}$$

при этом a^m называется степенью с целым показателем.

Прежде, чем определить понятие степени с рациональным показателем, введем понятие арифметического корня.

Арифметическим корнем степени n $(n \in N, \; n \geqslant 2)$ неотрицательного числа a называется неотрицательное число b такое, что $b^n = a$. Число b обозначается как $b = \sqrt[n]{a}$.

Свойства арифметических корней $(a \geqslant 0, \; b \geqslant 0, \; n, m, k$ – натуральные числа.)

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	5. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$
2. $(a)^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$	6. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$
3. $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$	7. $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$
4. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \; (b \neq 0)$	8. $\sqrt[2n]{a^{2n}} = \lvert a \rvert$

Пусть $a < 0$, а n – натуральное число, большее 1. Если n – четное число, то равенство $b^n = a$ не выполняется ни при каком действительном значении b. Это значит, что в области действительных чисел нельзя определить корень четной степени из отрицательного числа. Если же n – нечетное число, то существует единственное действительное число b такое, что $b^n = a$. Это число обозначают $\sqrt[n]{a}$ и называют корнем нечетной степени из отрицательного числа.

Используя определение возведения в целую степень и определение арифметического корня, дадим определение степени с рациональным показателем.

Пусть a – положительное число и $r = \dfrac{p}{q}$ – рациональное число, причем q – натуральное число.

Положительное число

$$b = \sqrt[q]{a^p}$$

называется *степенью числа* a *с показателем* r и обозначается как

$$b = a^r, \quad \text{или} \quad a^{p/q} = \sqrt[q]{a^r}, \quad \text{здесь} \;\; q \in N, \quad q \geqslant 2.$$

Рассмотрим основные свойства степени с рациональным показателем.

Пусть a и b – любые положительные числа, r_1 и r_2 – любые рациональные числа. Тогда справедливы следующие свойства :

$$\begin{array}{l}
1.\ (ab)^{r_1} = a^{r_1}\cdot b^{r_1}\\
2.\ \left(\dfrac{a}{b}\right)^{r_1} = \dfrac{a^{r_1}}{b^{r_1}}\\
3.\ a^{r_1}\cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2}\\
4.\ a^{r_1} : a^{r_2} = a^{r_1-r_2}\\
5.\ (a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}\\
6.\ a^0 = 1\\
7.\ \text{Если } a>1 \text{ и } r_1>0 \implies a^{r_1}>1\\
8.\ \text{Если } 0<a<1 \text{ и } r_1>0 \implies 0<a^{r_1}<1\\
9.\ \text{Если } a>1 \text{ и } r_1>r_2 \implies a^{r_1}>a^{r_2}\\
10.\ \text{Если } 0<a<1 \text{ и } r_1>r_2 \implies a^{r_1}<a^{r_2}
\end{array} \tag{1.4.2}$$

Понятие степени положительного числа обобщается для любого действительного показателя α.

Определение степени положительного числа a с действительными показателями α.

1. Если $\alpha>0$ и

   1) $\alpha=m,\ m\in N \implies a^\alpha = \begin{cases} a \text{ при } m=1\\ \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\ldots a}_{m \text{ раз}} \text{ при } m\geqslant 2\end{cases}$

   2) $\alpha=\dfrac{p}{q}$, где p и q – натуральные числа $\implies a^\alpha = \sqrt[q]{a^p}$

   3) α – иррациональное число, тогда

a) если $a>1$, то a^α – число большее, чем a^{r_i} и меньшее, чем a^{r_k},
где r_i – любое рациональное приближение числа α с недостатком,
r_k – любое рациональное приближение числа α с избытком;
b) если $0<a<1$, то a^α – число большее, чем a^{r_k} и меньшее, чем a^{r_i};
c) если $a=1$, то $a^\alpha=1$.

2. Если $\alpha=0$, то $a^\alpha=1$

3. Если $\alpha<0$, то $a^\alpha=\dfrac{1}{a^{|\alpha|}}$.

Число a^α называется *степенью*, число a – *основание степени*, число α – *показатель степени*.

Степень положительного числа с действительным показателем обладает теми же свойствами, что и степень с рациональным показателем.

Пример 1.4.3. Вычислите $\sqrt[3]{81}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{16}{6}}$

<u>Решение.</u> Воспользуемся свойством корней :

$$\sqrt[3]{81}\cdot\sqrt[3]{\frac{16}{6}} = \sqrt[3]{\frac{81\cdot 16}{6}} = \sqrt[3]{\frac{3^4\cdot 2^4}{3\cdot 2}} = \sqrt[3]{3^3\cdot 2^3} = 6$$

Ответ. 6.

Пример 1.4.4. Вычислите $6,25^{1,5} - 2,25^{1,5}$

1) 4 2) 8 3) 8,25 4) 12,25

Решение. $6,25^{1,5} - 2,25^{1,5} = (\sqrt{6,25})^3 - (\sqrt{2,25})^3 = (2,5)^3 - (1,5)^3 = (2,5^2 + 2,5 \cdot 1,5 + 1,5^2) = 12,25.$

Ответ. 4.

Пример 1.4.5. Упростите выражение $\sqrt[3]{96 \cdot \sqrt{3} \cdot 3^{1,5}}$

1) $6 \cdot \sqrt[3]{4}$ 2) $6\sqrt{2}$ 3) 6 4) $3\sqrt{2}$

Решение. Представим подкоренное выражение в виде $3 \cdot 2^5 \cdot 3^{1/2} \cdot 3^{3/2} = 3^3 \cdot 2^5$. Тогда $\sqrt[3]{3^3 \cdot 2^5} = 3 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{4} = 6\sqrt[3]{4}$.

Ответ. 1.

Пример 1.4.6. Результат вычисления выражения $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{6}} \cdot \sqrt[6]{9-6\sqrt{2}} - \sqrt[6]{18}}{\sqrt[6]{2}-1}$ равен

1) 3 2) $-\sqrt[3]{3}$ 3) $\sqrt[6]{3}$ 4) $\sqrt[3]{6}$

Решение. Преобразуем $9 - 6\sqrt{2}$ следующим образом :
$9 - 6\sqrt{2} = 3 - 2 \cdot 3\sqrt{2} + 6 = (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} + (\sqrt{6})^2 = (\sqrt{6} - \sqrt{3})^2$.
Тогда

$$\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{6}} \cdot \sqrt[6]{(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2} = \sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{6}-\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt[3]{3},$$

и заданное выражение записывается в виде

$$\frac{\sqrt[3]{3} - \sqrt[6]{18}}{\sqrt[6]{2}-1} = \frac{\sqrt[3]{3}(1-\sqrt[6]{2})}{\sqrt[6]{2}-1} = -\sqrt[3]{3}.$$

Ответ. 2.

Пример 1.4.7. Если 90% числа равны $(\sqrt{3}-\sqrt{2}) : (\sqrt{3}+\sqrt{2}) + 2\sqrt{6}$, то это число равно

1) $5\frac{2}{9}$ 2) $5\frac{4}{9}$ 3) $5\frac{5}{9}$ 4) $5\frac{7}{9}$

Решение. Преобразуем выражение :

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2}) : (\sqrt{3}+\sqrt{2}) + 2\sqrt{6} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} + 2\sqrt{6} = \frac{3 - 2\sqrt{6} + 2}{3-2} + 2\sqrt{6} = 5.$$

Итак, 90% числа равны 5. Обозначим искомое число через x и составим пропорцию : $90 : 5 = 100 : x$. $\quad x = \dfrac{5 \cdot 100}{90} = 5\dfrac{5}{9}$.

Ответ. 3.

Пример 1.4.8. Вычислите $(3,4 \cdot \sqrt[3]{25\sqrt{5}} + 1,6 \cdot \sqrt{5\sqrt[3]{25}})^{-6/11}$

Решение. Так как $\sqrt[3]{25\sqrt{5}} = 5^{2/3} \cdot 5^{1/6} = 5^{5/6}$ и $\sqrt{5\sqrt[3]{25}} = 5^{1/2} \cdot 5^{2/6} = 5^{5/6}$, то выражение в скобке можно представить в виде

$$3,4 \cdot 5^{5/6} + 1,6 \cdot 5^{5/6} = 5^{5/6} \cdot 5 = 5^{11/6}.$$

Тогда $\left(5^{11/6}\right)^{-6/11} = 5^{-1} = \dfrac{1}{5}$.

Ответ. $\dfrac{1}{5}$.

Пример 1.4.9. Упростите выражение $\sqrt{17 - 4\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}}$

Решение. $9 + 4\sqrt{5} = (\sqrt{5} + 2)^2 \implies \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = 2 + \sqrt{5}$.
Тогда выражение под знаком внешнего корня запишется в виде :

$$17 - 4(2 + \sqrt{5}) = 9 - 4\sqrt{5} = (2 - \sqrt{5})^2.$$

Следовательно, $\sqrt{17 - 4\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}} = \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = |2 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2$.

Ответ. $\sqrt{5} - 2$.

Пример 1.4.10. Упростите выражение $\sqrt[4]{28 + 4\sqrt{48}}$

Решение. Подкоренное выражение можно привести к виду :

$$28 + 4\sqrt{48} = 4(7 + 4\sqrt{3}) = 4(2 + \sqrt{3})^2.$$

Тогда $\sqrt[4]{28 + 4\sqrt{48}} = \sqrt[4]{2^2(2 + \sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} = \sqrt{3} + 1$.

Ответ. $\sqrt{3} + 1$.

Пример 1.4.11. Приведите к рациональному виду знаменатель дроби $\dfrac{\sqrt{\sqrt{15} + \sqrt{6}}}{\sqrt{\sqrt{15} - \sqrt{6}}}$

Решение. Напомним, что в алгебре существует понятие сопряженных выражений, а именно для любых $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$ выражения $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ и $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ называются сопряженными, и их произведение не содержит корней :

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = 0$$

Перед нами стоит задача : избавиться от корней в знаменателе дроби. Для этого умножим числитель и знаменатель на $\sqrt{\sqrt{15} + \sqrt{6}}$ (здесь $\sqrt{15} + \sqrt{6}$ и $\sqrt{15} - \sqrt{6}$ – сопряженные выражения).

Тогда $\dfrac{\sqrt{\sqrt{15}+\sqrt{6}}}{\sqrt{\sqrt{15}-\sqrt{6}}}\cdot\dfrac{\sqrt{\sqrt{15}+\sqrt{6}}}{\sqrt{\sqrt{15}+\sqrt{6}}}=\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{\sqrt{15-6}}=\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{3}$.

Ответ. $\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{3}$.

Пример 1.4.12. Приведите к рациональному виду знаменатель дроби $\dfrac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}$

Решение. Для того, чтобы избавиться от корня в знаменателе дроби, используем тот факт, что выражение $10+6\sqrt{3}=(\sqrt{3}+1)^3$.

Тогда дробь приводится к виду $\dfrac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{(\sqrt{3}+1)^2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}+1$.

Ответ. $\sqrt{3}+1$.

1.5 Задачи для самостоятельного решения

№ 1.5.1. Частное от деления наименьшего общего кратного чисел 12600 и 8820 на их наибольший общий делитель равно

1) 70 2) 210 3) 30 4) 105

№ 1.5.2. Частное от деления наименьшего общего кратного чисел 252, 468 и 702 на их наибольший общий делитель равно

1) 91 2) 252 3) 126 4) 546

№ 1.5.3. При делении числа 150 на части пропорционально числам $8; \dfrac{1}{3}; \dfrac{5}{3}$ получаются числа

1) $120; 5; 25$ 2) $100; 10; 40$ 3) $110; 10; 30$ 4) $125; 10; 15$

№ 1.5.4. При делении числа 434 на части обратно пропорционально числам $2; 3; 5$ получаются числа

1) $200; 150; 84$ 2) $210; 140; 84$ 3) $210; 130; 94$ 4) $210; 150; 74$

№ 1.5.5. Сумма остатков от деления числа 270423441 на числа 2,3,4,5,9,10 равна

1) 3 2) 4 3) 6 4) 48

№ 1.5.6. Прямоугольник, стороны которого равны 84 см и 140 см, разбит на равные квадраты. Найдите количество квадратов наибольшей площади, на которые можно разбить данный прямоугольник

№ 1.5.7. Прямоугольник, стороны которого равны 189 см и 147 см, разбит на равные квадраты. Найдите количество квадратов наибольшей площади, на которые можно разбить данный прямоугольник

№ 1.5.8. Известно, что число a при делении на 3 дает остаток 1, а при делении на 4 – остаток 3. Найдите остаток от деления числа a на 12

№ 1.5.9. Найдите наибольшее число вида $\overline{71x1y}$, которое делится на 45

№ 1.5.10. Два автопогрузчика, работая вместе, загружают один вагон за 4 часа. При этом производительность первого и второго автопогрузчика относятся как 2 : 3. Оба автопогрузчика начали загружать вагон вместе, но через некоторое время первый автопогрузчик вышел из строя, и второй заканчивал работу один. Сколько часов проработал первый автопогрузчик, если вся погрузка длилась 6 часов ?

№ 1.5.11. Набор состоит из двух предметов. Цену одного из предметов увеличили на 30%, а цену второго, который стоил в два раза дороже первого, увеличили на 60%. Укажите, на сколько процентов в итоге возросла стоимость набора

1) 90%   2) 40%   3) 45%   4) 50%

№ 1.5.12. За один год население города увеличилась на 10%, а на следующий год уменьшилось на 20%. На сколько процентов уменьшилось население города за эти два года ?

1) 12   2) 10   3) 15   4) 5

№ 1.5.13. При покупке ребенку новых лыж с ботинками родителям пришлось заплатить на 25% больше, чем два года назад, причем лыжи подорожали на 15%, а ботинки – на 40%. На сколько процентов два года назад лыжи были дороже ботинок ?

№ 1.5.14. В бидон налили 7 литров молока жирности 3% и 3 литра молока жирности 6%. Какова жирность полученного молока (в процентах) ?

№ 1.5.15. Двум сотрудникам издательства поручили отредактировать рукопись объемом 540 страниц. Один сотрудник взял 380 страниц рукописи, а второй 160 страниц. Первый выполнил работу за 19 дней, а второй – за 10 дней. На сколько процентов нужно было увеличить часть работы второго сотрудника (уменьшив часть работы первого), чтобы они, работая с прежней производительностью, выполнили свою работу за одинаковое число дней ?

№ 1.5.16. Три насоса, работая вместе, заполняют бак керосином за 1 час 20 минут. Производительности насосов относятся как 11:8:6. Сколько процентов объема бака будет заполнено за 2 часа совместной работы второго и третьего насосов ?

№ 1.5.17. Два каменщика, работая вместе, могут выполнить задание за 16 часов. Производительность труда первого и второго каменщиков относятся как 1:2. Каменщики договорились работать поочередно. Сколько времени должен проработать второй каменщик, чтобы это задание они выполнили за 30 часов ?

№ 1.5.18. Объемы ежегодной добычи нефти первой, второй и третьей скважинами относятся как 1:2:3. Планируется уменьшить годовую добычу нефти из первой скважины на 9%, а из второй – на 3%. На сколько процентов нужно увеличить годовую добычу нефти из третьей скважины, чтобы суммарный объем добываемой за год нефти не изменился ?

№ 1.5.19. Имеется кусок сплава меди с оловом массой 20 кг, содержащий 40% меди. Сколько чистого олова (в кг) надо прибавить к этому куску, чтобы получившийся новый сплав содержал 25% меди ?

№ 1.5.20. Антикварный магазин, купив два старинных предмета за 225000 рублей, продал их, получив 40% прибыли. Первый предмет принес 25% прибыли, второй – 50%. За сколько рублей магазин купил более дорогой предмет ?

№ 1.5.21. Две бригады должны были закончить уборку урожая за 12 дней. После 8 дней совместной работы первая бригада получила другое задание, поэтому вторая бригада закончила оставшуюся работу за 7 дней. На сколько дней вторая бригада убрала бы урожай быстрее первой, если бы каждая из них работала отдельно ?

№ 1.5.22. Если 40% числа равны $\dfrac{0,536^2 - 0,464^2}{3,6^2 - 7,2 \cdot 2,4 + 2,4^2}$, то число равно

1) $0,15$ 2) $0,125$ 3) $12,5$ 4) 150

№ 1.5.23. Если 5% некоторого числа составляют 23% от 15,5, то это число равно

1) $71,3$ 2) $33,7$ 3) $70,3$ 4) $72,4$

№ 1.5.24. Дана пропорция $\dfrac{\dfrac{70}{6} + \dfrac{31}{15}}{\dfrac{63}{60} + 4,1} = \dfrac{\dfrac{186}{25} - 0,48}{x}$. Тогда значение x равно

1) $3,61$ 2) $2,61$ 3) $2,01$ 4) $3,01$

№ 1.5.25. Дана пропорция $\dfrac{17,7 - 2,6 : \dfrac{4}{3}}{x} = \dfrac{5 - \dfrac{4}{5} \cdot 0,625}{\left(\dfrac{23}{5} + \dfrac{7}{3}\right) : \dfrac{26}{15}}$. Тогда значение x равно

1) 14 2) 12 3) 10 4) 16

№ 1.5.26. Среднее арифметическое чисел $\dfrac{14^{48}}{98^{24}}$ и $\dfrac{14^{47}}{98^{23}}$ равно

1) $\dfrac{1}{49}$ 2) $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{24}$ 3) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{26}$ 4) 2^{26}

№ 1.5.27. Вычислите $\left[\left(\dfrac{25}{16}\right)^{3/2} - \left(\dfrac{9}{16}\right)^{3/2}\right]^{-1}$

1) 1 2) 2 3) $\dfrac{32}{49}$ 4) $\dfrac{2}{7}$

№ 1.5.28. Вычислите $\left(15\dfrac{5}{8}\right)^{1/3} - \left(3\dfrac{3}{8}\right)^{1/3}$

1) 1 2) 2 3) 3 4) $\left(12\dfrac{1}{4}\right)^{1/3}$

№ 1.5.29. Вычислите $\left(\dfrac{27}{8}\right)^{2/3}+\left(\dfrac{125}{8}\right)^{2/3}$

1) $8,5$ 2) 17 3) 19 4) $19^{2/3}$

№ 1.5.30. Вычислите $\dfrac{135-36^{1/2}\cdot 4^{5/2}}{49^{1/2}-26}$

1) 1 2) 2 3) 3 4) -2

№ 1.5.31. Упростите выражение $\sqrt[5]{27\cdot 128}\cdot\sqrt[5]{\dfrac{9}{4}}$

1) 6 2) $1\dfrac{1}{2}$ 3) 18 4) 12

№ 1.5.32. Найдите значение выражения $\sqrt[6]{16\cdot 3^6}\cdot\sqrt[4]{2^6\cdot 3^4}$

1) $36\sqrt[6]{2}$ 2) 24 3) $2\sqrt[3]{2}$ 4) 18

№ 1.5.33. Упростите выражение $\sqrt[3]{48\sqrt{3}\cdot 3^{-0,5}}$

1) 54 2) 12 3) $2\sqrt[3]{6}$ 4) $2\sqrt[3]{12}$

№ 1.5.34. Вычислите $\sqrt{109\dfrac{23}{48}-108\dfrac{35}{36}+\dfrac{1}{18}}$

1) $0,5$ 2) $0,75$ 3) $\sqrt{0,8}$ 4) $\dfrac{1}{4\sqrt{6}}$

№ 1.5.35. Результат вычисления выражения $\dfrac{\sqrt[4]{7\sqrt[3]{54}+15\sqrt[3]{128}}}{\sqrt[3]{4\sqrt[4]{32}}+\sqrt[3]{9\sqrt[4]{162}}}$ равен

1) $\dfrac{5}{3}$ 2) $3\sqrt{2}$ 3) $\dfrac{3}{5}$ 4) $-\dfrac{3}{5}$

№ 1.5.36. Результат вычисления выражения $\dfrac{(2\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{24}+3+\sqrt{16}+\sqrt{6})}{\sqrt{12}+2\sqrt{2}}$ равен

1) 2 2) $1,5$ 3) $\dfrac{2}{5}$ 4) $2,5$

№ 1.5.37. Результат вычисления выражения $\sqrt[4]{2^5\sqrt[3]{4}}+\sqrt[4]{64\sqrt[3]{1/2}}-3\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}$ равен

1) $2\sqrt[12]{2}$ 2) $\sqrt[4]{4}$ 3) $\sqrt[12]{32}$ 4) $2\sqrt[12]{32}$

№ 1.5.38. Если 40% числа равны $\sqrt{(7-5\sqrt{2})^2}+\sqrt{(7+5\sqrt{2})^2}$, то это число равно

1) $22\sqrt{2}$ 2) $23\sqrt{2}$ 3) $24\sqrt{2}$ 4) $25\sqrt{2}$

№ 1.5.39. Если 90% числа равны $(\sqrt{3}-\sqrt{2}):(\sqrt{3}+\sqrt{2})+2\sqrt{6}$, то это число равно

1) $5\dfrac{2}{9}$ 2) $5\dfrac{4}{9}$ 3) $5\dfrac{5}{9}$ 4) $5\dfrac{7}{9}$

№ 1.5.40. Вычислите $(3-2\sqrt{2})\sqrt{17+12\sqrt{2}}+(\sqrt{3}-2)\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

№ 1.5.41. Вычислите $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

№ 1.5.42. Вычислите $(2,7\sqrt[3]{25\sqrt{125}}+2,3\sqrt{5\sqrt[3]{625}})^{-6/13}$

№ 1.5.43. Вычислите $\sqrt[3]{4\sqrt{7}-8}\cdot\sqrt[3]{8+4\sqrt{7}}\cdot\sqrt[3]{36}$

№ 1.5.44. Вычислите $(1,8\sqrt[3]{25\sqrt{5}}+3,2\sqrt{5\sqrt[3]{25}})^{-6/11}$

№ 1.5.45. Вычислите $(1,3\sqrt[3]{9\sqrt{3}}+1,7\sqrt{3\sqrt[3]{9}})^{12/11}$

№ 1.5.46. Укажите все номера рациональных чисел данного множества:
1) $\sqrt[3]{9\sqrt{3}}:3^{1/6}$; 2) $(\sqrt{3})^0$; 3) $125^{4/3}$;
4) $\sqrt{51+14\sqrt{2}}\cdot(7-\sqrt{2})$; 5) $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$

1) 1, 3, 4 2) 2, 3, 4 3) 2, 3, 5 4) 1, 3, 5

№ 1.5.47. Найдите сумму всех целых чисел данного множества:
1) $\sqrt[5]{32\sqrt{2}}$; 2) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}+\sqrt{3}$; 3) $33\cdot 0,(18)$;
4) $\sqrt{8+2\sqrt{15}}\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{3})$; 5) $(\sqrt[5]{5\sqrt{5}})^9$

№ 1.5.48. Укажите все номера целых чисел данного множества:
1) $(\sqrt{3}+1)^2$; 2) $\sqrt{\sqrt[3]{9}}:3^{-2/3}$; 3) $\left(\dfrac{1}{64}\right)^{-1/6}$;
4) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}-\sqrt{3}$; 5) $33\cdot 0,(18)$

1) 1, 3, 4 2) 2, 3, 5 3) 2, 3, 4 4) 1, 3, 5

№ 1.5.49. Из заданного множества укажите число, большее 1
1) $(3/4)^{0,4}$ 2) $(1,4)^{-0,2}$ 3) $(0,8)^{-1/3}$ 4) $(0,4)^{3/2}$

№ 1.5.50. Из заданного множества укажите число, меньшее 1
1) $(3,3)^{0,2}$ 2) $(1,4)^{0,1}$ 3) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{1,63}$ 4) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-0,2}$

№ 1.5.51. Вычислите $(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})^4$

№ 1.5.52. Вычислите $\sqrt{|12\sqrt{3}-21|}-\sqrt{21+12\sqrt{3}}$

№ 1.5.53. Вычислите $\sqrt{18+8\sqrt{2}}-\sqrt{|8\sqrt{2}-18|}-0,5\sqrt{32}$

№ 1.5.54. Вычислите $(\sqrt{4+\sqrt{15}}-\sqrt{4-\sqrt{15}})^8$

№ 1.5.55. Упростите $2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$

№ 1.5.56. Приведите к рациональному виду знаменатель дроби $\dfrac{\sqrt{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}}$

№ 1.5.57. Приведите к рациональному виду знаменатель дроби $\dfrac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}}$

№ 1.5.58. Вычислите $\dfrac{1}{\sqrt{7-\sqrt{24}}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{7+\sqrt{24}}+1}$

№ 1.5.59. Вычислите $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}-\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right)$

№ 1.5.60. Упростите $\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}$

№ 1.5.61. Упростите $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$

№ 1.5.62. Упростите $\sqrt{6+2\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$

№ 1.5.63. Упростите $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$

№ 1.5.64. Упростите $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

№ 1.5.65. Упростите $\sqrt[6]{25+4\sqrt{6}}-\sqrt[3]{1+2\sqrt{6}}$

1.6 Ответы к задачам для самостоятельного решения

1.5.1. 1; **1.5.2.** 4; **1.5.3.** 1; **1.5.4.** 2; **1.5.5.** 2; **1.5.6.** 15; **1.5.7.** 63; **1.5.8.** 7; **1.5.9.** 71910; **1.5.10.** 1; **1.5.11.** 4; **1.5.12.** 1; **1.5.13.** 50; **1.5.14.** 3,9; **1.5.15.** 50; **1.5.16.** 84; **1.5.17.** 18; **1.5.18.** 5; **1.5.19.** 12; **1.5.20.** 135000; **1.5.21.** 7; **1.5.22.** 2; **1.5.23.** 1; **1.5.24.** 2; **1.5.25.** 1; **1.5.26.** 4; **1.5.27.** 3; **1.5.28.** 1; **1.5.29.** 1; **1.5.30.** 3; **1.5.31.** 1; **1.5.32.** 1; **1.5.33.** 3; **1.5.34.** 2; **1.5.35.** 3; **1.5.36.** 4; **1.5.37.** 3; **1.5.38.** 4; **1.5.39.** 3; **1.5.40.** 0; **1.5.41.** 4; **1.5.42.** 0,2; **1.5.43.** 12; **1.5.44.** 0,2; **1.5.45.** 9; **1.5.46.** 2; **1.5.47.** 10; **1.5.48.** 2; **1.5.49.** 3; **1.5.50.** 3; **1.5.51.** 100; **1.5.52.** –6; **1.5.53.** 0; **1.5.54.** 1296; **1.5.55.** $\sqrt{6}+\sqrt{2}$; **1.5.56.** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; **1.5.57.** $2\sqrt{2}-2$; **1.5.58.** 0; **1.5.59.** $-2\sqrt{2}$; **1.5.60.** $\sqrt{3}-1$; **1.5.61.** 1; **1.5.62.** $\sqrt{3}+1$; **1.5.63.** 2; **1.5.64.** 4; **1.5.65.** 0.

Глава 2

Алгебраические выражения

2.1 Основные понятия

Алгебраическим выражением называется выражение, в котором над числами и буквами производятся только действия сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в рациональную степень.

Алгебраическое выражение называется *рациональным*, если в нем относительно входящих в него букв могут производиться лишь операции сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в натуральную степень, например, a^3+b^3, $\dfrac{\sqrt{2}a+b}{a-b}$, $3xy+\dfrac{y}{x^2}$.

Рациональное выражение называется *целым*, если знаменатель не содержит буквенных символов, например, $x^3y+\dfrac{y^2}{2}$.

Рациональное выражение называется *дробным*, если знаменатель содержит буквенные символы, например, $\dfrac{2x+y}{x-y}$.

Алгебраическое выражение называется *иррациональным*, если над входящими в него буквами производится операция извлечения арифметического корня, например, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $\sqrt[3]{x^2y}$, $\sqrt{xy+3}$.

Каждому алгебраическому выражению можно поставить в соответствие его буквенный набор – множество букв, входящих в это выражение. Каждому буквенному набору можно поставить в соответствие числовой набор.

Числовой набор называется *допустимым для данного алгебраического выражения*, если имеет смысл числовое выражение, которое получается при подстановке вместо каждой буквы соответствующего ей числа из данного числового набора.

Совокупность всех допустимых числовых наборов, соответствующих буквенному набору алгебраического выражения, называется *областью допустимых значений* (ОДЗ) данного алгебраического выражения (АВ).

Например, для АВ вида $\dfrac{1}{\sqrt{a-x}}+\sqrt{abc}$ ОДЗ состоит из всех числовых наборов, соответствующих буквенному набору $(a,\ b,\ c,\ x)$, для которых $a-x>0$ и $abc\geqslant 0$. Так, набор $(2;-1;-3;1)$ входит в ОДЗ, а набор $(3;-1;-3;4)$ не входит в ОДЗ.

Два алгебраических выражения называются *тождественно равными на области M*, где область M – общая часть ОДЗ этих алгебраических выражений, если для любого числового набора из области M соответствующие числовые значения рассматриваемых алгебраических выражений равны.

Например, $\sqrt{(a-b)^2}=|a-b|$ тождественно равны, а $\sqrt{(a-b)^2}=a-b$ тождественно равны при $a\geqslant b$.

Замена одного алгебраического выражения другим, тождественно равным ему на области M, называется *тождественным преобразованием.*

Например, замена алгебраического выражения $(a-b)(a+b)$ выражением a^2-b^2 является тождественным преобразованием на области M, где $M=\{(a;b)|a\in R,\ b\in R\}$.

2.2 Многочлены

2.2.1 Формулы сокращенного умножения

Рациональное выражение, содержащее относительно входящих в него букв только два действия – умножение и возведение в натуральную степень, называется *одночленом*, например, $-3a^2,\ \sqrt{3}ab,\ \dfrac{1}{3}xy^2$.

Одночлен приведен к стандартному виду, если числовой множитель (коэффициент) записан на первом месте, а входящие в него буквы (переменные) записаны в виде множителей в алфавитном порядке, причем одинаковые буквы представлены степенью, например, $2a3ab\sqrt{3}cb^2=6\sqrt{3}a^2b^3c$.

Одночлены называются *подобными*, если их стандартные виды совпадают или отличаются только коэффициентами. Сложение и вычитание подобных одночленов называется *приведением подобных.*

Многочленом называется сумма одночленов. Если все члены многочлена записать в стандартном виде и привести подобные члены, то получится многочлен в стандартном виде.

Если над многочленами проводятся операции сложения, вычитания, умножения и возведения в натуральную степень, то результатами этих действий являются многочлены.

По правилам сложения и умножения многочленов получены тождественные равенства, которые называются *формулами сокращенного умножения.*

$$\begin{aligned}
&(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2,\\
&(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,\\
&a^2-b^2=(a-b)(a+b),\\
&a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2),\\
&(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc,\\
&(a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc.
\end{aligned}\tag{2.2.1}$$

2.2.2 Многочлены от одной переменной

Выражение вида

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,\tag{2.2.2}$$

где n – натуральное число, $a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots,a_n$ – коэффициенты – действительные числа, причем $a_0\neq 0$, x – переменная величина, называется *многочленом n–ой степени от одной переменной.*

Одночлен a_0x^n называется *старшим членом многочлена*, одночлен a_n называется *свободным членом многочлена.* Если $a_0=1$, то многочлен называется *приведенным.*

Запись многочлена в форме 2.2.2 называется *стандартным видом многочлена $n-$ой степени.*

Два многочлена одной и той же степени тождественно равны тогда и только тогда, когда коэффициенты при одинаковых степенях x совпадают.

Пример 2.2.1. Найдите числа α, β и γ, если многочлен
$x^3+6x^2+\alpha x+\beta$ является кубом суммы $x+\gamma$

Решение. Составим равенство $x^3+6x^2+\alpha x+\beta=(x+\gamma)^3$
или $x^3+6x^2+\alpha x+\beta=x^3+3x^2\gamma+3x\gamma^2+\gamma^3$.
Из условия тождественного равенства двух многочленов имеем
$3\gamma=6$, $3\gamma^2=\alpha$, $\gamma^3=\beta$.
Отсюда $\gamma=2$, $\alpha=12$, $\beta=8$.

Ответ. 12; 8; 2.

Как было отмечено, многочлены можно складывать, вычитать, умножать и возводить в натуральную степень. Результатами этих операций являются многочлены. В некоторых случаях выполнимо деление нацело. А именно, если существует такой многочлен $T(x)$, что $P(x)=S(x)\cdot T(x)$, где $S(x)$ – также многочлен, то говорят, что многочлен $P(x)$ нацело делится на многочлен $T(x)$.

Здесь $P(x)$ – делимое, $T(x)$ – делитель, $S(x)$ – частное.

Если многочлен $P(x)$ не делится на многочлен $T(x)$, то рассматривают деление с остатком, возможность которого вытекает из следующего утверждения.

Для любых двух многочленов $P(x)$ и $T(x)$, где $T(x)\neq 0$ и степень $P(x)$ не меньше степени $T(x)$, существует одна и только одна пара многочленов $S(x)$ и $R(x)$ таких, что выполняется тождественное равенство

$$P(x)=T(x)S(x)+R(x), \tag{2.2.3}$$

причем либо степень многочлена $R(x)$ меньше степени многочлена $T(x)$, либо $R(x)$ есть нуль.

Если делитель – двучлен $x-\alpha$, то формула деления (2.2.3) принимает вид

$$P(x)=(x-\alpha)S(x)+R, \tag{2.2.4}$$

где R – число.

Заметим, что, если $R=0$, то $P(x)=S(x)\cdot(x-\alpha)$, т.е. $P(x)$ нацело делится на $(x-\alpha)$.

Имеет место *теорема Безу.*

Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $(x-\alpha)$ равен значению многочлена $P(x)$ при $x=\alpha$, т.е. $R=P(\alpha)$.

Число α называется корнем многочлена $P(x)$, если $P(\alpha)=0$. Тогда имеет место утверждение.

Число α является корнем многочлена тогда и только тогда, когда многочлен $P(x)$ делится нацело на двучлен $x-\alpha$.

Пример 2.2.2. Равенство $x^4+2x^3-16x^2-2x+15=(x+1)(x^3+ax^2-17x+b)$ является тождеством, если

1) $a=1$, $b=15$ 2) $a=16$, $b=15$ 3) $a=-8$, $b=7,5$
4) $a=8$, $b=-7,5$

Решение. Очевидно, что $x=-1$ является корнем правой части равенства. Нетрудно с помощью непосредственной подстановки значения $x=-1$ в левую часть равенства убедиться в том, что это число является корнем многочлена $x^4+2x^3-16x^2-2x+15$. Следовательно, указанный многочлен делится на $x+1$ без остатка :

$$
\begin{array}{r|l}
x^4+2x^3-16x^2-2x+15 & x+1 \\
\cline{2-2}
x^4+x^3 \qquad\qquad\qquad & x^3+x^2-17x+15 \\
\cline{1-1}
x^3-16x^2-2x+15 & \\
x^3+x^2 \qquad\quad & \\
\cline{1-1}
-17x^2-2x+15 & \\
-17x^2-17x \quad & \\
\cline{1-1}
15x+15 & \\
15x+15 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

$(x^4+2x^3-16x^2-2x+15)=(x+1)(x^3+x^2-17x+15)$. Таким образом, чтобы указанное равенство было тождеством, необходимо, чтобы тождественно равными были многочлены $x^3+x^2-17x+15$ и $x^3+ax^2-17x+b$. Два многочлена одинаковой степени тождественно равны, если коэффициенты при одинаковых степенях переменной равны между собой. Следовательно, $a=1$; $b=15$.

Ответ. 1.

Пример 2.2.3. Найдите остаток от деления многочлена $-2x^3+10x^2-11$ на двучлен $x-2$

Решение. Эту задачу можно решить двумя способами : делением многочлена на двучлен или используя теорему Безу.

Остаток R равен значению многочлена при $x=2$.

$R=-2\cdot 8+10\cdot 4-11=13$.

Ответ. 13.

Пример 2.2.4. Если многочлен $2x^3+9x^2-9x+2$ можно представить в виде $(2x-1)(ax^2+bx+c)$, то сумма $a+b+c$ равна

1) -3 2) 2 3) 3 4) 4

Решение. Если многочлен $2x^3+9x^2-9x+2=P_3(x)$ можно представить в виде $2x^3+9x^2-9x+2=(2x-1)(ax^2+bx+c)$, то этот многочлен нацело делится на $(2x-1)$.

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3+9x^2-9x+2 & 2x-1 \\
\cline{2-2}
2x^3-x^2 \qquad\quad & x^2+5x-2 \\
\cline{1-1}
10x^2-9x \quad & \\
10x^2-5x \quad & \\
\cline{1-1}
-4x+2 & \\
-4x+2 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Следовательно, должно выполняться тождественное равенство $x^2+5x-2=ax^2+bx+c$. Тогда $a=1$, $b=5$, $c=-2$ и $a+b+c=4$.

Ответ. 4.

Как отмечалось ранее, если α – корень многочлена $P(x)$, то $P(x) = (x-\alpha)S(x)$.

Предположим, что α – корень многочлена $S(x)$, тогда

$$S(x) = (x-\alpha)T(x) \text{ и } P(x) = (x-\alpha)^2T(x).$$

Если $P(x)$ можно представить в виде $P(x) = (x-\alpha)^m\varphi(x)$, где $\varphi(\alpha) \neq 0$, то говорят, что α – корень кратности данного многочлена.

Если $m = 1$, то α – простой корень многочлена.

Предположим, что приведенный многочлен n–ой степени $P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$ имеет n действительных корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Тогда каждый из двучленов $x - x_1$, $x - x_2$, $\ldots, x - x_n$ является его делителем и многочлен можно представить в виде

$$P_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n). \qquad (2.2.5)$$

Перемножив скобки, стоящие в правой части равенства (2.2.5), а затем приведя подобные члены и сравнивая полученные коэффициенты с коэффициентами приведенного многочлена $P_n(x)$, мы получим равенства, выражающие коэффициенты многочлена через его корни.

$$\begin{aligned}
&a_1 = -(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\\
&a_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n\\
&a_3 = -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n)\\
&\ldots\ \ldots\\
&a_n = (-1)^n x_1x_2\ldots x_n.
\end{aligned} \qquad (2.2.6)$$

Равенства (2.2.6) называются формулами Виета.

Пример 2.2.5. Найдите приведенный многочлен третьей степени, имеющий простой корень 2 и корень 1 кратности 2

Решение. Эту задачу можно решить двумя способами.

1) $P_3(x) = (x-2)(x-1)^2 = (x-2)(x^2-2x+1) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

2) Воспользуемся формулами Виета.

Для многочлена $P_3(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$, если $x_1 = 2$, $x_2 = x_3 = 1$.

Тогда $a_1 = -(x_1 + x_2 + x_3) = -4$, $a_2 = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 5$,

$a_3 = -x_1x_2x_3 = -2$ и $P_3(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

Ответ. $P_3(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

Если все коэффициенты приведенного многочлена $P_n(x)$ являются целыми числами, и многочлен имеет целый корень, то, как следует из последнего соотношения формул Виета (2.2.6), этот корень является делителем свободного члена a_n.

Если подбором найден целый корень x_1, то многочлен $P_n(x)$ делят на $x - x_1$. Частное от деления – многочлен $n-1$ степени – также исследуется на наличие целого корня и т.д.

Пример 2.2.6. Найдите корни многочлена $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

Решение. Целые корни многочлена ищем среди делителей числа –6, т. е. среди чисел ± 1, ± 2, ± 3; ± 6. Как видно, $x = 1$ является корнем многочлена.

Проведем деление

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 \ -6x^2 + 11x - 6 & x - 1 \\
\underline{x^3 \ \ - x^2} & \overline{x^2 - 5x + 6} \\
\quad - 5x^2 + 11x & \\
\quad \underline{- 5x^2 \ \ + 5x} & \\
\qquad\qquad 6x - 6 &
\end{array}
$$

Многочлен $x^2 - 5x + 6$ имеет корни 2 и 3. Следовательно, исходный многочлен имеет три целых корня : 1; 2; 3.

Ответ. 1; 2; 3.

2.2.3 Квадратный трехчлен

Квадратным трехчленом называется выражение $ax^2 + bx + c$, причем $a \neq 0$.

Функция, заданная формулой $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, называется функцией квадратного трехчлена, или квадратичной функцией.

Графиком этой функции является парабола с вершиной в точке с координатами $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$; $y_0 = f(x_0) = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ и осью симметрии $x = -\dfrac{b}{2a}$. Ветви параболы направлены вверх при $a > 0$ или вниз при $a < 0$.

Если $D = b^2 - 4ac$ – дискриминант квадратного трехчлена – больше нуля, то квадратный трехчлен имеет два различных корня $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

В этом случае квадратный трехчлен раскладывается на множители вида

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

а график параболы пересекает ось OX в двух точках с абсциссами $x = x_1$ и $x = x_2$

Если $D = 0$, то квадратный трехчлен имеет два равных корня $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$.

В этом случае квадратный трехчлен можно представить в виде полного квадрата

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2,$$

а график параболы касается оси OX (имеет с осью OX одну общую точку).

Если $D < 0$, то квадратный трехчлен не имеет действительных корней, а график квадратичной функции не пересекает ось OX и расположен выше $(a > 0)$ или ниже $(a < 0)$ этой оси .

Пример 2.2.7. Квадратный трехчлен $\dfrac{1}{3}x^2 + 5x - 1$ после выделения полного квадрата примет вид

1) $y = \dfrac{1}{3}\left(x + \dfrac{15}{2}\right)^2 - \dfrac{237}{12}$ 2) $y = \dfrac{1}{3}\left(x + \dfrac{15}{2}\right)^2 + \dfrac{213}{12}$

3) $y = \dfrac{1}{3}(x + 15)^2 - 4$ 4) $y = \dfrac{1}{3}\left(x + \dfrac{15}{2}\right)^2 - \dfrac{237}{4}$

Решение. Для получения верного ответа требуется лишь аккуратно провести все действия по выделению полного квадрата :

$$y = \frac{1}{3}x^2 + 5x - 1 = \frac{1}{3}(x^2 + 15x - 3) = \frac{1}{3}(x^2 + 2 \cdot \frac{15}{2}x + \frac{225}{4} - \frac{225}{4} - 3) =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(x + \frac{15}{2}\right)^2 - \frac{237}{4}\right] = \frac{1}{3}\left(x + \frac{15}{2}\right)^2 - \frac{237}{12}.$$

Ответ. 1.

Пример 2.2.8. Определить значение a, при котором квадратный трехчлен $x^2 - ax + a - 1$ является полным квадратом

Решение. Из преобразования $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ следует, что квадратный трехчлен является полным квадратом, если $D = b^2 - 4ac = 0;\ a > 0.$

Применительно к нашему примеру это означает, что

$a^2 - 4(a-1) = 0 \implies a^2 - 4a + 4 = 0 \implies (a-2)^2 = 0;\ a = 2.$

Ответ. 2.

Пример 2.2.9. График квадратичной функции $y = x^2 - 2(a-1)x + (2a+1)$ пересечет положительную полуось OX в двух точках, если

1) $a \in (1;\infty)$ 2) $a \in (-\infty;1)$ 3) $a \in (-\frac{1}{2};4)$ 4) $a \in (4;\infty)$

Решение. Для того, чтобы график квадратного трехчлена пересекал положительную полуось OX в двух точках, необходимо, чтобы $D > 0$, а также сумма и произведение корней были положительными. В нашем случае это означает решение системы неравенств

$$\begin{cases} (-2(a-1))^2 - 4(2a+1) > 0 \\ 2(a-1) > 0 \\ 2a+1 > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a(a-4) > 0 \\ a-1 > 0 \\ 2a+1 > 0 \end{cases}$$

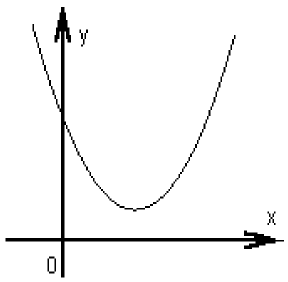
Решением системы является пересечение следующих множеств (см.рис.3.4) :

$(-\infty;0) \cup (4;\infty),\quad (1;\infty),\quad (-\frac{1}{2};\infty).$

Очевидно, что этим пересечением является множество $(4;\infty)$.

Ответ. 4.

Пример 2.2.10. Если на рисунке изображен график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ и $D = b^2 - 4ac$, то справедливы соотношения



1) $a > 0, b > 0, D < 0$
2) $a > 0, b < 0, D < 0$
3) $a > 0, D < 0, c < 0$
4) $a > 0, b > 0, c > 0$

Решение. По графику квадратичной функции определим знаки a, b, c и D.

График не имеет общих точек с осью OX, следовательно, $D < 0$.

Ветви параболы направлены вверх, следовательно, $a > 0$.

График пересекает ось OY в положительной части оси, так как при $x = 0$ $y > 0$. Следовательно, $c > 0$.

Абсцисса вершины параболы $x_o = -\dfrac{b}{2a} > 0$, следовательно, $b < 0$.

Итак, $a > 0, \ b < 0, \ c > 0, \ D < 0$, и выбираем ответ 2.

Ответ. 2.

2.2.4 Разложение многочлена на множители

Тождественное преобразование многочлена к виду произведения многочленов называется *разложением многочлена на множители.*

В частности, все формулы сокращенного умножения (2.2.1) и есть формулы разложения многочлена на множители.

Для разложения многочлена на множители используются формулы сокращенного умножения, метод группировки слагаемых, вынесение общих множителей, выделение полного квадрата.

Пример 2.2.11. Разложите многочлен $x^2y^2(x+1) - 2(x+1) + xy(x+1)$ на множители

Решение. Вынесем общий множитель :

$$(x+1)(x^2y^2 - 2 + xy) = (x+1)(x^2y^2 - 1 + xy - 1) =$$
$$= (x+1)[(xy-1)(xy+1) + (xy-1)] = (x+1)(xy-1)(xy+2).$$

Ответ. $(x+1)(xy-1)(xy+2)$.

Пример 2.2.12. Разложите многочлен $xy(x+y) + yz(y-z) - xz(x+z)$ на множители

Решение. Применим метод группировки и вынесения общих множителей :

$$xy(x+y) + (y^2z - zx^2) - (yz^2 + xz^2) = xy(x+y) + z(x+y)(y-x) - z^2(x+y) =$$
$$= (x+y)(xy + zy - zx - z^2) = (x+y)[y(x+z) - z(x+z)] = (x+y)(x+z)(y-z)$$

.

Ответ. $(x+y)(x+z)(y-z)$.

Пример 2.2.13. Разложите многочлен $a^4 + b^4$ на множители

Решение. Выделим полный квадрат, для чего прибавим и вычтем $2a^2b^2$.
Тогда получим : $a^4 + b^4 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2b^2 = (a^2+b^2)^2 - 2a^2b^2 =$
$= (a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab)(a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab)$.

Ответ. $(a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab)(a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab)$.

Для многочленов от одной переменной $P_n(x)$ имеет место утверждение.

Всякий многочлен $P_n(x)$ степени $n \geqslant 2$ можно представить в виде произведений многочленов степени не выше второй. При этом любому действительному корню α многочлена соответствует множитель вида $(x-\alpha)^m$, где m – кратность корня. Если же

делителем многочлена является квадратный трехчлен с отрицательным дискриминантом $ax^2 + bx + c$
$(D = b^2 - 4ac < 0)$, то он входит в разложение многочлена на множители.

Итак, многочлен $P_n(x)$ считается разложенным на множители, если он представлен в виде произведения двучленов и их степеней, а также квадратных трехчленов с отрицательным дискриминантом и их степеней.

При разложении многочлена $P_n(x)$ используют те же приемы, что и для многочленов, зависящих от двух и более переменных (букв).

Пример 2.2.14. Разложите многочлен $x^3 - 3x^2 + 5x - 15$ на множители

Решение. Проведем группировку слагаемых следующим образом :
$(x^3 - 3x^2) + (5x - 15) = x^2(x - 3) + 5(x - 3) = (x - 3)(x^2 + 5)$.
Многочлен представлен в виде произведения двучлена и квадратного трехчлена с отрицательным дискриминантом. Следовательно, разложение закончено.

Ответ. $(x - 3)(x^2 + 5)$.

Пример 2.2.15. Разложите многочлен $x^6 - 1$ на множители

Решение. Воспользуемся формулой разности квадратов
$x^6 - 1 = (x^3)^2 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$.

Ответ. $(x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

В некоторых случаях удается найти корни многочлена $P_n(x)$ и воспользоваться свойством многочлена $P_n(x) = (x-\alpha)S_{n-1}(x)$, где α – корень многочлена, $S_{n-1}(x)$ – многочлен степени на единицу меньше, чем исходный многочлен.

Пример 2.2.16. Разложите многочлен $P_3(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ на множители

Решение. Выпишем делители свободного члена – числа 24 :
±1; ±2; ±3; ±4; ±6; ±8; ±12; ±24.
Подставляя ±1, убеждаемся, что эти числа не являются корнями.
Но при $x = 2$ $P_3(2) = 0$. Проведем деление $P_3(x)$ на $x - 2$.

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 \; -3x^2 - 10x + 24 & x - 2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3 - 2x^2 \qquad\qquad\quad} & x^2 - x - 12 \\
-x^2 - 10x \qquad & \\
\underline{-x^2 \;\; + 2x \qquad} & \\
-12x + 24 & \\
\underline{-12x + 24} & \\
0 &
\end{array}
$$

Итак, $P_3(x) = (x - 2)(x^2 - x - 12)$.
Найдем корни квадратного трехчлена :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} \implies x_1 = -3, \quad x_2 = 4$$

и $P_3(x) = (x - 2)(x + 3)(x - 4)$.

Ответ. $(x-2)(x+3)(x-4)$.

2.3 Алгебраические дроби

Алгебраической дробью называется дробное рациональное выражение, представляющее собой отношение двух многочленов. Например, $\dfrac{2a+b}{a^3+1}$; $\dfrac{3x+y}{x^2+y^2-1}$; $\dfrac{x^3+x^2-1}{x+2}$.

ОДЗ алгебраической дроби представляет собой множество всех числовых наборов кроме тех, для которых знаменатель дроби обращается в нуль.

Над алгебраическими дробями проводятся операции сложения и вычитания, при этом используется операция приведения к общему знаменателю. В качестве общего знаменателя двух или более дробей берется так называемый наименьший общий знаменатель (НОЗ). В качестве НОЗ выбирается такой многочлен, что любой другой общий знаменатель нацело делится на выбранный НОЗ.

Схему приведения дробей к общему знаменателю продемонстрируем на примере.

Пример 2.3.1. Приведите к общему знаменателю следующие дроби :
$\dfrac{a}{a^3-b^3}$; $\dfrac{c}{a^2-b^2}$; $\dfrac{d}{a^2+ab+b^2}$

Решение. Разложим знаменатели дробей на множители :
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$; $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$; a^2+ab+b^2 на множители не раскладывается.

Составим НОЗ – многочлен, который нацело делится на каждый из знаменателей, а следовательно, содержит все множители, входящие в разложения этих знаменателей.

НОЗ$=(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)$.

Чтобы у каждой из дробей был именно этот знаменатель, надо числитель и знаменатель первой дроби умножить на $(a+b)$, второй – на (a^2+ab+b^2), третьей – на $(a-b)(a+b)$.

Тогда дроби примут вид

$$\frac{a(a+b)}{(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)};\quad \frac{c(a^2+ab+b^2)}{(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)};\quad \frac{d(a-b)(a+b)}{(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)}.$$

Пример 2.3.2. Выполните действия

$$\frac{1}{a^2-ac-ab+bc}+\frac{2}{b^2-ab-bc+ac}+\frac{1}{c^2-ac-bc+ab}$$

Решение. Для выполнения операции сложения необходимо найти НОЗ.
С этой целью разложим знаменатели на множители :
$a^2-ac-ab+bc=a(a-c)-b(a-c)=(a-b)(a-c)$;
$b^2-ab-bc+ac=b(b-a)-c(b-a)=(b-c)(b-a)$;
$c^2-ac-bc+ab=c(c-a)-b(c-a)=(c-b)(c-a)$.
НОЗ$=(a-b)(a-c)(b-c)$.
Перепишем данную сумму дробей следующим образом

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}-\frac{2}{(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(b-c)(a-c)}=\frac{(b-c)-2(a-c)+(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=$$
$$=\frac{b-c-2a+2c+a-b}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{c-a}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{1}{(b-a)(b-c)}.$$

Ответ. $\dfrac{1}{(b-a)(b-c)}$.

Умножение и деление алгебраических дробей проводится по тем же правилам, что и для обыкновенных дробей.

Пример 2.3.3. Упростите выражение $\dfrac{c^3-8}{c^2+2c+4}:\dfrac{(c-2)^2}{c^2-4}$

1) $2-c$ 2) $2+c$ 3) 1 4) $2-c$

Решение. Используя правило деления дробей, получим

$$\frac{(c^3-8)(c^2-4)}{(c^2+2c+4)(c-2)}=\frac{(c-2)(c^2+2c+4)(c-2)(c+2)}{(c^2+2c+4)(c-2)^2}.$$

Остается выполнить необходимые сокращения – деление числителя и знаменателя на общий множитель в предположении, что этот множитель отличен от нуля.

Очевидно, что выражение равно $c+2$ для любого $c\neq\pm 2$.

Ответ. 2.

Рассмотрим алгебраическую дробь вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

Если степень числителя (степень многочлена $P(x)$) меньше степени знаменателя (степени многочлена $Q(x)$), то алгебраическая дробь называется *правильной*.

Если степень числителя не меньше степени знаменателя, то дробь называется *неправильной*.

Неправильную дробь всегда можно представить в виде суммы многочлена и правильной алгебраической дроби.

Пример 2.3.4. Представьте выражение $\dfrac{x^3-2x^2+7x+5}{x^2-4x+2}$ в виде $ax+b+\dfrac{cx+d}{x^2-4x+2}$ и укажите сумму $a+b+c+d$

Решение. Выполним деление

$$\begin{array}{r|l}
x^3\ -2x^2\ +7x+5 & x^2-4x+2 \\ \cline{2-2}
x^3-4x^2\ +2x & x+2+\dfrac{13x+1}{x^2-4x+2} \\ \cline{1-1}
2x^2+5x\ +5 & \\
2x^2-8x\ +4 & \\ \cline{1-1}
13x+1 &
\end{array}$$

Таким образом, $a=1$, $b=2$, $c=13$, $d=1$ и $a+b+c+d=17$.

Ответ. 17.

Пример 2.3.5. Вычислите значение дроби $\dfrac{5m^2-6mn+n^2}{10m^2-9mn-n^2}$, если $\dfrac{n}{m}=\dfrac{5}{4}$

Решение. Так как $m\neq 0$, то числитель и знаменатель дроби можно разделить на m^2.

Тогда получим : $\dfrac{5-6\dfrac{n}{m}+\dfrac{n^2}{m^2}}{10-9\dfrac{m}{n}-\dfrac{n^2}{m^2}}=\dfrac{5-\dfrac{30}{4}+\dfrac{25}{16}}{10-\dfrac{45}{4}-\dfrac{25}{16}}=\dfrac{1}{3}.$

Ответ. $\dfrac{1}{3}$.

Пример 2.3.6. Вычислите значение дроби $\dfrac{4x^2+8xy-x-2y}{8x^2-4xy-2x+y}$, если $\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{3}$.

Решение. Разложим числитель и знаменатель на множители :
$\dfrac{4x(x+2y)-(x+2y)}{4x(2x-y)-(2x-y)}=\dfrac{(x+2y)(4x-1)}{(2x-y)(4x-1)}=\dfrac{x+2y}{2x-y}$. По условию $x=3y$, $x\neq 0$.
Тогда $\dfrac{x+2y}{2x-y}=\dfrac{3y+2y}{6y-y}=\dfrac{5y}{5y}=1$.

Ответ. 1.

Пример 2.3.7. Вычислите значение дроби $\dfrac{3xz+x^2-2xy}{4y^2-yz-2z^2}$ при условии, что $\dfrac{x}{z}=-2$, $\dfrac{z}{y}=-1$

Решение. По условию $x=-2z$, $z=-y$, $z\neq 0$, $y\neq 0$. Тогда $x=2y$.
Подставив x и z, выраженные через y, получим $\dfrac{-6y^2+4y^2-4y^2}{4y^2+y^2-2y^2}=\dfrac{-6y^2}{3y^2}=-2$.

Ответ. -2.

Пример 2.3.8. Вычислите $x^2+\dfrac{1}{x^2}$, если $\dfrac{1}{x}-x=4$

Решение. Выражение $\dfrac{1}{x}-x$ возведем в квадрат.
$\left(\dfrac{1}{x}-x\right)^2=\dfrac{1}{x^2}-2+x^2=16$. Отсюда $x^2+\dfrac{1}{x^2}=18$.

Ответ. 18.

Пример 2.3.9. Найдите количество натуральных значений n, при которых дробь $\dfrac{15n+5}{3n-1}$ является целым числом

Решение. Выделим целую часть дроби $\dfrac{15n+5}{3n-1}=5+\dfrac{10}{3n-1}$.
Очевидно, что, если $3n-1$ является делителем числа 10, то исходная дробь будет целым числом.
Исследуем все делители числа 10 : ± 1, ± 2; ± 5; ± 10.
$3n-1=1 \implies n\notin N$, $3n-1=-1 \implies n\notin N$
$3n-1=2 \implies n=1$, $3n-1=-2 \implies n\notin N$
$3n-1=5 \implies n=2$, $3n-1=-5 \implies n\notin N$
$3n-1=10 \implies n\notin N$, $3n-1=-10 \implies n\notin N$

Ответ. 2.

Пример 2.3.10. Найдите сумму $a+b$, если имеет место тождество
$\dfrac{2}{x^2+x-6}=\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x+3}$

Решение. Так как $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$, то этот многочлен является НОЗ для дробей правой части тождества.

Приведем эти дроби к общему знаменателю. Тогда тождество примет вид

$$\frac{2}{x^2+x-6}=\frac{a(x+3)+b(x-2)}{x^2+x-6}$$

.

Из тождественного равенства дробей на ОДЗ ($x\neq 2,\ x\neq -3$) при равных знаменателях следует тождественное равенство числителей

$a(x+3)+b(x-2)=2$ или $(a+b)x+3a-2b=2 \implies a+b=0$ и $3a-2b=2 \implies a=-b$ и $-5b=2 \implies b=-0,4;\ a=0,4.$

Ответ. 0.

Пример 2.3.11. Найдите значение дроби $\dfrac{a^3-3ab^2}{4a^2b+3b^3}$, если $\dfrac{4b+a}{5a-7b}=2$

Решение. Из условия $\dfrac{4b+a}{5a-7b}=2$ выразим a через b :
$4b+a=10a-14b \implies 9a=18b \implies a=2b.$
Подставим $a=2b$ в исходную дробь : $\dfrac{8b^3-6b^3}{16b^3+3b^3}=\dfrac{2b^3}{19b^3}=\dfrac{2}{19}.$

Ответ. $\dfrac{2}{19}$.

Пример 2.3.12. Упростите выражение $\dfrac{(x+y)^2+(x-y)^2}{(x+y)^2-(x-y)^2}:\dfrac{x^4-y^4}{2xy(x-y)}$ на его ОДЗ

Решение. ОДЗ данного выражения не должно содержать числовых наборов, для которых $x=\pm y,\ x\neq 0,\ y\neq 0.$

Тогда $\dfrac{(x+y)^2+(x-y)^2}{(x+y)^2-(x-y)^2}:\dfrac{x^4-y^4}{2xy(x-y)}=\dfrac{(2x^2+2y^2)2xy(x-y)}{(x+y-x+y)(x+y+x-y)(x^2-y^2)(x^2+y^2)}=$
$=\dfrac{4xy}{2y\cdot 2x(x+y)}=\dfrac{1}{x+y}.$

Ответ. $\dfrac{1}{x+y}$.

2.4 Иррациональные выражения

Для иррациональных выражений имеют место формулы сокращенного умножения, аналогичные формулам (2.2.1) :

$$\begin{array}{ll}
a-b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}), & a\geqslant 0,\quad b\geqslant 0\\
a-b=(\sqrt{-a}-\sqrt{-b})(\sqrt{-a}+\sqrt{-b}), & a\leqslant 0,\quad b\leqslant 0\\
\sqrt{a}-\sqrt{b}=(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}), & a\geqslant 0,\quad b\geqslant 0\\
\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}=(\sqrt[2n]{a}-\sqrt[2n]{b})(\sqrt[2n]{a}+\sqrt[2n]{b}), & a\geqslant 0,\quad b\geqslant 0\\
a-b=(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}) & \\
a+b=(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}) &
\end{array}\qquad (2.4.1)$$

При тождественных преобразованиях иррациональных выражений особое значение приобретает область допустимых значений входящих в него букв.

Пример 2.4.1. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{ab}-\sqrt{b^2}}{b}-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ на ОДЗ

Решение. ОДЗ данного алгебраического выражения состоит из всех тех значений a и b, которые удовлетворяют неравенствам

$ab \geqslant 0,\ \ \dfrac{a}{b} \geqslant 0 \iff ab \geqslant 0,\ b \neq 0 \iff \left[\begin{array}{l} a \geqslant 0,\ \ b > 0 \\ a \leqslant 0,\ \ b < 0. \end{array}\right.$

Рассмотрим 1 случай : $a \geqslant 0,\ \ b > 0.$

$$\frac{\sqrt{ab}-\sqrt{b^2}}{b}-\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}\sqrt{b}-(\sqrt{b})^2}{b}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-1.$$

Рассмотрим 2 случай : $a \leqslant 0,\ \ b < 0.$

$$\frac{\sqrt{ab}-\sqrt{b^2}}{b}-\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}-(\sqrt{-b})^2}{-(\sqrt{-b})^2}-\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}=$$

$$=\frac{\sqrt{-a}-\sqrt{-b}}{-\sqrt{-b}}-\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}=-\frac{\sqrt{-a}-\sqrt{-b}+\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}=1-2\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}=1-2\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Ответ. -1 при $a \geqslant 0,\ b > 0$; $1-2\sqrt{\dfrac{a}{b}},\ a \leqslant 0,\ b < 0.$

Пример 2.4.2. Упростите выражение $A=\dfrac{\sqrt{(x+2)^2-8x}}{\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}}$ на ОДЗ

Решение. ОДЗ данного выражения состоит из всех значений x, удовлетворяющих системе

$$\left\{\begin{array}{l} (x+2)^2-8x \geqslant 0 \\ x>0 \\ \sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}} \neq 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} (x-2)^2 \geqslant 0 \\ x>0 \\ x\neq 2. \end{array}\right. \iff x\in(0;2)\cup(2;\infty).$$

Выражение A преобразуется к виду $\dfrac{\sqrt{(x+2)^2-8x}}{\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}}=\dfrac{\sqrt{x}\sqrt{(x-2)^2}}{x-2}=\dfrac{|x-2|\sqrt{x}}{x-2}.$

Если $x\in(0;2)$, то $|x-2|=-(x-2)$ и $A=-\dfrac{(x-2)}{(x-2)}\sqrt{x}=-\sqrt{x}.$

Если $x\in(2;\infty)$, то $|x-2|=x-2$ и $A=\sqrt{x}.$

Ответ. $-\sqrt{x}$ для $x\in(0;2)$ и $\sqrt{x}$ для $x\in(2;\infty)$.

Пример 2.4.3. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{1-a^2}{1-\sqrt{a}}$

Решение. ОДЗ выражения находится из системы

$$\left\{\begin{array}{l} 1-\sqrt{a}\neq 0 \\ a\geqslant 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a\geqslant 0 \\ a\neq 1. \end{array}\right.$$

Так как выражение $1+\sqrt{a}$, сопряженное знаменателю, не обращается в 0, то домножим числитель и знаменатель дроби на $1+\sqrt{a}$.

Тогда получим $\dfrac{(1-a^2)(1+\sqrt{a})}{1-a}=(1+a)(1+\sqrt{a}).$

Ответ. $(1+a)(1+\sqrt{a})$.

Пример 2.4.4. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{x}{\sqrt[3]{x}-1}$

Решение. ОДЗ выражения : $x \neq 1$. Домножим числитель и знаменатель дроби на $(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)$. Тогда получим $\dfrac{x(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{x-1}$.

Ответ. $\dfrac{x(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{x-1}$.

Пример 2.4.5. Упростите выражение $A=\dfrac{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$.

Решение. ОДЗ– $(a^2+b^2\neq 0)$. Введем замену $\sqrt[3]{a}=x$, $\sqrt[3]{b}=y$. Тогда выражение A запишется в виде рациональной дроби от x и y :

$$\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^2+xy+y^2}=\frac{(x^2+y^2)^2-x^2y^2}{x^2+xy+y^2}=\frac{(x^2+y^2-xy)(x^2+y^2+xy)}{x^2+xy+y^2}=x^2+y^2-xy.$$

Так как $x=\sqrt[3]{a}$ и $y=\sqrt[3]{b}$, то $A=\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{ab}$.

Ответ. $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{ab}$.

Пример 2.4.6. Вычислите $\dfrac{\sqrt[5]{a^2}-\sqrt[5]{b^2}}{\sqrt[5]{a}+\sqrt[5]{b}}$ при $a=\dfrac{1}{32}$, $b=\dfrac{1}{243}$

1) 2 2) 6 3) $\dfrac{1}{6}$ 4) $\dfrac{1}{2}$

Решение. Применим формулу разности квадратов к числителю дроби :

$$\frac{(\sqrt[5]{a}-\sqrt[5]{b})(\sqrt[5]{a}+\sqrt[5]{b})}{\sqrt[5]{a}+\sqrt[5]{b}}=\sqrt[5]{a}-\sqrt[5]{b}.$$

Подставив данные a и b, получим $\sqrt[5]{\dfrac{1}{32}}-\sqrt[5]{\dfrac{1}{243}}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$.

Ответ. 3.

Пример 2.4.7. Сократите дробь $\dfrac{8x-y}{4\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}$

1) $2\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}$ 2) $\sqrt[3]{y}$ 3) $2\sqrt[3]{x}$ 4) $\sqrt[3]{x}-2\sqrt[3]{y}$

Решение. Представим $8x-y$ в виде разности кубов.

Тогда $\dfrac{8x-y}{4\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}=\dfrac{(2\sqrt[3]{x})^3-(\sqrt[3]{y})^3}{4\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}=$

$$=\frac{(2\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})(4\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})}{4\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}=2\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y},\ \text{где}\ \ x^2+y^2\neq 0.$$

Ответ. 1.

Пример 2.4.8. Выражение $\dfrac{y+2\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{y}}{y^{-2/3}+2y^{-1/3}+1}$ после упрощения примет вид

1) y 2) $y^{1/3}$ 3) $y^{2/3}$ 4) $y^{-2/3}$

Решение. $\dfrac{y+2\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{y}}{y^{-2/3}+2y^{-1/3}+1}=\dfrac{\sqrt[3]{y}(\sqrt[3]{y^2}+2\sqrt[3]{y}+1)}{\sqrt[3]{y^{-2}}(1+2\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2})}=y$

Ответ. 1.

Пример 2.4.9. Выражение $\dfrac{a^{3/2}-4a^{1/2}}{\sqrt{\left(\dfrac{a+4}{2\sqrt{a}}\right)^2-4}}-2a$ после преобразования при $a<4$ примет вид

1) $-4a$ 2) 0 3) $4a$ 4) 1

Решение. $\dfrac{a^{3/2}-4a^{1/2}}{\sqrt{\left(\dfrac{a+4}{2\sqrt{a}}\right)^2-4}}-2a=\dfrac{\sqrt{a}(a-4)}{\sqrt{\dfrac{a^2+8a+16}{4a}-4}}-2a=$

$=\dfrac{\sqrt{a}(a-4)}{\sqrt{\dfrac{a^2+8a+16-16a}{4a}}}-2a=\dfrac{\sqrt{a}(a-4)2\sqrt{a}}{\sqrt{a^2-8a+16}}-2a=2a\dfrac{a-4}{\sqrt{(a-4)^2}}-2a.$

Заметим, что, если $a<4$, то $\sqrt{(a-4)^2}=|a-4|=4-a$.

Тогда $2a\dfrac{a-4}{\sqrt{(a-4)^2}}-2a=2a\left(\dfrac{a-4}{4-a}-1\right)=2a(-2)=-4a.$

Ответ. 1.

Пример 2.4.10. Выражение $A=x^{3/2}+y^{3/2}+3\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})-\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^3}{3}$ после упрощения примет вид

1) 0 2) $\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ 3) $\dfrac{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})^3}{3}$ 4) $9\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})$

Решение. В выражении А первые три слагаемые представляют собой куб суммы двух чисел $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$. Действительно,

$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^3=\sqrt{x^3}+3\sqrt{x}y+3x\sqrt{y}+\sqrt{y^3}=x^{3/2}+y^{3/2}+3\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y}).$

Поэтому $A=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^3-\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^3}{3}=\dfrac{2}{3}(\sqrt{x}+\sqrt{y})^3.$

Ответ. 3.

Пример 2.4.11. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{x}}{1-x\sqrt{x}}:\dfrac{x+x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}+x}$

1) $\dfrac{\sqrt{x}}{1-x}$ 2) $\dfrac{1}{1-x}$ 3) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1-x)}$ 4) $\dfrac{1}{1+x}$

Решение. ОДЗ : $x>0,\quad x\neq 1$.

Проведем деление дробей :

$\dfrac{\sqrt{x}\cdot(1+\sqrt{x}+x)}{(1-(\sqrt{x})^3)\cdot x\cdot(1+\sqrt{x})}=\dfrac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}\cdot\dfrac{(1+\sqrt{x}+x)}{(1+\sqrt{x}+x)\cdot(1+\sqrt{x})}=\dfrac{1}{\sqrt{x}(1-x)}.$

Ответ. 3.

Пример 2.4.12. Выражение $A=\dfrac{\sqrt{\left(\dfrac{x^2+3}{x}\right)^2-12}}{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}$ после упрощения имеет вид, если $x\in(0;1)$

1) $\dfrac{1}{x}$ 2) $-\dfrac{1}{x}$ 3) $-x$ 4) x

Решение. Преобразуем числитель дроби :

$$\sqrt{\left(\frac{x^2+3}{x}\right)^2-12}=\sqrt{\frac{x^4+6x^2+9}{x^2}-12}=\sqrt{\frac{x^4-6x+9}{x^2}}=\sqrt{\left(\frac{x^2-3}{x}\right)^2}=$$

$$=\left|\frac{x^2-3}{x}\right|=-\frac{x^2-3}{x},\quad \text{т.к. } x\in(0;1)$$

.

Тогда $A=-\dfrac{x^2-3}{x(x^2-3)}=-\dfrac{1}{x}$.

Ответ. 2.

Пример 2.4.13. Если $a\in(2;3)$, то выражение $(\sqrt{3}+a)\sqrt{3-a\sqrt{12}+a^2}$ можно привести к виду

1) $3-a^2$ 2) a^2 3) $-a^2$ 4) a^2-3

Решение. Преобразуем подкоренное выражение :
$3-a\sqrt{12}+a^2=(\sqrt{3})^2-2a\sqrt{3}+a^2=(\sqrt{3}-a)^2$.
Тогда $(\sqrt{3}+a)\sqrt{(\sqrt{3}-a)^2}=(\sqrt{3}+a)\cdot|\sqrt{3}-a|=(\sqrt{3}+a)|a-\sqrt{3}|=$
$=(\sqrt{3}+a)(a-\sqrt{3})=a^2-3$, т.к. $a-\sqrt{3}>0$ на множестве $(2;3)$.

Ответ. 4.

Пример 2.4.14. Выражение $\sqrt{\dfrac{8a^2-27b^2}{2a-3b}-18ab}$ можно привести к виду

1) $2a-3b$ 2) $|3b-2a|$ 3) $2a+3b$ 4) $3b-2a$

Решение. Проведем сокращение дроби :
$\dfrac{8a^3-27b^3}{2a-3b}=\dfrac{(2a)^3-(3b)^3}{2a-3b}==\dfrac{(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)}{2a-3b}=4a^2+6ab+9b^2$.
Тогда $\sqrt{4a^2+6ab+9b^2-18ab}=\sqrt{4a^2-6ab+9b^2}=\sqrt{(2a-3b)^2}=|2a-3b|=|3b-2a|$.

Ответ. 2.

Пример 2.4.15. При каком целом положительном x значение выражения
$\sqrt{\dfrac{x-3}{x+1}}\cdot\dfrac{1+(x-1)\sqrt{x^2-2x-3}-x^2}{x^2-(x+3)\sqrt{x^2-2x-3}-9}$ ближе всего к $0,66$?

Решение. Данное выражение имеет смысл при $x > 3$. Выполним тождественные преобразования :

$$1+(x-1)\sqrt{x^2-2x-3}-x^2 = (x-1)(\sqrt{(x-3)(x+1)}-(x+1) = (x-1)\sqrt{x+1}(\sqrt{x-3}-\sqrt{x+1});$$

$$x^2-(x+3)\sqrt{x^2-2x-3}-9 = (x+3)(x-3-\sqrt{(x+1)(x-3)} = (x+3)\sqrt{x-3}(\sqrt{x-3}-\sqrt{x+1});$$

$$\sqrt{\frac{x-3}{x+1}}\cdot\frac{(x-1)\sqrt{x+1}(\sqrt{x-3}-\sqrt{x+1})}{(x+3)\sqrt{x-3}(\sqrt{x-3}-\sqrt{x+1})} = \frac{x-1}{x+3} = 1-\frac{4}{x+3}.$$

Для нахождения искомого значения x решим уравнение $1-\dfrac{4}{x+3} = 0,66$ и $x = 8,76$. Возьмем ближайшее целое $x = 9$ и найдем значение выражения $1-\dfrac{4}{12} = 0,(6)$. При $3 < x \leqslant 8$ значение выражения меньше $0,62$, при $x \geqslant 10$ значение выражения больше $0,69$.

Ответ. 9.

2.5 Задачи для самостоятельного решения

№ 2.5.1. Результат деления многочленов $(y^5-2y^3+y^2+y-1):(y^2-1)$ равен

1) y^3-y^2+1 2) y^3-y^2+y 3) y^3-y+1 4) y^3+y^2+1

№ 2.5.2.Остаток от деления многочлена $3x^4+3x^3+2$ на многочлен $3x^3+1$ равен

1) $x-1$ 2) $1-x$ 3) $x+1$ 4) x^2-1

№ 2.5.3. Остаток от деления многочлена $10x^3+7x+11$ на двучлен $x+1$ равен

1) 6 2) -6 3) 5 4) -5

№ 2.5.4. Равенство $x\left(5+\dfrac{5}{a+1}\right) = \dfrac{-10x+8a+8}{a+1}-8$ становится тождеством, если a равно

1) 4 2) 3 3) -4 4) 0

№ 2.5.5. Если многочлен $-3x^3+ax^2+bx+c$ можно представить в виде $(5-x)(3x^2+2)$, то сумма $a+b+c$ равна

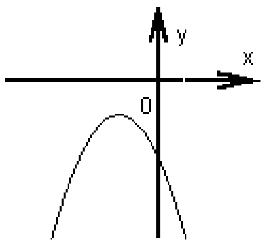
1) 23 2) 22 3) 21 4) 20

№ 2.5.6. Найдите приведенный многочлен четвертой степени, имеющий корни ±2 и ±3

№ 2.5.7. Найдите сумму всех корней многочлена $x^4-3x^3+x^2+3x-2$

№ 2.5.8. Найдите значение a, при котором многочлен $x^3 + 3x^2 + (a+2)x + a$ имеет корень кратности 3

№ 2.5.9. Если на рисунке изображен график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ и $D = b^2 - 4ac$, то справедливо соотношение



1) $ab > 0$

2) $aD < 0$

3) $bc < 0$

4) $bD < 0$

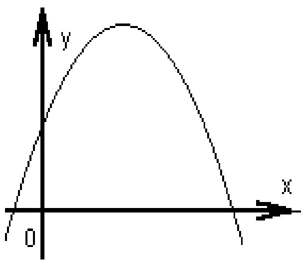
№ 2.5.10. Парабола $y = 9x^2 - 12x + 20a$ касается оси OX при a, равном

1) $0,1$ 2) $-0,2$ 3) $\frac{1}{5}$ 4) $-\frac{4}{5}$

№ 2.5.11. Парабола $y = 9ax^2 - 12x + 20$ не имеет общих точек с осью OX, если

1) $a \in (0; \frac{1}{5})$ 2) $a < \frac{1}{5}$ 3) $a > \frac{1}{5}$ 4) $a > 0$

№ 2.5.12. Если на рисунке изображен график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ и $D = b^2 - 4ac$, то справедливы соотношения



1) $a < 0, D > 0, c < 0$

2) $a < 0, b > 0, c > 0$

3) $D > 0, b < 0, c > 0$

4) $a < 0, b > 0, c < 0$

№ 2.5.13. Точка $(-1; -1)$ является вершиной параболы $y = ax^2 + bx + 4$, если

1) $a = 5; b = -10$ 2) $a = 10; b = -5$ 3) $a = -5; b = 10$ 4) $a = 5; b = 10$

№ 2.5.14. При некоторых значениях параметра a вершина параболы $y = (x - a^2 + 9a - 14)^2 + a - 8$ находится строго внутри третьего координатного угла. Количество натуральных значений параметра a, удовлетворяющих указанному условию, равно

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

№ 2.5.15. Квадратный трехчлен $-7x^2 + 3x + 1$ после выделения полного квадрата примет вид

1) $y = -7\left(x + \frac{3}{14}\right)^2 - \frac{37}{198}$ 2) $y = -7\left(x - \frac{3}{14}\right)^2 - \frac{37}{198}$

3) $y = -7\left(x - \frac{3}{14}\right)^2 + \frac{37}{28}$ 4) $y = -7\left(x + \frac{3}{14}\right)^2 + \frac{37}{28}$

№ 2.5.16. Квадратный трехчлен $x^2-2(a-1)x+4$ можно представить в виде квадрата двучлена, если a принимает значения

1) $\{-1;3\}$ 2) $\{-3;-1\}$ 3) $\{-3;1\}$ 4) $\{-1;1\}$

№ 2.5.17. Неравенство $x^2-2(4k-1)x+15k^2-2k-7>0$ выполняется при любом x, если целое число k равно

1) 3 2) 0 3) -1 4) 5

№ 2.5.18. Оба корня квадратного трехчлена $3x^2-ax+4a$ положительны, если

1) $a\in(-\infty;0)\cup(48;\infty)$ 2) $a\in(-\infty;0)$ 3) $a>48$ 4) $a\geqslant 48$

№ 2.5.19. Оба корня квадратного трехчлена $x^2-6ax+2-2a+9a^2$ больше 3, если

1) $a>1$ 2) $a<1$ 3) $a\in(-\infty;\frac{11}{9})$ 4) $a>\frac{11}{9}$

№ 2.5.20. Разложите многочлен x^4-x^3-x-1 на множители

№ 2.5.21. Разложите многочлен $x(y+z)^2+y(x+z)^2+z(x+y)^2-4xyz$ на множители

№ 2.5.22. Разложите многочлен $(ab+ac+bc)(a+b+c)-abc$ на множители

№ 2.5.23. Разложите многочлен $x^4-x^3-7x^2+x+6$ на множители

№ 2.5.24. Результат сокращения дроби $\dfrac{a^2+2ab-3b^2}{a^2-3ab+2b^2}$ имеет вид

1) $\dfrac{a+3b}{a+b}$ 2) $\dfrac{a-3b}{a-b}$ 3) $\dfrac{a+b}{a+3b}$ 4) $\dfrac{a+3b}{a-2b}$

№ 2.5.25. Дробь $\dfrac{a^3+a^2+a^2b}{a^2-b^2+a-b}$ после сокращения имеет вид

1) $\dfrac{a^2}{a-b}$ 2) $\dfrac{a-b}{a}$ 3) $\dfrac{a+b}{a-b}$ 4) $\dfrac{a^2}{a+b}$

№ 2.5.26. Сократив дробь $\dfrac{2x^2-xy-y^2}{6x^2-7xy+y^2}$, вычислите ее значение при $\dfrac{y}{x}=\dfrac{2}{5}$

1) $\dfrac{1}{7}$ 2) $\dfrac{3}{7}$ 3) $\dfrac{4}{7}$ 4) $\dfrac{5}{14}$

№ 2.5.27. Сократив дробь $\dfrac{4b^2+2ab-2b-a}{2b^2+4ab-2a-b}$, вычислите ее значение при $\dfrac{a}{b}=-\dfrac{1}{3}$

1) 2 2) 3 3) 4 4) 5

№ 2.5.28. Вычислите значение дроби $\dfrac{5a+3b}{3a-4b}$, если $2a-5b=0$

1) $4\frac{1}{7}$ 2) $4\frac{2}{7}$ 3) $4\frac{3}{7}$ 4) $4\frac{4}{7}$

№ 2.5.29. Вычислите значение дроби $\dfrac{5a-7b}{2a-3b}$, если $3a-5b=0$

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

№ 2.5.30. Укажите наибольшее целое число K, при котором дробь $\dfrac{6K^2+K-27}{3K+2}$ является также целым числом

№ 2.5.31. Укажите количество целых чисел K, при которых дробь $\dfrac{10K^2+3K+48}{5K-1}$ является также целым числом

№ 2.5.32. Выражение $\left(a+\dfrac{2}{1+0,5a}\right):\dfrac{a^3-8}{a+2}+\dfrac{2}{2a-a^2}$ после упрощения имеет вид

1) $\dfrac{(a-1)^2+1}{a^2-2a}$ 2) $\dfrac{1}{a}$ 3) $\dfrac{a-1}{a}$ 4) $\dfrac{(a+1)^2+1}{a^2-2a}$

№ 2.5.33. Если $f(x)=\dfrac{3x+2}{6x-7}$, то $f(x+1)-f(x+\dfrac{4}{3})$ приводится к виду

1) $\dfrac{6}{36x^2-1}$ 2) $\dfrac{6x}{1-36x^2}$ 3) $\dfrac{11}{36x^2-1}$ 4) $\dfrac{11}{1-36x^2}$

№ 2.5.34. Если $f(x)=\dfrac{2x+1}{3x-1}$, то $f\left(\dfrac{1}{x}\right)+f\left(\dfrac{x}{9}\right)$ приводится к виду

1) $\dfrac{1}{3}$ 2) $\dfrac{x}{3}$ 3) $-\dfrac{x}{3}$ 4) $-\dfrac{1}{3}$

№ 2.5.35. Вычислите значение дроби $\dfrac{4x^2-3xy+xz}{2yz-y^2-2z^2}$ при условии, что $\dfrac{z}{y}=2,\ \dfrac{y}{x}=-2$

1) -2 2) 2 3) $-0,3$ 4) 0,5

№ 2.5.36. Вычислите значение дроби $\dfrac{2yz+x^2-3xy}{y^2-2xz-2z^2}$ при условии, что $\dfrac{z}{x}=-3,\ \dfrac{x}{y}=2$

1) $\dfrac{3}{38}$ 2) $\dfrac{14}{47}$ 3) $1\dfrac{2}{13}$ 4) $\dfrac{13}{45}$

№ 2.5.37. Выражение $\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{a^2}}+\sqrt[3]{b}$ после упрощения имеет вид

1) $\sqrt[3]{a}-2\sqrt[3]{b}$ 2) $\sqrt[3]{a}+2\sqrt[3]{b}$ 3) $2\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a}$ 4) $-\sqrt[3]{a}$

№ 2.5.38. Дробь $\dfrac{\sqrt{x^2-y^2}+\sqrt{x^2-2xy+y^2}}{\sqrt{x-y}}$ после сокращения примет вид

1) $\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$ 2) $\sqrt{2x}$ 3) $2\sqrt{x+y}$ 4) $\sqrt{2x-2y}$

№ 2.5.39. Если $0<x<2$, то выражение $\dfrac{\sqrt{(x+2)^2-8x}}{\sqrt{x}-2/\sqrt{x}}$ после упрощения примет вид

1) $\sqrt{x}$ 2) $-\sqrt{x}$ 3) $\sqrt{x}-2$ 4) $\sqrt{x}+2$

№ 2.5.40. Выражение $\dfrac{a^2-3}{\sqrt{\left(\dfrac{a^2+3}{2a}\right)^2-3}}$ после упрощения при $a>\sqrt{3}$ имеет вид

1) $-2a$ 2) $1-2a$ 3) $2a$ 4) $1+2a$

№ 2.5.41. Выражение $\left(\dfrac{\sqrt{m}+1}{\sqrt{m}}-\dfrac{1}{\sqrt{m}-m}\right)\cdot\left(\sqrt{m}-\dfrac{m}{\sqrt{m}-1}\right)^{-1}$ после упрощения имеет вид

1) $-\dfrac{2}{m}$ 2) 2   3) 1   4) -1

№ 2.5.42. Упростив выражение $(a\sqrt{a}+a\sqrt{b}+b\sqrt{a})^{-1}\cdot\dfrac{a^2-b\sqrt{ab}}{a-b}$, вычислите его значение при условии, что $\sqrt{a}+\sqrt{b}=2$

1) $\dfrac{1}{2}$ 2) 2   3) 4   4) $\dfrac{1}{4}$

№ 2.5.43. Упростите и вычислите значение выражения
$\left(\dfrac{\sqrt[4]{ab^3}-\sqrt[4]{a^3b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\dfrac{1+\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}}\right)^{-2}:(a+\sqrt{ab})$ при $\dfrac{a}{b}=0,25$

1) $\dfrac{1}{3}$ 2) $\dfrac{2}{3}$ 3) $1,5$ 4) $2,5$

№ 2.5.44. Упростите и вычислите значение выражения
$\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}-\dfrac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)^{-2}-\dfrac{x+y}{2\sqrt{xy}}$ при $\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{2}$

1) $\dfrac{3}{4}$ 2) $\dfrac{9}{8}$ 3) $\dfrac{13}{4}$ 4) $\dfrac{19}{8}$

№ 2.5.45. Упростите выражение $\sqrt{\dfrac{8a^{3/4}-b}{2^{1/4}-\sqrt[3]{b}}+6\sqrt[12]{a^3b^4}}$, если $a>0,\ b<0$

1) $\sqrt{4\sqrt{a}+8\sqrt[4]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}}$ 2) 1   3) $2\sqrt[4]{a}+\sqrt[3]{b}$ 4) $2\sqrt[4]{a}-\sqrt[3]{b}$

№ 2.5.46. Найдите наибольшее целое x, при котором значение выражения
$\left(\dfrac{\sqrt{\dfrac{x(x+2)}{x+1}}-1}{x+1}\right):\left((x(x+2)+1)^{-0,25}-(x(x+2))^{-0,5}\right)$ меньше $0,99$

2.6 Ответы к задачам для самостоятельного решения

2.5.1. 3; **2.5.2.** 2; **2.5.3.** 2; **2.5.4.** 3; **2.5.5.** 1; **2.5.6.** x^4-13x^2+36; **2.5.7.** 3; **2.5.8.** 1; **2.5.9.** 1; **2.5.10.** 3; **2.5.11.** 3; **2.5.12.** 2; **2.5.13.** 4; **2.5.14.** 4; **2.5.15.** 3; **2.5.16.** 1; **2.5.17.** 3; **2.5.18.** 4; **2.5.19.** 4; **2.5.20.** $(x^2+1)(x^2-x-1)$; **2.5.21.** $(x+y)(y+z)(z+x)$; **2.5.22.** $(a+b)(b+c)(c+a)$; **2.5.23.** $(x+2)(x+1)(x-1)(x-3)$; **2.5.24.** 4; **2.5.25.** 1; **2.5.26.** 2; **2.5.27.** 4; **2.5.28.** 3; **2.5.29.** 4; **2.5.30.** 1; **2.5.31.** 2; **2.5.32.** 2; **2.5.33.** 3; **2.5.34.** 4; **2.5.35.** 3; **2.5.36.** 2; **2.5.37.** 4; **2.5.38.** 1; **2.5.39.** 2; **2.5.40.** 3; **2.5.41.** 4; **2.5.42.** 1; **2.5.43.** 2; **2.5.44.** 2; **2.5.45.** 4; **2.5.46.** 6.

Глава 3

Алгебраические уравнения, неравенства и системы

3.1 Рациональные уравнения

3.1.1 Уравнения с одной переменной

Равенство $f(x) = g(x)$ называется *уравнением с одним неизвестным.*

Всякое значение переменной, при котором $f(x)$ и $g(x)$ принимают равные числовые значения, называется *корнем уравнения.* Решить уравнение – значит найти все его корни или доказать, что их нет.

Уравнения называются равносильными, если они имеют одни и те же корни или не имеют корней.

Если в уравнении какое–нибудь слагаемое перенести в другую часть уравнения, поменяв знак на противоположный, то получим уравнение, равносильное данному.

Если обе части уравнения помножить на одно и то же отличное от нуля число, то получим уравнение, равносильное данному.

Если в уравнении функции $f(x)$ и $g(x)$ – многочлены, то оно называется *целым рациональным*; если $f(x)$ и $g(x)$ – рациональные выражения, причем хотя бы одно из них дробное, то уравнение называется *дробно–рациональным*; если хотя бы одно из выражений $f(x)$ и $g(x)$ – алгебраическое иррациональное выражение, то уравнение называется *иррациональным.*

3.1.2 Линейные уравнения

Линейным уравнением с одним неизвестным называется уравнение вида

$$ax = b, \tag{3.1.1}$$

где a и b – некоторые заданные числа.

1. Если $a \neq 0 \implies x = \dfrac{b}{a}$

2. Если $a = 0, \quad b = 0 \implies$ уравнение имеет бесчисленное множество корней, т.к. при любом x выполняется равенство $0 \cdot x = 0$.

3. Если $a = 0;\ b \neq 0 \implies$ уравнение корней не имеет.

Пример 3.1.1. Решите уравнение $\dfrac{x-4}{2} + \dfrac{2(x+1)}{4} = \dfrac{x}{6} - 1$

Решение. 1. Сократив второе слагаемое левой части уравнения на 2, приведем обе части уравнения к общему знаменателю. Для этого умножим все члены уравнения на наименьшее общее кратное всех знаменателей, равное 6 :

$$3(x-4)+3(x+1)=x-6.$$

2. Раскроем скобки и приведем подобные члены :

$$3x-12+3x+3=x-6;\ 6x-9=x-6;$$

3. Перенесем в одну часть уравнения члены с неизвестным, а в другую – свободные члены : $5x=3$; $x=\dfrac{3}{5}$.

Ответ. $\dfrac{3}{5}$.

Пример 3.1.2. При каких значениях k уравнение $2k+3(x+1)=\dfrac{3(kx+15)}{5}$
а) имеет единственное и, в частности, нулевое решение;
б) не имеет решений ?

Решение. Освободимся от знаменателя, для чего умножим обе части уравнения на 5. Получим :

$$10k+15(x+1)=3(kx+15).$$

Далее : $10k+15x+15=3kx+45$; $3x(k-5)=10(k-3)$.

Ответ. 1. Если $k\neq 5$, то уравнение имеет единственное решение $x=\dfrac{10(k-3)}{3(k-5)}$; при $k=3$ $x=0$.

2. Если $k=5$, то уравнение не имеет решений.

3.1.3 Квадратные уравнения

Уравнения вида

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0), \tag{3.1.2}$$

где a, b, c – произвольные числа, называется *квадратным уравнением.*

Если $a=1$, то уравнение называется *приведенным* квадратным уравнением.

Если один из коэффициентов b или c равен нулю, то уравнение называется *неполным.*

Корни квадратного уравнения 3.1.2 находятся по формулам

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{3.1.3}$$

Выражение $D=b^2-4ac$ называют дискриминантом. Если :
1) $D>0$ – уравнение имеет два различных корня;
2) $D<0$ – уравнение не имеет корней;
3) $D=0$ – уравнение имеет два равных корня (часто говорят – один корень).

Отметим, что неполные квадратные уравнения удобнее решать разложением на множители левой части уравнения.

Пример 3.1.3. Решите уравнение $4x^2-x=0$

Решение. Разложим на множители левую часть уравнения : $x(4x-1)=0$. Произведение двух сомножителей равно нулю, если равен нулю один из сомножителей; т.е. либо $x=0$, либо $4x-1=0$, откуда следует, что $x=0,25$.

Ответ. $x=0$; $x=0,25$.

Пример 3.1.4. Решите уравнение $x^2-11=0$

Решение. Воспользуемся формулой разности квадратов :
$(x-\sqrt{11})(x+\sqrt{11})=0 \implies x=\sqrt{11};\ x=-\sqrt{11}$

Ответ. $x=\sqrt{11}$; $x=-\sqrt{11}$.

Теорема Виета: Если x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, то

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad \text{и} \quad x_1x_2=\frac{c}{a} \tag{3.1.4}$$

Пример 3.1.5. Найдите сумму кубов корней уравнения $2x^2-13x-17=0$

Решение. Если задачу решать с помощью нахождения корней квадратного уравнения, то это приведет к громоздким преобразованиям над радикалами. Воспользуемся теоремой Виета, сделав необходимые преобразования формулы суммы кубов :

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2-x_1x_2)=(x_1+x_2)((x_1+x_2)^2-3x_1x_2)=$$

$$=(x_1+x_2)^3-3(x_1+x_2)x_1x_2.$$

Если x_1 и x_2 – корни заданного уравнения, то $x_1+x_2=\dfrac{13}{2}$ и $x_1x_2=-\dfrac{17}{2}$. Подставим значения (x_1+x_2) и x_1x_2 в полученную выше формулу

$$(x_1+x_2)^3-3(x_1+x_2)x_1x_2=\left(\frac{13}{2}\right)^3-3\cdot\frac{13}{2}\cdot\left(-\frac{17}{2}\right)=440\frac{3}{8}$$

Ответ. $x_1^3+x_2^3=440\dfrac{3}{8}$.

Пример 3.1.6. Найдите значения параметра p, при которых отношение корней уравнения $3x^2+(p-11)x+6=0$ равно 18

Решение. Пусть x_1 и x_2 – корни заданного уравнения. Тогда по условию задачи $x_1=18x_2$, а по теореме Виета $x_1+x_2=\dfrac{11-p}{3}$, $x_1\cdot x_2=2$.

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{11-p}{3}, \\ x_1\cdot x_2=2, \\ x_1=18x_2. \end{cases} \implies \begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{11-p}{3}, \\ 18x_2^2=2, \\ x_1=18x_2. \end{cases} \implies \begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{11-p}{3}, \\ x_2=\pm\dfrac{1}{3}, \\ x_1=18x_2. \end{cases}$$

Так как произведение корней уравнения равно 2, т.е. положительно, то x_1 и x_2 имеют одинаковые знаки : либо $x_1 = 6;\ x_2 = \frac{1}{3}$, либо $x_1 = -6;\ x_2 = -\frac{1}{3}$. Подставляя эти значения в первое уравнение системы, получим два значения p: $p = 30$ и $p = -8$.

Ответ. {-8;30}.

Пример 3.1.7. Найдите значение параметра a, при котором один из корней уравнения $x^2 - 20x - a + 2 = 0$ меньше другого на 10

Решение. Составим систему уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 = 20, \\ x_1 x_2 = 2 - a, \\ x_1 - x_2 = 10. \end{cases}$.

Первые два уравнения системы получаются из теоремы Виета, а последнее – из условия задачи. Решая эту систему, получим $x_1 = 15;\ x_2 = 5;\ a = -73$.

Ответ. $a = -73$.

3.1.4 Рациональные уравнения высших степеней

Основными методами решения рациональных уравнений высших степеней являются метод разложения на множители и метод введения новой переменной.

Метод разложения на множители основывается на следующих утверждениях :

1. Если $x = a$ – корень многочлена $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ (т.е. $P(a) = 0$), то $P(x)$ делится без остатка на двучлен $x - a$.

2. Пусть все коэффициенты многочлена $P(x)$ – целые числа, причем старший коэффициент равен единице. Если такой многочлен имеет своим корнем рациональное число, то это число – целое.

3. Пусть все коэффициенты многочлена $P(x)$ – целые числа. Если целое число a – корень многочлена, то a – делитель свободного члена.

Пример 3.1.8. Решите уравнение $x^3 + 3x^2 + 5x + 15 = 0$

Решение. Сгруппировав слагаемые в левой части уравнения, разложим ее на множители :

$$(x^3 + 3x^2) + (5x + 15) = x^2(x + 3) + 5(x + 3) = (x + 3)(x^2 + 5).$$

Исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x + 3 = 0, \\ x^2 + 5 = 0, \end{array} \right.$$

второе из которых не имеет корней, а корень первого $x = -3$.

Таким образом, исходное уравнение имеет единственный корень $x = -3$.

Ответ. $x = -3$.

Пример 3.1.9. Решите уравнение $x^3 + 12x - 32 = 0$

Решение. Разложение левой части уравнения на множители методом группировки более затруднительно, чем в предыдущем примере. Покажем на этом примере метод подбора, с помощью которого отыскивается целый корень уравнения. Выписываем все делители свободного члена : $\pm1; \pm2; \pm4; \pm8; \pm16; \pm32$. Подставляя последовательно эти числа в уравнение, убеждаемся, что $x = 2$ – корень уравнения. Следовательно, многочлен $x^3+12x-32$ без остатка делится на двучлен $x-2$:

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 + 12x \quad - 32 & x - 2 \\
\cline{2-2}
\underline{x^3 \; - 2x^2 \qquad\quad} & x^2 + 2x + 16 \\
\qquad 2x^2 + 12x & \\
\qquad \underline{2x^2 \quad - 4x \qquad} & \\
\qquad\qquad 16x - 32 & \\
\qquad\qquad \underline{16x - 32} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Таким образом, $x^3 + 12x - 32 = (x-2)(x^2 + 2x + 16)$ и заданное уравнение примет вид $(x-2)(x^2+2x+16) = 0$. Это уравнение равносильно совокупности двух уравнений $x-2 = 0$ и $x^2+2x+16 = 0$. Корень первого $x = 2$ уже найден, а второе уравнение корней не имеет, так как его дискриминант отрицателен.

Ответ. $x = 2$.

Рассмотрим методы решения некоторых специальных видов рациональных уравнений.

Пример 3.1.10. Решите уравнение $81x^4 - 45x^2 + 4 = 0$

Решение. Данное уравнение называется *биквадратным* уравнением.
Сделаем замену $x^2 = y;\ y \geqslant 0$.

Тогда $81y^2 - 45y + 4 = 0 \implies y_1 = \dfrac{1}{9};\ y_2 = \dfrac{4}{9} \implies \left[\begin{array}{l} x^2 = \dfrac{1}{9}, \\ x^2 = \dfrac{4}{9}. \end{array}\right. \implies \left[\begin{array}{l} x_{1,2} = \pm\dfrac{1}{3}, \\ x_{3,4} = \pm\dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$

Ответ. $x = \pm\dfrac{1}{3};\ \pm\dfrac{2}{3}$.

Пример 3.1.11.Решите уравнение $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$

Решение. Рассматриваемое уравнение относится к *симметричным уравнениям* четной степени. Признаком симметричного уравнения является равенство коэффициентов одночленов, равноудаленных от начала и конца многочлена, стоящего в левой части уравнения и записанного в стандартном виде. Симметричные уравнения четной степени с помощью подстановки $y = x + \dfrac{1}{x}$ приводятся к уравнению, степень которого в два раза ниже исходного.

Прежде, чем воспользоваться указанной подстановкой, разделим обе части уравнения на x^2: $6x^2 - 35x + 62 - \dfrac{35}{x} + \dfrac{6}{x^2} = 0$.

Далее, делаем подстановку $y = x + \dfrac{1}{x}$, замечая, что $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = y^2 - 2$:

$$6(y^2-2) - 35y + 62 = 0 \implies 6y^2 - 35y + 50 = 0 \implies y_1 = \frac{5}{2};\ y_2 = \frac{10}{3}.$$

Учитывая замену, получим :

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \implies 2x^2 - 5x + 2 = 0 \implies x_1 = \frac{1}{2};\ x_2 = 2$$

$$x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3} \implies 3x^2-10x+3=0 \implies x_3=\frac{1}{3};\ x_4=3.$$

Ответ. $\left\{\frac{1}{3};\ \frac{1}{2};\ 2;\ 3\right\}$.

Замечание. Симметричное уравнение нечетной степени (например, $ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0$) всегда имеет корень $x=-1$, в чем легко убедиться непосредственной подстановкой. Разделив исходное уравнение на $(x+1)$, получим симметричное уравнение четной степени.

Пример 3.1.12. Решите уравнение $(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12$

Решение. Обозначим $x^2+x+1=t$. Тогда уравнение запишется в виде :

$$t(t+1)=12 \implies t^2+t-12=0 \implies t_1=-4;\ t_2=3.$$

Вернемся к исходной переменной :

$$\left[\begin{array}{l} x^2+x+1=-4, \\ x^2+x+1=3 \end{array}\right. \implies \left[\begin{array}{l} x^2+x+5=0, \\ x^2+x-2=0. \end{array}\right.$$

Первое из совокупности уравнений корней не имеет $(D<0)$, а корни второго уравнения $x_1=-2;\ x_2=1$.

Ответ. $\{-2;1\}$.

Пример 3.1.13. Найдите произведение корней уравнения $\dfrac{2x-4}{3x+4}+\dfrac{6x+8}{2x-4}=3$

Решение. Данное уравнение – дробно–рациональное. Необходимой составляющей частью решения таких уравнений является обязательная проверка корней на предмет их принадлежности к области определения исходного уравнения.

Сделаем преобразования в левой части уравнения : $\dfrac{2x-4}{3x+4}+\dfrac{2(3x+4)}{2x-4}=3$.

Очевидно, что возможна замена $\dfrac{2x-4}{3x+4}=y$. Тогда уравнение запишется в виде

$$y+\frac{2}{y}=3 \implies y^2-3y+2=0 \implies \left[\begin{array}{l} y_1=2, \\ y_2=1. \end{array}\right. \implies$$

$$\implies \left[\begin{array}{l} \dfrac{2x-4}{3x+4}=2, \\ \\ \dfrac{2x-4}{3x+4}=1. \end{array}\right. \implies \left[\begin{array}{l} 4x+12=0, \\ x+8=0. \end{array}\right. \implies \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=-8. \end{array}\right. .$$

Оба значения удовлетворяют исходному уравнению. Произведение корней равно : $(-3)\cdot(-8)=24$.

Ответ. 24.

Пример 3.1.14.Найдите сумму корней или корень, если он единственный, уравнения $\dfrac{x(x-2)}{\dfrac{2}{x-9}-\dfrac{1}{x-7}}=\dfrac{15}{\dfrac{2}{x-9}+\dfrac{1}{7-x}}$

Решение. Знаменатели левой и правой части уравнения одинаковы (т.к. $\dfrac{1}{7-x} = -\dfrac{1}{x-7}$).

Следовательно, числители также равны :
$x(x-2) = 15 \implies x^2 - 2x - 15 = 0 \implies x_1 = 5;\ x_2 = -3.$

Однако, исходное уравнение равносильно уравнению $x^2 - 2x - 15 = 0$ при следующих условиях :

$$\left[\begin{array}{l} x \neq 9, \\ x \neq 7, \\ \dfrac{2}{x-9} \neq \dfrac{1}{x-7}. \end{array}\right.$$

Проверяя полученные корни, убеждаемся, что последнее условие нарушается при $x = 5$, и потому 5 – посторонний корень.

Ответ. $x = -3$.

Пример 3.1.15. Найдите произведение корней уравнения
$(3x^2 - 11x + 1)(3x^2 + 7x + 1) = -56x$

Решение. Разделим обе части уравнения на $x^2 \neq 0 : (3x - 11 + \dfrac{1}{x})(3x + 7 + \dfrac{1}{x}) = -56.$
Обозначим $3x + \dfrac{1}{x} = t$. Тогда $(t-11)(t+7) = -56 \Longrightarrow t^2 - 4t - 21 = 0 \Longrightarrow t_1 = 7;\ t_2 = -3.$
Возвращаясь к исходной переменной, получим совокупность уравнений :

$$\left[\begin{array}{l} 3x + \dfrac{1}{x} = 7 \\ 3x + \dfrac{1}{x} = -3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2 - 7x + 1 = 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 = 0 \end{array}\right. .$$

У первого уравнения $D > 0$,и по теореме Виета произведение корней равно $\dfrac{1}{3}$, а второе уравнение корней не имеет, т.к. $D < 0$.

Ответ. $\dfrac{1}{3}$.

3.1.5 Задачи на составление уравнений

Пример 3.1.16. Двум переводчикам поручили перевести книгу объемом 108 страниц на другой язык. Один переводчик взял себе 50 страниц книги, отдав остальные страницы второму. Первый выполнил свою работу за 20 дней, а второй свою – за 29. Во сколько раз больше страниц должен был взять себе первый переводчик (уменьшив число страниц второго), чтобы они, работая с прежней производительностью, выполнили свою работу за одинаковое число дней ?

Решение. Из условия задачи следует,что первый переводчик ежедневно переводил по 2,5 страницы текста, а второй – по 2 страницы. Обозначим через x число страниц, которые должен был бы взять себе первый переводчик. Тогда, работая с прежней производительностью, он выполнил бы свою часть работы за $\dfrac{x}{2,5}$ дней, а второй – за $\dfrac{108-x}{2}$ дней, и эти количества дней одинаковы. Получаем уравнение $\dfrac{x}{2,5} = \dfrac{108-x}{2}$, решая которое, находим

$x = 60$. Первый переводчик должен был бы увеличить свою долю работы в $\dfrac{60}{50} = 1,2$ раза.

Ответ. 1,2 раза.

Пример 3.1.17.Сумма цифр двузначного числа равна 14. Если к этому числу прибавить 18, то получим число, составленное из тех же цифр, но записанное в обратном порядке. Найдите это число

Решение. Обозначим число единиц искомого числа через x; тогда число десятков у этого числа будет $14 - x$, и искомое число запишется в виде : $(14 - x) \cdot 10 + x$. Заданное же число имеет вид $(10x + 14 - x)$, и оно на 18 единиц меньше искомого. Отсюда уравнение : $10x + 14 - x + 18 = (14 - x) \cdot 10 + x$. Решив его, получим $x = 6$; а $14 - x = 8$.

Ответ. 86.

Пример 3.1.18.Для перевозки 115 т груза затребовали некоторое количество машин. По объективным причинам на каждую машину пришлось грузить на 0,4 т меньше, чем предполагалось, поэтому дополнительно потребовалось 2 машины. Какое количество машин было затребовано первоначально ?

Решение. Обозначим через x количество машин, затребованных первоначально. Тогда на самом деле было вызвано $x + 2$ машины. Так как надо было перевезти 115 т груза, то предполагалось, что на одну машину будут грузить $\dfrac{115}{x}$ т груза, а на самом деле грузили $\dfrac{115}{x+2}$ т груза, что на 0,4 т меньше. Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{115}{x} - \frac{115}{x+2} = 0,4.$$

Это уравнение имеет два корня : –25 и 23. Ясно, что по смыслу задачи –25 не подходит.

Ответ. 23 машины.

Пример 3.1.19.Поезд должен пройти 54 км. Пройдя 14 км, он задержался на 10 минут у светофора. Увеличив первоначальную скорость на 10 км/час, он прибыл на место назначения с опозданием на 2 минуты. Определите первоначальную скорость поезда

Решение. Обозначим первоначальную скорость поезда через x (км/час). Тогда весь путь он должен был бы пройти за $\dfrac{54}{x}$ часов. Однако после того, как поезд прошел 14 км, на что у него ушло $\dfrac{14}{x}$ часов, он простоял у семафора $\dfrac{1}{6}$ часа и оставшиеся 40 км ехал со скоростью $(x + 10)$ км/час. На оставшийся путь поезд затратил $\dfrac{40}{x+10}$ часов. Следовательно, все расстояние было пройдено за $\left(\dfrac{14}{x} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{40}{x+10}\right)$ часов, что составляет $\left(\dfrac{54}{x} + \dfrac{1}{30}\right)$ часа. В результате получим уравнение

$$\frac{14}{x} + \frac{1}{6} + \frac{40}{x+10} = \frac{54}{x} + \frac{1}{30}$$

Это уравнение приводится к квадратному $x^2 + 10x - 3000 = 0$, корни которого равны –60 и 50, из которых первый (–60) не подходит по условию задачи.

Ответ. 50 км/час.

3.2 Системы рациональных уравнений

Рассмотрим два уравнения с двумя переменными $f(x, y) = 0$ и $g(x, y) = 0$. Они образуют систему, если ставится задача об отыскании всех пар чисел (x, y), которые удовлетворяют каждому из заданных уравнений. Каждая такая пара называется *решением системы*. Решить систему уравнений – значит найти все ее решения. Если множество решений пусто, то система называется *несовместной*. Две системы называются *равносильными*, если множества их решений совпадают. Если, в частности, обе системы не имеют решений, они тоже считаются равносильными.

Отметим здесь некоторые утверждения о равносильности систем :

1. Если одно из уравнений системы заменить на равносильное ему, а другое уравнение оставить без изменения, то получится система, равносильная данной.

2. Если одно уравнение системы заменить суммой или разностью обоих уравнений системы, а другое оставить без изменения, то получится система, равносильная исходной.

3.2.1 Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными

Пусть задана система уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \tag{3.2.1}$$

Если :

1) $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ – система имеет единственное решение

2) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ – система не имеет решений

3) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ – система имеет бесконечное множество решений.

Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными можно решать методом алгебраического сложения или методом подстановки.

Пример 3.2.1. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x + y = 5, \\ 2x - y = 0. \end{cases}$

Решение. Будем решать систему методом алгебраического сложения. Сложим почленно уравнения системы : $5x = 5$; $x = 1$. Подставляя в одно из уравнений, например, во второе, значение $x = 1$, получим $y = 2$.

Ответ. (1;2).

Пример 3.2.2. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - 7y = -5, \\ 3x + y = 7. \end{cases}$

Решение. Будем решать систему методом подстановки. Определяя из первого уравнения $x = -5 + 7y$, заменим заданную систему равносильной : $\begin{cases} x = -5 + 7y, \\ 3x + y = 7. \end{cases}$.

Подставим во второе уравнение значение x : $3(-5+7y)+y = 7$; $22y = 22$; $y = 1$; $x = 2$.

Ответ. (2; 1).

3.2.2 Нелинейные системы уравнений

При решении систем уравнений, содержащих нелинейные уравнения, основными методами решения являются метод подстановки, метод алгебраического сложения и метод введения новой переменной. Рассмотрим на примерах применение этих методов.

Пример 3.2.3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - 3y = 11, \\ x^2 + 2y = -2 \end{cases}$

Решение. Воспользуемся методом подстановки. Из первого уравнения находим $x = 3y + 11$. Подставив во второе уравнение вместо x выражение $3y + 11$, получим $(3y + 11)^2 + 2y = -2$, откуда $y_1 = -3$; $y_2 = -\dfrac{41}{9}$. Соответствующие значения x находим из уравнения $x = 3y + 11$: если $y = -3$, то $x = 2$; если $y = -\dfrac{41}{9}$, то $x = \dfrac{8}{3}$.

Ответ. Множество решений системы : $\left\{(2; -3);\ \left(\dfrac{8}{3}; -\dfrac{41}{9}\right)\right\}$.

Пример 3.2.4. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6 \end{cases}$

Решение. Неизвестные x и y на основании теоремы Виета можно принять за корни вспомогательного квадратного уравнения $t^2 - 5t + 6 = 0$, откуда $t_1 = 2$; $t_2 = 3$. Так как безразлично, какое неизвестное принято за t_1, какое за t_2, то имеем два решения $(2; 3)$; $(3; 2)$.

Ответ. $\{(2; 3),\ (3; 2)\}$.

Пример 3.2.5.Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ xy = 8 \end{cases}$

Решение. Умножим второе уравнение системы на 2 и сложим с первым; получим $(x+y)^2 = 36$, откуда $|x+y| = 6$. Таким образом, данная система равносильна совокупности двух систем : 1) $\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 8 \end{cases}$ и 2) $\begin{cases} x + y = -6, \\ xy = 8 \end{cases}$

Решая эти системы, получим всего 4 решения : $(-4; -2)$, $(-2; -4)$, $(4; 2)$, $(2; 4)$.

Ответ. $\{(\pm 4; \pm 2);\ (\pm 2; \pm 4)\}$.

Пример 3.2.6. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + x^2y^2 + y^2 = 9, \\ x + y + xy = 5 \end{cases}$

Решение. В этой системе левая часть каждого из уравнений есть симметрический многочлен относительно переменных x, y. Это означает, что, если в многочлене x заменить на y, а y на x, то многочлен не изменится. Такие системы решаются методом замены переменных. В качестве новых переменных выбирают простейшие симметрические выражения $x + y$ и xy.

Итак, пусть $\begin{cases} x+y=u, \\ xy=v \end{cases}$. Тогда $x^2+y^2=u^2-2xy$ или $x^2+y^2=u^2-2v$.

Подставим полученные выражения в заданную систему : $\begin{cases} u^2+v^2-2v=9, \\ u+v=5 \end{cases}$

Решая эту систему методом подстановки, получим два решения $v_1=2;\ u_1=3$ и $v_2=4; u_2=1$. Теперь остается решить совокупность двух систем $\begin{cases} x+y=3, \\ xy=2 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y=1, \\ xy=4. \end{cases}$. Решения первой системы $(1;2)$ и $(2;1)$, а вторая система решений не имеет.

Ответ. $\{(1;2);\ (2;1)\}$.

Пример 3.2.7.Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{25}{12}, \\ x^2-y^2=7 \end{cases}$

Решение. Применим метод введения новых переменных. Обозначим $\dfrac{x}{y}=t$. Тогда первое уравнение системы примет вид $t+\dfrac{1}{t}=\dfrac{25}{12}$, откуда $t_1=\dfrac{4}{3}\ t_2=\dfrac{3}{4}$. Таким образом, либо $\dfrac{x}{y}=\dfrac{4}{3}$, т.е. $x=\dfrac{4}{3}y$, либо $\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{4}$, т.е. $x=\dfrac{3}{4}y$.

Итак, первое уравнение системы распалось на два уравнения : $x=\dfrac{3}{4}y$ и $x=\dfrac{4}{3}y$. В соответствии с этим, получаем совокупность двух систем :

$$\begin{cases} x=\dfrac{3}{4}y, \\ x^2-y^2=7 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x=\dfrac{4}{3}y, \\ x^2-y^2=7 \end{cases}$$

Первая система решений не имеет, а из второй получаем $y=\pm 3;\ x=\pm 4$.

Ответ. $\{(4;3);\ (-4;-3)\}$.

Пример 3.2.8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ x-y=a \end{cases}$ имеет единственное решение

Решение. Из первого уравнения системы видно, что $a \geqslant 0$. При $a=0$ система имеет единственное решение $x=y=0$. Рассмотрим случай, когда $a>0$. Возводя второе уравнение в квадрат, перейдем к системе $\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ x^2+y^2-2xy=a^2 \end{cases}$, равносильной заданной.

Далее, заменяя во втором уравнении (x^2+y^2) на a, выразим x через y : $a-2xy=a^2$; $x=\dfrac{a-a^2}{2y}$. Подставим это значение x во второе уравнение заданной системы : $\dfrac{a-a^2}{2y}-y=a$; $y^2+ay-\dfrac{a-a^2}{2}=0$. Последнее уравнение будет иметь один корень, если $D=0$, т.е. $2a-a^2=0$, откуда $a=2$.

Ответ. Система имеет единственное решение при $a=0;\ a=2$.

3.2.3 Системы n уравнений с n неизвестными ($n > 2$)

Рассмотрим систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} f(x,y,z) = 0, \\ \varphi(x,y,z) = 0, \\ g(x,y,z) = 0. \end{cases} \tag{3.2.2}$$

Решением такой системы называется всякая тройка чисел (x, y, z), удовлетворяющая каждому уравнению системы. Для решения такой системы используются рассмотренные выше приемы и методы.

Пример 3.2.9. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - 2y + 3z = 2, \\ 3x - y - z = 1, \\ 2x - 3y + 3z = 2 \end{cases}$

Решение. Заменим данную систему равносильной $\begin{cases} x - 2y + 3z = 2, \\ 5y - 10z = -5, \\ y - 3z = -2. \end{cases}$

Соответственно второе и третье уравнение этой системы получены следующим образом : ко второму уравнению исходной системы прибавляется первое уравнение, умноженное на –3; к третьему уравнению исходной системы прибавляется первое уравнение, умноженное на –2. Из последних двух уравнений системы находим значения $y = 1$; $z = 1$, подставляя которые в первое из уравнений, получим $x = 1$.

Ответ. (1; 1; 1).

Пример 3.2.10. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y + z = 2, \\ x^2 - xy + yz = 1, \\ y^2 - yz + xz = 1 \end{cases}$

Решение. Из первого уравнения $z = 2 - x + y$. Тогда заданная система уравнений эквивалентна системе

$$\begin{cases} z = 2 - x + y, & (1) \\ x^2 - xy + y(2 - x + y) = 1, & (2) \\ y^2 - y(2 - x + y) + x(2 - x + y) = 1. & (3) \end{cases}$$

Рассмотрим систему, состоящую из уравнений (2) и (3) :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy + 2y = 1, & (4) \\ -x^2 + 2xy + 2x - 2y = 1 & (5) \end{cases}$$

Сложим соответствующие части уравнений (4) и (5): $y^2 + 2x = 2$, откуда $x = \dfrac{2 - y^2}{2}$. Это значение x подставим, к примеру, в уравнение (4). Тогда система уравнений (4) и (5) эквивалентна системе

$$\begin{cases} \left(\dfrac{2 - y^2}{2}\right)^2 + y^2 - 2y\dfrac{2 - y^2}{2} + 2y = 1, & (6) \\ x = \dfrac{2 - y^2}{2} & (7) \end{cases}$$

Решаем уравнение (6): $y^4 + 4y^3 = 0$; $y^3(y + 4) = 0$, откуда $y_1 = 0$; $y_2 = -4$. Тогда из уравнения (7) соответственно получим $x_1 = 1$; $x_2 = -7$, а из уравнения (1) $z_1 = 1$; $z_2 = 5$.

Таким образом, получаем такие решения : $(1;0;1)$ и $(-7;-4;5)$.

Ответет. $\{(1;0;1);\ (-7;-4;5)\}$.

3.2.4 Задачи на составление систем уравнений

Пример 3.2.11. 7 пакетов конфет и 4 пакета печенья стоят вместе 324 рубля, а 5 пакетов конфет и 9 пакетов печенья – 385 рублей. Сколько рублей стоят вместе 3 пакета конфет и 1 пакет печенья ?

Решение. Пусть x – стоимость одного пакета конфет, а y – стоимость одного пакета печенья. Тогда по условию задачи справедливы соотношения $\begin{cases} 7x+4y=324, \\ 5x+9y=385 \end{cases}$. Решая систему уравнений, получим : $x=32;\ y=25$. Тогда 3 пакета конфет и 1 пакет печенья стоят 121 рубль.

Ответ. 121 рубль.

Пример 3.2.12. Два пешехода идут навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми равно 30 км. Если первый выйдет на 2 часа раньше второго, то встреча произойдет через 2,5 часа после выхода второго. Если же второй пешеход выйдет на 2 часа раньше первого, то встреча произойдет через 3 часа после выхода первого. С какой скоростью идет каждый пешеход ?

Решение. Обозначим через x км/час скорость первого пешехода, а через y км/час – скорость второго пешехода. Если первый выйдет на 2 часа раньше второго, то по условию задачи он будет идти до встречи 4,5 часа, а второй – 2,5 часа, и пройдут они соответственно $4,5x$ км и $2,5y$ км. Таким образом, вместе они пройдут $4,5x+2,5y$, что составляет 30 км. Итак, первое уравнение $4,4x+2,5y=30$.

Если второй пешеход выйдет раньше первого на 2 часа, то до встречи он будет находиться в пути 5 часов, а первый – 3 часа. Рассуждая так же, как при составлении первого уравнения, получим второе : $3x+5y=30$.

Получили систему уравнений $\begin{cases} 4,5x+2,5y=30, \\ 3x+5y=30 \end{cases}$, решая которую, находим : $x=5$; $y=3$.

Ответ. Скорость первого пешехода 5 км/час, скорость второго пешехода 3 км/час.

Пример 3.2.13. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 19 км, выехал велосипедист с некоторой постоянной скоростью. Через 15 мин после него в том же направлении выехал автомобилист. Через 10 мин после начала движения он догнал велосипедиста и продолжал двигаться в пункт B, откуда, не останавливаясь, он повернул назад и через 50 мин после своего отъезда из пункта A вновь встретился с велосипедистом. Найдите скорости автомобилиста и велосипедиста

Решение. Пусть скорость велосипедиста x км/мин, автомобилиста – y км/мин. Автомобилист был в дороге 10 мин, а велосипедист 10+15 =25 мин, когда они встретились. В этот момент расстояния, пройденные ими, были одинаковы : $25x=10y$. Когда, повернув назад, автомобилист вновь встретил велосипедиста, он проехал $50y$ км, а велосипедист – $65x$ км. Эти расстояния в сумме составляют удвоенное расстояние между пунктами А и В, т.е. $65x + 50y = 38$. Таким образом, получили систему уравнений $\begin{cases} 25x = 10y, \\ 65x + 50y = 38 \end{cases}$, решая которую, найдем $x = 0,2$ км/мин и $y = 0,5$ км/мин.

Ответт. Скорость велосипедиста равна 0,2 км/мин, скорость автомобилиста равна 0,5 км/мин.

3.3 Рациональные неравенства

Рациональным неравенством называется неравенство вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \bigvee 0, \tag{3.3.1}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены, а под символом $\bigvee$ понимают один из знаков $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$.

Решением неравенства называется значение x, удовлетворяющие заданному неравенству.

Два неравенства эквивалентны или равносильны, если множества их решений совпадают; в частности, неравенства равносильны, если оба они не имеют решений.

Сформулируем *теоремы о равносильности неравенств.*

1. Если из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком, то получится неравенство, равносильное данному.

2. Если обе части неравенства с одной переменной умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится неравенство, равносильное данному.

3. Если обе части неравенства с одной переменной разделить или умножить на одно и то же отрицательное число, изменив знак неравенства на противоположный, то получится неравенство, равносильное данному.

Рациональные неравенства удобно решать методом интервалов, который основывается на следующей теореме.

Теорема. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале (a, b) и не имеет на нем корней, то для всех $x \in (a, b)$ функция $f(x)$ сохраняет свой знак.

Геометрический смысл этой теоремы очевиден : непрерывная кривая – график функции $f(x)$ – не пересекает ось OX на интервале (a, b), так как функция $f(x)$ не имеет на этом интервале корней. Следовательно, эта кривая лежит по одну сторону оси OX.

Поясним суть метода интервалов на примере неравенства

$$P(x) > 0, \tag{3.3.2}$$

где

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n. \tag{3.3.3}$$

Известно,что многочлен можно разложить на линейные множители и квадратные трехчлены с отрицательным дискриминантом.

Так как квадратный трехчлен с отрицательным дискриминантом сохраняет свой знак на всей числовой оси, то знак многочлена $P(x) > 0$ при различных значениях x зависит только от знаков его линейных множителей..

Итак, будем считать, что разложение многочлена $P(x)$ на множители имеет вид :

$$P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \cdots (x - \alpha_n).$$

Положим для определенности, что $n = 4$. Отметим на числовой оси значения $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

Числовая ось разобьется на несколько промежутков : в данном случае их пять. Внутри каждого промежутка, в силу сформулированной выше теоремы, многочлен $P(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)$ сохраняет свой знак. Если $x > \alpha_4$, то каждый из множителей $(x-\alpha_1), (x-\alpha_2), (x-\alpha_3), (x-\alpha_4)$ положителен, и поэтому $P(x) > 0$ при $x > \alpha_4$. Если $x \in (\alpha_3; \alpha_4)$, то в указанном разложении $(x-\alpha_4) < 0$, а все остальные сомножители положительны.

Следовательно, если $x \in (\alpha_3; \alpha_4)$, то $P(x) < 0$.

Далее, на интервале (α_2, α_3) многочлен $P(x)$ положителен и т.д. На числовой оси отмечаем полученные знаки и выбираем те промежутки, на которых знак многочлена соответствует знаку заданного неравенства, см. рис. 3.3.1.

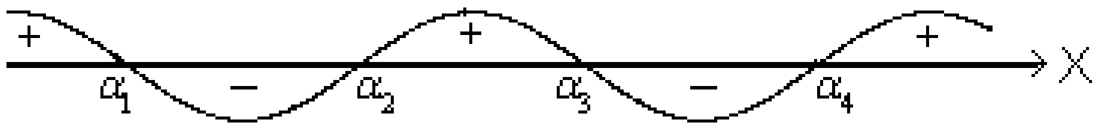


Рис. 3.3.1. Графическая интерпретация метода интервалов.

В нашем случае решением неравенства является объединение множеств $(-\infty; \alpha_1) \cup (\alpha_2; \alpha_3) \cup (\alpha_4; \infty)$.

Заметим, что в разложении многочлена $P(x)$ на множители могут встречаться квадраты линейных множителей. Пусть, например,это будет множитель $(x-a)^2$. Тогда, очевидно, справа и слева от числа $x = a$ многочлен сохраняет свой знак.

Неравенство вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)} > 0$ $\left(\dfrac{P(x)}{Q(x)} < 0\right)$ равносильно неравенству $P(x)Q(x) > 0$ $(P(x)Q(x) < 0)$.

Неравенство $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \geqslant 0$ $\left(\dfrac{P(x)}{Q(x)} \leqslant 0\right)$ равносильно совокупности условий $\left[\begin{array}{l} P(x)Q(x) > 0 \\ P(x) = 0 \\ Q(x) \neq 0 \end{array}\right.$

или, соответственно, $\left[\begin{array}{l} P(x)Q(x) < 0 \\ P(x) = 0 \\ Q(x) \neq 0 \end{array}\right.$.

Пример 3.3.1. Решите неравенство $\dfrac{(x-9)(2x+1)}{x+10} \geqslant 0$

1) $(-\infty; -10) \cup \left[-\dfrac{1}{2}; 9\right]$ 2) $\left(-10; -\dfrac{1}{2}\right] \cup [9; \infty)$

3) $\left(-10; -\dfrac{1}{2}\right) \cup (9; \infty)$ 4) $\left[-10; -\dfrac{1}{2}\right] \cup [9; \infty)$

Решение. Исходное неравенство равносильно совокупности условий

$$\left[\begin{array}{l} (x-9)(2x+1)(x+10) > 0 \\ (x-9)(2x+1) = 0 \\ x+10 \neq 0 \end{array}\right.$$

Отметим на числовой оси все корни числителя и корни знаменателя, причем корни знаменателя отметим "выколотой"точкой, а затем определим знак произведения на каждом из полученных интервалов, см. рис. 3.3.2.

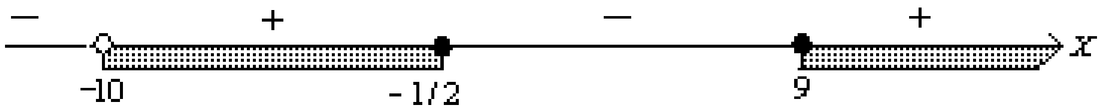


Рис. 3.3.2. Графическая интерпретация решения примера 3.3.1.

Решение заданного неравенства есть объединение множеств, указанных на рисунке штриховкой : $(-10; \frac{1}{2}] \cup [9; \infty)$. Это множество указано в вариантах ответов под номером 2.

Ответ. 2.

Пример 3.3.2. Решите неравенство $\dfrac{x+11}{(x-8)(3x+2)} \leqslant 0$

1) $\left[-11; -\frac{2}{3}\right) \cup (8; \infty)$ 2) $(-\infty; -11]$ 3) $(-\infty; 8)$ 4) $(-\infty; -11] \cup \left(-\frac{2}{3}; 8\right)$

Решение. $\dfrac{x+11}{(x-8)(3x+2)} \leqslant 0 \iff \left[\begin{array}{l} (x+11)(x-8)(3x+2) < 0, \\ x+11 = 0, \\ (x-8)(3x+2) \neq 0 \end{array}\right.$

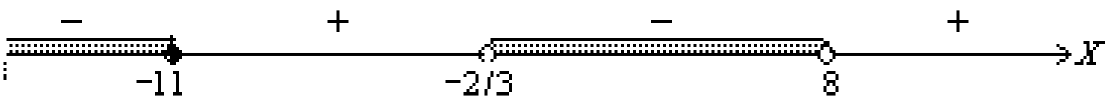


Рис. 3.3.3. Графическая интерпретация решения примера 3.3.2.

$x \in (-\infty; -11] \cup \left(-\frac{2}{3}; 8\right)$

Ответ. 4.

Пример 3.3.3. Решите неравенство $\dfrac{(x+1)(x-4)}{(x+7)^2} \geqslant 0$

Решение. $\dfrac{(x+1)(x-4)}{(x+7)^2} \geqslant 0 \iff \left[\begin{array}{l} (x+1)(x-4) \geqslant 0, \\ x \neq -7 \end{array}\right.$

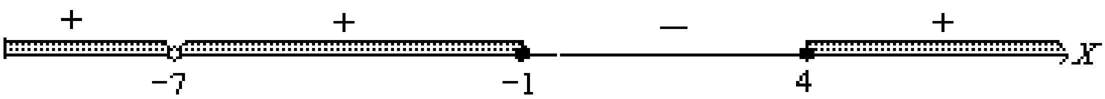


Рис. 3.3.4. Графическая интерпретация решения примера 3.3.3.

Ответ. $x \in (-\infty; -7) \cup (-7; -1] \cup [4; \infty)$

Пример 3.3.4. Решите неравенство $\dfrac{(x-3)^2}{(x-2)(x+5)} \leqslant 0$

Решение. $\dfrac{(x-3)^2}{(x-2)(x+5)} \leqslant 0 \iff \left[\begin{array}{l} x=3, \\ (x-2)(x+5)<0 \end{array}\right.$

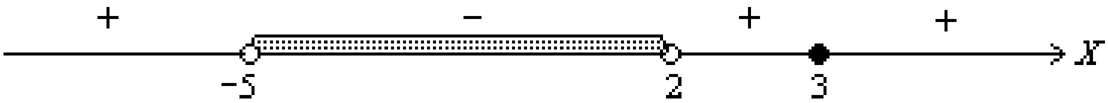


Рис. 3.3.5. Графическая интерпретация решения примера 3.3.4.

Ответ. $x \in (-5;2) \cup \{3\}$.

Пример 3.3.5. Решите неравенство $\dfrac{x^3-x^2+4x-4}{x^4+x^3+5x^2+5x} \geqslant 0$

Решение. Применяя метод группировки, разложим числитель и знаменатель на множители.
$x^3-x^2+4x-4 = x^2(x-1)+4(x-1) = (x-1)(x^2+4)$
$x^4+x^3+5x^2+5x = x^3(x+1)+5x(x+1) = (x+1)x(x^2+5)$
Исходное неравенство запишется в виде :
$\dfrac{(x-1)(x^2+4)}{x(x+1)(x^2+5)} \geqslant 0 \iff \dfrac{x-1}{x(x+1)} \geqslant 0$
Применяя метод интервалов, получим $x \in (-1;0) \cup [1;\infty)$.

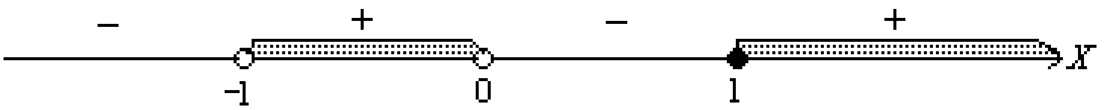


Рис. 3.3.6. Графическая интерпретация решения примера 3.3.5.

Ответ. $x \in (-1;0) \cup [1;\infty)$.

Пример 3.3.6. Решите систему неравенств $-18 < x^4-9x^2 < 0$.

Решение. Запишем систему неравенств в виде :

$$\left\{\begin{array}{l} x^4-9x^2<0, \\ x^4-9x^2>-18 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x^2(x-3)(x+3)<0, \\ x^4-9x^2+18>0 \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{l} x^2(x-3)(x+3)<0, \\ (x^2-3)(x^2-6)>0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} (x-3)(x+3)<0, \\ (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})>0 \end{array}\right.$$

В приведенных преобразованиях в обоих неравенствах мы произвели разложение на множители и сократили первое неравенство на x^2 при условии, что $x \neq 0$.

Далее, каждое из неравенств по отдельности решаем методом интервалов и выбираем те значения переменной, при которых удовлетворяется каждое из неравенств.

Из рисунка видно, что системе неравенств удовлетворяют значения
$x \in (-3;-\sqrt{6}) \cup (-\sqrt{3};0) \cup (0;\sqrt{3}) \cup (\sqrt{6};3)$

Ответ. $x \in (-3;-\sqrt{6}) \cup (-\sqrt{3};0) \cup (0;\sqrt{3}) \cup (\sqrt{6};3)$.

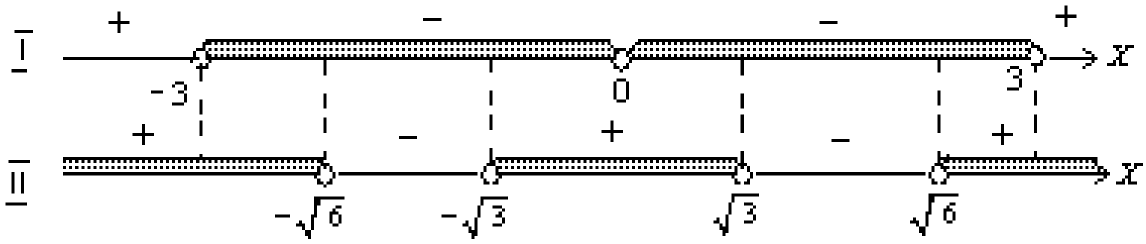


Рис. 3.3.7. Графическая интерпретация решения примера 3.3.6.

3.4 Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля

Рассмотрим основные приемы решения уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля.

1. Уравнения вида

$$|f(x)| = a \qquad (3.4.1)$$

Если $a < 0$, то решений нет;
если $a = 0$, то $f(x) = 0$;
если $a > 0$, то данное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = a, \\ f(x) = -a \end{array}\right.$$

.

Напомним, что два уравнения с одной переменной образуют совокупность уравнений, если ставится задача найти все такие значения переменной, каждое из которых является корнем хотя бы одного из данных уравнений.

2. Уравнение вида

$$|f(x)| = |g(x)| \qquad (3.4.2)$$

равносильно уравнению

$$f^2(x) = g^2(x) \iff (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right. .$$

3. Уравнение вида

$$|f(x)| = g(x) \qquad (3.4.3)$$

равносильно совокупности систем

$$1.\ \left\{\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ g(x) \geqslant 0; \end{array}\right. \qquad 2.\ \left\{\begin{array}{l} f(x) = -g(x), \\ g(x) \geqslant 0 \end{array}\right.$$

4. Уравнения, представляющие алгебраическую сумму двух и более модулей, а именно

$$|f_1(x)| + |f_2(x)| + \ldots + |f_n(x)| = g(x) \qquad (3.4.4)$$

решаются методом интервалов.

На практике это делается так :

1) находят значения x, при которых выражения, стоящие под знаком модуля обращаются в нуль;

2) полученными точками разбивают область допустимых значений переменной x на промежутки, на каждом из которых выражения под знаком модуля сохраняют знак;

3) раскрывают все модули на каждом из полученных промежутков и решают полученные уравнения.

Объединение найденных решений составляет множество решений заданного уравнения.

Решение неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, находится аналогично решению уравнений подобного вида.

Так, неравенство

$$|f(x)| < a \tag{3.4.5}$$

не имеет решения, если $a \leqslant 0$.

Если же $a > 0$, то $|f(x)| < a \iff -a < f(x) < a$.

Неравенство

$$|f(x)| > a \tag{3.4.6}$$

имеет в качестве решения область определения $f(x)$, если $a \leqslant 0$, и $|f(x)| > a \iff \left[\begin{array}{l} f(x) > a, \\ f(x) < -a \end{array} \right.$, если $a > 0$.

Неравенство

$$|f(x)| \leqslant |g(x)| \tag{3.4.7}$$

равносильно неравенству $f^2(x) \leqslant g^2(x)$.

Неравенства, содержащие алгебраическую сумму двух и более модулей, решаются методом интервалов по той же схеме, что и аналогичные уравнения.

Пример 3.4.1. Найдите сумму корней уравнения $|x^2 - 4x - 1| = 4$

1) 5 2) 6 3) 7 4) 8

Решение.

$$|x^2 - 4x - 1| = 4 \iff \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x - 1 = 4, \\ x^2 - 4x - 1 = -4 \end{array} \right. \implies$$

$$\left[\begin{array}{ll} x^2 - 4x - 5 = 0, & \implies x_1 = -1;\ x_2 = 5, \\ x^2 - 4x + 3 = 0 & \implies x_3 = 1;\ x_4 = 3. \end{array} \right.$$

Исходное уравнение имеет 4 корня, сумма которых равна 8. Выбираем ответ под номером 4.

Ответ. 4.

Пример 3.4.2. Найдите сумму корней уравнения $|x^2 - 2x| = |1 - 2x|$

1) -4 2) 0 3) 2 4) 4

Решение. Заданное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 2x = 1 - 2x, \\ x^2 - 2x = 2x - 1 \end{array} \right. \implies \left[\begin{array}{l} x^2 = 1, \\ x^2 - 4x + 1 = 0 \end{array} \right. .$$

Сумма корней первого из совокупности уравнений равна нулю, а сумма корней второго уравнения, по теореме Виета, равна 4.

Ответ. 4.

Пример 3.4.3. Найдите разность между наибольшим и наименьшим из корней уравнения $x^2 - 7|x| + 6 = 0$

1) 5 2) 12 3) 7 4) 9

Решение. Из свойств модуля вытекает, что функция $x^2 - 7|x| + 6$ – четная, и потому корнями заданного уравнения будут корни уравнения $x^2 - 7x + 6 = 0$, удовлетворяющие условию $x \geqslant 0$, и противоположные им числа. Корнями уравнения $x^2 - 7x + 6 = 0$ являются числа 1 и 6. Значит, корни исходного уравнения $x_{1,2} = \pm 1$ и $x_{3,4} = \pm 6$. Наибольший из корней $x = 6$, а наименьший $x = -6$. Искомая разность равна 12.

Ответ. 2.

Пример 3.4.4. Найдите произведение корней уравнения $|3x+1|x^2 = 27x + 9$

Решение. При условии, что $27x+9 \geqslant 0$(так как левая часть уравнения неотрицательна), данное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} (3x+1)x^2 = 27x+9, \\ (3x+1)x^2 = -(27x+9) \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} (3x+1)(x^2-9) = 0, \\ (3x+1)(x^2+9) = 0 \end{array}\right. \implies x = -\frac{1}{3} \text{ и } x = \pm 3.$$

Очевидно, что $x = -3$ не удовлетворяет условию $27x+9 \geqslant 0$. Таким образом, корнями заданного уравнения являются значения $x = -\dfrac{1}{3}$ и $x = 3$, произведение которых равно –1.

Ответ. –1.

Пример 3.4.5. Найдите сумму корней уравнения $|x+7| + |x+5| = 8$

Решение. Первое слагаемое уравнения обращается в нуль при $x = -7$, а второе при $x = -5$. Отметим эти значения на числовой оси и раскроем значение модулей на каждом из полученных промежутков.

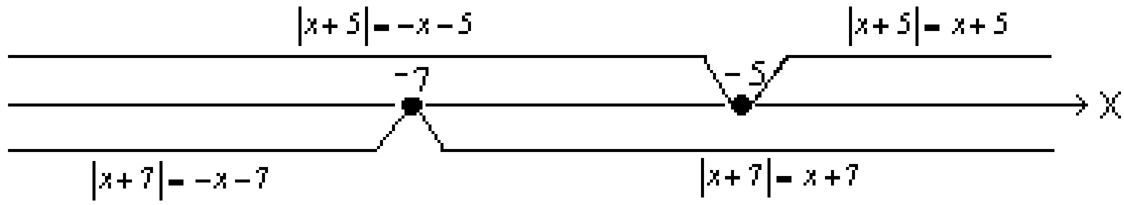


Рис. 3.4.1. Значения $|x+5|$ и $|x+7|$ на разных промежутках числовой оси.

Далее, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{ll} 1)\ -x-7-x-5 = 8 & \text{при } x < -7 \\ 2)\ x+7-x-5 = 8 & \text{при } -7 \leqslant x < -5 \\ 3)\ x+7+x+5 = 8 & \text{при } x \geqslant -5 \end{array}\right. \implies$$

$$\left[\begin{array}{ll} 1) -2x = 20 & \text{при } x < -7 \\ 2)\ 2 = 8 & \text{при } -7 \leqslant x < -5 \\ 3)\ 2x = -4 & \text{при } x \geqslant -5 \end{array}\right. \implies \left[\begin{array}{l} 1)\ x = -10 \\ 2) \text{ неверное равенство, т.е.} x \in \varnothing \\ 3)\ x = -2 \end{array}\right.$$

Так как $x = -10 \in (-\infty; -7)$ и $x = -2 \in (-5; \infty)$, то оба значения являются корнями уравнения, а их сумма равна –12.

Ответ. –12.

Пример 3.4.6. Найдите сумму корней уравнения $\dfrac{8}{|x+3|-4} = |x+3| + 3$

Решение. Обозначим $|x+3| = t \geqslant 0$. Тогда

$$\frac{8}{t-4} = t+3;\ t^2 - t - 20 = 0;\ t = 5; t = -4 - \text{посторонний корень.}$$

Возвращаемся к исходной переменной $|x+3| = 5 \implies x+3 = \pm 5 \implies \begin{matrix} x = 2, \\ x = -8. \end{matrix}$

Ответ. –6.

Пример 3.4.7. Укажите промежуток, содержащий сумму корней или корень, если он единственный, уравнения $x^2 - 4x\dfrac{|x-6|}{|x-6|} - 12 = 0$

1) $[-8; -4)$ 2) $[-4; 0)$ 3) $[0; ; 2)$ 4) $[2; 4)$

Решение. Рассмотрим два случая

1) $\begin{cases} x > 6, \\ x^2 - 4x - 12 = 0 \end{cases}$ и 2) $\begin{cases} x < 6, \\ x^2 + 4x - 12 = 0 \end{cases}$

1) $x^2 - 4x - 12 = 0 \implies x = 6;\ x = -2$. Корни этого уравнения не удовлетворяют условию $x > 6$.

2) $x^2 + 4x - 12 = 0 \implies x = -6;\ x = 2$. Полученные значения удовлетворяют условию $x < 6$. Таким образом, уравнение имеет два корня, и их сумма равна –4.

Ответ. 2.

Пример 3.4.8.Решите уравнение $(x+2)(|x| - 2) = 5$

Решение. Рассмотрим два случая

1) $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2 - 4 = 5 \end{cases} \implies \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2 = 9 \end{cases} \implies x = 3$

2) $\begin{cases} x < 0, \\ -(x+2)(x+2) = 5 \end{cases} \implies \begin{cases} x < 0, \\ (x+2)^2 = -5 \end{cases} \implies x \in \varnothing$

Уравнение имеет один корень $x = 3$.

Ответ. $x = 3$.

Пример 3.4.9. Решите неравенство $|x - 1| < 3$.

Решение. Возведем обе части неравенства в квадрат; при этом получим неравенство, равносильное данному : $(x-1)^2 < 9$, или $(x-4)(x+4) < 0$; $-2 < x < 4$.

Это же неравенство можно решить по–другому. Заданное неравенство записывается в виде двойного неравенства $-3 < x - 1 < 3$, которое равносильно системе неравенств

$\begin{cases} x - 1 < 3, \\ x - 1 > -3 \end{cases} \implies \begin{cases} x < 4, \\ x > -2 \end{cases}$

Ответ. $x \in (-2; 4)$.

Пример 3.4.10. Найдите наибольшее целое решение неравенства $\left|\dfrac{3x+5}{4x-1}\right| > 1$

1) 0 2) 1 3) 3 4) 5

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} 1)\ \dfrac{3x+5}{4x-1} > 1, \\ 2)\ \dfrac{3x+5}{4x-1} < -1 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} 1)\ \dfrac{6-x}{4x-1} > 0, \\ 2)\ \dfrac{7x+4}{4x-1} < 0 \end{array}\right.$$

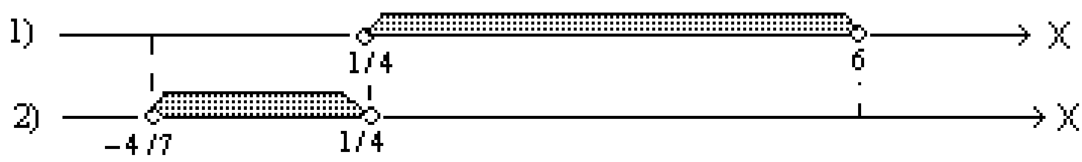


Рис. 3.4.2. Графическая интерпретация решения примера 3.4.10.

Решением совокупности неравенств является объединение множеств $\left(-\dfrac{4}{7}; \dfrac{1}{4}\right) \cup \left(\dfrac{1}{4}; 6\right)$. Наибольшее целое число этого множества 5.

Ответ. 4.

Пример 3.4.11. Решите неравенство $\dfrac{x+7}{(|x|-2)(8x+7)} \leqslant 0$.

Решение. Здесь нужно рассмотреть два случая : $x \geqslant 0$ и $x < 0$. Значит, данное неравенство равносильно совокупности двух систем :

$$1)\ \left\{\begin{array}{l} x \geqslant 0, \\ \dfrac{x+7}{(x-2)(8x+7)} \leqslant 0 \end{array}\right. \quad \text{и} \quad 2)\ \left\{\begin{array}{l} x < 0, \\ \dfrac{x+7}{(-x-2)(8x+7)} \leqslant 0 \end{array}\right.$$

Решаем первую систему :

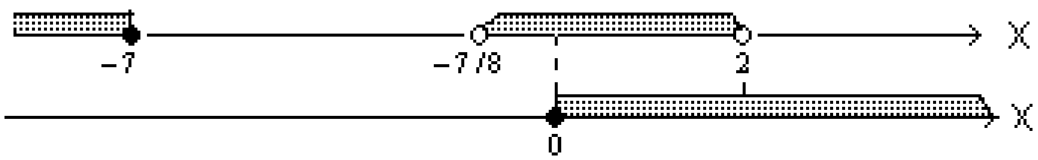


Рис. 3.4.3. Пересечение множеств $(-7/8; 2)$ и $[0; \infty)$.

Решением первой системы является промежуток $[0; 2)$.
Решаем вторую систему, предварительно переписав ее в виде :

$$\left\{\begin{array}{l} x < 0, \\ \dfrac{x+7}{(x+2)(8x+7)} \geqslant 0 \end{array}\right.$$

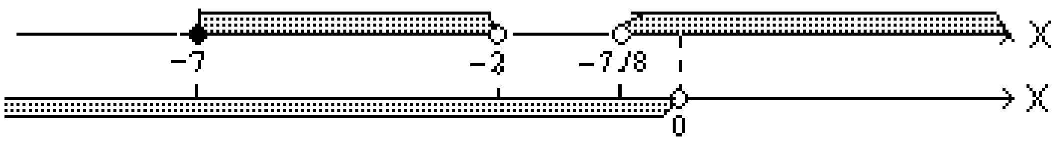


Рис. 3.4.4. Пересечение множеств $[-7;-2)\cup[-7/8;\infty)$ и $(-\infty;0)$.

Решение второй системы : $[-7;-2)\cup\left(-\dfrac{7}{8};0\right)$.

Ответ. $x\in[-7;-2)\cup\left(-\dfrac{7}{8};2\right)$.

Пример 3.4.12. Найдите наибольшее целое неположительное значение параметра a, при котором система неравенств $\begin{cases}|x-2|\leqslant 4,\\ x^2-a^2>0\end{cases}$ не имеет решений

Решение. Система неравенств не имеет решений, если множества решений первого и второго неравенства не пересекаются.

Решаем первое неравенство :

$|x-2|\leqslant 4 \iff -4\leqslant x-2\leq 4 \iff -2\leqslant x\leqslant 6.$

Переходя к решению второго неравенства, отметим, что, по условию задачи $a\leqslant 0$, кроме того, $a\neq 0$, так как в противном случае $x^2>0$, что выполняется при всех $x\neq 0$, и, таким образом, система обязательно будет иметь решения. Итак,

$x^2-a^2>0 \iff \left[\begin{array}{l}x>-a,\\ x<a\end{array}\right.$

Изобразим на рисунке решения обоих неравенств.

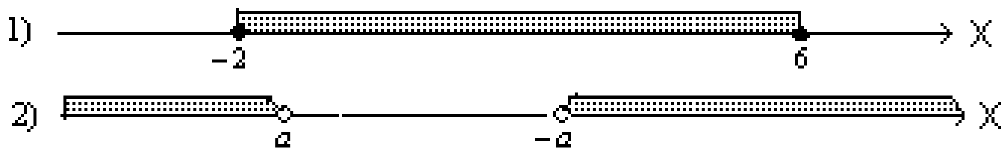


Рис. 3.4.5. Пересечение пусто только при $-a\geqslant 6$.

Очевидно, что полученные множества не будут пересекаться, если $-a\geqslant 6$, или $a\leqslant -6$.

Ответ. $a=-6$.

Пример 3.4.13. Решите неравенство $||x+2|-2|<2$.

Решение. Данное неравенство равносильно двойному неравенству

$-2<|x+2|-2<2 \iff 0<|x+2|<4 \iff \begin{cases}|x+2|<4,\\ |x+2|>0\end{cases} \iff \begin{cases}-4<x+2<4,\\ x\neq -2\end{cases} \iff$

$\begin{cases}-6<x<2,\\ x\neq -2\end{cases}$

Ответ. $x\in(-6;-2)\cup(-2;2)$.

Пример 3.4.14. Найдите наименьшее целое решение неравенства $|x-2|+|x-3| \leqslant x+4$

Решение. Значения $x=2$ и $x=3$, при которых слагаемые поочередно обращаются в ноль, разбивают числовую ось на три интервала. Решаем данное неравенство на каждом из интервалов :

1) $\begin{cases} x < 2, \\ -x+2-x+3 \leqslant x+4 \end{cases} \Longrightarrow \dfrac{1}{3} \leqslant x < 2$

2) $\begin{cases} 2 \leqslant x < 3, \\ x-2-x+3 \leqslant x+4 \end{cases} \Longrightarrow 2 \leqslant x < 3$

3) $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x-2+x-3 \leqslant x+4 \end{cases} \Longrightarrow 3 \leqslant x \leqslant 9$

Объединяя полученные множества решений, находим $\dfrac{1}{3} \leqslant x \leqslant 9$.

Следовательно, наименьшим целым решением является число 1.

Ответ. $x=1$.

3.5 Иррациональные уравнения и неравенства

3.5.1 Иррациональные уравнения

Иррациональным уравнением называется уравнение, содержащее неизвестную величину под знаком корня.

При решении иррациональные уравнения сводят к рациональным уравнениям.

Это осуществляется возведением обеих частей уравнения в степень с соответствующим показателем или с помощью введения новой переменной. При возведении обеих частей уравнения в одну и ту же степень следует иметь в виду :

при натуральном n

$$\text{уравнение} \quad \sqrt[2n]{f(x)} = \varphi(x) \quad \text{равносильно системе} \quad \begin{cases} f(x) = (\varphi(x))^{2n}, \\ \varphi(x) \geqslant 0 \end{cases},$$

$$\text{уравнение} \quad \sqrt[2n+1]{f(x)} = \varphi(x) \quad \text{равносильно уравнению} \quad f(x) = (\varphi(x))^{2n+1}.$$

Обычно при решении иррациональных уравнений придерживаются следующего порядка действий :

1) находят область допустимых значений уравнения;
2) переходят к соответствующему рациональному уравнению ;
3) делают проверку полученных решений.

Однако, если, например, нахождение области допустимых значений функций, входящих в уравнение, приводит к громоздким преобразованиям, можно сразу возвести уравнение в соответствующую степень. В этом случае обязательна проверка найденных решений путем подстановки их в исходное уравнение.

С другой стороны, проверка подстановкой в исходное уравнение тоже бывает весьма затруднительной. Тогда решают систему неравенств, включающую условие совпадения знаков обеих частей уравнения и ОДЗ функций, входящих в уравнение. После этого переходят к рациональному уравнению.

Пример 3.5.1. Решите уравнение $\sqrt{4x-1} - x = 1$

Решение. Перепишем уравнение в виде $\sqrt{4x-1}=x+1$ и возведем обе части в квадрат :

$4x-1=x^2+2x+1;\quad x^2-2x+2=0.$

Последнее уравнение корней не имеет и, следовательно, заданное уравнение также не имеет корней.

Пример 3.5.2. Решите уравнение $\sqrt{x-2}-\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}=\sqrt{2x-6}$

Решение. Приведем уравнение к общему знаменателю и сделаем необходимые преобразования :

$x-3=\sqrt{(x-2)(2x-6)} \Longrightarrow (x-3)^2=(x-2)(2x-6) \Longrightarrow (x-3)^2-2(x-2)(x-3)=0;$
$(x-3)(x-3-2x+4)=0 \Longrightarrow (x-3)(1-x)=0 \Longrightarrow x_1=3;\quad x_2=1.$

Очевидно, что при $x=1$ обе части уравнения не имеют смысла, так как подкоренные выражения отрицательны. Следовательно, $x=1$ – посторонний корень, полученный в результате возведения обеих частей уравнения в четную степень. Проверкой убеждаемся, что $x=3$ удовлетворяет заданное уравнение.

Ответ. $x=3$.

Пример 3.5.3. Решите уравнение $\sqrt{x-6}+\sqrt{2-x}=1$

Решение. Уравнение не имеет корней. Действительно, найдем область определения этого уравнения : $\begin{cases} x-6\geqslant 0, \\ 2-x\geqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x\geqslant 6, \\ x\leqslant 2. \end{cases}$

Последняя система противоречива, и потому область определения уравнения – пустое множество и, следовательно, ни одно число не может быть корнем уравнения.

Пример 3.5.4. Решите уравнение $\sqrt{5x+2}=3-\sqrt{2x-1}$

Решение. Заданное уравнение эквивалентно системе условий :

$$\begin{cases} 5x+2\geqslant 0, \\ 2x-1\geqslant 0, \\ 3-\sqrt{2x-1}\geqslant 0, \\ 5x+2=(3-\sqrt{2x-1})^2, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x\geqslant -\dfrac{2}{5}, \\ x\geqslant 0,5, \\ x\leqslant 5, \\ 3x-6=-6\sqrt{2x-1}, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 0,5\leqslant x\leqslant 5, \\ 2-x=2\sqrt{2x-1}, \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} 0,5\leqslant x\leqslant 5, \\ 2-x\geqslant 0, \\ (2-x)^2=4(2x-1), \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 0,5\leqslant x\leqslant 5, \\ x\leqslant 2, \\ x^2-12x+8=0, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 0,5\leqslant x\leq 2, \\ x_1=6+2\sqrt{7};\quad x_2=6-2\sqrt{7}. \end{cases}$$

Последняя система имеет единственное решение $x=6-2\sqrt{7}$.

Заметим, что, если бы мы делали проверку значений $x_{1,2}=6\pm 2\sqrt{7}$ подстановкой в исходное уравнение, нам бы пришлось делать громоздкие вычисления с радикалами.

Пример 3.5.5. Решите уравнение $\sqrt{2x^2-7x-3}+x=3$

Решение. Перепишем уравнение в виде $\sqrt{2x^2-7x-3}=3-x$.

Возведем обе части уравнения в квадрат и, сделав необходимые преобразования, найдем корни : $2x^2-7x-3=(3-x)^2;\ x^2-x-12=0;\ x_1=-3;\ x_2=4.$

Подставляя полученные значения в исходное уравнение, убеждаемся, что $x=4$ – посторонний корень.

Ответ. $x = 3$.

Пример 3.5.6. Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $\sqrt{x+5+2\sqrt{x+4}} - 1 = (x^2 - 12x - 64)^{1/3}$

Решение. Преобразуем подкоренное выражение левой части уравнения : $x+5+2\sqrt{x+4} = (x+4)+2\sqrt{x+4}+1 = (\sqrt{x+4}+1)^2$. Так как $\sqrt{x+4}+1 > 0$ при $x \geqslant -4$, то $\sqrt{(\sqrt{x+4}+1)^2} = |\sqrt{x+4}+1| = \sqrt{x+4}+1$.

После преобразований уравнение запишется в виде : $\sqrt{x+4} = (x^2 - 12x - 64)^{1/3}$. Возведем обе части уравнения в шестую степень :

$$(x+4)^3 = (x^2 - 12x - 64)^2 \Longrightarrow (x+4)^3 - (x+4)^2(x-16)^2 = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (x+4)^2(x+4-x^2+32x-256) = 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x^2-33x+252=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=21 \\ x=12 \end{array}\right. .$$

Непосредственной подстановкой полученных значений x в исходное уравнение убеждаемся, что $x = 12$ не является корнем уравнения. Сумма корней $x_1 = -4$ и $x_2 = 21$ равна 17.

Ответ. 17.

Пример 3.5.7. Решите уравнение $x^2 + 12x + \sqrt{x^2+12x+4} = 52$

Решение. Перепишем уравнение в виде $x^2 + 12x + 4 + \sqrt{x^2+12x+4} = 56$ и введем новую переменную $\sqrt{x^2+12x+4} = t \geqslant 0$: $t^2 + t - 56 = 0 \Longrightarrow (t+8)(t-7) = 0 \Longrightarrow t_1 = -8; t_2 = 7$.

Возвращаясь к подстановке, воспользуемся значением $t = 7$ ($t = -8$ не подходит по условию) : $\sqrt{x^2+12x+4} = 7 \Longrightarrow x^2 + 12x - 45 = 0 \Longrightarrow (x-15)(x+3) = 0 \Longrightarrow x_1 = -15; x_2 = 3$.

Оба значения удовлетворяют исходное уравнение.

Ответ. $x_1 = -15$; $x_2 = 3$.

Пример 3.5.8. Укажите промежуток, содержащий сумму корней или корень, если он единственный, уравнения $\sqrt{-\dfrac{x}{3} - 3} = 8\left(\dfrac{x}{3}+3\right)^2$

1) $(-19; -18)$ 2) $(-15; -14)$ 3) $(-13; -12)$ 4) $(-11; -10)$

Решение. Обозначим $\dfrac{x}{3} + 3 = t$. Тогда уравнение запишется в виде $\sqrt{-t} = 8t^2$.

Возводим обе части уравнения в квадрат и находим корни : $64t^4 + t = 0$; $t = 0$; $t = -\dfrac{1}{4}$.

Далее, если $t = 0$, то $x = -9$; если $t = -\dfrac{1}{4}$, то $x = -\dfrac{39}{4}$.

Проверяем оба значения и убеждаемся, что они удовлетворяют уравнению. Сумма корней равна $-18,75$ и содержится в промежутке $(-19; -18)$.

Ответ. 1.

Пример 3.5.9. Решите уравнение $\sqrt[8]{x^5}+2\sqrt{x}=3\sqrt[4]{x^3}$

Решение. Сделаем замену $y=\sqrt[8]{x}$, причем $y\geqslant 0$, тогда

$$\begin{cases} y^5+2y^4=3y^6, \\ y\geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3y^6-y^5-2y^4=0, \\ y\geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y^4(3y^2-y-2)=0, \\ y\geqslant 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y^4=0, \\ 3y^2-y-2=0 \end{array}\right. \\ y\geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=0, \\ y=1, \\ y=-\dfrac{2}{3}, \end{array}\right. \\ y\geqslant 0 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} y=0, \\ y=1, \end{array}\right.$$

т.е. для определения x имеется совокупность двух уравнений

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sqrt[8]{x}=0, \\ \sqrt[8]{x}=1, \end{array}\right. \\ x\geqslant 0 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right. .$$

Непосредственной подстановкой полученных значений в исходное уравнение проверяем, что они оба являются корнями уравнения.

Ответ. $x_1=0$; $x_2=1$.

Пример 3.5.10. Решите уравнение $(x^2-4)\sqrt{1-7x}=0$

Решение. Исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x^2-4=0, \\ \sqrt{1-7x}=0 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-2, \\ x=\dfrac{1}{7} \end{array}\right.$$

Очевидно, что $x=2$ не может быть корнем уравнения, так как при этом значении подкоренное выражение $(1-7x)$ отрицательно. Остальные два значения удовлетворяют уравнению.

Ответ. $x_1=-2$; $x_2=\dfrac{1}{7}$.

Пример 3.5.11. Решите уравнение $\sqrt{64-16x+x^2}+\sqrt{2x^2-13x-34}=x-8$

Решение. Из условия следует, что $x\geqslant 8$. Перепишем уравнение в виде
$\sqrt{(x-8)^2}+\sqrt{2x^2-13x-34}=x-8$.
На множестве $x\geqslant 8$ это уравнение равносильно уравнению
$x-8+\sqrt{2x^2-13x-34}=x-8 \implies \sqrt{2x^2-13x-34}=0 \implies$

$$2x^2-13x-34=0 \implies \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{17}{2}, \\ x=-2 \end{array}\right.$$

Очевидно, что значение $x=-2$ является посторонним корнем для указанного уравнения, а $x=\dfrac{17}{2}$ удовлетворяет его.

Ответ. $x=8,5$.

Пример 3.5.12. Решите уравнение $\sqrt[3]{x-6}-\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{3x-6}$

Решение. Возведем обе части уравнения в куб, применяя формулу
$(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^3=a-b-3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})$.

Получим $x-6-x-3\sqrt[3]{x(x-6)}(\sqrt[3]{x-6}-\sqrt[3]{x})=3x-6$. Сделав приведение подобных членов и сократив обе части на 3, приходим к уравнению $\sqrt[3]{x(x-6)}(\sqrt[3]{x-6}-\sqrt[3]{x})=-x$.

Воспользовавшись условием задачи, заменим выражение, стоящее в скобках, на $\sqrt[3]{3x-6}$. Получим уравнение $\sqrt[3]{x(x-6)(3x-6)}=-x$, которое, вообще говоря, не эквивалентно заданному, следовательно, его корни нужно обязательно проверить путем подстановки в исходное уравнение.

Возведем обе части последнего уравнения в куб

$3x^3-24x^2+36x=-x^3 \Longrightarrow 4x^3-24x^2+36x=0 \Longrightarrow 4x(x^2-6x+9)=0 \Longrightarrow x_1=0;\ x_2=3.$

Подставив полученные значения в исходное уравнение, убеждаемся, что $x=3$ – посторонний корень.

Ответ. $x=0$.

Пример 3.5.13. Найдите все значения a, при которых уравнение $\sqrt{x+a}=x$ имеет два разных корня

Решение. Заданное уравнение равносильно системе условий

$$\begin{cases} x+a=x^2, \\ x\geqslant -a, \\ x\geqslant 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2-x-a=0, \\ x\geqslant -a, \\ x\geqslant 0 \end{cases}$$

Корни квадратного уравнения $x^2-x-a=0$ находятся по формулам $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$ при условии $1+4a>0$. Следовательно, последняя система разбивается на две системы

$$1)\quad \begin{cases} x=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}, \\ 1+4a>0, \\ x\geqslant -a,\ x\geqslant 0 \end{cases} \quad \text{и}\quad 2)\quad \begin{cases} x=\dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2}, \\ 1+4a>0,\ x\geqslant -a, \\ x\geqslant 0. \end{cases}$$

Система 1) равносильна системе неравенств

$$\begin{cases} 1+4a>0, \\ \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\geqslant -a, \\ \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\geqslant 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a>-\dfrac{1}{4} \\ \sqrt{1+4a}\geqslant -2a-1 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} a>-\dfrac{1}{4} \\ -2a-1\geqslant 0 \\ 1+4a\geq 4a^2+4a+1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a>-\dfrac{1}{4} \\ a\leqslant -\dfrac{1}{2} \\ a^2\leqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow a\in\emptyset$$

Система 2) равносильна системе неравенств

$$\begin{cases} 1+4a>0 \\ \dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2}\geqslant -a \\ \dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2}\geqslant 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a>-\dfrac{1}{4} \\ \sqrt{1+4a}\leqslant 1+2a \\ \sqrt{1+4a}\leqslant 1 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} a > -\dfrac{1}{4} \\ 1+4a \leqslant 1+4a+4a^2 \\ a \leqslant 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a > -\dfrac{1}{4} \\ a \leqslant 0. \end{cases}$$

<u>Ответ.</u> $a \in \left(-\dfrac{1}{4}; 0\right]$.

3.5.2 Иррациональные неравенства

Иррациональным неравенством называется неравенство, содержащее переменную величину под знаком корня.

Решение иррациональных неравенств сводится к решению равносильной ему совокупности систем рациональных неравенств.

При этом следует помнить, что :

1) если обе части неравенства возвести в нечетную степень, то получится неравенство, равносильное заданному;

2) обе части неравенства можно возводить в четную степень только тогда, когда они неотрицательны. В этом случае получается неравенство, равносильное заданному на области допустимых значений.

Рассмотрим простейшие иррациональные неравенства.

1. $$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > (g(x))^{2n}, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

2. $$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \iff \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < (g(x))^{2n} \end{cases}.$$

Пример 3.5.14. Решите неравенство $\sqrt{4x+5} > \sqrt{5x+4}$

<u>Решение.</u> Заданное неравенство равносильно такой системе неравенств

$$\begin{cases} 4x+5 > 0, \\ 5x+4 \geq 0, \\ 4x+5 > 5x+4 \end{cases} \implies \begin{cases} x > -\dfrac{5}{4}, \\ x \geq -\dfrac{4}{5}, \\ x < 1 \end{cases}$$

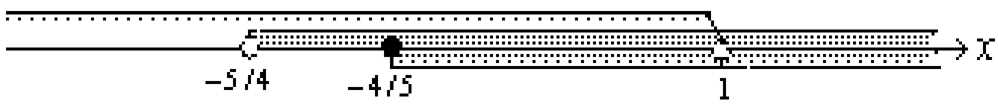


Рис. 3.5.1. Пересечение трёх множеств.

Очевидно, решением неравенства является множество $[-\dfrac{4}{5}; 1)$.

<u>Ответ.</u> $[-\dfrac{4}{5}; 1)$.

Пример 3.5.15. Решите неравенство $\sqrt[3]{27+7x} < x+3$

Решение. Возведем в куб обе части неравенства. Получим неравенство, равносильное заданному : $27+7x < (x+3)^3 \iff x^3+9x^2+27x+27 > 27+7x \iff x^3+9x^2+20x > 0 \iff x(x+4)(x+5) > 0$.

Последнее неравенство решаем методом интервалов

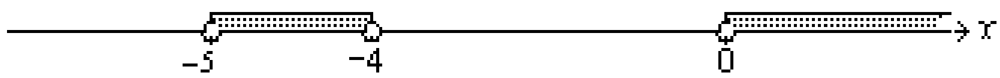


Рис. 3.5.2. Решение неравенства методом интервалов.

Ответ. $(-5;-4) \cup (0;\infty)$.

Пример 3.5.16. Решите неравенство $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+13} \leqslant 6$

Решение. ОДЗ заданного неравенства есть множество $[-1;\infty)$. Возведем обе части неравенства в квадрат и перейдем к равносильной ему системе неравенств

$$\begin{cases} x+1+x+13+2\sqrt{x^2+14x+13} \leqslant 36, \\ x \geqslant -1, \\ x \geqslant -13 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+14x+13} \leqslant 11-x, \\ x \geqslant -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+14x+13 \leqslant (11-x)^2, \\ x < 11, \\ x \geqslant -1 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 36x \leqslant 108, \\ x < 11, \\ x \geqslant -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leqslant 3, \\ x \geqslant -1 \end{cases}$$

Ответ. $[-1;3]$.

Пример 3.5.17. Решите неравенство $x+\sqrt{x+1} \leqslant 1$

Решение. Перепишем неравенство в виде $\sqrt{x+1} \leqslant 1-x$ и перейдем к равносильной системе неравенств

$$\begin{cases} x \geqslant -1, \\ x \leqslant 1, \\ x+1 \leqslant (1-x)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geqslant -1, \\ x \leqslant 1, \\ x^2-2x+1 \geqslant x+1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geqslant -1, \\ x \leqslant 1, \\ x^2-3x \geqslant 0 \end{cases}$$

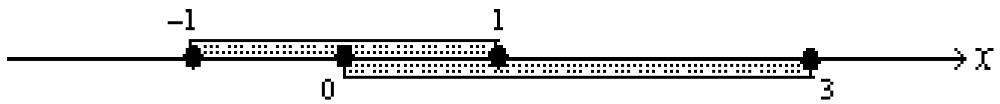


Рис. 3.5.3. Решением неравенства является множество $[-1;0]$.

Ответ. $[-1;0]$.

Пример 3.5.18. Решите неравенство $\sqrt{4x-x^2} > x-2$

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств :

1) $\begin{cases} 4x-x^2 \geqslant 0, \\ x-2 < 0 \end{cases}$ и 2) $\begin{cases} 4x-x^2 > (x-2)^2, \\ x-2 \geqslant 0. \end{cases}$

Найдем решение каждой из систем :

1) $\begin{cases} x(x-4) \leqslant 0, \\ x < 2 \end{cases}$ $\quad x \in [0; 2)$

2) $\begin{cases} x^2 - 4x + 4 < 4x - x^2 \\ x \geqslant 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2 - 8x + 4 < 0 \\ x \geqslant 2 \end{cases} \iff \begin{cases} (x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2}) < 0 \\ x \geqslant 2 \end{cases}$

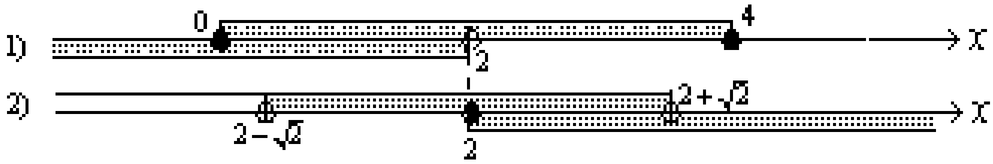


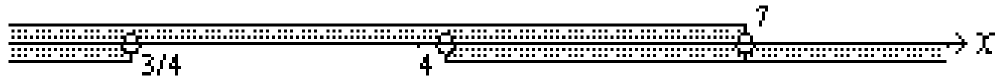
Рис. 3.5.4. Решением неравенства является множество $[2; 2+\sqrt{2})$.

Ответ. $[0; 2+\sqrt{2})$.

Пример 3.5.19. Найдите наибольшее целое решение неравенства $\dfrac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}} < 0$

Решение. Так как знаменатель на области допустимых значений не может принимать отрицательных значений, то заданное неравенство равносильно системе

$\begin{cases} x - 7 < 0 \\ 4x^2 - 19x + 12 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 7 < 0 \\ \left(x - \dfrac{3}{4}\right)(x-4) > 0 \end{cases}$



:
Рис. 3.5.5. Решением системы является множество $(-\infty; \dfrac{3}{4}) \cup (4; 7)$.

Наибольшее целое решение равно 6.

Ответ. 6.

Пример 3.5.20. Найдите сумму целых решений неравенства $\dfrac{2\sqrt{3-x}-1}{2-\sqrt{3-x}} \geqslant 1$

Решение. Обозначив $\sqrt{3-x} = t \geqslant 0$, перейдем к неравенству
$\dfrac{2t-1}{2-t} \geqslant 1 \iff \dfrac{3t-3}{2-t} \geqslant 0.$

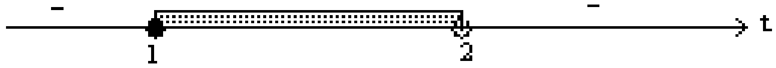


Рис. 3.5.6. $1 \leqslant t < 2$.

Итак, $1 \leqslant t < 2$. Возвращаясь к подстановке, получим систему неравенств
$\begin{cases} \sqrt{3-x} < 2 \\ \sqrt{3-x} \geqslant 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 3 - x \geqslant 0 \\ 3 - x < 4 \\ 3 - x \geqslant 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leqslant 3 \\ x > -1 \\ x \leqslant 2. \end{cases}$

Целые решения неравенства 0, 1, 2. Сумма целых решений равна 3.

Ответ. 3.

3.6 Задачи для самостоятельного решения

№ 3.6.1. Решите уравнение $\dfrac{71-3x}{6x-9}=\dfrac{1}{3}$

№ 3.6.2. Решите уравнение $(x+15)(x+5)=-9$

№ 3.6.3. Решите уравнение $12x+\dfrac{20}{x}-\dfrac{25}{x^2}-15=0$

№ 3.6.4. Решите уравнение $\dfrac{8x^3+27}{4x+6}=5x+21$

№ 3.6.5. Решите уравнение $10x^3+x^2-80-\dfrac{8}{x}=0$

№ 3.6.6. Решите уравнение $\dfrac{5x^2-17x+12}{3x^2-x-2}=\dfrac{(3x-2)^2}{9x^2-4}$

№ 3.6.7. Решите уравнение $x^2+\dfrac{1}{x^2}+x+\dfrac{1}{x}=4$

№ 3.6.8. Решите уравнение $x^4-9x^3+29x^2-39x+18=0$

№ 3.6.9. Решите уравнение $2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2=13(x^3-1)$

№ 3.6.10. Решите уравнение $\dfrac{3x^2-1}{x}+\dfrac{3x}{3x^2-x-1}=-3$

№ 3.6.11. Решите уравнение $(x-3)(x-4)(x-7)(x-8)=60$

№ 3.6.12. Решите уравнение $x(x+1)(x+2)(x+3)=48$

№ 3.6.13. Решите уравнение $2x^3+7x^2+7x+2=0$

№ 3.6.14. Решите уравнение $6x^3-9x^2-9x+6=0$

№ 3.6.15. Решите уравнение $2x^4-9x^3+14x^2-9x+2=0$

№ 3.6.16. Найдите произведение корней уравнения $\dfrac{x+1}{2x+5}-\dfrac{4x+10}{x+1}=1$

№ 3.6.17. Найдите произведение корней уравнения $\dfrac{3x-2}{x+4}+\dfrac{2x+8}{3x-2}=3$

№ 3.6.18. Найдите произведение корней уравнения $\dfrac{3x-1}{2x+3}+\dfrac{4x+6}{3x-1}=3$

№ 3.6.19. Найдите произведение корней уравнения $\dfrac{2x-3}{x+6}-\dfrac{3x+18}{2x-3}=2$

№ 3.6.20. Найдите произведение корней уравнения $x^3-4x^2+36-\dfrac{15}{x-4}=9x+\dfrac{15}{4-x}$

№ 3.6.21. Найдите произведение корней уравнения $x^3-x^2+9-\dfrac{10}{x-1}=9x+\dfrac{10}{1-x}$

№ 3.6.22. Найдите произведение корней уравнения $x^3-3x^2+18+\dfrac{14}{x-3}=6x-\dfrac{14}{3-x}$

№ 3.6.23. Найдите произведение корней или корень, если он единственный, уравнения $\dfrac{x-3}{x}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{5x+8}{x^2+2x}$

№ 3.6.24. Найдите произведение корней или корень, если он единственный, уравнения $\dfrac{x+4}{x}+\dfrac{1}{x-5}=\dfrac{3x-10}{x^2-5x}$

№ 3.6.25. Найдите произведение корней или корень, если он единственный, уравнения $\dfrac{x-6}{x}-\dfrac{1}{x+7}=\dfrac{x+14}{x^2+7x}$

№ 3.6.26. Найдите сумму корней или корень, если он единственный, уравнения $\dfrac{x-4}{x-3}-\dfrac{4}{x+3}=-\dfrac{6}{x^2-9}$

№ 3.6.27. Найдите сумму корней уравнения $\dfrac{(6x+30)(x^2+x-30)}{x+6}=0$

№ 3.6.28. Найдите сумму корней уравнения $\dfrac{(4x-16)(x^2-5x-14)}{x-7}=0$

№ 3.6.29. Найдите корень или сумму различных корней, если их несколько, уравнения $(5x^2-7x+3)(5x^2+x+3)=20x^2$

№ 3.6.30. Найдите сумму модулей корней уравнения $(x-1)(x^2+4x-8)=6x^2-6x$

№ 3.6.31. Найдите сумму модулей корней уравнения $(x+5)(x^2-4x-20)=-3x^2-15x$

№ 3.6.32. Найдите сумму модулей корней уравнения $(x-3)(x^2-7x-12)=-6x^2+18x$

№ 3.6.33. Найдите произведение корней уравнения $\dfrac{x^3+3x^2-8x-30}{x^2+x-12}=1$

№ 3.6.34. Найдите произведение корней уравнения $\dfrac{x^3+3x^2+4x+4}{x^2+5x+6}=1$

№ 3.6.35. Найдите произведение корней уравнения $\dfrac{x^3+4x^2-x-10}{x^2+3x+2}=1$

№ 3.6.36. Найдите сумму корней или корень, если он единственный, уравнения

$$\frac{x(x-3)}{\dfrac{5}{x-11}-\dfrac{4}{x-10}}=\frac{18}{\dfrac{4}{10-x}+\dfrac{5}{x-11}}$$

1) -2 2) -3 3) 3 4) -21

№ 3.6.37. Найдите сумму корней или корень, если он единственный, уравнения

$$\frac{x(x+4)}{\dfrac{3}{x-11}-\dfrac{2}{x-8}}=\frac{12}{\dfrac{3}{x-11}+\dfrac{2}{8-x}}$$

1) 13 2) -4 3) -6 4) -5

№ 3.6.38. Найдите длину средней линии трапеции, длины оснований которой численно равны корням уравнения $\sqrt{7}x^2-28x+14=0$

1) $2\sqrt{7}$ 2) $4\sqrt{7}$ 3) 14 4) 7

№ 3.6.39. В первые сутки количество бактерий в пробирке увеличилось на 30%, а на вторые сутки – на 20% . На сколько процентов увеличилось количество бактерий за эти двое суток ?

1) 50 2) 56 3) 60 4) 25

№ 3.6.40. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(a-1)x^2+x+5=0$ имеет единственное решение

№ 3.6.41. Найдите сумму квадратов корней уравнения $24x^2+15x-2=0$

№ 3.6.42. В уравнении $x^2-18x+p=0$ сумма квадратов корней равна 170. Найдите значение p

№ 3.6.43. Запишите уравнение, корни которого обратны корням уравнения $5x^2-7x-34=0$

№ 3.6.44. Найдите сумму кубов корней уравнения $\dfrac{1}{x^3+10}-\dfrac{1}{x^3+11}=\dfrac{1}{2}$

№ 3.6.45. Найдите наибольшее целое значение параметра a, при котором уравнение $x^3+8x^2+(a+13)x+2a+2=0$ имеет три различных корня

№ 3.6.46. Найдите значение параметра a (или сумму таких значений, если их несколько), для которых уравнение $\dfrac{x^2-3a}{x^2-25}=\dfrac{ax+5}{x^2-25}$ имеет единственное решение

№ 3.6.47. Если повысить скорость поезда на 10 км/час, то время, затрачиваемое поездом на прохождение пути в 720 км, сокращается на 1 час. Найдите первоначальную скорость поезда

№ 3.6.48. Одна тракторная бригада должна была вспахать 240 га, а другая – на 35% больше первой. Вспахивая ежедневно на 3 га меньше второй бригады, первая бригада закончила работу на 2 дня раньше второй. Сколько гектаров вспахивала каждая бригада ежедневно ?

№ 3.6.49. Проехав за час половину пути, машинист увеличил скорость поезда на 15 км/час и проехал вторую половину пути за 45 мин. С какой скоростью двигался поезд первую половину пути ?

№ 3.6.50. Сумма катетов прямоугольного треугольника равна 23 см. Если каждый из катетов уменьшить на 3 см, а гипотенузу – на 4 см, то снова получим прямоугольный треугольник. Найдите периметр данного треугольника

№ 3.6.51. 5 стаканов черники и 7 стаканов голубики стоят вместе 227 рублей, а 4 стакана черники и 9 стаканов голубики – 253 рубля. Сколько рублей стоят вместе 2 стакана черники и 1 стакан голубики ?

1) 53 2) 52 3) 51 4) 50

№ 3.6.52. От двух станций, расстояние между которыми 450 км, навстречу друг другу одновременно отправились два поезда и встретились через 5 часов. Найдите скорость каждого поезда, если один из них проходит весь путь на 2 часа 15 минут быстрее второго

№ 3.6.53. Сумма длин гипотенузы и одного из катетов прямоугольного треугольника равна 25 см. Если этот катет уменьшить на 7 см, а второй катет увеличить на 7 см, то получится прямоугольный треугольник с той же гипотенузой. Найдите периметр данного треугольника

№ 3.6.54. Из двух пунктов, расстояние между которыми 81 км, навстречу друг другу одновременно выехали два велосипедиста и встретились через 3 часа. Найдите скорость каждого велосипедиста, если один из них проезжает весь путь на 1 час 21 минуту быстрее второго

№ 3.6.55. Две бригады, работая вместе, могут отремонтировать дорогу за 6 часов 40 минут. Если сначала одна бригада самостоятельно отремонтирует $\dfrac{1}{3}$ дороги, а затем другая – остаток, то весь ремонт будет выполнен за 14 часов. За сколько времени может отремонтировать дорогу каждая бригада, работая самостоятельно ?

№ 3.6.56. По двум окружностям равных диаметров равномерно вращаются две точки. Одна из них совершает оборот на 5 сек. быстрее другой, и потому успевает сделать за 1 мин. на два оборота больше. Сколько оборотов в минуту выполняет каждая точка ?

№ 3.6.57. Две точки двигаются по окружности в одном направлении. Первая точка проходит окружность на 2 сек. быстрее второй и догоняет ее каждые 12 сек. За сколько секунд каждая точка проходит окружность ?

№ 3.6.58. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x+5y=1, \\ 4x+3y=9 \end{cases}$

№ 3.6.59. Решите систему уравнений $\begin{cases} 6x+5y=-8, \\ 4x+7y=2 \end{cases}$

№ 3.6.60. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+6xy=39, \\ y+3xy=20 \end{cases}$

№ 3.6.61. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{2x-y}{3}-\dfrac{x-2y}{2}=\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{2x+y}{2}-\dfrac{x+2y}{3}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$

№ 3.6.62. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^3+2yx^3=24, \\ y-3yx^3=-23 \end{cases}$

№ 3.6.63. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=9, \\ xy=8 \end{cases}$

№ 3.6.64. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ y-x=-1 \end{cases}$

№ 3.6.65. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2-y^2=3, \\ x^4+y^4=17 \end{cases}$

№ 3.6.66. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x^2 + xy - 6y^2 = 0, \\ x^2 - 4xy + 3y^2 = -3 \end{cases}$

№ 3.6.67. Решите систему уравнений $\begin{cases} 5x^2 + 2xy + y^2 = 20, \\ x^2 + 2xy + 2y^2 = 25 \end{cases}$

№ 3.6.68. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{3}{2x+y} + \dfrac{1}{2x-y} = \dfrac{2}{5}, \\ \dfrac{7}{2x+y} + \dfrac{2}{2x-y} = \dfrac{3}{5} \end{cases}$

№ 3.6.69. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{2}, \\ x^2 - 2y^2 = 2 \end{cases}$

№ 3.6.70. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ x + y + 2xy = 38 \end{cases}$

№ 3.6.71. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x + 2y - xy = 6, \\ x^2 + y^2 - 3xy = 5 \end{cases}$

№ 3.6.72. При каком значении a система уравнений $\begin{cases} (a-2)x + 5y = 10, \\ 3x + ay = -6 \end{cases}$

1) имеет единственное решение ?
2) не имеет решений ?
3) имеет бесконечное множество решений ?

№ 3.6.73. При каком значении a система уравнений $\begin{cases} (a+4)x + 3y = -5, \\ 4x + ay = 10 \end{cases}$

1) имеет единственное решение ?
2) не имеет решений ?
3) имеет бесконечное множество решений ?

№ 3.6.74. Найдите разность $x_0 - 6y_0$, где $x_0,\ y_0$ – решение системы уравнений $\begin{cases} x^2 + 3y = 2x + 14 \\ x + y = 6 \end{cases}$ и $x_0 < y_0$

№ 3.6.75. Решите неравенство $(x-3)(x+2) \leqslant 0$

№ 3.6.76. Решите неравенство $\dfrac{2-x}{x-8} \leqslant 1$

№ 3.6.77. Решите неравенство $\dfrac{x+4}{2x-7} < 2$

№ 3.6.78. Решите неравенство $(x-1)(x-3)(x-4) < 0$

№ 3.6.79. Решите неравенство $\dfrac{x(x-4)}{(x+8)(x-6)} \leqslant 0$

№ 3.6.80. Решите неравенство $\dfrac{x-3}{x} - \dfrac{x+3}{x-3} < 2$

№ 3.6.81. Решите неравенство $\dfrac{x-8}{x^2-5x+4} > \dfrac{2}{x+1}$

№ 3.6.82. Решите неравенство $\dfrac{x^2(x+3)^5}{(x-1)(x-2)^4} \geqslant 0$

№ 3.6.83. Решите неравенство $\dfrac{x^3-x^2-x+1}{(x+8)^7}>0$

№ 3.6.84. Найдите количество целых решений неравенства $\dfrac{(x+2)^2(6-x)}{x-4}\geqslant 0$

№ 3.6.85. Найдите количество целых решений неравенства $\dfrac{(x+5)^2(x-6)}{x+1}\leqslant 0$

№ 3.6.86. Найдите сумму целых решений неравенства $\dfrac{(x+6)^2(1-x)}{x+3}\geqslant 0$

№ 3.6.87. Найдите сумму целых решений неравенства $\dfrac{(x+2)(x-6)^2}{x-4}\leqslant 0$

№ 3.6.88. Найдите наибольшее целое решение неравенства
$\dfrac{(10-x)(x^2-14x+40)}{x^3-100x}\geqslant 0$

1) 10 2) 9 3) 8 4) 7

№ 3.6.89. Найдите наименьшее целое решение неравенства $\dfrac{(x+4)(x^2+2x-8)}{x^4-256}\geqslant 0$

1) 1 2) -2 3) -3 4) -4

№ 3.6.90. Найдите наибольшее целое решение неравенства $\dfrac{(x-5)(x^2-4x-5)}{x^4-25x^2}\leqslant 0$

1) 5 2) 2 3) 3 4) 4

№ 3.6.91. Найдите наименьшее целое решение неравенства $\dfrac{(x^2-9)(x^2+x-6)}{x^3+27}\geqslant 0$

1) 0 2) -1 3) -2 4) -3

№ 3.6.92. Найдите число целых решений неравенства $f(g(x))<1$, если $f(x)=\dfrac{10-7x}{7-9x}$ и $g(x)=\dfrac{2}{x+4}$

№ 3.6.93. Найдите наименьшее целое решение неравенства $f(g(x))<1$, если $f(x)=\dfrac{5x+7}{4-x}$ и $g(x)=\dfrac{2}{2-x}$

№ 3.6.94. Найдите число целых решений неравенства $f(g(x))<1$, если $f(x)=\dfrac{3x+5}{1-2x}$ и $g(x)=\dfrac{2}{x+4}$

№ 3.6.95. Найдите число целых решений неравенства $f(g(x))<1$, если $f(x)=\dfrac{4x+5}{2-5x}$ и $g(x)=\dfrac{-2}{x-2}$

№ 3.6.96. Укажите наименьшее целое решение неравенства $\dfrac{(x-4)(x-5)}{(x+4)(x+5)}\leqslant\dfrac{x+6}{x-6}$

№ 3.6.97. Укажите наименьшее целое решение неравенства $\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x+2)(x+3)}\leqslant\dfrac{x+5}{x-5}$

№ 3.6.98. Укажите наименьшее целое решение неравенства $\dfrac{(x-5)(x-6)}{(x+5)(x+6)} \leqslant \dfrac{x+7}{x-7}$

№ 3.6.99. Укажите наибольшее целое решение неравенства $\dfrac{8}{x^2-5x}+1 \leqslant \dfrac{1}{x-5}$

№ 3.6.100. Укажите наибольшее целое решение неравенства $\dfrac{4}{x^2-x} \geqslant x^2-x$

№ 3.6.101. Укажите наибольшее целое решение неравенства $\dfrac{11}{(x+5)(x-4)}+\dfrac{3}{x+5}+1 \leqslant 0$

№ 3.6.102. Укажите наибольшее целое решение неравенства $x^2+3x \leqslant \dfrac{36}{x^2+3x}$

№ 3.6.103. Укажите наибольшее целое решение неравенства $\dfrac{33}{(x+4)(x-5)}+\dfrac{5}{x+4}+1 \leqslant 0$

№ 3.6.104. Найдите сумму корней или корень, если он единственный, уравнения $\dfrac{|x+14|+2x}{x+8}=\dfrac{1}{2}$

1) -8 2) -4 3) 20 4) 32

№ 3.6.105. Найдите сумму корней или корень, если он единственный, уравнения $\dfrac{|22-x|-2x}{x-11}=-\dfrac{1}{4}$

1) -33 2) -26 3) -12 4) 7

№ 3.6.106. Найдите наименьший корень уравнения $(x+8)(|x|-8)=-49$

№ 3.6.107. Найдите произведение корней уравнения $x^2-7=6|x|$

№ 3.6.108. Найдите наименьший корень уравнения $(x+12)(|x|-12)=-9$

№ 3.6.109. Найдите произведение корней уравнения $x^2-18=3|x|$

№ 3.6.110. Найдите произведение корней уравнения $\dfrac{7x^2-9}{3|x|-4}=2|x|$

№ 3.6.111. Найдите произведение корней уравнения $|x-3|\cdot x^2=3-x$

№ 3.6.112. Найдите произведение корней уравнения $|3x+1|\cdot x^2=27x+9$

№ 3.6.113. Найдите произведение корней уравнения $\dfrac{4x^2-64}{|x|+4}=3|x|$

№ 3.6.114. Среднее арифметическое всех корней уравнения $|x^2-2x-3|=3x-3$ равно

1) 1 2) 3,5 3) 2,5 4) 4

№ 3.6.115. Среднее арифметическое всех корней уравнения $|x^2+2x-4|=4x+4$ равно

1) 1 2) 2 3) 3 4) -1

№ 3.6.116. Найдите сумму корней уравнения $|3-|x+2||=6$

№ 3.6.117. Найдите сумму корней уравнения $(x-3)^2-4|x-3|-5=0$

№ 3.6.118. Найдите сумму корней уравнения $||x+3|-1|=3$

№ 3.6.119. Найдите сумму корней уравнения $2(x+5)^2-5|x+5|-3=0$

№ 3.6.120. Решите уравнение $|x|-|x-2|=2$

№ 3.6.121. Решите уравнение $|x+3|+|x-5|=3x-4$

№ 3.6.122. Решите уравнение $|x^2-9|+|x^2-16|=7$

№ 3.6.123. Решите систему уравнений $\begin{cases} y+4x+13=0, \\ 2y-|x|+5=0 \end{cases}$

№ 3.6.124. Решите систему уравнений $\begin{cases} |x-3|+y=0, \\ 3x-y=5 \end{cases}$

№ 3.6.125. Найдите значения параметра a, при котором уравнение $|x^2-4x-5|=a$ имеет ровно три решения

№ 3.6.126. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 2x+(a+2)y=a+5, \\ |x|+ay=2 \end{cases}$ имеет единственное решение

№ 3.6.127. Решите неравенство $|5-2x|\leqslant 7$

№ 3.6.128. Решите неравенство $|3x-5|>-3$

№ 3.6.129. Решите неравенство $|x^2+6x|\leqslant 0$

№ 3.6.130. Решите неравенство $x^2-3|x|+2<0$

№ 3.6.131. Решите неравенство $|x+2|>x+3$

№ 3.6.132. Решите неравенство $\left|\dfrac{2x+5}{4x+1}\right|<1$

№ 3.6.133. Решите неравенство $\dfrac{|x+7|}{x^2+8x+7}<5$

№ 3.6.134. Решите неравенство $\dfrac{x^2-3|x|-4}{x+1}<-3x$

№ 3.6.135. Найдите число целых решений неравенства $|3-\dfrac{x}{3}|-1<0$

№ 3.6.136. Найдите сумму целых положительных решений неравенства $|x+1|\leqslant|x-13|$

1) 21 2) 20 3) 18 4) 15

№ 3.6.137. Найдите длину промежутка (или наибольшую из длин таких промежутков, если их несколько) тех значений параметра a, при которых число решений неравенства $||x-4|-2x| \leqslant a(x+6)$ не менее 2 и не более 14

№ 3.6.138. Найдите наибольшее целое значение параметра a, при котором система неравенств $\begin{cases} x^2+6x \leqslant 0 \\ |x+a| > 5 \end{cases}$ не имеет решений

№ 3.6.139. Найдите наибольшее целое неположительное значение параметра a, при котором система неравенств $\begin{cases} x^2-3|x|+2 < 0 \\ a^2-x^2 \leqslant 0 \end{cases}$ не имеет решений

№ 3.6.140. Решите уравнение $\sqrt{3x+5}=4$

№ 3.6.141. Решите уравнение $2\sqrt[3]{x^3}+3\sqrt{x^2}=5$

№ 3.6.142. Решите уравнение $\sqrt{x}=\sqrt{2-x}$

№ 3.6.143. Решите уравнение $\sqrt{x^3-5x^2+10}=\sqrt{x^2-5x-2}$

№ 3.6.144. Решите уравнение $\sqrt{2x-3}+\sqrt{x-2}=0$

№ 3.6.145. Решите уравнение $\sqrt{x^2-5x+6}+\sqrt{5x-x^2-6}=0$

№ 3.6.146. Решите уравнение $\sqrt{2x+7}=x-4$

№ 3.6.147. Решите уравнение $\sqrt{19-x}=x+1$

№ 3.6.148. Решите уравнение $\sqrt{2x+6}=1-x$

№ 3.6.149. Решите уравнение $\sqrt{2x+10}+x=7$

№ 3.6.150. Решите уравнение $\sqrt{10-x}+\sqrt{x-5}=\sqrt{x}$

№ 3.6.151. Решите уравнение $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}$

№ 3.6.152. Решите уравнение $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1$

№ 3.6.153. Решите уравнение $\sqrt[7]{\dfrac{5-x}{x+3}}+\sqrt[7]{\dfrac{x+3}{5-x}}=2$

№ 3.6.154. Решите уравнение $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}}$

№ 3.6.155. Решите уравнение $\sqrt{(x^2+2x-3)^2}=x^2+2x-3$

№ 3.6.156. Решите уравнение $(x^2-4)\sqrt{1-7x}=0$

№ 3.6.157. Решите уравнение $\sqrt[3]{x-6}-\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{3(x-2)}$

№ 3.6.158. Решите уравнение $\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{3x+7}=\sqrt[3]{x+1}$

№ 3.6.159. Решите уравнение $\sqrt{x^2+8x}+6=x^2+8x$

№ 3.6.160. Решите уравнение $\sqrt{2x^2-22x+60}=x^2-11x+30$

№ 3.6.161. Решите уравнение $x^2+12x+\sqrt{x^2+12x+4}=52$

№ 3.6.162. Найдите корень (или произведение корней, если их несколько) уравнения $\sqrt{x^3-5x^2-9x+45}=5x^2-x^3+9x-45$

№ 3.6.163. Решите уравнение $\sqrt{x^2-20x+100}+\sqrt{3x^2-28x-31}=10-x$

№ 3.6.164. Решите уравнение $\sqrt{x^2-10x+25}+\sqrt{3x^2-13x-16}=5-x$

№ 3.6.165. Решите уравнение $x^2+2x-15=2(x+5)\sqrt{x}$

№ 3.6.166. Найдите сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt{6x^2-9x-2}=2x-1$

№ 3.6.167. Найдите произведение корней (или корень, если он один) уравнения $(x+2)\cdot\sqrt{x^2+2x-6}=3(x+2)$

№ 3.6.168. Найдите сумму корней (или корень, если он один) уравнения $2\sqrt{\dfrac{10x-7}{x}}-3\sqrt{\dfrac{x}{10x-7}}=5$

№ 3.6.169. Найдите сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt{\dfrac{5x-6}{x}}-6\sqrt{\dfrac{x}{5x-6}}=-1$

№ 3.6.170. Найдите сумму корней (или корень, если он один) уравнения $(\sqrt{x-1}-1)\cdot(\sqrt{x+1}+3)=3x-6$

№ 3.6.171. Найдите произведение корней (или корень, если он один) уравнения $(\sqrt{x-2}-1)\cdot(\sqrt{x+2}+5)=5x-15$

№ 3.6.172. Сумма корней или корень (если он единственный) уравнения $\sqrt{-\dfrac{x}{10}+2}=125\left(\dfrac{x}{10}-2\right)^2$ принадлежит промежутку

1) $(39,0;\ 40,0)$ 2) $(25,0;\ 26,5)$ 3) $(27,0;\ 28,5)$ 4) $(30,0;\ 31,0)$

№ 3.6.173. Сумма корней или корень (если он единственный) уравнения $\sqrt{-\dfrac{x}{18}-1}=27\left(\dfrac{x}{18}+1\right)^2$ принадлежит промежутку

1) $(-38,5;-37,5)$ 2) $(-32,5;-31,5)$ 3) $(-28,5;-27,5)$ 4) $(-24,5;-23,5)$

№ 3.6.174. Сумма корней или корень, если он единственный, уравнения

$\sqrt{x^3+4x^2+8x+6}=\sqrt{x^3+7}$ принадлежит промежутку

1) $[0;1)$ 2) $[-1;0)$ 3) $[-2;-1)$ 4) $[-3;-2)$

№ 3.6.175. Сумма корней или корень, если он единственный, уравнения $\sqrt{x^3+4x^2-15x+7}=\sqrt{x^3-7}$ принадлежит промежутку

1) $[1;2)$ 2) $[2;3)$ 3) $[3;4)$ 4) $[4;5)$

№ 3.6.176. Найдите произведение корней или корень, если он единственный, уравнения $\dfrac{\sqrt[3]{x+4}}{x}+\dfrac{\sqrt[3]{x+4}}{4}=\dfrac{9}{4}\sqrt[3]{9x}$

№ 3.6.177. Найдите сумму корней или корень, если он единственный, уравнения $\sqrt{x+10}+4=\dfrac{21}{\sqrt{x+10}}$

№ 3.6.178. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x-2}=a-2$ имеет единственное решение

№ 3.6.179. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x-a}=a$ имеет единственное решение

№ 3.6.180. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{|x|+1}-\sqrt{|x|}=a$ имеет решение

№ 3.6.181. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{3ax+5a}=3x+5$ имеет единственное решение

№ 3.6.182. Найдите сумму всех значений переменных, являющихся решением (или решениями, если их несколько) системы $\begin{cases}\sqrt{8x-4y-5}=\sqrt{8y-28x-5}\\ x-|y+4|+2=0\end{cases}$

№ 3.6.183. Решите неравенство $\sqrt{4-2x}\leqslant 0$

№ 3.6.184. Решите неравенство $\sqrt{x+2}\geqslant 4$

№ 3.6.185. Решите неравенство $\sqrt{2x-4}\leqslant -2$

№ 3.6.186. Найдите количество целых решений неравенства $\dfrac{3-2x}{x-5}\sqrt{10+3x-x^2}\leqslant 0$

№ 3.6.187. Найдите сумму целых решений неравенства $\dfrac{\sqrt{12+4x-x^2}}{2x^2+x-6}\leqslant 0$

№ 3.6.188. Найдите сумму целых решений неравенства $\sqrt{2x-2}\cdot(3x-10)\geqslant 0$, удовлетворяющих условию $x\leqslant 5$

№ 3.6.189. Найдите сумму целых решений неравенства $\sqrt{2x-6}\cdot(20-3x)\leqslant 0$, удовлетворяющих условию $x\leqslant 8$

№ 3.6.190. Найдите сумму всех целых решений неравенства $(16-x^2)\cdot\sqrt{6+5x-x^2}\geqslant 0$

№ 3.6.191. Найдите сумму всех целых решений неравенства $(4-x^2-3x)\cdot\sqrt{9-x^2}\geqslant 0$

№ 3.6.192. Решите неравенство $\sqrt{x^2-4}\geqslant x$

№ 3.6.193. Решите неравенство $\sqrt{x-1} > 3-x$

№ 3.6.194. Решите неравенство $\sqrt{x^2+3x+3} < 2x+1$

№ 3.6.195. Решите неравенство $\sqrt{-x^2-3x+4} > x+1$

№ 3.6.196. Решите неравенство $\sqrt{x^2+6x+5} < 1+\sqrt{x^2+2x+4}$

3.7 Ответы к задачам для самостоятельного решения

3.6.1. 14,8; **3.6.2.** -14; **3.6.3.** 1,25; **3.6.4.** 5,5; **3.6.5.** –0,1; **3.6.6.** 5; **3.6.7.** 1; $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$; **3.6.8.** 1;2;3; **3.6.9.** $-1; -\frac{1}{2}; 2; 4$; **3.6.10.** $-1; \frac{1}{3}; \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$; **3.6.11.** 2;9; **3.6.12.** $\frac{-3\pm\sqrt{33}}{2}$; **3.6.13.** $-1; -2; -\frac{1}{2}$; **3.6.14.** $-1; 2; \frac{1}{2}$; **3.6.15.** 1;2; **3.6.16.** 6; **3.6.17.** 30; **3.6.18.** –28; **3.6.19.** 21; **3.6.20.** -9; **3.6.21.** -9; **3.6.22.** –6; **3.6.23.** 7; **3.6.24.** -2; **3.6.25.** 8; **3.6.26.** 2; **3.6.27.** 0; **3.6.28.** 2; **3.6.29.** 1,8; **3.6.30.** 7; **3.6.31.** 14; **3.6.32.** 10; **3.6.33.** 6; **3.6.34.** –1; **3.6.35.** –6; **3.6.36.** 2; **3.6.37.** 3; **3.6.38.** 1; **3.6.39.** 2; **3.6.40.** 1; $\frac{21}{20}$; **3.6.41.** $\frac{107}{192}$; **3.6.42.** 77; **3.6.43.** $34x^2+7x-5=0$; **3.6.44.** -21; **3.6.45.** 6; **3.6.46.** -2; **3.6.47.** 80 км/час; **3.6.48.** 15 га и 18 га или 24 га и 27 га; **3.6.49.** 45 км/час; **3.6.50.** 40 см; **3.6.51.** 1; **3.6.52.** 40 км/час;50 км/час; **3.6.53.** 30 см; **3.6.54.** 12 км/час;15 км/час; **3.6.55.** 15 час;12 час или $9\frac{1}{3}$ час; $23\frac{1}{3}$ час; **3.6.56.** 4;6; **3.6.57.** 6с;4с; **3.6.58.** $(3;-1)$; **3.6.59.** $(-3;2)$; **3.6.60.** $(3;2); (-\frac{13}{3}; -\frac{5}{3})$; **3.6.61.** $(1;2)$; **3.6.62.** $(2;1); (1;11,5)$; **3.6.63.** $(1;8); (8;1)$; **3.6.64.** $(4;3); (-3;-4)$; **3.6.65.** $(2;\pm1); (-2;\pm1)$; **3.6.66.** $(\pm3;\pm2)$; **3.6.67.** $(\pm1;\pm3); (\pm\frac{3\sqrt{65}}{13}; \mp\frac{7\sqrt{65}}{13})$; **3.6.68.** $(-1;-3)$; **3.6.69.** $(\pm2;\pm1)$; **3.6.70.** $(3;5); (5;3)$; **3.6.71.** $(1;4); (4;1)$; **3.6.72.** $1) a \neq -3; 5; 2) a = 5; 3) a = -3$; **3.6.73.** 1) $a \neq -6; 2$; 2) $a = 2$; 3) $a = -6$; **3.6.74.** –29; **3.6.75.** $[-2;3]$; **3.6.76.** $(-\infty;5]\cup(8;\infty)$; **3.6.77.** $(-\infty;\frac{7}{2})\cup(6;\infty)$; **3.6.78.** $(-\infty;1)\cup(3;4)$; **3.6.79.** $(-8;0]\cup[4;6)$; **3.6.80.** $(-\infty;-3)\cup(0;\frac{3}{2})\cup(3;\infty)$; **3.6.81.** $(-\infty;-1)\cup(1;4)$; **3.6.82.** $(-\infty;-3]\cup\{0\}\cup(1;2)\cup(2;\infty)$; **3.6.83.** $(-\infty;-8)\cup(-1;1)\cup(1;\infty)$; **3.6.84.** 3; **3.6.85.** 8; **3.6.86.** –8; **3.6.87.** 9; **3.6.88.** 2; **3.6.89.** 3; **3.6.90.** 4; **3.6.91.** 3; **3.6.92.** 3; **3.6.93.** 3; **3.6.94.** 5; **3.6.95.** 9; **3.6.96.** 7; **3.6.97.** 6; **3.6.98.** 8; **3.6.99.** 4; **3.6.100.** 2; **3.6.101.** 3; **3.6.102.** 1; **3.6.103.** 4; **3.6.104.** 2; **3.6.105.** 4; **3.6.106.** –15; **3.6.107.** –49; **3.6.108.** –15; **3.6.109.** –36; **3.6.110.** –1; **3.6.111.** –3; **3.6.112.** –1; **3.6.113.** –256; **3.6.114.** 2; **3.6.115.** 2; **3.6.116.** –4; **3.6.117.** 6; **3.6.118.** -6; **3.6.119.** –10; **3.6.120.** $[2;\infty)$; **3.6.121.** 4; **3.6.122.** $[-4;-3]\cup[3;4]$; **3.6.123.** $(-3;-1)$; **3.6.124.** $(1;-2)$; **3.6.125.** 9; **3.6.126.** $(-\infty;-\frac{2}{3})\cup(2;\infty)$; **3.6.127.** $[-1;6]$; **3.6.128.** $x\in R$; **3.6.129.** $\{-6;0\}$; **3.6.130.** $(-2;-1)\cup(1;2)$; **3.6.131.** $(-\infty:-\frac{5}{2})$; **3.6.132.** $(-\infty;-1)\cup(2;\infty)$; **3.6.133.** $(-\infty:-7)\cup(-7;-1)\cup(-0,8;\infty)$; **3.6.134.** $(-\infty;-2)\cup(-1;1)$; **3.6.135.** 5; **3.6.136.** 1; **3.6.137.** $0,65$; **3.6.138.** 5; **3.6.139.** –2; **3.6.140.** $\frac{11}{13}$; **3.6.141.** 1;–5; **3.6.142.** 1; **3.6.143.** -1; **3.6.144.** $\emptyset$; **3.6.145.** 2;3; **3.6.146.** 9; **3.6.147.** 3; **3.6.148.** –1; **3.6.149.** 3; **3.6.150.** 5;9; **3.6.151.** 4; **3.6.152.** –61;30; **3.6.153.** 1; **3.6.154.** $\frac{25}{16}$; **3.6.155.**

$(-\infty;-3]\cup[1;\infty)$; **3.6.156.** $-2;\frac{1}{7}$; **3.6.157.** 0; **3.6.158.** –3; **3.6.159.** –9;1; **3.6.160.** 4;5;6;7; **3.6.161.** –15;3; **3.6.162.** -45; **3.6.163.** –1; **3.6.164.** –1; **3.6.165.** 9; **3.6.166.** 3; **3.6.167.** –15; **3.6.168.** 7; **3.6.169.** 6; **3.6.170.** 3,25; **3.6.171.** 6,5; **3.6.172.** 1; **3.6.173.** 1; **3.6.174.** 1; **3.6.175.** 2; **3.6.176.** $-0,2$; **3.6.177.** –1; **3.6.178.** $[2;\infty)$; **3.6.179.** $[0;\infty)$; **3.6.180.** $(0;1]$; **3.6.181.** $(-\infty;0)$; **3.6.182.** -6; **3.6.183.** 2; **3.6.184.** $[14;\infty)$; **3.6.185.** $\emptyset$; **3.6.186.** 4; **3.6.187.** 6; **3.6.188.** –5; **3.6.189.** 5; **3.6.190.** 15; **3.6.191.** –2; **3.6.192.** $(-\infty;-2]$; **3.6.193.** $(2;\infty)$; **3.6.194.** $(\frac{2}{3};\infty)$; **3.6.195.** $[-4;\frac{1}{2})$; **3.6.196.** $(-\infty;-5]\cup[-1;\frac{1+\sqrt{13}}{3})$.

Глава 4

Числовые последовательности

4.1 Основные понятия

Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число x_n, то говорят, что дана числовая последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n$, или $\{x_n\}$. Чтобы задать последовательность, надо задать закон, по которому каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число $f(n) = x_n$. Это число называют $n-$м членом, или общим членом, последовательности.

Задание последовательности формулой для $n-$го члена называется аналитическим способом задания последовательности.

Имея аналитическое выражения для x_n, можно найти любой член последовательности. Если, например

$x_n = \dfrac{(-1)^n}{2n-1}$, то $x_1 = \dfrac{(-1)^1}{1} = -1$; $x_2 = \dfrac{(-1)^2}{3} = \dfrac{1}{3}$; $x_3 = \dfrac{(-1)^3}{5} = -\dfrac{1}{5}$ и т.д.

В некоторых случаях последовательность задают рекуррентным соотношением, т.е. формулой, выражающей x_n через предшествующие ему члены последовательности.

Например, последовательность чисел Фибоначчи $1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; \dots$ задается формулой $x_0 = 1; x_1 = 1; x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется возрастающей (неубывающей), если $x_n < x_{n+1}$ $(x_n \leqslant x_{n+1})$ для любого натурального n, и убывающей (невозрастающей), если $x_n > x_{n+1}$ $(x_n \geqslant x_{n+1})$ для любого натурального n.

Например, последовательность $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ является возрастающей, а последовательность $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ является убывающей.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху, если существует число M такое, что $x_n \leqslant M$ для любого натурального n.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной снизу, если существует число m такое, что $x_n \geqslant m$ для любого натурального n.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если она ограничена и снизу и сверху.

Например, последовательность $3;\ 2;\ 1;\ 0; -1; -2; -3; \dots$ ограничена сверху, т.к. $x_n \leqslant 3$ для любого $n \in N$; последовательность $1; 2; 3; \dots; n; \dots$ ограничена снизу, т.к. $x_n \geqslant 1$ для любого $n \in N$; последовательность $\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$ ограничена, т.к. $1 \leqslant x_n \leqslant 2$ для любого $n \in N$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся к числу a, если выполняется условие : для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое натуральное число n_0, что член последовательности с этим номером и все следующие за ним члены отклоняются от числа a меньше, чем на ε. Иными словами, из неравенства $n \geq n_0$ следует неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Число a в этом случае называют пределом последовательности $\{x_n\}$ и записывают так :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ или } x_n \to a \text{ при } n \to \infty. \tag{4.1.1}$$

Воспользуемся определением предела последовательности для доказательства того, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Нам надо найти номер n_0, начиная с которого члены последовательности удовлетворяют неравенству $\left|\dfrac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon$. Для этого решим это неравенство относительно n.

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon \iff n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

В качестве n_0 возьмем число на единицу большее целой части числа $\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, т.е. $n_0 = 1 + \left[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$.

Если, например, $\varepsilon = \dfrac{1}{1000}$, то $n_0 = [\sqrt{1000}] + 1 = 32$, т.к. целая часть числа $\sqrt{1000}$ равна 31. Следовательно, для любого натурального n, удовлетворяющего условию $n \geqslant 32$, выполняется неравенство $\left|\dfrac{1}{n^2} - 0\right| < \dfrac{1}{1000}$.

Если последовательность не имеет предела, она называется расходящейся. Например, последовательность $1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots$ не имеет предела.

4.2 Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называется последовательность чисел $\{a_n\}$, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же постоянным для данной последовательности числом d. Это число называется разностью прогрессии.

Арифметическая прогрессия задается рекуррентно следующим образом :

$$a_1 = a,\ a_{n+1} = a_n + d,\ n \in N.$$

Для любой арифметической прогрессии ее $n-$ый член можно задать формулой

$$a_n = a_1 + (n-1)d. \tag{4.2.1}$$

Отметим основные свойства арифметической прогрессии.

1. Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому соседних членов

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \quad n \geqslant 2 \tag{4.2.2}$$

2. Для любой арифметической прогрессии $\{a_n\}$ если $n + m = k + l$, то

$$a_n + a_m = a_k + a_l \tag{4.2.3}$$

Действительно, используя равенство 4.2.1, запишем

$$a_n = a_1 + d(n-1), \quad a_m = a_1 + d(m-1),$$
$$a_k = a_1 + d(k-1), \quad a_l = a_1 + d(l-1).$$

Тогда

$$a_n + a_m = a_1 + d(n-1) + a_1 + d(m-1) = 2a_1 + d(n+m-2) = 2a_1 + d(k+l-2) = a_k + a_l.$$

Из этого свойства следует, что для конечной арифметической прогрессии суммы членов, равноотстоящих от концов прогрессии, равны.

Например, если $\{a_n\}$ – арифметическая прогрессия и $1 \leqslant n \leqslant 20$, то

$$a_1 + a_{20} = a_2 + a_{19} = a_3 + a_{18} = \ldots = a_{10} + a_{11}.$$

Если в конечной арифметической прогрессии число членов нечетно, например, $1 \leqslant n \leqslant 19$, то

$$a_1 + a_{19} = a_2 + a_{18} = \ldots = a_9 + a_{11} = 2a_{10}.$$

Сумма первых n членов арифметической прогрессии обозначается S_n, т.е.

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

Используя свойство 4.2.3, можно доказать, что эта сумма определяется формулой

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \tag{4.2.4}$$

Если в равенство 4.2.4 вместо a_n подставить выражение из равенства 4.2.1, то получим

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n \tag{4.2.5}$$

Пример 4.2.1. Если первый член арифметической прогрессии равен 1, а шестой член равен 21, то сумма первых ее пяти членов равна

1) 40 2) 45 3) 50 4) 55

Решение. Так как $a_6 = a_1 + 5d$, то $d = \frac{21-1}{5} = 4$ и $S_5 = \frac{2a_1 + 4d\cdot}{2} \cdot 5 = 45$. Следовательно, выбираем ответ 2.

Ответ. 2.

Пример 4.2.2. Сумма всех двузначных натуральных чисел равна

1) 5000 2) 4900 3) 5005 4) 4905

Решение. Очевидно, что эти числа образуют арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 10$, $d = 1$, $a_n = 99$. Для вычисления S_n необходимо найти n – число таких чисел. Воспользуемся формулой общего члена, а именно

$$a_n = a_1 + d(n-1) \text{ или } 99 = 10 + n - 1 \Longrightarrow n = 90$$

$$\text{и } S_{90} = \frac{a_1 + a_{90}}{2} \cdot 90 = \frac{10+99}{2} \cdot 90 = 4905.$$

Следовательно, выбираем ответ 4.
Ответ. 4.

Пример 4.2.3. Количество двузначных натуральных чисел, кратных 6, равно

1) 17 2) 14 3) 13 4) 15

Решение. Как известно, число m кратно 6, если оно записывается в виде $m = 6k$, m, $k \in N$. Двузначные натуральные числа, кратные 6, образуют арифметическую прогрессию, в которой $a_1 = 12$, $d = 6$ и $a_n = 96$.

Используя формулу общего члена $a_n = a_1 + d(n-1) \Longrightarrow 96 = 12 + 6(n-1)$, находим $n = 15$.

Следовательно, выбираем ответ 4.

Ответ. 4.

Пример 4.2.4. Найдите сумму всех четных трехзначных натуральных чисел, кратных 3

Решение. Наименьшим числом, удовлетворяющим данному условию, является 102, следующее за ним число 108, далее 114 и т.д.

Очевидно, что эти числа образуют арифметическую прогрессию 102; 108; 114; 120; 126;...

Наибольшим числом, удовлетворяющим условию задачи, является число 996.

Итак, мы нашли $a_1 = 102$, $d = 6$ и $a_n = 996$. Для вычисления S_n надо найти количество членов n. Это число найдем из равенства

$$a_n = a_1 + d(n-1), \text{ а именно } 996 = 102 + 6(n-1), \text{ откуда } n = 150.$$

Тогда

$$S_{150} = \frac{102 + 996}{2} \cdot 150 = 82350$$

Ответ. 82350.

Пример 4.2.5. Если x_0 – корень уравнения $1 + 4 + 7 + ... + x = 176$, то значение выражения $\dfrac{x_0 + 11}{x_0 - 10}$ равно

1) 2 2) 3 3) 2,5 4) 3,5

Решение. В левой части уравнения записана сумма арифметической прогрессии, в которой $a_1 = 1$, $d = 3$ и $a_n = x$.

Из условия $a_n = a_1 + d(n-1)$ найдем число членов этой прогрессии :

$$x = 1 + 3(n-1) \Longrightarrow n = \frac{x+2}{3}.$$

Используя формулу суммы $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, получим :

$$\frac{1+x}{2} \cdot \frac{x+2}{3} = 176 \Longrightarrow x^2 + 3x - 1054 = 0 \Longrightarrow x_1 = 31 \text{ и } x_2 = -34.$$

Корень x_2 – посторонний, так как не подходит по смыслу задачи.

Следовательно, значение $\dfrac{x_0+11}{x_0-10}=2$, и выбираем ответ 1.

Ответ. 1.

Пример 4.2.6. Сумма всех целых чисел, каждое из которых делится без остатка на 11 и удовлетворяет условию $-44 < k \leqslant 165$, равна

1) 1250 2) 1252 3) 1254 4) 1256

Решение. Первым числом, удовлетворяющим этим условиям, является -33, а последним – число 165. Таким образом, надо найти сумму членов арифметической прогрессии, для которой $a_1=-33$, $d=11$ и $a_k=165$. Найдем число членов этой прогрессии.

Так как $a_k=a_1+d(k-1)$, то $165=-33+11(k-1)\Longrightarrow k=19$.

Тогда $S_{19}=\dfrac{a_1+a_{19}}{2}\cdot 19=\dfrac{-33+165}{2}\cdot 19=1254$.

Следовательно, выбираем ответ 3.

Ответ. 3.

Пример 4.2.7. Сумма всех двузначных натуральных чисел, которые при делении на 7 дают в остатке 2, равна

1) 650 2) 654 3) 660 4) 664

Решение. Эти числа образуют арифметическую прогрессию, для которой $a_1=16$, $d=7$ и $a_n=93$. Количество n таких чисел находим, используя формулу общего члена арифметической прогрессии, а именно :

$$a_n=a_1+d(n-1)\Longrightarrow 93=16+7(n-1)\Longrightarrow n=12.$$

Тогда $S_{12}=\dfrac{a_1+a_{12}}{2}\cdot 12=\dfrac{16+93}{2}\cdot 12=654$. Следовательно, выбираем ответ 2.

Ответ. 2.

Пример 4.2.8. Если сумма четвертого, пятого, седьмого и шестнадцатого членов арифметической прогрессии равна 32, то сумма первых пятнадцати членов этой прогрессии равна

1) 100 2) 110 3) 120 4) 115

Решение. По условию дано :

$$a_4+a_5+a_7+a_{16}=32 \text{ или } a_1+3d+a_1+4d+a_1+6d+a_1+15d=32\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 4a_1+28d=32\Longrightarrow a_1+7d=8\Longrightarrow a_8=8$$

По свойству членов арифметической прогрессии

$$a_1+a_{15}=a_2+a_{14}=a_3+a_{13}=...=a_7+a_9=2a_8=16.$$

Тогда $S_{15} = \dfrac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 = \dfrac{16}{2} \cdot 15 = 120,$ и выбираем ответ 3.

Ответ. 3.

Пример 4.2.9. Найдите сумму двузначных натуральных чисел, не делящихся ни на 2, ни на 3

Решение. Все двузначные натуральные числа образуют арифметическую прогрессию, в которой $a_1 = 10, a_n = 99, d = 1$ и $n = 90$. Следовательно, их сумма $S_{(10,\dots,99)} = \dfrac{10+99}{2} \cdot 90 = 4905$. Обозначим ее как $S^{(1)}$.

Все двузначные четные натуральные числа образуют арифметическую прогрессию, в которой $a_1 = 10, a_n = 98, d = 2$ и $n = 45$. Обозначим сумму всех ее членов как $S^{(2)}$, где $S^{(2)} = \dfrac{10+98}{2} \cdot 45 = 2430$.

Аналогично, числа, делящиеся на 3, образуют арифметическую прогрессию, в которой $a_1 = 12, a_n = 99, d = 3$ и $n = 30$. Их сумма $S^{(3)} = \dfrac{12+99}{2} \cdot 30 = 1665$.

Последние две прогрессии имеют общие члены: $12; 18; 24; \dots; 96$, которые также образуют арифметическую прогрессию с $a_1 = 12, a_n = 96, d = 6$ и $n = 15$.

Их сумма $S^{(6)} = \dfrac{12+96}{2} \cdot 15 = 810$.

Сумма S всех натуральных чисел, не делящихся на 2 и на 3, находится так:

$$S = S^{(1)} - S^{(2)} - S^{(3)} + S^{(6)}.$$

Сумму $S^{(6)}$ необходимо прибавить потому, что при вычитании сумм $S^{(2)}$ и $S^{(3)}$ сумма чисел, делящихся на 6, вычиталась дважды.

Следовательно, $S = 4905 - 2430 - 1665 + 810 = 1620$.

Ответ. 1620.

Пример 4.2.10. Найдите сумму значений x или значение x, если оно единственное, при котором отрицательные числа $x^2 - 20; x + 1; -x - 6$ являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии

Решение. По свойству членов арифметической прогрессии, средний член $x + 1$ равен полусумме соседних членов, а именно, должно выполняться равенство

$$x + 1 = \frac{x^2 - 20 - x - 6}{2}.$$

Тогда $x^2 - 3x - 28 = 0$ и $x_1 = 7,\ x_2 = -4$.

При $x_1 = 7$ имеем $29; 8; -13$ – эта прогрессия не удовлетворяет условию задачи.

При $x = -4$ имеем $-4; -3; -2$ – эта прогрессия удовлетворяет условию задачи.

Ответ. $x = -4$.

Пример 4.2.11. Найдите наибольшую из сумм первых n членов арифметической прогрессии, если $a_1 = 193$ и $a_2 = 179$

Решение. В этой прогрессии разность $d = -14$ – отрицательное число. Следовательно, это убывающая последовательность, и сумма S_n первых n членов этой последовательности будет расти до тех пор, пока a_n сохраняет положительный знак. Как только a_n примет отрицательное значение, S_n начнет убывать с увеличением количества слагаемых.

Найдем граничное значение n_0, для которого a_{n_0} все еще сохраняет положительное значение. Для этого надо решить неравенство

$$a_n \geqslant 0 \text{ или } a_1 + (n-1)d \geqslant 0 \Longrightarrow 193 + (n-1)(-14) \geqslant 0 \Longrightarrow n \leqslant \frac{207}{14} \Longrightarrow n_0 = 14.$$

Действительно, $a_{14} = 193 - 14 \cdot 13 = 11 > 0$ и $a_{15} = 193 - 14 \cdot 14 = -3 < 0$.

Следовательно, наибольшей суммой является сумма первых 14 членов арифметической прогрессии

$$S_{14} = \frac{a_1 + a_{14}}{2} \cdot 14 = \frac{193 + 11}{2} \cdot 14 = 1428$$

Ответ. 1428.

Пример 4.2.12. Найдите сумму общих членов двух арифметических прогрессий : $\{389; 422; 455; \ldots; 10058\}$ и $\{301; 444; 587; \ldots; 10168\}$.

Решение. Убедимся в том, что среди членов этих прогрессий есть одинаковые. Для этого сравним общие члены каждой прогрессии. Обозначим общий член первой прогрессии a_n и найдем его.

Для первой прогрессии $d = 33$ и $a_n = 389 + (n-1)33 = 356 + 33n$.

Общий член второй прогрессии b_k и $d = 143$. Следовательно,

$$b_k = 301 + (k-1)143 = 158 + 143k.$$

Составим равенство $a_n = b_k$, или

$$356 + 33n = 158 + 143k \iff 198 + 33n = 143k \iff 18 + 3n = 13k \iff 18 + 3n - 12k = k.$$

Отсюда следует, что, если k кратно 3, т.е. $k = 3p$, то члены с этими номерами входят в состав первой прогрессии.

Общий вид этих членов получим подстановкой $k = 3p$ в общий член второй прогрессии. Таким образом,

$$c_p = 158 + 143 \cdot 3p = 158 + 429p.$$

Количество общих членов в обеих прогрессиях можно найти из решения неравенства

$$301 \leqslant c_p \leqslant 10168 \implies 158 + 429p \leqslant 10168 \implies p \leqslant \frac{10010}{429} \implies 1 \leqslant p \leqslant 23.$$

Теперь вычислим сумму общих членов S_{23} :

$$S_{23} = \frac{c_1 + c_{23}}{2} \cdot 23, \quad \text{где } c_1 = 158 + 429 = 587; \; c_{23} = 158 + 429 \cdot 23 = 10025.$$

Тогда $S_{23} = \dfrac{587 + 10025}{2} \cdot 23 = 122038.$

Ответ. 122038.

4.3 Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число $q \neq 0$. Это число называется знаменателем прогрессии.

Таким образом, геометрическая прогрессия может быть задана рекуррентным соотношением :

$$b_1 = b, \quad b_{n+1} = b_n \cdot q, \quad n \in N, \quad b \neq 0, \quad q \neq 0.$$

Приведем примеры геометрических прогрессий :

$$\begin{array}{ll} 2;\ 8;\ 32;\ 128;\ 512;\ldots; & \text{здесь } b_1 = 2,\ q = 4. \\ 2;\ -8;\ 32;\ -128;\ 512;\ldots; & \text{здесь } b_1 = 2,\ q = -4. \\ 1;\ -1;\ 1;\ -1;\ 1;\ldots; & \text{здесь } b_1 = 1,\ q = -1. \end{array}$$

Отметим основные свойства геометрической прогрессии.

1. Пусть $\{b_n\}$ – геометрическая прогрессия. Тогда ее $n-$й член можно задать следующей формулой :

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \tag{4.3.1}$$

2. Характеристическое свойство геометрической прогрессии.

Каждый член геометрической прогрессии, начиная со второго, равен по модулю среднему геометрическому соседних членов :

$$|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}, \quad n \geqslant 2, \tag{4.3.2}$$

или

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

3. Для любой геометрической прогрессии $\{b_n\}$ если $n + m = k + l$, то $b_n \cdot b_m = b_k \cdot b_l$.

Действительно, используя формулу 4.3.1, запишем

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1},\ b_m = b_1 \cdot q^{m-1},\ b_k = b_1 \cdot q^{k-1},\ b_l = b_1 \cdot q^{l-1}.$$

Тогда

$$b_n b_m = b_1 q^{n-1} \cdot b_1 q^{m-1} = b_1^2 q^{n+m} \cdot q^{-2} = b_1^2 q^{k+l-2} = b_1 q^{k-1} \cdot b_1 q^{l-1} = b_k b_l.$$

Из этого свойства следует, что для конечной геометрической прогрессии произведение членов, равноудаленных от концов прогрессии, есть величина постоянная.

Например, если $\{b_n\}$ – геометрическая прогрессия и $1 \leqslant n \leqslant 17$, то $b_1 \cdot b_{17} = b_2 \cdot b_{16} = b_3 \cdot b_{15} = \ldots = b_9^2$.

Сумма n первых членов геометрической прогрессии определяется формулой :

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{b_1(1 - q^n)}{1 - q} & \text{при } q \neq 1 \\ b_1 n & \text{при } q = 1 \end{cases} \tag{4.3.3}$$

Геометрическая прогрессия является *возрастающей*, если $b_1 > 0$ и $q > 1$ или $b_1 < 0$ и $0 < q < 1$.

Геометрическая прогрессия является *убывающей*, если $b_1 > 0$ и $0 < q < 1$ или $b_1 < 0$ и $q > 1$.

Геометрическая прогрессия является *знакопостоянной*, если $q > 0$.

Геометрическая прогрессия является *знакочередующейся*, если $g < 0$.

Пример 4.3.1. Если сумма шести первых членов геометрической прогрессии равна 1820, а знаменатель равен 3, то сумма первого и пятого членов этой прогрессии равна

1) 164 2) 246 3) 328 4) 410

Решение. Согласно условию,

$$S_6 = \frac{b_1(1-q^6)}{1-q} = \frac{b_1(q^6-1)}{q-1} = 1820, \text{ где } q = 3.$$

Отсюда $b_1 = \dfrac{1820}{364} = 5$ и $b_5 = b_1 q^4 = 5 \cdot 3^4 = 405$.
Следовательно, $b_1 + b_5 = 410$, и выбираем ответ 4.
Ответ. 4.

Пример 4.3.2. Если сумма первого и шестого членов геометрической прогрессии равна 55, а их разность равна $51\dfrac{2}{3}$, то сумма первых шести членов этой прогрессии равна

1) 105 2) 115 3) 95 4) $\dfrac{95}{3}$

Решение. Условия задачи $b_1 + b_6 = 55$ и $b_1 - b_6 = 51\dfrac{2}{3}$ запишем в виде системы уравнений :

$$\begin{cases} b_1(1+q^5) = 55, \\ b_1(1-q^5) = 51\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Решая ее, получим $q = \dfrac{1}{2}$ и $b_1 = \dfrac{160}{3}$. Тогда $S_6 = \dfrac{b_1(1-q^6)}{1-q} = 105$, и выбираем ответ 1.

Ответ. 1.

Пример 4.3.3. В геометрической прогрессии с четным числом членов сумма всех ее членов в три раза больше суммы членов, стоящих на нечетных местах. Тогда знаменатель прогрессии равен

1) 2 2) 3 3) 4 4) $\dfrac{3}{2}$

Решение. Пусть в прогрессии $2n$ членов и S_{2n} – сумма всех членов, а S_n^*– сумма членов, стоящих на нечетных местах. Тогда $S_{2n} = \dfrac{b_1(1-q^{2n})}{1-q}$, и

$$S_n^* = b_1 + b_3 + \cdots + b_{2n-1} = b_1 + b_1 q^2 + \cdots + b_1 q^{2n-2} = \frac{b_1(1-q^{2n})}{1-q^2},$$

где b_1 – первый член прогрессии, а $q \neq 1$ – знаменатель прогрессии. По условию задачи

$$S_{2n} = 3S_n^* \Longrightarrow \frac{b_1(1-q^{2n})}{1-q} = 3\frac{b_1(1-q^{2n})}{1-q^2} \Longrightarrow 1 + q = 3 \Longrightarrow q = 2$$

и выбираем ответ под номером 1.

Ответ. 1.

Пример 4.3.4. Найдите сумму значений n или значение n, если оно единственное, для которых числа $\sqrt{n-5}$, $\sqrt[4]{10n+4}$ и $\sqrt{n+2}$ образуют геометрическую прогрессию

Решение. Если три числа образуют геометрическую прогрессию, то по характеристическому свойству ее членов квадрат среднего члена равен произведению соседних членов, т.е.

$$\sqrt{10n+4} = \sqrt{n-5} \cdot \sqrt{n+2}$$

или

$$10n+4 = (n-5)(n+2) \implies n^2 - 13n - 14 = 0 \implies n_1 = -1,\ n_2 = 14.$$

Но очевидно, что при $n = -1$ не существуют данные выражения, а при $n = 14$ данные числа образуют геометрическую прогрессию : $3; 2\sqrt{3}; 4$.

Ответ. 14.

Пример 4.3.5. В геометрической прогрессии известны члены $b_1 = 1280$ и $b_4 = 160$. Укажите номер k члена этой прогрессии, начиная с которого все ее члены не больше $\dfrac{5}{128}$

Решение. Так как $\dfrac{b_4}{b_1} = q^3$, то $q^3 = \dfrac{160}{1280} = 0,125$ и $q = 0,5$.

Из условия $b_k \leqslant \dfrac{5}{128}$ найдем искомый номер k.

Так как $b_k = b_1 \cdot q^{k-1} = 1280 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$, то

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \leqslant \frac{5}{128 \cdot 1280} \implies \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{15} \implies k-1 \geqslant 15 \text{ и } k \geqslant 16.$$

Следовательно, начиная с b_{16}, члены прогрессии не больше $\dfrac{5}{128}$.

Ответ. 16.

Пример 4.3.6. Найдите сумму значений t или значение t, если оно единственное, при котором числа $2; t+3; 2t+22$ являются тремя последовательными членами знакочередующейся геометрической прогрессии

Решение. По характеристическому свойству членов геометрической прогрессии должно выполняться равенство

$$(t+3)^2 = 2(2t+22) \implies t^2 + 2t - 35 = 0 \implies t_1 = -7 \text{ и } t_2 = 5.$$

При $t = 5$ имеет место знакоположительная прогрессия : 2; 8; 32. Она не соответствует заданному условию.

При $t = -7$ имеет место знакочередующаяся геометрическая прогрессия : $2; -4; 8$. Следовательно, $t = -7$.

Ответ. -7.

Пример 4.3.7. Найдите сумму значений k или значение k, если оно единственное, при котором числа $2k-1; 2k+1; 9k; k+26$ являются четырьмя последовательными членами геометрической прогрессии

Решение. Как следует из определения геометрической прогрессии, для четырех последовательных членов $b_m, b_{m+1}, b_{m+2}, b_{m+3}$ должны выполняться соотношения

$$\frac{b_{m+1}}{b_m} = \frac{b_{m+2}}{b_{m+1}} = \frac{b_{m+3}}{b_{m+2}} = q,$$

где q – знаменатель прогрессии.

Подставив в эти соотношения заданные числа, получим

$$\frac{2k+1}{2k-1} = \frac{9k}{2k+1} = \frac{k+26}{9k},$$

что равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2k+1}{2k-1} = \dfrac{9k}{2k+1} \\ \dfrac{9k}{2k+1} = \dfrac{k+26}{9k} \end{cases} \implies \begin{cases} 14k^2 - 13k - 1 = 0 \\ 79k^2 - 53k - 26 = 0 \end{cases}$$

Очевидно, что решением этой системы является $k = 1$.

Ответ. $k = 1$.

Пример 4.3.8. Найдите количество значений параметра a, для которых корни уравнений $x^2 - 5x + 4 = 0$ и $2x = a$ различны и, взятые в некотором порядке, составляют геометрическую прогрессию

Решение. Из решения уравнений следует, что $x_1 = 1, x_2 = 4$ и $x_3 = \dfrac{a}{2}$, где $a \neq 2$ и $a \neq 8$.

Числа $1, 4, \dfrac{a}{2}$ являются членами геометрической прогрессии, причем порядок следования этих членов произволен.

Возможны 6 вариантов расположения этих членов :

$$\begin{array}{lll} 1)\ x_1, x_2, x_3; & 2)\ x_3, x_1, x_2; & 3)\ x_2, x_1, x_3; \\ 4)\ x_3, x_2, x_1; & 5)\ x_2, x_3, x_1; & 6)\ x_1, x_3, x_2 \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{lll} 1)\ 1, 4, \dfrac{a}{2}; & 2)\ \dfrac{a}{2}, 1, 4; & 3)\ 4, 1, \dfrac{a}{2}; \\ 4)\ \dfrac{a}{2}, 4, 1; & 5)\ 4, \dfrac{a}{2}, 1; & 6)\ 1, \dfrac{a}{2}, 4. \end{array}$$

Находим значения параметра a, используя характеристическое свойство членов геометрической прогрессии.

Из 1) варианта (как и из 4)) следует : $\dfrac{a}{2} \cdot 1 = 16 \implies a = 32$.

Из 2) варианта (как и из 3)) следует : $\dfrac{a}{2} \cdot 4 = 1 \implies a = \dfrac{1}{2}$.

Из 5) варианта (как и из 6)) следует : $\dfrac{a^2}{4} = 4 \implies a = \pm 4$.

Итак, существует 4 значения параметра a для решения поставленной задачи.

Ответ. 4.

Пример 4.3.9. Даны арифметическая и геометрическая прогрессии. Сумма их вторых членов равна –2, сумма третьих членов равна 1, а сумма четвертых членов равна 4. Найдите разность арифметической прогрессии.

Решение. Обозначим члены арифметической прогрессии через a_n, а геометрической – через b_n. Тогда по условию задачи имеем :

$$a_2 + b_2 = -2; \quad a_3 + b_3 = 1; \quad a_4 + b_4 = 4,$$

или

$$\begin{cases} a_1 + d + b_1 q = -2 \\ a_1 + 2d + b_1 q^2 = 1 \\ a_1 + 3d + b_1 q^3 = 4, \end{cases}$$

где d – разность арифметической прогрессии, q – знаменатель геометрической прогрессии.

Из полученной системы уравнений надо найти d. Для этого вычтем из 2–го уравнения 1–ое, а из 3–его уравнения 2–ое :

$$\begin{cases} d + b_1 q^2 - b_1 q = 3 \\ d + b_1 q^3 - b_1 q^2 = 3 \end{cases}$$

Приравняв левые части уравнений, получим

$$d + b_1 q^2 - b_1 q = d + b_1 q^3 - b_1 q^2 \iff b_1 q^2 - b_1 q = b_1 q^3 - b_1 q^2.$$

Так как $b_1 \neq 0$ и $q \neq 0$, то для q получено уравнение $q^2 - 2q + 1 = 0$ или $q = 1$.

Отсюда следует, что $b_1 = b_2 = b_3 = b_4$ и $d = 3$.

Ответ. 3.

Пусть задана геометрическая прогрессия $\{b_n\}$, знаменатель которой удовлетворяет условию

$$0 < |q| < 1.$$

Сумма первых n членов этой прогрессии S_n определяется, как известно, формулой

$$S_n = b_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Однако, для убывающей прогрессии со знаменателем $0 < |q| < 1$ вводится понятие суммы всех ее членов как

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S = \frac{b_1}{1 - q} \tag{4.3.4}$$

Здесь $S = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1} + \ldots$ – сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Пример 4.3.10. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии $15; 6; 12/5; 24/25; 48/125; \ldots$

Решение. Так как $b_1 = 15$ и $b_2 = 6$, то $q = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5} < 1$. Следовательно, сумма $S = 15 + 6 + \dfrac{12}{5} + \dfrac{24}{25} + \ldots = \dfrac{b_1}{1 - q} = \dfrac{15}{1 - 2/5} = 25.$

Ответ. 25.

Пример 4.3.11. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $b_1 = 1$, а каждый член, начиная со второго, в $\dfrac{13}{6}$ раза меньше суммы предыдущего и последующего

Решение. По условию задачи $b_2 = \dfrac{6}{13}(b_1 + b_3)$ или, используя представление членов геометрической прогрессии, $b_1 q = \dfrac{6}{13}(b_1 + b_1 q^2)$. Так как $b_1 \neq 0$, то для знаменателя q имеем уравнение

$$6q^2 - 13q + 6 = 0 \implies q_1 = \frac{3}{2};\ q_2 = \frac{2}{3}$$

Очевидно, что бесконечно убывающей геометрической прогрессии соответствует $q = \dfrac{2}{3}$.

Тогда сумма $S = \dfrac{b_1}{1-q} = \dfrac{1}{1-\dfrac{2}{3}} = 3$.

Ответ. 3.

Пример 4.3.12. Найдите значение выражения $5 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{5 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{5 \ldots}}}}$

Решение. Запишем это выражение в виде степени с дробным показателем, а именно

$$5 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{5 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{5 \ldots}}}} = 5 \cdot 3^{1/2} \cdot 5^{1/4} \cdot 3^{1/8} \cdot 5^{1/16} \ldots = 5^{1+1/4+1/16+\ldots} \cdot 3^{1/2+1/8+1/32+\ldots}.$$

Очевидно, что $1;\ \dfrac{1}{4};\ \dfrac{1}{16};\ldots$ – бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, для которой $b_1 = 1$ и $q = \dfrac{1}{4}$; и $\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{8};\ \dfrac{1}{32};\ldots$ – бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, для которой $b_1 = \dfrac{1}{2}$ и $q = \dfrac{1}{4}$.

Вычислим суммы S_1 и S_2 этих прогрессий. $S_1 = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{4}} = \dfrac{4}{3}$ и $S_2 = \dfrac{\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{4}} = \dfrac{2}{3}$.

Тогда $5 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{5 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{5 \ldots}}}} = 5^{4/3} \cdot 3^{2/3} = 5\sqrt[3]{45}$.

Ответ. $5\sqrt[3]{45}$.

Пример 4.3.13. Найдите наименьшее число членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $8;\ 7;\ \dfrac{49}{8};\ldots$ такое, чтобы их сумма отличалась от суммы прогрессии меньше, чем на 0,01

Решение. Для бесконечно убывающей геометрической прогрессии сумма S вычисляется по формуле

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{8}{1-\dfrac{7}{8}} = 64.$$

Сумма n первых членов этой прогрессии S_n имеет вид

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{8(1-(7/8)^n)}{1-7/8} = 64(1-\left(\frac{7}{8}\right)^n).$$

Из решения неравенства $|S_n - S| < 0,01$ находим n, т.е.

$$|64(1-\left(\frac{7}{8}\right)^n) - 64| < 0,01 \implies \left(\frac{7}{8}\right)^n < \frac{1}{6400}$$

Логарифмируя по основанию, например, 10, находим множество значений n, представляющих решение неравенства.

$$n > \frac{2lg\ 8+2}{lg\ 8 - lg\ 7} \approx \frac{3,806}{0,058} \approx 65,6.$$

Следовательно, для того, чтобы выполнить условие задачи, надо взять не менее 66 членов прогрессии.

Ответ. 66.

Пример 4.3.14. Найдите сумму первых трех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если сумма всех ее членов равна 1024, а сумма первых десяти членов равна 1023

Решение. Используя формулы суммы S всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии и суммы S_{10} первых десяти ее членов, получим

$$S = \frac{b_1}{1-q} = 1024 \text{ и } S_{10} = \frac{b_1(1-q^{10})}{1-q} = 1023.$$

Эти соотношения рассматриваем как систему уравнений для нахождения b_1 – первого члена прогрессии и q – знаменателя прогрессии.

$$\begin{cases} \dfrac{b_1}{1-q} = 1024 \\ \dfrac{b_1(1-q^{10})}{1-q} = 1023 \end{cases} \implies 1024(1-q^{10}) = 1023 \implies$$

$$\implies 1024 \cdot q^{10} = 1 \implies q = \frac{1}{2},\ b_1 = 512.$$

Тогда $S_3 = \dfrac{b_1(1-q^3)}{1-q} = 2 \cdot 512(1-\dfrac{1}{8}) = 896.$

Ответ. 896.

Пример 4.3.15. Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $x(x-8) \leqslant (a+4)(|x-4|-4)$ содержит все члены некоторой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом, равным 4,6, и положительным знаменателем

Решение. Преобразуем левую часть неравенства к виду

$$x(x-8) = x^2 - 8x + 16 - 16 = (x-4)^2 - 16 = |x-4|^2 - 16 = (|x-4|-4)(|x-4|+4).$$

Тогда неравенство запишем следующим образом :

$$(|x-4|-4)(|x-4|-a) \leqslant 0.$$

Чтобы его решить, введем новое неизвестное $t = |x-4|$ и получим неравенство

$$(t-4)(t-a) \leqslant 0.$$

Очевидно, что t должно принадлежать промежутку, соединяющему точки a и 4.

Рассмотрим варианты взаимного расположения этих точек.

При $a = 4$ $t = 4 \implies |x-4| = 4$ и решением неравенства являются точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 8$. Очевидно, что условия задачи не выполняются.

При $a > 4$ $4 \leqslant t \leqslant a \Longrightarrow 4 \leqslant |x-4| \leqslant a \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |x-4| \geqslant 4 \\ |x-4| \leqslant a \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x \geqslant 8 \\ x \leqslant 0 \end{array} \right. \\ 4-a \leqslant x \leqslant a+4 \end{array} \right.$

На рис.4.3.1 показана геометрическая интерпретация решения системы

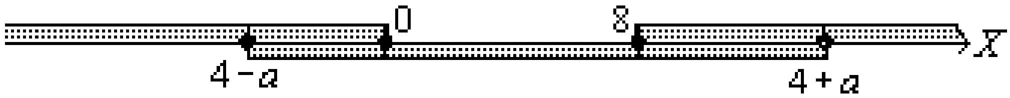


Рис. 4.3.1. Геометрическая интерпретация решения системы неравенств при $a > 4$.

Следовательно, решением исходного неравенства в этом случае являются два промежутка : $[4-a; 0]$ и $[8; a+4]$.

Эти промежутки не содержат точку 4,6, а значит, не удовлетворяют условию задачи.

При $a < 4$

$$a \leqslant t \leqslant 4 \text{ и } a \leqslant |x-4| \leqslant 4 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |x-4| \leqslant 4 \\ |x-4| \geqslant a \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 8 \\ \left[\begin{array}{l} x \geqslant a+4 \\ x \leqslant 4-a \end{array} \right. \end{array} \right.$$

и геометрическая интерпретация решения имеет вид, показанный на рис.4.3.2.

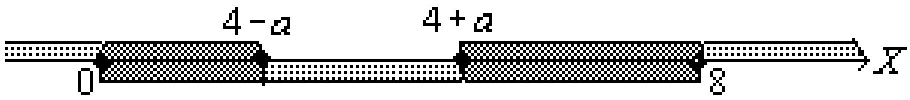


Рис. 4.3.2. Геометрическая интерпретация решения системы неравенств при $a < 4$.

или $x \in [0; 4-a] \cup [4+a; 8]$.

Если $a \leqslant 0,6$, то решение неравенства содержит точки 4,6 и все положительные числа меньше $4-a$.

Таким образом, это решение содержит бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом $b_1 = 4,6$ и положительным знаменателем q, удовлетворяющим условию

$$b_n \leqslant 4-a, \quad n \geqslant 2.$$

В частности, $b_2 \leqslant 4-a \implies b_1 q \leqslant 4-a \implies 0 < q \leqslant \dfrac{4-a}{4,6} < 1$, если $a \leqslant 0,6$.

<u>Ответ.</u> $a \in (-\infty; 0,6]$.

4.4 Задачи для самостоятельного решения

№ 4.4.1. Последовательность $\{a_n\}$ задана формулой своего общего члена $a_n = \dfrac{3n+1}{2n+5}$. Найдите номер члена последовательности, равного $1\dfrac{12}{37}$

№ 4.4.2. Докажите, что последовательность, заданная формулой $a_n = \dfrac{3n-1}{5n+4}$, монотонно возрастающая и ограниченная

№ 4.4.3. Докажите, что последовательность, заданная формулой $a_n = \dfrac{17}{2n+7}$, монотонно убывающая и ограниченная

№ 4.4.4. Используя определение предела, докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8n-5}{2n} = 4$

№ 4.4.5. Напишите формулу общего члена последовательности $\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{5}; \dfrac{1}{6}; \ldots$ при условии сохранения закономерности

№ 4.4.6. Напишите формулу общего члена последовательности $1; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{24}; \dfrac{1}{120}; \dfrac{1}{720}; \ldots$ при условии сохранения закономерности

№ 4.4.7. Если сумма первого и четвертого членов арифметической прогрессии равна 14, а ее второй член меньше пятого на 6, то сумма третьего и пятого членов прогрессии равна

1) 19 2) 20 3) 21 4) 22

№ 4.4.8. Если сумма первых десяти членов арифметической прогрессии равна 300, а четвертый член равен 21, то сумма третьего и шестого членов прогрессии равна

1) 45 2) 46 3) 47 4) 48

№ 4.4.9. Если сумма третьего, седьмого, четырнадцатого и восемнадцатого членов арифметической прогрессии равна 10, то сумма первых двадцати членов этой прогрессии равна

1) 40 2) 50 3) 60 4) 30

№ 4.4.10. Сумма всех натуральных чисел, кратных 3 и удовлетворяющих условию $27 < n \leqslant 183$, равна

1) 5538 2) 5535 3) 5532 4) 5529

№ 4.4.11. В арифметической прогрессии сумма пятого и девятого членов равна 36. Вычислите сумму первых тринадцати членов прогрессии

№ 4.4.12. Сумма всех трехзначных натуральных чисел, кратных 23, равна

1) 21008   2) 21528   3) 21551   4) 21028

№ 4.4.13. Сумма всех целых чисел, кратных 7 и удовлетворяющих условию $-126 < m \leqslant 154$, равна

1) 630   2) 770   3) 700   4) 840

№ 4.4.14. Сумма всех двузначных натуральных чисел, каждое из которых при делении на 4 дает остаток, равный 3, равна

1) 1257   2) 1261   3) 1254   4) 1269

№ 4.4.15. Если в арифметической прогрессии сумма первых трех членов равна 30, разность шестого и четвертого членов равна –4, а n–ый член равен –10, то n равно

1) 10   2) 11   3) 12   4) 13

№ 4.4.16. В арифметической прогрессии известны члены $a_{11} = -121$ и $a_{34} = 132$. Укажите номер k члена этой прогрессии, начиная с которого все ее члены неотрицательны

№ 4.4.17. В арифметической прогрессии известны члены $a_{10} = 239$ и $a_{40} = -31$. Укажите номер k члена этой прогрессии, начиная с которого все ее члены меньше 167

№ 4.4.18. В арифметической прогрессии известны члены $a_{12} = -13$ и $a_{42} = 257$. Укажите номер k члена этой прогрессии, начиная с которого все ее члены больше 167

№ 4.4.19. В арифметической прогрессии первый член равен –13, а разность равна 3. Найдите сумму тех членов прогрессии, которые принадлежат интервалу (19;42)

№ 4.4.20. В арифметической прогрессии первый член равен 8, а разность равна -2. Найдите сумму тех членов прогрессии, которые принадлежат интервалу $(-44; -23)$

№ 4.4.21. Если в арифметической прогрессии при любом n сумма ее первых n членов равна $5n^2$, то разность этой прогрессии равна

1) 4   2) 5   3) 20   4) 10

№ 4.4.22. Найдите сумму значений x или значение x, если оно единственное, при котором положительные числа $x^2 - 2; x + 3; 8x - 8$ являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии

№ 4.4.23. Найдите сумму значений x или значение x, если оно единственное, при котором отрицательные числа $2x - 2; 3x + 4; x^2 - 11$ являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии

№ 4.4.24. Найдите наибольшую из сумм первых n членов арифметической прогрессии, если $a_1 = 136$ и $a_2 = 121$

№ 4.4.25. Найдите наименьшую из сумм первых n членов арифметической прогрессии, если $a_1 = -173$ и $a_2 = -159$

№ 4.4.26. Если x_0 – корень уравнения $1+3+5+7+\cdots+x=625$, то значение выражения $\dfrac{x_0+1}{x_0-39}$ равно

1) 3 2) 4 3) 6 4) 5

№ 4.4.27. Найдите сумму общих членов двух арифметических прогрессий :
$\{51;\ 72;\ 93;\ldots;\ 6981\}$ и $\{79;\ 156;\ 233;\ldots;\ 6932\}$

№ 4.4.28. Если второй член геометрической прогрессии равен –6, а пятый равен 48, то сумма первых шести членов прогрессии равна

1) -63 2) 63 3) 21 4) -19

№ 4.4.29. Если сумма первого и пятого членов геометрической прогрессии равна 820, а знаменатель равен 3, то сумма первых шести членов прогрессии равна

1) 1820 2) 910 3) 7280 4) 3640

№ 4.4.30. Если сумма шести первых членов геометрической прогрессии равна 910, а знаменатель равен 3, то сумма первого и пятого ее членов равна

1) 305 2) 410 3) 205 4) 284

№ 4.4.31. Если первый член геометрической прогрессии равен 4, а четвертый член равен –32, то сумма первых ее шести членов равна

1) 84 2) -84 3) -82 4) -6

№ 4.4.32. Если второй член геометрической прогрессии равен 27, а пятый равен 1, то сумма пяти ее первых членов равна

1) 121 2) 119 3) 108 4) 97

№ 4.4.33. Если в возрастающей геометрической прогрессии каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих, то ее знаменатель равен

1) 2 2) $\dfrac{3}{2}$ 3) $1+\sqrt{2}$ 4) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

№ 4.4.34. Если в геометрической прогрессии первый член равен 3, второй равен 12, а последний член равен 3072, то число членов этой прогрессии равно

1) 5 2) 6 3) 8 4) 10

№ 4.4.35. В геометрической прогрессии известны члены $a_1=1280$ и $a_4=160$. Укажите номер k члена этой прогрессии, начиная с которого все ее члены не больше $\dfrac{5}{128}$

№ 4.4.36. В геометрической прогрессии известны члены $a_2=-1215$ и $a_5=-45$.

Укажите номер k члена этой прогрессии, начиная с которого все ее члены не меньше $-\dfrac{5}{243}$

№ 4.4.37. Для геометрической прогрессии $\{b_n\}$ с положительными членами выполняется условие $b_1 = (b_1 + b_2)(3b_1 + 4b_2)$. При каком значении знаменателя прогрессии сумма первых четырех членов принимает наименьшее значение ?

№ 4.4.38. Для геометрической прогрессии $\{b_n\}$ с положительными членами выполняется условие $b_1 - b_3 = b_1^2 + b_2^2$. При каком значении знаменателя прогрессии сумма первых четырех членов принимает наибольшее значение ?

№ 4.4.39. Найдите сумму значений t или значение t, если оно единственное, при котором числа $2; t-2; 2t+12$ являются тремя последовательными членами возрастающей геометрической прогрессии

№ 4.4.40. Найдите сумму значений t или значение t, если оно единственное, при котором числа $-2; t-2; 3t-14$ являются тремя последовательными членами убывающей геометрической прогрессии

№ 4.4.41. Даны арифметическая и геометрическая прогрессии. Сумма их первых членов равна –3, сумма третьих членов равна 1, а сумма пятых членов равна 5. Найдите разность арифметической прогрессии

№ 4.4.42. Три числа x, y, z образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию с отличным от единицы знаменателем, а числа x, 2y, 3z образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Тогда знаменатель геометрической прогрессии равен

1) $\dfrac{1}{3}$ 2) $\dfrac{1}{2}$ 3) 3 4) 2

№ 4.4.43. Три числа являются последовательными членами арифметической прогрессии. Если второе из них уменьшить на 2, а остальные два оставить без изменения, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найдите сумму трех членов арифметической прогрессии

№ 4.4.44. Если к четырем числам, составляющим геометрическую прогрессию, прибавить соответственно 4, 21, 29 и 1, то получатся четыре числа, составляющих арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии

№ 4.4.45. Сумма первых 5 членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна $\dfrac{31}{8}$, а последующих 5 членов равна $\dfrac{31}{256}$. Найдите сумму всех членов прогрессии

№ 4.4.46. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, зная, что $b_1 = 1$ и каждый член этой прогрессии в 3 раза больше суммы всех следующих за ним членов

№ 4.4.47. Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $x(x-4) \leqslant (a+1)(|x-2|-2)$ содержит все члены некоторой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом, равным 3,9, и положительным знаменателем

№ 4.4.48. Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $x(x-10) \geqslant (a+5)(|x-5|-5)$ содержит все члены некоторой геометрической прогрессии с первым членом, равным 5,3, и знаменателем $q < -1$

№ 4.4.49. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 4, а сумма кубов ее членов равна 192. Найдите первый член этой прогрессии

№ 4.4.50. При каком наименьшем значении n длины сторон $n-$угольника могут образовывать геометрическую прогрессию со знаменателем $q = 1,6$?

4.5 Ответы к задачам для самостоятельного решения

4.4.1. 16; **4.4.5.** $\dfrac{1}{n+2}$; **4.4.6.** $\dfrac{1}{n!}$; **4.4.7.** 2; **4.4.8.** 4; **4.4.9.** 2; **4.4.10** 1; **4.4.11** 234; **4.4.12.** 2; **4.4.13** 3; **4.4.14** 3; **4.4.15.** 3; **4.4.16.** 22; **4.4.17** 19; **4.4.18** 33; **4.4.19.** 244; **4.4.20.** –330; **4.4.21.** 4; **4.4.22.** ; **4.4.23.** ; **4.4.24.** 685; **4.4.25.** ; **4.4.26.** 4; **4.4.27.** 105165; **4.4.28.** 1; **4.4.29.** 4; **4.4.30.** 3; **4.4.31.** 2; **4.4.32.** 1; **4.4.33.** 4; **4.4.34.** 2; **4.4.35.** 16; **4.4.36.** ; **4.4.37.** 0,5; **4.4.38.** $\dfrac{1}{3}$; **4.4.39.** 10; **4.4.40.** ; **4.4.41.** 2; **4.4.42.** 1; **4.4.43.** 15; **4.4.44.** 4; **4.4.45.** 4; **4.4.46.** $\dfrac{4}{3}$; **4.4.47.** $(-\infty; 2,9]$; **4.4.48.** $[0,3; \infty)$; **4.4.49.** ; **4.4.50** .

Глава 5

Функции и графики

5.1 Понятие функции

5.1.1 Определение функции и способы ее задания

Пусть X и Y – некоторые числовые множества. Если каждому числу x из множества X ставится в соответствие по некоторому правилу f единственное число y из множества Y, то говорят, что на множестве X задана функция $y = f(x)$. Переменную x называют независимой переменной (или аргументом), а переменную y – зависимой переменной (или функцией). Множество X называют областью определения функции $y = f(x)$, а множество Y – множество всех значений, которые принимает переменная y, называют областью изменения функции.

Наряду с термином "функция"употребляют термин "отображение", а вместо записи $y = f(x)$ пишут $f : x \to y$ и говорят, что отображение f отображает число x в число y.

Задать функцию – это значит, во–первых, указать числовое множество X – область определения функции, и, во–вторых, указать правило соответствия f.

Существует три основных способа задания функции : аналитический, графический и табличный.

Аналитическое задание функции. Если зависимость между переменными величинами определяется с помощью формулы, указывающей, какие действия надо выполнить над аргументом x, чтобы получить значение функции, то говорят, что функция задана аналитически.

Рассмотрим примеры.

1. Формула $y = x^2$ задает функцию, область определения которой – числовая прямая $(-\infty; +\infty)$, а множество значений $[0; +\infty)$.

2. Формула $\dfrac{n+1}{n}$ ставит в соответствие каждому натуральному числу n число $y = \dfrac{n+1}{n} \in (1; 2]$, т.е. задает числовую последовательность, как функцию натурального аргумента.

3. $y = sgn\ x = \begin{cases} 1 & \text{если } x > 0 \\ 0 & \text{если } x = 0 \\ -1 & \text{если } x < 0 \end{cases}$

Данная функция (знак x) задана с помощью трех формул. Она определена на всей числовой прямой $(-\infty; \infty)$, а множество ее значений состоит из трех чисел : $-1; 0; 1$.

Графическое задание функции. Геометрической моделью множества действительных чисел R является числовая прямая. Геометрической моделью множества пар действительных чисел $\{(x, y),\ x \in R,\ y \in R\}$ или R^2, является координатная плоскость xOy, определяемая двумя взаимно перпендикулярными прямыми OX и OY – осью абсцисс и осью ординат с общим началом O и выбранными масштабами по осям. Множество F точек координатной плоскости OXY задает функцию, если прямая, параллельная оси ординат, может пересекать указанное множество не более, чем в одной точке (а именно, в одной, если $x \in X$, и ни в одной, если $x \notin X$). Множество F, обладающее указанным свойством, назовем графиком.

Итак, пусть на плоскости $0XY$ задан график F (рис.5.1.1). Возьмем некоторое $x \in$

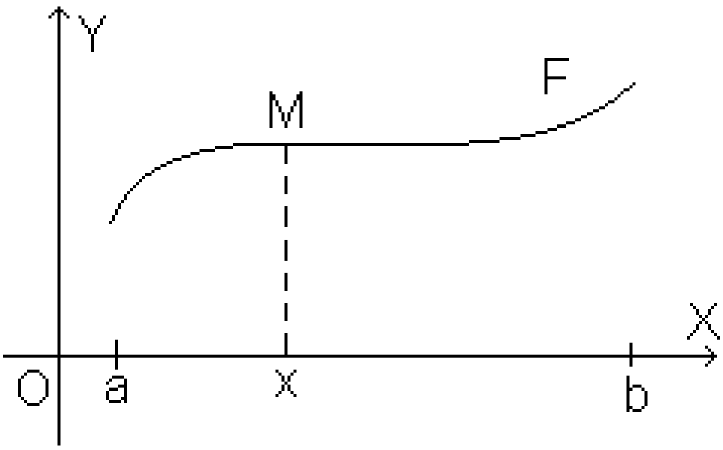


Рис. 5.1.1. Графическое задание функции.

$[a; b]$ и проведем через точку x прямую, параллельную оси ординат. Эта прямая пересечет график F в одной точке M. Спроектировав точку M на ось $0Y$, найдем число $f(x)$, соответствующее числу x. Таким образом, множество F задает графически функцию $f(x)$ в области $X = [a; b]$.

Табличное задание функции. Функция $y = f(x)$ задается в виде таблицы, в которой каждому x_i, записанному в первой строке, ставится в соответствие единственное значение y_i, стоящее во второй строке.

x	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_i	$\cdots$	y_n

Областью определения данной функции является множество, состоящее из n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а множество ее значений состоит из n чисел $y_1, y_2, \ldots, y_n$. С помощью таблицы можно задать функцию только при конечном числе значений аргумента. Табличное задание функции используется, в частности, в тех случаях, когда зависимость одной величины от другой находят опытным путем.

Пример 5.1.1. Найдите сумму целых значений x, принадлежащих области определения функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 7x + 12}} - 2\sqrt{18 - x^2 - 3x}$

1) -20 2) -19 3) -18 4) -17

Решение. Так как арифметический корень имеет смысл, если подкоренное выражение неотрицательно, то областью определения данной функции является решение системы

$$\begin{cases} 18 - x^2 - 3x \geqslant 0 \\ x^2 - 7x + 12 > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+6) \leqslant 0 \\ (x-3)(x-4) > 0 \end{cases}$$

или см. рис.5.1.2. Из этой схемы видно, что решением системы является множество

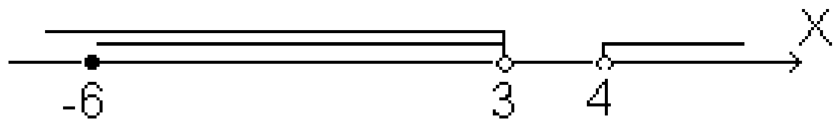


Рис. 5.1.2. Решение неравенства.

$X = [-6; 3)$, сумма целых значений которого равна –18.

Ответ. 3.

Пример 5.1.2. Найдите множество значений функции $y = x^2 + 10x$

1) $(0; \infty)$ 2) $[-10; \infty)$ 3) $(-50; \infty)$ 4) $[-25; \infty)$

Решение. Выделим полный квадрат в выражении $x^2 + 10x$.

$$x^2 + 10x + 25 - 25 = (x+5)^2 - 25$$

. Тогда функция $y = x^2 + 10x = (x+5)^2 - 25$ при $x = -5$ принимает наименьшее из возможных значений, а именно –25. Так как коэффициент при x^2 равен 1, т.е. больше 0, то ветви параболы, представляющей график этой функции, направлены вверх. Следовательно, множество значений этой функции $[-25; \infty)$.

Ответ. 4.

5.1.2 График функции

Введем на плоскости прямоугольную систему координат OXY и рассмотрим функцию f, заданную аналитическим выражением $f(x)$, т.е. $y = f(x), \quad x \in X$.

Графиком функции $y = f(x), \quad x \in X$ называется множество точек на плоскости OXY с координатами x и $f(x)$, где $x \in X$, т.е. множество $\{(x; f(x)), \ x \ \in \ X\}$.

Пример 5.1.3. Постройте график функции $y = [x]$, где $[x]$ – целая часть числа x

Решение. Если число x удовлетворяет условию $K \leqslant x < K + 1$, где K – целое число, то $[x] = K$.

Например, если $x \in [0; 1)$, то $[x] = 0$; если $x \in [1; 2)$, то $[x] = 1$ и т.д.

Следовательно, график функции $y = [x]$ состоит из горизонтальных отрезков, у которых исключены их правые концы (отмечены стрелками; рис. 5.1.3).

Пример 5.1.4. Постройте график функции $y = x - [x]$ (дробная часть числа x)

Решение. Если $x \in [0; 1)$, то $[x] = 0$ и $y = x$; если $x \in [1; 2)$, то $[x] = 1$ и $y = x - 1$ и т.д. Кроме того, $f(x + K) = f(x)$, где $K \in Z$.

Действительно, $f(x + K) = x + K - [x + K] = x + K - [x] - K = x - [x] = f(x)$.

Например, если $x = 0,5$, то $x - [x] = 0,5$; $\ x+1-[x+1] = 0,5+1-[1,5] = 0,5+1-1 = 0,5$; $\ x + 2 - [x + 2] = 2,5 - [2,5] = 2,5 - 2 = 0,5$.

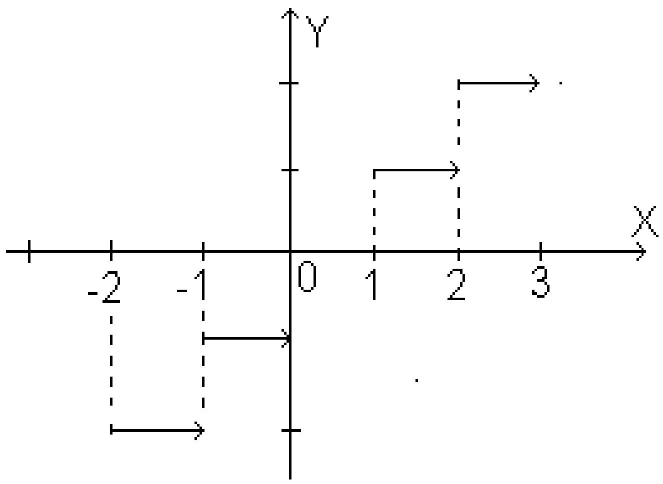


Рис. 5.1.3. График функции $y = [x]$

Следовательно, сдвинув график функции $y = x, \quad x \in [0; 1)$ по оси $0X$ на любое целое число, получим искомый график (рис. 5.1.4)

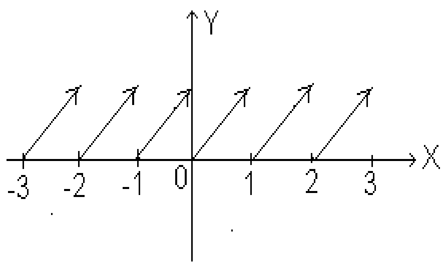


Рис. 5.1.4. График функции $y = x - [x]$

5.2 Общие свойства функции

5.2.1 Четные и нечетные функции

Введем понятие симметричного множества.

Числовое множество называется симметричным относительно начала координат, если для каждого элемента $x \in X$ найдется противоположный элемент $(-x)$, принадлежащий множеству X.

Примерами симметричных множеств являются : отрезок $[-a; a]$, интервал $(-a; a)$, числовая ось $(-\infty; \infty)$.

Функция $y = f(x), \; x \in X$ называется четной, если :

1) X – симметричное множество;

2) для любого $x \in X$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Функция $y = f(x), \; x \in X$ называется нечетной, если :

1) X – симметричное множество ;

2) для любого $x \in X$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Если функция $y = f(x)$ не является ни четной, ни нечетной, то говорят, что она не обладает свойством четности. В этом случае говорят, что $y = f(x)$ – функция общего вида.

Для того, чтобы установить, является ли аналитически заданная функция $y = f(x)$ четной или нечетной, надо прежде всего выяснить, симметрична ли область определения X.

Если же эта область – симметричное множество, то в аналитическом выражении $f(x)$ нужно заменить x на $-x$, выполнить упрощения и сравнить результат с $f(x)$: если окажется, что $f(-x) = f(x)$, то функция четная; если окажется, что $f(-x) = -f(x)$, то функция нечетная; если же $f(-x)$ отличается и от $f(x)$, и от $-f(x)$, то функция не является ни четной, ни нечетной.

Пример 5.2.1. Исследуйте на четность и нечетность функции :

1) $y = x^4 - 2x^2$ 2) $y = x|x|$ 3) $y = \sqrt{x}$ 4) $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ 5) $y = x^2 + 2|x| - 3x$

Решение. 1) Функция $y = x^4 - 2x^2$ определена на всей числовой оси $(-\infty; +\infty)$ – симметричное множество и

$$f(-x) = (x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x).$$

Следовательно, это четная функция.

2) Функция $y = x|x|$ определена на всей числовой оси и

$$f(-x) = (=^{-})| - x| = -x|x| = -f(x).$$

Следовательно, это нечетная функция.

3) Областью определения функции $y = \sqrt{x}$ является луч $[0; +\infty)$ – несимметричное множество. Следовательно, эта функция не является ни четной, ни нечетной.

4) Область определения функции $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ имеет вид

$$(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$$

. Это симметричное множество.

Кроме того, $f(-x) = \dfrac{(-x)}{(-x)^2 - 4} = -\dfrac{x}{x^2 - 4} = -f(x)$. Следовательно, это нечетная функция.

5) Область определения функции $y = x^2 + 2|x| - 3x$ – числовая ось $(-\infty; +\infty)$.

Далее, $y(-x) = (-x)^2 + 2| - x| - 3(-x) = x^2 + 2|x| + 3x$.

Так как $y(-x) \neq y(x)$ и $y(-x) \neq -y(x)$, то функция не является ни четной, ни нечетной.

Следующие утверждения выявляют особенности графиков четных и нечетных функций.

Утверждение 1. Если функция $y = f(x),\ x \in X$ является четной, то ее график симметричен относительно оси ординат.

Действительно, для любого $x \in X$ точки плоскости $M(x, f(x))$ и $M'(-x, f(-x))$ симметричны относительно оси $0Y$, так как $f(-x) = f(x)$ (5.2.1).

Утверждение 2. Если функция $y = f(x),\ x \in X$ является нечетной, то ее график симметричен относительно начала координат.

Действительно, для любого $x \in X$ точки плоскости $M(x, f(x))$ и $M'(-x, f(-x))$ симметричны относительно начала координат, так как $f(-x) = -f(x)$ (рис.5.2.2).

Пример 5.2.2. На одном из рисунков (рис. 5.2.3) изображен график четной функции. Укажите этот рисунок

Решение. Четная функция изображена на рисунке 4, так как только на этом рисунке график симметричен относительно оси $0Y$.

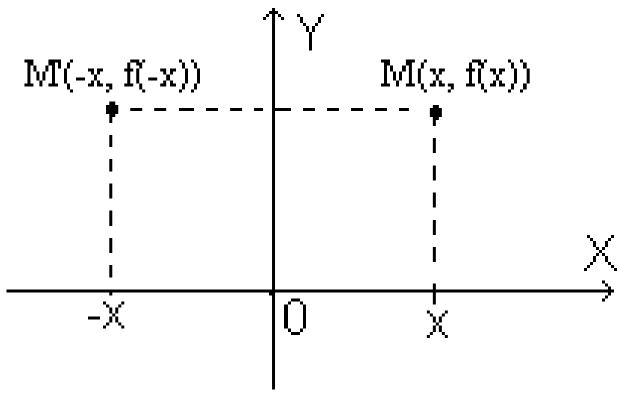


Рис. 5.2.1. Точки M и M' симметричны относительно оси ординат.

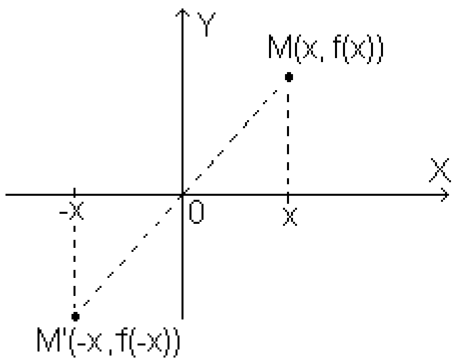


Рис. 5.2.2. Точки M и M' симметричны относительно начала координат.

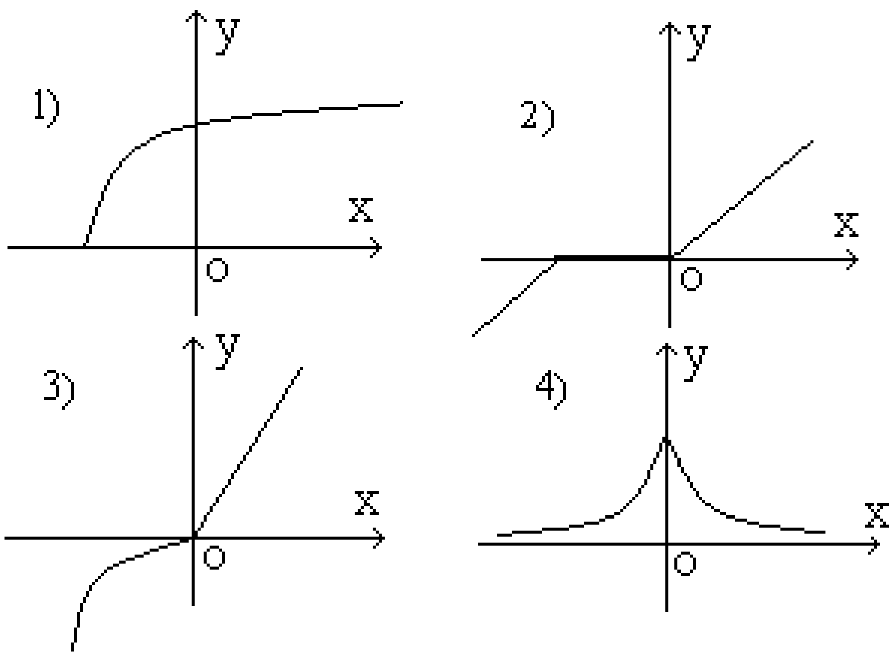


Рис. 5.2.3. Графики функций к примеру 5.2.2.

Ответ. 4.

Пример 5.2.3. На одном из рисунков (рис. 5.2.4) изображен график нечетной функции. Укажите этот рисунок

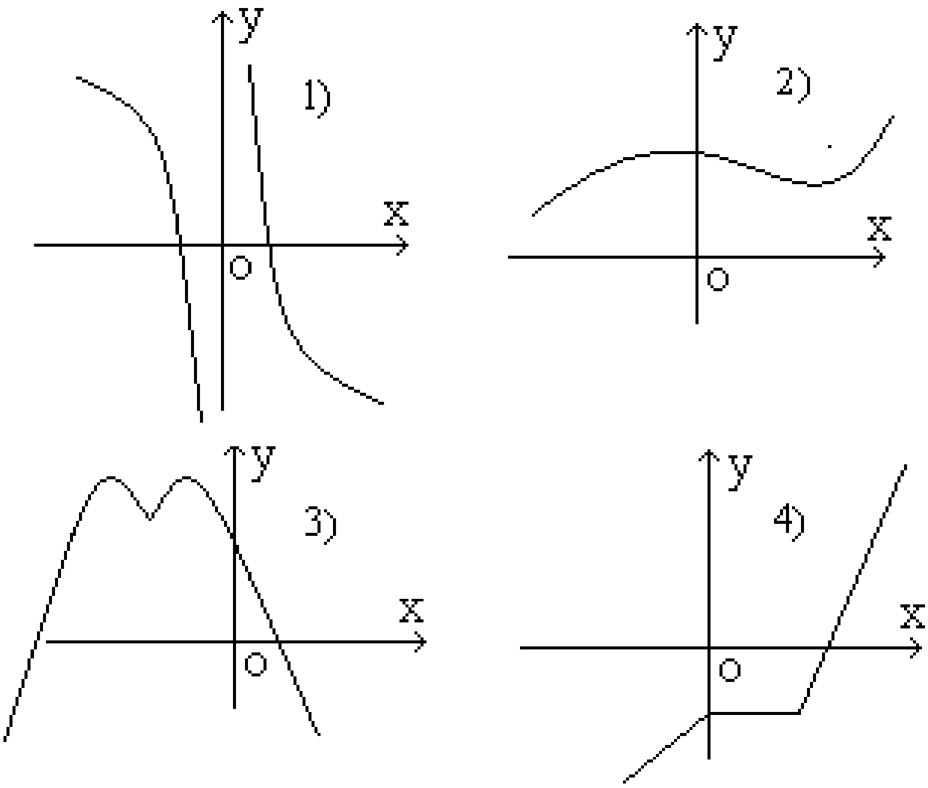


Рис. 5.2.4. Графики функций к примеру 5.2.3

Решение. Нечетная функция изображена на рисунке 1, так как только на этом рисунке график симметричен относительно начала координат.

Ответ. 1.

Пример 5.2.4. Найдите значение функции $y = \dfrac{g(x) + f(-x) - g(-x)}{2g(-x)}$ в точке x_0, если известно, что функция $y = f(x)$ – нечетная, функция $y = g(x)$ – четная, $f(x_0) = 5$, $g(x_0) = -1$

Решение. Так как $f(x)$ – нечетная функция, а $g(x)$ – четная, то $f(-x) = -f(x)$ и $g(-x) = g(x)$. Тогда $y = \dfrac{g(x) - f(x) - g(x)}{2g(x)} = -\dfrac{f(x)}{2g(x)}$ и $y(x_0) = -\dfrac{f(x_0)}{2g(x_0)} = 2,5$.

Ответ. 2,5.

Пример 5.2.5. Четная функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для функции $g(x) = x + (x-9)f(x-9) + 9$ вычислите сумму $g(7) + g(9) + g(11)$

Решение. $g(7) = 7 + (-2)f(-2) + 9 = 16 - 2f(2)$; $g(9) = 9 + 0 \cdot f(0) + 9 = 18$; $g(11) = 11 + 2f(2) + 9 = 20 + 2f(2)$. Тогда $g(7) + g(9) + g(11) = 54$.

Ответ. 54.

Пример 5.2.6. Нечетная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = x(2x-1)(x+2)(x+3)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

Решение. В области $x \geqslant 0$ $f(x) = x(2x-1)(x+2)(x+3)$ и уравнение $f(x) = 0$ имеет два корня $x = 0$ и $x = \dfrac{1}{2}$.

В области $x < 0$ $f(x) = -x(2x+1)(x-2)(x-3)$ и уравнение $f(x)$ имеет один корень $x = -\dfrac{1}{2}$. Следовательно, уравнение $f(x) = 0$ имеет 3 корня. Этот же результат можно получить из геометрических соображений.

В области $x \geqslant 0$ график $f(x)$ имеет вид (рис.5.2.5). Для $x < 0$ график $f(x)$ построим

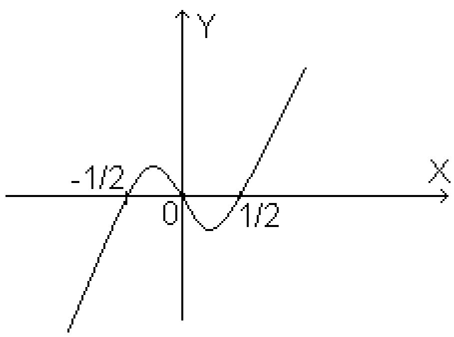


Рис. 5.2.5. Кривая f(x) пересекает ось абсцисс в трёх точках.

симметричным отражением $f(x)$, $x \geqslant 0$ относительно начала координат. Следовательно, уравнение $f(x) = 0$ имеет три корня.

Ответ. 3.

5.2.2 Убывание и возрастание функций

Функция $y = f(x)$, $x \in X$ называется возрастающей (неубывающей) на множестве X, если для любых $x_1, x_2 \in X$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно, из неравенства $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.)

Функция $y = f(x)$, $x \in X$ называется убывающей (невозрастающей) на множестве X, если для любых $x_1, x_2 \in X$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ (соответственно, из неравенства $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \geqslant f(x_2)$).

При движении вдоль оси абсцисс слева направо ордината графика возрастающей функции увеличивается, а ордината графика убывающей функции уменьшается.

Если функция невозрастающая или неубывающая, то ее график может иметь участки постоянства ординат.

Функции возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие называются монотонными функциями.

Функция $y = f(x)$ называется строго монотонной на множестве X, если она либо возрастающая, либо убывающая на этом множестве.

Из геометрических соображений можно сформулировать следующие утверждения :

1. Если четная функция возрастает при $x > 0$, то она убывает при $x < 0$ (рис.5.2.6.а)

2. Если четная функция убывает при $x > 0$, то она возрастает при $x < 0$ (рис.5.2.6.б)

3. Если нечетная функция возрастает при $x > 0$, то она возрастает и при $x < 0$ (рис.5.2.6.в)

4. Если нечетная функция убывает при $x > 0$, то она убывает и при $x < 0$ (рис.5.2.6.г)

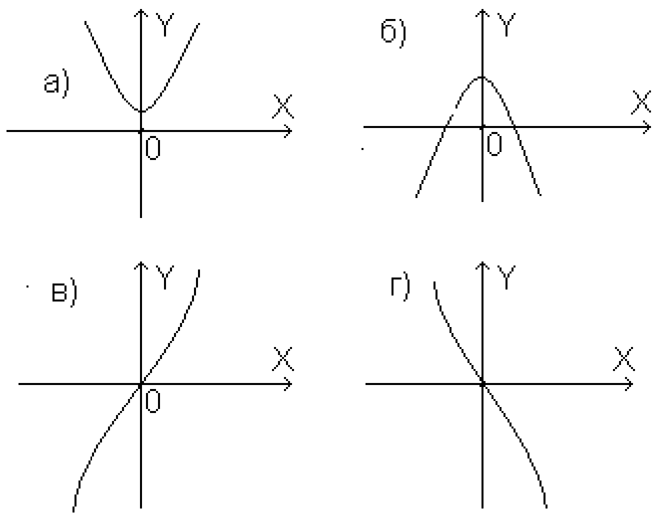


Рис. 5.2.6. Свойства монотонности для чётных и нечётных функций.

Пример 5.2.7. Исследуйте на монотонность функции : 1) $y = x^3$; 2) $y = x^2 + |x|$

<u>Решение.</u> 1). Функция $y = x^3$ нечетная, поэтому проведем исследование на промежутке $(0; +\infty)$.

Пусть $0 < x_1 < x_2$. Тогда, согласно свойствам числовых неравенств $x_1^3 < x_2^3$, т.е. функция возрастает на множестве $(0; +\infty)$ и в силу нечетности следует ее возрастание на всей числовой прямой.

2). Функция $y = x^2 + |x|$ – четная. Проведем исследование на монотонность на промежутке $(0; +\infty)$.

Пусть $0 < x_1 < x_2$. Тогда $x_1^2 < x_2^2$ и, согласно свойствам числовых неравенств $x_1^2 + x_1 < x_2^2 + x_2$ (сложение неравенств одинакового смысла), т.е. функция возрастает на множестве $(0; +\infty)$. Из четности функции следует, что на множестве $(-\infty; 0)$ она убывает.

5.2.3 Периодические функции

Функция $y = f(x)$, $x \in X$ называется периодической, если существует число $T \neq 0$ такое, что выполнены два условия :

1) если $x \in X$, то числа $x \pm T$ также принадлежат области определения функции, т.е. множеству X ;

2) для любого $x \in X$ выполняется равенство $f(x \pm T) = f(x)$.

Число T называется периодом функции.

Из этого определения следует, что, если T – период функции $y = f(x)$, $x \in X$, то число $(-T)$ также является периодом функции.

Действительно, $x - T \in X$ и $f(x) = f((x - T) + T) = f(x - T)$.

Имеют место утверждения :

1. Если число T есть период функции $y = f(x)$, то число $Q = mT$, где m – любое целое число, отличное от нуля, также является периодом этой функции.

2. Если число T есть период функции $y = f(x)$, то число $\dfrac{T}{\omega}$ является периодом функции $y = f(\omega x)$, где ω – любое действительное число, отличное от нуля.

Из утверждения 1 следует, что периодическая функция имеет бесконечное множество периодов. Чаще всего (но не всегда) среди множества положительных периодов функции можно найти наименьший. Его называют основным периодом функции.

Графики периодических функций обладают следующим свойством.

Если T – основной период функции $y = f(x)$, то достаточно построить график этой функции на любом промежутке длины T, а затем произвести параллельный перенос этой ветви вдоль оси OX на $\pm T, \pm 2T, \pm 3T, \ldots$.

Примером периодической функции является $y = x - [x]$ с периодом $T = 1$ (см. пример 5.1.4.)

Пример 5.2.8. Найдите значение функции $f(15)$, если известно, что функция $y = f(x)-$ нечетная, имеет период 8 и на отрезке $[0; 4]$ функция имеет вид $y = 12x - 3x^2$

Решение. Определим вид функции $f(x)$ на интервале $[-4; 0]$, используя свойство нечетности : $f(-x) = -f(x)$.

Тогда, если $f(x) = 12x - 3x^2$ при $x \in [0; 4]$, то $f(x) = 12x + 3x^2$ при $x \in [-4; 0]$ (рис.5.2.5).

Используя периодичность функции, а именно $f(x + kT) = f(x)$, где k – целое число, получим $f(15) = f(15 - 2 \cdot 8) = f(-1) = -12 + 3 = -9$.
см. рис.5.2.7.

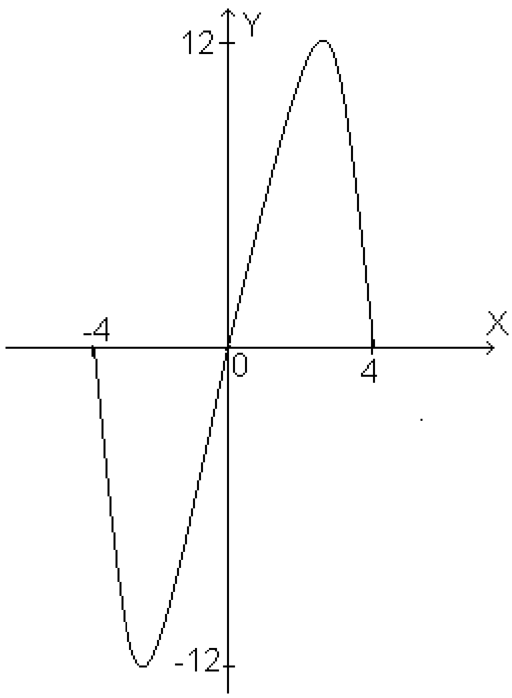


Рис. 5.2.7. График функции $y = 12x - 3x^2$ на отрезке [-4; 4].

Ответ. –9.

5.2.4 Наибольшее и наименьшее значения функции. Ограниченные функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X. Если существует такое число $x_0 \in X$, что для любого $x \in X$ справедливо неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$, то говорят, что функция $f(x)$ принимает наименьшее значение при $x = x_0$.

Если существует такое число $x_0 \in X$, что для любого $x \in X$ справедливо неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$, то $y_0 = f(x_0)$ – наибольшее значение функции на множестве X.

Пример 5.2.9. Найдите наибольшее значение функции $y = -x^2 + 4x - 5$, если оно существует

Решение. Выделим полный квадрат в квадратном трехчлене $-x^2 + 4x - 5$.

$$-x^2 + 4x - 5 = -(x^2 - 4x + 4 - 4) - 5 = -(x - 2)^2 - 1.$$

Очевидно, что наибольшего значения квадратный трехчлен достигает в точке $x = 2$. Следовательно, $y_0 = f(2) = -1$ – наибольшее значение функции.

Ответ. –1.

Функция $y = f(x),\ x \in X$ называется ограниченной снизу, если существует число A такое, что $f(x) \geqslant A$ для любого $x \in X$.

Например, функция $y = \sqrt{1 + x^2}$ ограничена снизу, так как $\sqrt{1 + x^2} \geqslant 1$ для любого x.

Функция $y = f(x),\ x \in X$ называется ограниченной сверху, если существует число B такое, что $f(x) \leqslant B$ для любого $x \in X$.

Например, функция $y = \sqrt{1 - x^2},\ x \in [-1; 1]$ ограничена сверху, так как $\sqrt{1 - x^2} \geqslant 1$ для любого $x \in [-1; 1]$.

Функция $y = f(x),\ x \in X$ называется ограниченной, если существует число $K > 0$ такое, что $|f(x)| \leqslant K$ для любого $x \in X$.

Например, функция $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ ограничена на всей числовой оси, так как $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \leqslant 1$ и $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \geqslant -1$ для любого x. Следовательно, $\left|\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right| \leqslant 1$.

5.2.5 Исследование функции

При исследовании функции необходимо ответить на следующие вопросы.

1. Какова область определения функции ?
2. Какова область изменения функции ?
3. Является ли функция ограниченной ?
4. Является ли функция четной или нечетной ?
5. Имеет ли функция период ?
6. Существуют ли ее наибольшее и наименьшее значения ?
7. Есть ли у функции точки пересечения с осями координат ?
8. Есть ли у функции промежутки монотонности ?

В результате проведенного исследования строится график функции, который иллюстрирует свойства функции.

5.3 Обратная функция

5.3.1 Взаимно однозначное отображение

Каждая функция $y = f(x)$ производит отображение области определения функции X на области ее изменения так, что каждому $x \in X$ соответствует единственное значение $y \in Y$.

Функция $y = f(x),\ x \in X$ осуществляет взаимно однозначное отображение области X на область Y, если разным элементам $x \in X$ соответствуют разные значения $y \in Y$.

Например, для функции $y = 2x + 1$ каждое значение $y \in (-\infty; +\infty)$ получается лишь при одном значении x. Эта функция осуществляет взаимно однозначное отображение области $X = (-\infty; +\infty)$ на область $Y = (-\infty; +\infty)$.

Заметим, что существуют функции, не обладающие этим свойством. Например, функция $y = x^2,\ x \in (-\infty; +\infty)$, для которой разным значениям x могут соответствовать одинаковые значения y (при $x = \pm x_0,\ x_0 \neq 0,\ y = x_0^2$). Но если функцию $y = x^2$ задать на множестве $[0; +\infty)$, то эта функция осуществляет взаимно однозначное соответствие области $[0; +\infty)$ на область $Y = [0; +\infty)$. При этом по каждому значению $y \in [0; +\infty)$ можно однозначно восстановить единственное значение $x \in [0; +\infty)$, т.е. установить по правилу $x = \sqrt{y}$ взаимно однозначное отображение области Y на область X. Это правило называется обратным для функции $y = x^2,\ x \in [0; +\infty)$.

5.3.2 Обратная функция

Пусть дана функция $y = f(x),\ x \in X$. Обозначим множество ее значений через Y. Функция $y = f(x)$ задает отображение f множества X на множество Y. Если это отображение взаимно однозначное, то можно указать обратное правило f^{-1}, которое отображает множество Y на множество X.

Иначе говоря, по каждому значению y из области Y можно однозначно восстановить x из области X. Найденное x обозначается как $f^{-1}(y)$, т.е. $x = f^{-1}(y)$. Если в этом равенстве заменить x на y, а y на x с одновременной заменой области определения и области изменения, то полученная функция вида $y = f^{-1}(x)$ называется обратной для функции $y = f(x)$.

Очевидно, что область изменения функции $y = f(x)$ становится областью определения функции $y = f^{-1}(x)$, а область определения функции $y = f(x)$ становится областью изменения обратной функции.

Возникает вопрос, каким условиям должна удовлетворять функция $y = f(x)$, чтобы для нее существовала обратная функция ?

Теорема существования обратной функции.

Если функция $y = f(x),\ x \in X$ строго монотонна на промежутке X и Y – множество ее значений, то существует обратная функция $x = f^{-1}(y),\ y \in Y$ так же строго монотонная на промежутке Y.

Пример 5.3.1. Для данных функций найдите обратные, если они существуют

1) $y = 3x - 2$ 2) $y = 3 - x^3$ 3) $y = \dfrac{1-x}{1+x}$

<u>Решение.</u> 1. Функция $y = 3x - 2$ возрастает на всей числовой прямой, значит, она имеет обратную. Из уравнения $y = 3x - 2$ находим $x = \dfrac{y+2}{3}$. Поменяв местами y и x,

получим $y = \dfrac{x+2}{3}$ – обратная функция.

2. Функция $y = 3 - x^3$ убывает на всей числовой оси. Найдем x из уравнения $x^3 = 3 - y$, а именно $x = \sqrt[3]{3-y}$. Тогда обратная функция имеет вид $y = \sqrt[3]{3-x}$.

3. Функция $y = \dfrac{1-x}{1+x}$ определена на множестве $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$, а область ее значений $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$. Функция $y = \dfrac{1-x}{1+x}$ убывает на $(-\infty; -1)$ и на $(-1; +\infty)$. Из уравнения $y = \dfrac{1-x}{1+x}$ найдем x, а именно $x = \dfrac{1-y}{1+y}$. Поменяв местами x и y, получим обратную функцию того же вида, т.е. $y = \dfrac{1-x}{1+x}$.

5.3.3 График обратной функции

Если точка $M(x_0, y_0)$ лежит на графике функции $y = f(x)$, имеющей обратную функцию $x = f^{-1}(y)$, то ее координаты удовлетворяют как условию $y_0 = f(x_0)$, так и условию $x_0 = f^{-1}(y_0)$.

Другими словами, все точки (и только они) графика $y = f(x)$ удовлетворяют условию $x = f^{-1}(y)$.

Так как для получения обратной функции надо в равенстве $x = f^{-1}(y)$ заменить x на y, а y на x, то каждая точка графика $y = f^{-1}(x)$ получается из точки графика $y = f(x)$ симметричным отображением относительно прямой $y = x$ (рис.5.3.1).

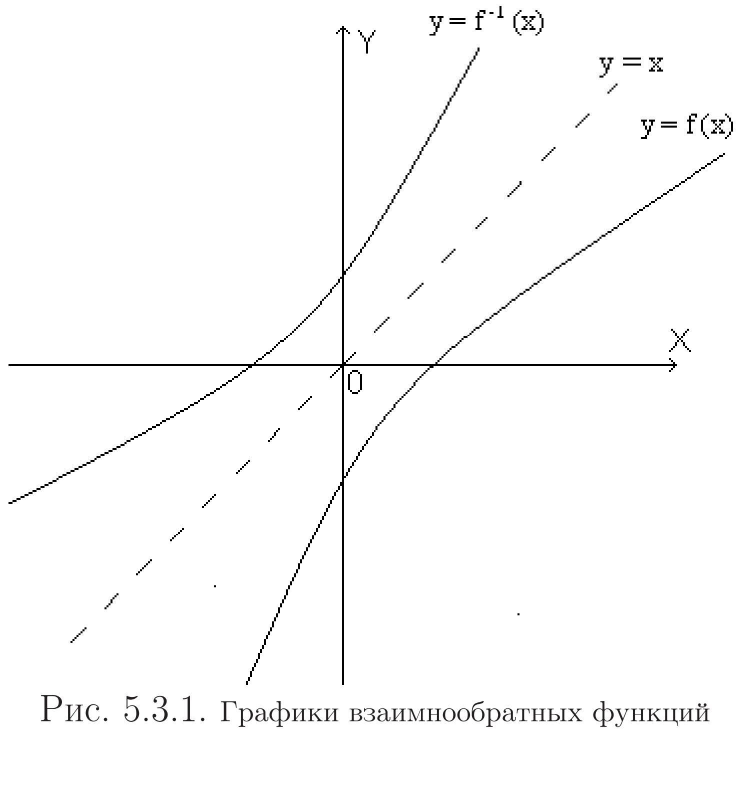


Рис. 5.3.1. Графики взаимнообратных функций

5.4 Основные элементарные функции

5.4.1 Степенная функция $y = x^\alpha$

Рассмотрим частные случаи этой функции.

Линейная функция $y = x$ называется прямой пропорциональной зависимостью, и ее графиком является прямая (рис.5.4.1).

Функция $y = \dfrac{1}{x}$ называется обратной пропорциональной зависимостью, и ее графиком

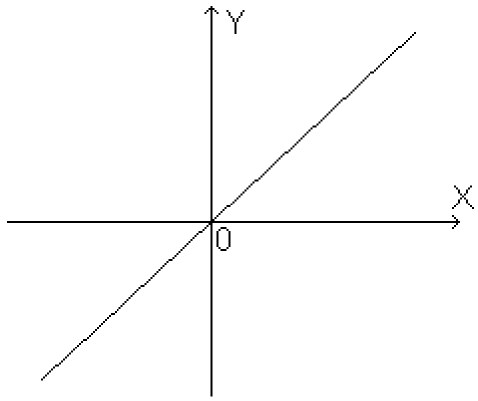


Рис. 5.4.1. График функции $y = x$

является гипербола (рис.5.4.2а).

Функция $y = x^2$ называется квадратичной, и ее графиком является парабола (рис.5.4.2б).

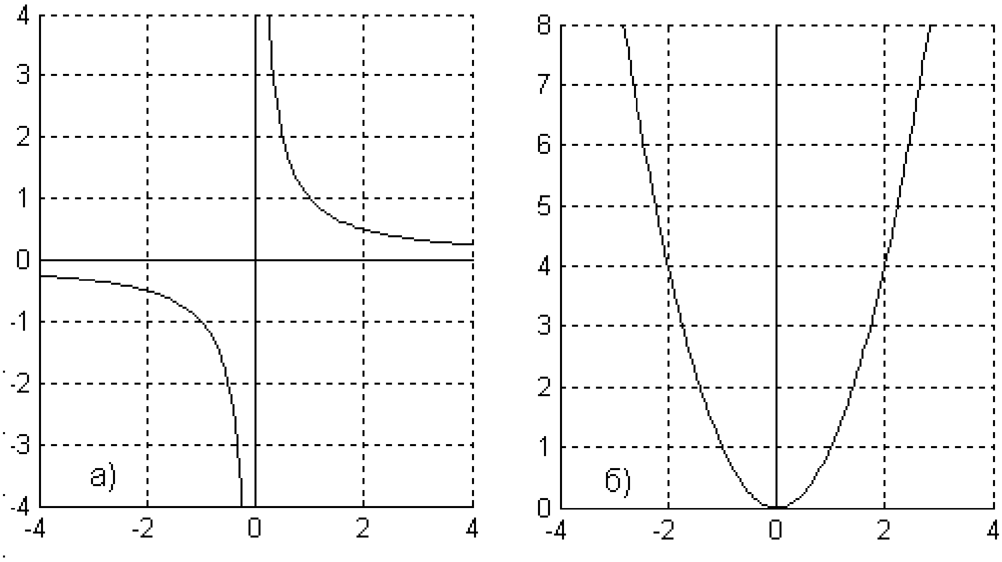


Рис. 5.4.2. а) График функции $y = \dfrac{1}{x}$ б) График функции $y = x^2$

Рассмотрим более общие случаи :

1. $y = x^{2m}$ (m – натуральное число).

а) область определения : $(-\infty; +\infty)$;

б) область значений : $[0; +\infty)$;

в) функция ограничена снизу : $y \geqslant 0$;

г) функция четная;

д) функция принимает наименьшее значение $y = 0$ при $x = 0$;

е) функция убывает на промежутке $(-\infty; 0)$ и возрастает на промежутке $(0; +\infty)$.

Графики функций $y = x^2$, $y = x^4$ изображены на рис.5.4.3а.

2. $y = x^{2m-1}$ (m – натуральное число).

а) область определения : $(-\infty; +\infty)$;

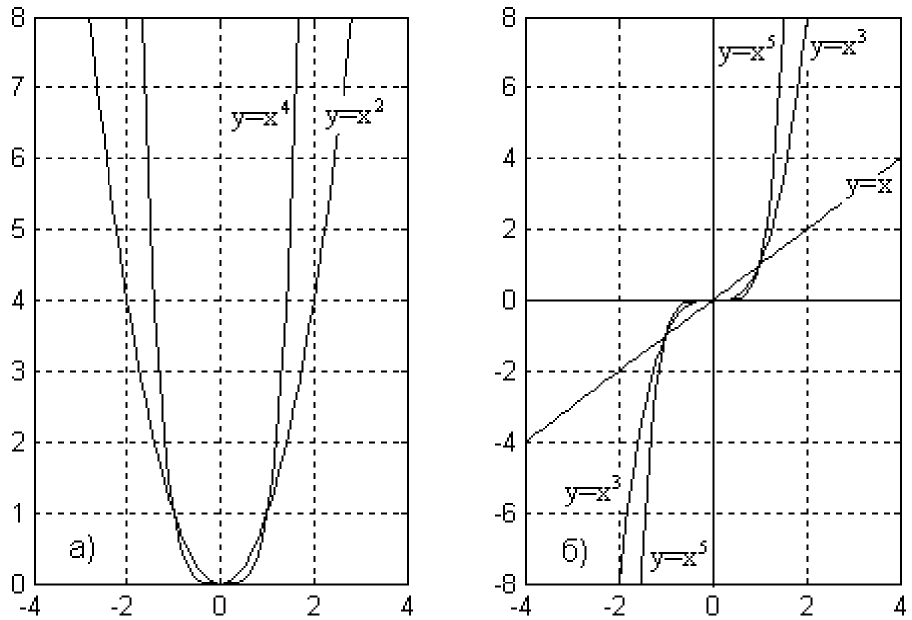


Рис. 5.4.3. Графики функций а) $y = x^2, y = x^4$, б) $y = x, y = x^3, y = x^5$

б) область изменения : $(-\infty; +\infty)$;

в) функция нечетная;

г) функция возрастает на всей области определения;

д) точка $(0; 0)$ – единственная точка пересечения с осями координат.

Графики функций $y = x$, $y = x^3$ и $y = x^5$ изображены на рис.5.4.3б.

5.4.2 Показательная и логарифмическая функции

Функция $y = a^x$, где a – фиксированное число такое, что $a > 0$ и $a \neq 1$, называется показательной функцией.

Эта функция обладает следующими свойствами :

а) область определения : $(-\infty; +\infty)$;

б) область значений : $(0; +\infty)$;

в) функция ограничена снизу : $y > 0$;

г) если $a > 1$, то функция $y = a^x$ возрастает на всей области определения;

если $0 < a < 1$, то функция $y = a^x$ убывает на всей области определения;

д) при $x = 0$ $y = 1$ и точка $(0; 1)$ – единственная точка пересечения с осью OY.

Графики функций $y = 2^x$ и $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ изображены на рис 5.4.4.

Так как $y = a^x$ – монотонная, то она имеет обратную функцию $y = log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, которая называется логарифмической.

Эта функция обладает следующими свойствами :

а) область определения : $(0; +\infty)$;

б) область значений : $(-\infty; +\infty)$;

в) если $a > 1$, то функция $y = log_a rr$ возрастает по всей области определения;

если $0 < a < 1$, то функция $y = log_a x$ убывает на всей области определения;

г) точка $(1; 0)$ – единственная точка пересечения с осью OX.

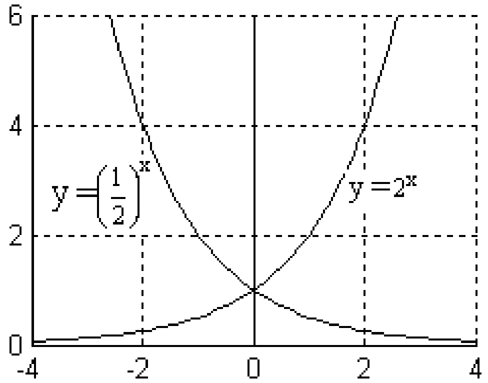


Рис. 5.4.4. Графики функций $y = 2^x$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

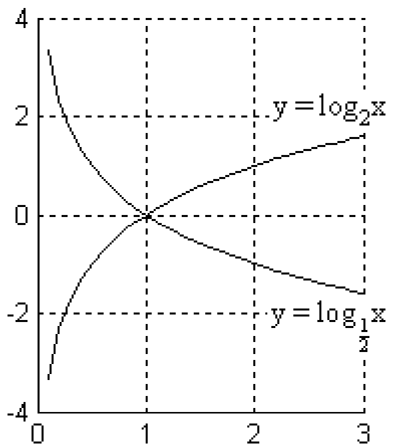


Рис. 5.4.5. Графики функций $y = \log_2 x$ и $y = \log_{1/2} x$

Графики функций $y = log_2 x$ и $y = log_{1/2} x$ изображены на рис 5.4.5.

5.4.3 Тригонометрические функции

Рассмотрим окружность единичного радиуса с центром в начале O прямоугольной системы координат OXY.

Пусть подвижный единичный радиус OM задает угол α (рис. 5.4.6). Тогда число, равное абсциссе конца подвижного единичного радиуса, задающего этот угол α, называется косинусом угла α и обозначается $\cos\alpha$, а число, равное соответствующей ординате, называется синусом угла α и обозначается $\sin\alpha$.

Тангенсом угла α называется число, равное отношению синуса угла α к косинусу того же

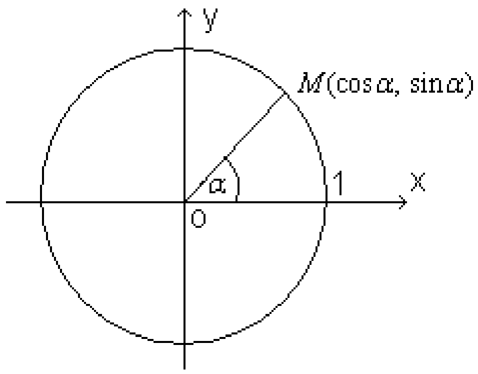


Рис. 5.4.6. Определение тригонометрических функций на единичной окружности

угла и обозначается $\operatorname{tg}\alpha$, т.е.

$$\operatorname{tg}\ \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \cos\alpha \neq 0.$$

Котангенсом угла α называется число, равное отношению косинуса угла α к синусу того же угла и обозначается $\operatorname{ctg}\alpha$, т.е.

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \sin\alpha \neq 0.$$

Используя свойства синуса угла, получим следующие свойства функции $y = \sin x$:

1) область определения : $(-\infty; +\infty)$;

2) область значений : $[-1; 1]$;

3) функция ограничена : $|\sin x| \leqslant 1$;

4) функция принимает наименьшее значение $y = -1$ при $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi K,\ K \in Z$ и наибольшее значение $y = 1$ при $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi K,\ K \in Z$;

5) функция периодическая с основным периодом 2π ;

6) функция нечетная : $\sin(-x) = -\sin x$;

7) точки пересечения с осью OX $(\pi K; 0),\ K \in Z$.

График функции – синусоида, см. рис.5.4.7. Используя свойства косинуса угла, получим следующие свойства функции $y = \cos x$:

1) область определения : $(-\infty; +\infty)$;

2) область значений : $[-1; 1]$;

3) функция ограничена : $|\cos x| \leqslant 1$;

4) функция принимает наименьшее значение $y = -1$ при $x = \pi + 2\pi K, K \in Z$, и наибольшее значение $y = 1$ при $x = 2\pi K,\ K \in Z$;

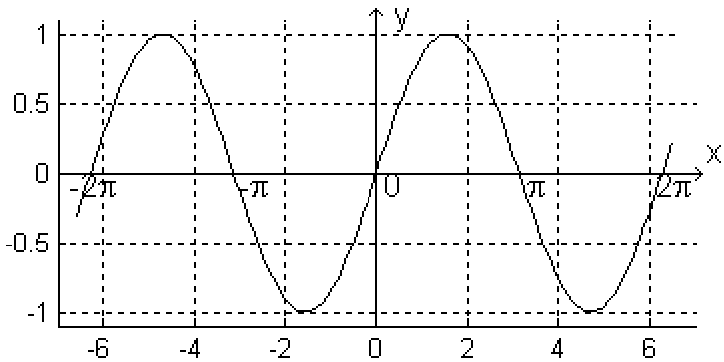


Рис. 5.4.7. График функции $y = \sin x$

5) функция периодическая с основным периодом 2π ;

6) функция четная : $\cos(-x) = \cos x$;

7) точки пересечения с осями координат: $(0;1)$ и $\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi K; 0\right)$, $K \in Z$.

График функции – косинусоида, см. рис.5.4.8.

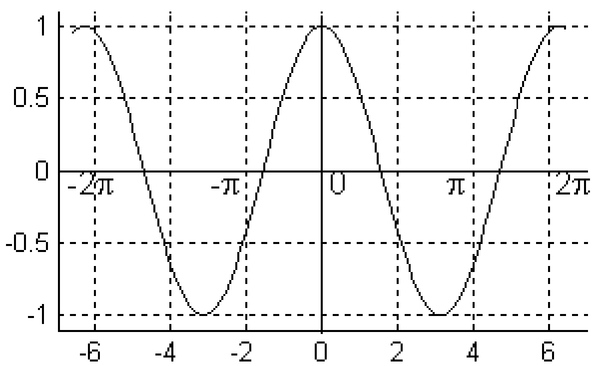


Рис. 5.4.8. График функции $y = \cos x$

Используя свойства тангенса угла, получим следующие свойства функции $y = \operatorname{tg} x$:

1) область определения : $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi K$, $K \in Z$;

2) область значений : $(-\infty; +\infty)$;

3) функция периодическая с основным периодом π : ;

4) функция нечетная : $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$;

5) функция возрастает на каждом из интервалов $\left(\pi K - \dfrac{\pi}{2}; \pi K + \dfrac{\pi}{2}\right)$, $K \in Z$;

6) точки пересечения с осью OX : $(\pi K; 0)$, $K \in Z$. .

График функции – тангенсоида, см. рис. 5.4.9. Используя свойства котангенса угла, получим следующие свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$:

1) область определения : $x \neq \pi K$, $K \in Z$;

2) область значений : $(-\infty; +\infty)$;

3) функция периодическая с основным периодом π;

4) функция нечетная : $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$;

5) функция убывает на каждом из интервалов $(\pi K; \pi + \pi K)$, $K \in Z$;

6) точки пересечения с осью OX : $\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi K; 0\right)$, $K \in Z$.

График функции – котангенсоида, см. рис. 5.4.10.

Пример 5.4.1. Найдите множество значений функции $y = 2,5 + 0,5 \cos x$

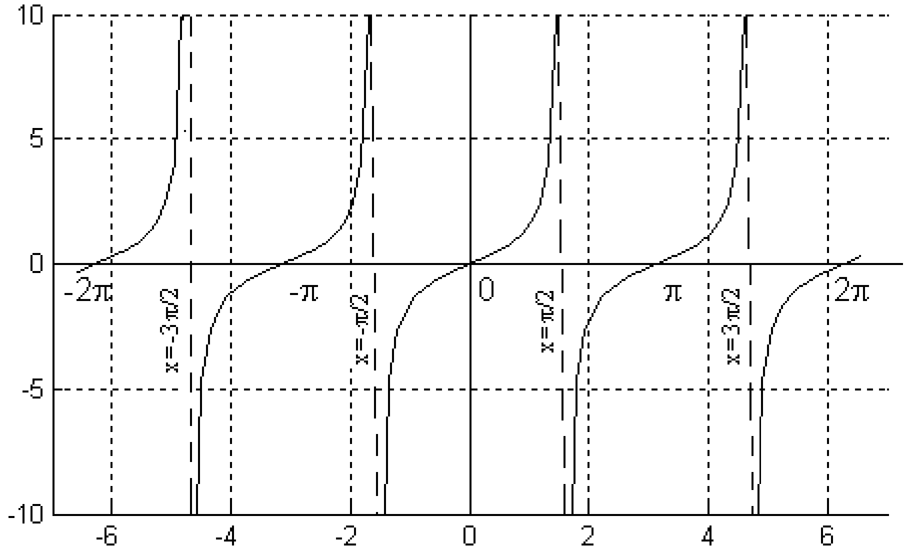


Рис. 5.4.9. График функции $y = \operatorname{tg} x$

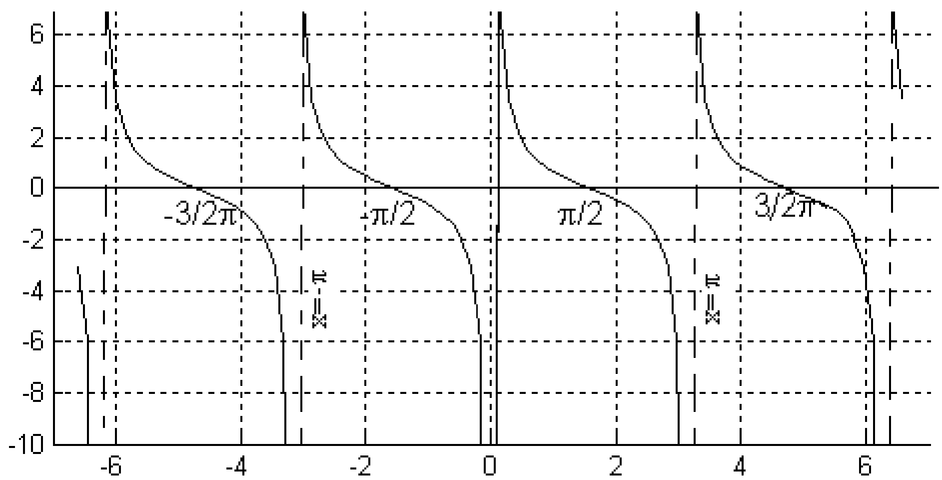


Рис. 5.4.10. График функции $y = \operatorname{ctg} x$

1) $[0;1]$ 2) $[0;2]$ 3) $[1;3]$ 4) $[2;3]$

Решение. Так как $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, то $2 \leqslant y = 2,5 + 0,5\cos x \leqslant 3$.

Ответ. 4.

Пример 5.4.2. Найдите множество значений функции $y = 2\sin^2 x + 3$

1) $[-1;1]$ 2) $[0;2]$ 3) $[3;5]$ 4) $[2;3]$

Решение. Так как $0 \leqslant \sin^2 x \leqslant 1$, то $3 \leqslant y = 2\sin^2 x + 3 \leqslant 5$.

Ответ. 3.

Пример 5.4.3. Найдите наибольшее целое значение функции $y = 2\cos x - 11$

1) -9 2) 2 3) -11 4) -13

Решение. Так как $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, то наибольшее целое значение $y = 2\cos x - 11$ равно -9.

Ответ. 1.

Пример 5.4.4. Найдите произведение всех значений параметра a, при которых наименьший положительный период функции $y = \sin((a^2 + 6a - 17)x)$ равен $\dfrac{\pi}{4}$

Решение. Как известно, период функции $y = \sin x$ равен 2π, а период функции $y = \sin \omega x$ равен $\dfrac{2\pi}{|\omega|}, \omega \neq 0$. Тогда наименьший положительный период функции $y = \sin((a^2 + 6a - 17)x)$ равен $\dfrac{2\pi}{|a^2 + 6a - 17|}$. По условию задачи

$$\frac{2\pi}{|a^2 + 6a - 17|} = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow |a^2+6a-17| = 8 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 + 6a - 17 = 8 \\ a^2 + 6a - 17 = -8 \end{array}\right. \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 + 6a - 25 = 0 \\ a^2 + 6a - 9 = 0 \end{array}\right.$$

Каждое из этих уравнений имеет два решения. Их можно не находить, так как в задаче надо найти произведение этих значений. По теореме Виета это произведение равно $(-25)(-9) = 225$.

Ответ. 225.

Пример 5.4.5. Найдите наименьший положительный период функции
$f(x) = \cos \dfrac{\pi x}{3} + \operatorname{ctg} \dfrac{\pi x}{4}$

Решение. Найдем периоды каждого из слагаемых: $\cos \dfrac{\pi x}{3}$ имеет период $T_1 = \dfrac{2\pi}{\pi/3} = 6$, $\operatorname{ctg} \dfrac{\pi x}{4}$ имеет период $T_2 = \dfrac{\pi}{\pi/4} = 4$.

Периодом суммы является наименьшее общее кратное $T_1 = 6$ и $T_2 = 4$, а именно $T = 12$.

Ответ. 12.

Пример 5.4.6. Укажите наибольшее значение функции $y = 6\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, если $x \in \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{6}\right]$

Решение. Если $x \in \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{6}\right]$, то $x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{5\pi}{6}; \frac{4\pi}{3}\right]$. На этом промежутке функция $y = 6\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ убывает, а, значит, наибольшее ее значение будет при $x + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$. Найдем это значение : $6\sin\frac{5\pi}{6} = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$.

Ответ. 3.

5.4.4 Обратные тригонометрические функции

По определению $\arcsin a$ – это угол, удовлетворяющий одновременно двум условиям :

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin a \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad \sin(\arcsin a) = a.$$

Таким образом, для любого числа $a \in [-1; 1]$ $\arcsin a$ существует и притом единственный.

Для любого числа $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ arcsin этого числа не существует.

Функция $y = \arcsin x$ определяется как обратная функция к $y = \sin x$ с областью определения $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

По правилу построения графика обратной функции график $y = \arcsin x$ имеет вид (рис. 5.4.11).

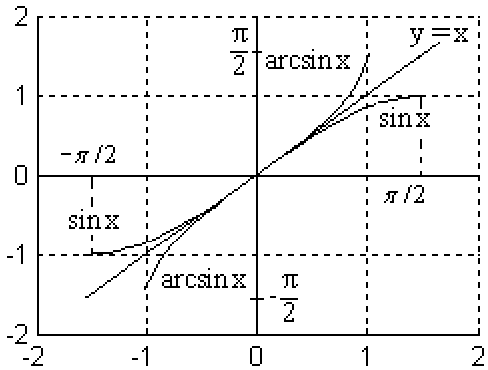


Рис. 5.4.11. График функции $y = \arcsin x$ (сплошная линия)

На рис. 5.4.11 пунктирной линией отмечен график функции $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, а сплошной линией график функции $y = \arcsin x$.

Отметим следующие свойства этой функции :

1) область определения : $[-1; 1]$;

2) область значений : $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

3) функция принимает наименьшее значение $y = -\frac{\pi}{2}$ при $x = -1$ и наибольшее значение $y = \frac{\pi}{2}$ при $x = 1$;

4) график функции проходит через точку 0;

5) функция нечетная : $\arcsin(-x) = -\arcsin x$;

6) функция возрастает в области определения.

По определению $\arccos a$ – это угол, удовлетворяющий одновременно двум условиям :

$$0 \leqslant \arccos a \leqslant \pi, \quad \cos(\arccos a) = a.$$

Таким образом, для любого числа $a \in [-1; 1]$ $\arccos a$ существует и притом единственный. Для любого числа $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ arccos этого числа не существует.

Функция $y = \arccos x$ определяется как обратная функция к $y = \cos x$ с областью определения $[0; \pi]$.

По правилу построения графика обратной функции график $y = \arccos x$ имеет вид (рис. 5.4.12).

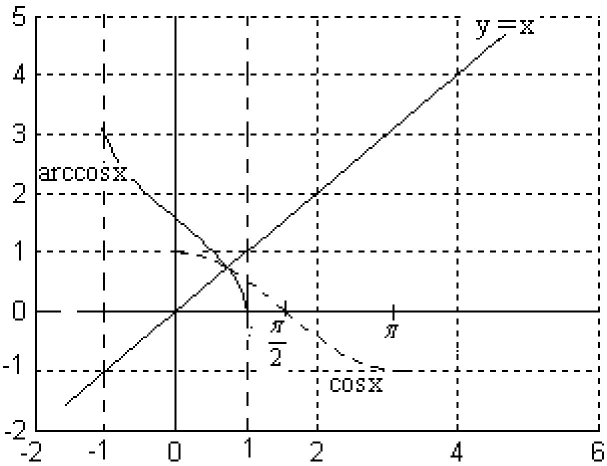


Рис. 5.4.12. График функции $y = \arccos x$ (сплошная линия)

На рис. 5.4.12 пунктирной линией отмечен график функции $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$, а сплошной линией график функции $y = \arccos x$.

Отметим следующие свойства этой функции :

1) область определения : $[-1; 1]$;

2) область значений : $[0; \pi]$;

3) функция принимает наибольшее значение $y = \pi$ при $x = -1$ и наименьшее значение $y = 0$ при $x = 1$;

4) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$;

5) график функции пересекает ось OY в точке $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$;

6) функция убывает в области определения.

Для любого $x \in [-1; 1]$ имеет место тождество $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$.

Пример 5.4.7. Найдите число целых значений функции $y = 6,6 \arccos x + 1,6 \arcsin x$

1) 16 2) 17 3) 18 4) 19

Решение. Преобразуем вид функции :

$y = 6,6 \arccos x + 1,6 \arcsin x = 5 \arccos x + 1,6(\arcsin x + \arccos x) = 5 \arccos x + 1,6\dfrac{\pi}{2} =$
$= 5 \arccos x + 0,8\pi$.

Наибольшее значение этой функции равно $5,8\pi$, наименьшее значение равно $0,8\pi$.

Отрезок $[0,8\pi; 5,8\pi]$ содержит 16 целых значений : $3; 4; \ldots; 17; 18$. Следовательно, число целых значений функции равно 16.

Ответ. 1.

По определению $\operatorname{arctg} a$ – это угол, удовлетворяющий одновременно двум условиям :

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} a < \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a.$$

Таким образом, для любого числа a $\operatorname{arctg} a$ существует и притом единственный.
Функция $y = \operatorname{arctg} x$ определяется как обратная функция к $y = \operatorname{tg} x$, где $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
По правилу построения графика обратной функции график $y = \operatorname{arctg} x$ имеет вид (рис.5.4.13).

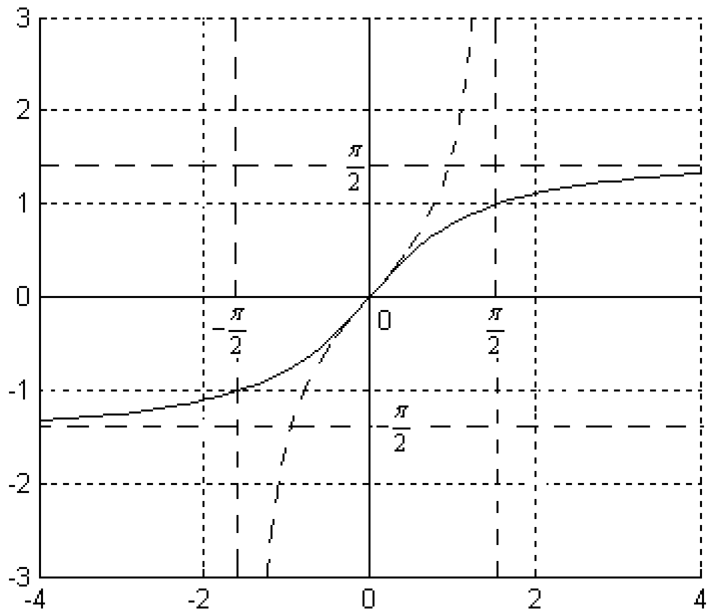


Рис. 5.4.13. График функции $y = \operatorname{arctg} x$ (сплошная линия)

На рис. 5.4.13 пунктирной линией отмечен график функции $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, а сплошной линией график функции $y = \operatorname{arctg} x$.

Отметим следующие свойства этой функции :

1) область определения : $(-\infty; +\infty)$;

2) область значений : $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

3) график функции проходит через точку 0;

4) функция возрастает;

5) функция нечетная : $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$;

6) $y \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ при $x \longrightarrow +\infty$ и $y \longrightarrow -\frac{\pi}{2}$ при $x \longrightarrow -\infty$.

По определению $\operatorname{arcctg} a$ – это угол, удовлетворяющий одновременно двум условиям :

$$0 < \operatorname{arcctg} a < \pi, \quad \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a.$$

Таким образом, для любого числа a $\operatorname{arcctg} a$ существует и притом единственный.
Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ определяется как обратная функция к $y = \operatorname{ctg} x$, где $x \in (0; \pi)$.

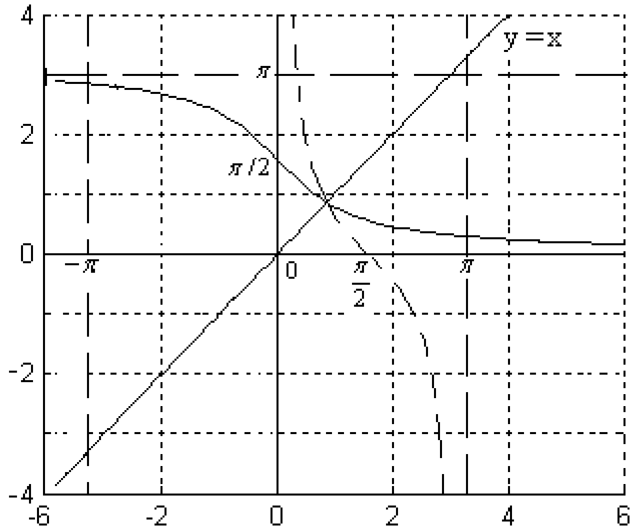


Рис. 5.4.14. График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ (сплошная линия)

По правилу построения графика обратной функции график $y = \operatorname{arcctg} x$ имеет вид (рис. 5.4.14). На рис. 5.4.14 пунктирной линией отмечен график функции $y = \operatorname{ctg} x,\ x \in (0; \pi)$, а сплошной линией график функции $y = \operatorname{arcctg} x$.

Отметим следующие свойства этой функции :

1) область определения : $(-\infty; +\infty)$;

2) область значений : $(0; \pi)$;

3) график функции пересекает ось OY в точке $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$;

4) функция убывает;

5) $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$;

6) $y \longrightarrow 0$ при $x \longrightarrow +\infty$ и $y \longrightarrow \pi$ при $x \longrightarrow -\infty$.

Для любого x имеет место тождество $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{2}$

Пример 5.4.8. Укажите номер наименьшего числа из заданной последовательности чисел

1) $\operatorname{arcctg}(-0,1)$ 2) $\operatorname{arctg} 3,5$ 3) $\operatorname{arcctg} 3,5$ 4) $\operatorname{arctg}(-0,1)$ 5) $\operatorname{arcctg} 5$

Решение. Как известно, $-\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \dfrac{\pi}{2}$ и $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$, причем только $\operatorname{arctg} x$ при $x < 0$ принимает отрицательное значение.

Следовательно, $\operatorname{arctg}(-0,1)$ – наименьшее число из заданной последовательности чисел.

Ответ. 4.

Пример 5.4.9. Найдите множество значений функции $y = -\dfrac{6}{\pi} \operatorname{arctg} x + 1$

1) $[-3; 3]$ 2) $(-2; 4)$ 3) $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ 4) $\left(-\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{6}\right)$

Решение. Так как $-\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \dfrac{\pi}{2}$, то $-3 < -\dfrac{6}{\pi} \operatorname{arctg} x < 3$ и $-2 < y = -\dfrac{6}{\pi} \operatorname{arctg} x + 1 < 4$.

Ответ. 2.

5.5 Суперпозиции функций и их графики

5.5.1 Сложная функция

Пусть функция $u = \varphi(x)$ определена на множестве X, и множество ее значений является областью определения функции $y = F(u)$. Тогда любому x из множества X соответствует определенное значение u, а этому значению u функция $y = F(u)$ ставит в соответствие определенное значение y, т.е. переменная y является функцией x на множестве X : $y = \mathcal{F}[\varphi(x)]$.

Эта функция называется сложной функцией переменной x или суперпозицией двух функций : внутренней $u = \varphi(x)$ и внешней $y = F(u)$.

Функции, полученные из основных элементарных функций с помощью конечного числа алгебраических операций и применения конечного числа суперпозиций, называются элементарными.

Например, $y = \ln\cos x$, $y = \operatorname{tg}\sqrt{x}$, $y = \sin^2(3x-1)$.

Пример 5.5.1. Найдите область определения функции $y = \sqrt{1-2x} + 3\arcsin\dfrac{3x-1}{2}$

Решение. Первое слагаемое определено при $1-2x \geqslant 0$, а второе – при $-1 \leqslant \dfrac{3x-1}{2} \leqslant 1$.

Следовательно, для нахождения области определения данной функции надо решить систему неравенств $\begin{cases} 1-2x \geqslant 0 \\ \dfrac{3x-1}{2} \leqslant 1 \\ \dfrac{3x-1}{2} \geqslant -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ x \leqslant 1 \\ x \geqslant -\dfrac{1}{3} \end{cases} \iff -\dfrac{1}{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Ответ. $\left[-\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{2}\right]$.

5.5.2 Основные приемы построения графика сложной функции

График функции $y = -f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ симметричным отражением последнего относительно оси OX.

График функции $y = f(-x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ симметричным отражением последнего относительно оси OY.

График функции $y = f(x) + b$ получается из графика функции $y = f(x)$ смещением последнего вдоль оси OY на величину b вверх, если $b > 0$, и на величину $|b|$ вниз, если $b < 0$.

График функции $y = f(x-a)$ получается из графика функции $y = f(x)$ смещением последнего вдоль оси OX. При этом, если $a > 0$, то смещение производится вправо на величину a, а если $a < 0$ – смещение влево на величину $|a|$.

График функции $y = f(kx)$, где $k > 0$, получается из графика функции $y = f(x)$ деформацией графика вдоль оси OX. При этом, если $k > 1$, то происходит сжатие абсцисс всех точек в k раз, а если $0 < k < 1$, то растяжение абсцисс всех точек в $\left(\dfrac{1}{k}\right)$ раз.

График функции $y = Af(x)$, где $A > 0$, получается из графика функции $y = f(x)$ деформацией графика вдоль оси OY. При этом, если $A > 1$, то происходит растяжение ординат всех точек в A раз, а если $0 < A < 1$, то сжатие ординат всех точек в $\left(\frac{1}{A}\right)$ раз. Если $A < 0$, то вначале строится график $y = |A|f(x)$, а затем $y = -|A|f(x)$.

График функции $y = Af[k(x-a)] + b$ получается из графика $y = f(x)$ последовательным применением следующих способов :

$y = f(x) \longrightarrow y = f(kx) \longrightarrow y = Af(kx) \longrightarrow y = Af[k(x-a)] \longrightarrow y = Af[k(x-a)] + b.$

График функции $y = |f(x)|$ получается из графика функции $y = f(x)$ следующим образом : все точки графика $y = f(x)$, лежащие на оси OX и выше ее, остаются на месте; все точки графика $y = f(x)$, лежащие ниже оси OX, симметрично отображаются относительно оси OX.

График функции $y = f(|x|)$ получается из графика функции $y = f(x)$ по правилу построения четной функции, а именно: часть графика $y = f(x)$, лежащая справа от оси OY, остается и отображается симметрично относительно оси OY.

График функции $y = F(f(x))$ строят, используя график $y = F(x)$ и свойства функции $y = f(x)$.

Пример 5.5.2. Постройте график функции $y = 2^{\cos x}$

Решение. Проведем исследование функции :

1) область определения функции $y = 2^{\cos x}$ – все действительные числа x;

2) область значений : так как $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, то $\frac{1}{2} \leqslant 2^{\cos x} \leqslant 2$;

3) функция периодическая с периодом 2π так как $\cos x$ – функция периодическая с периодом 2π;

4) функция четная, так как $\cos(-x) = \cos x$;

5) так как $y = \cos x$ возрастает от -1 до 1 на отрезке $[-\pi; 0]$, то функция $y = 2^{\cos x}$ возрастает на этом промежутке от $\frac{1}{2}$ до 2; на отрезке $[0; \pi]$ $y = \cos x$ убывает, и функция $y = 2^{\cos x}$ убывает от 2 до $\frac{1}{2}$.

Перечисленные свойства позволяют построить график функции $y = 2^{\cos x}$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ и продолжить его периодически (рис.5.5.1).

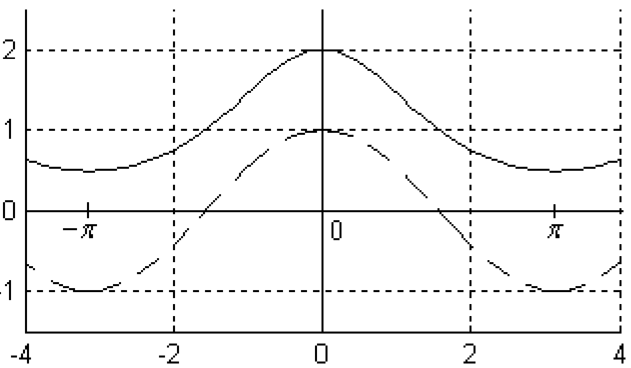


Рис. 5.5.1. График функции $y = 2^{\cos x}$ (сплошная линия)

На рис.5.5.1 график $y = \cos x$, $x \in [-\pi; \pi]$ изображен пунктиром, а график $y = 2^{\cos x}$ – сплошной линией.

График функции $y = f(x) + g(x)$ можно построить методом сложения ординат. Для этого надо :

1) оставить те точки графиков $y = f(x)$ и $y = g(x)$, которые входят в общую область определения этих функций ;

2) для каждого x из общей области определения произвести сложение ординат этих графиков.

На практике сложение ординат производят по нескольким "опорным"точкам, например, точки пересечения графиков $y = f(x)$ и $y = g(x)$ с осями координат, точки пересечения самих графиков, точки, в которых функции $f(x)$ и $g(x)$ достигают наибольшего или наименьшего значений и т.д.

Пример 5.5.3. Постройте график функции $y = x + \dfrac{1}{x}$

Решение. Применим метод сложения ординат для графиков функций $y = x$ и $y = \dfrac{1}{x}$. Очевидно, что общая область определения $x \neq 0$.

Изобразим каждую из функций пунктирной линией (рис.5.5.2). В качестве опорной точки возьмем точку $(1;1)$ пересечения графиков $y = x$ и $y = \dfrac{1}{x}$. Тогда при сложении ординат получаем точки $(-1;-2)$ и $(1;2)$ на графике $y = x + \dfrac{1}{x}$.

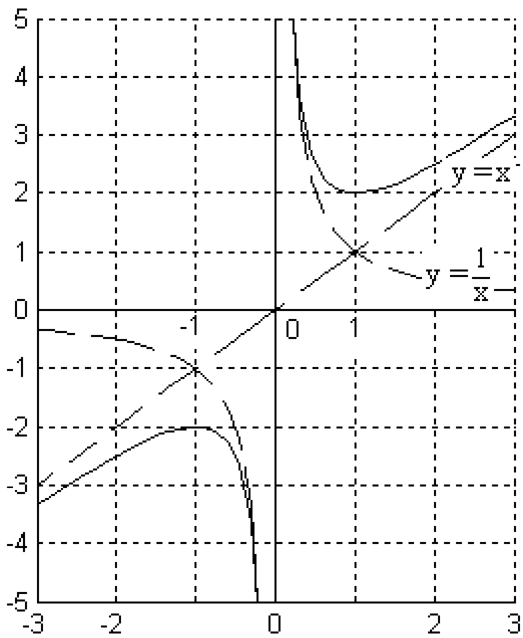


Рис. 5.5.2. График функции $y = x + \dfrac{1}{x}$ (сплошная линия)

При $x > 1$ точки графика $y = x + \dfrac{1}{x}$ будут находиться выше прямой $y = x$ и стремиться к ней при $x \longrightarrow +\infty$, а при $x > 0$ и $x \longrightarrow 0$ точки графика $y = x + \dfrac{1}{x}$ будут приближаться к ветви гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$.

Поведение графика $y = x + \dfrac{1}{x}$ при $x < 0$ можно определить по правилу нечетной функции (рис.5.5.2).

Для построения графика функции $y = f(x) \cdot g(x)$ можно использовать метод умножения ординат :

1) оставить те точки графиков $y = f(x)$ и $y = g(x)$, которые входят в общую область определения этих функций ;

2) для каждого x из общей области определения произвести умножение ординат этих графиков.

При построении методом умножения ординат также выбираются "опорные"точки.

Пример 5.5.4. Постройте график функции $y = x \cos x$

Решение. Применим метод умножения ординат для графиков $y = x$ и $y = \cos x$. Изобразим каждую из функций пунктирной линией (рис.5.5.3).

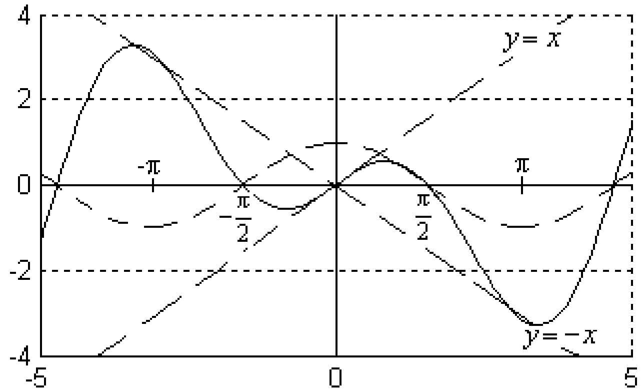
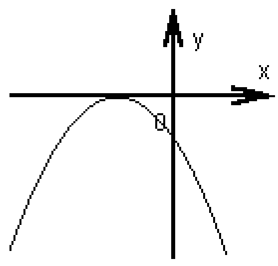


Рис. 5.5.3. График функции $y = x \cos x$ (сплошная линия)

Так как при $x = \pi + \pi k$ $\cos x = -1$ и $y = x \cos x$ в этих точках принимает значения $y = -x$, изобразим пунктиром прямую $y = -x$. В результате умножения ординат получим график $y = x \cos x$ (рис.5.5.3, сплошная линия).

5.6 Задачи для самостоятельного решения

№ 5.6.1. Если на рисунке изображен график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ и $D = b^2 - 4ac$, т шение



1)$aD < 0$

2)$ac < 0$

3)$ab > 0$

4)$bD > 0$

1) $k < 0, a < 0, b > 0$

2) $k < 0, a > 0, b < 0$

3) $k < 0, a > 0, b > 0$

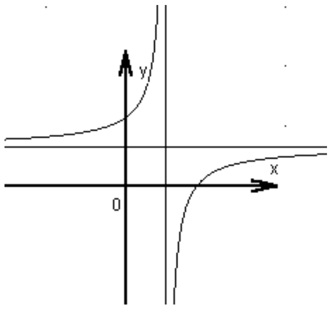
4) $k > 0, a > 0, b > 0$

№ 5.6.2. Если на рисунке изображен график обратно пропорциональной зависимости $y = \dfrac{k}{x-a} + b$, то справедливы соотношения

№ 5.6.3. Найдите область определения функции $f(x) = \log_{0,2}(7x - x^2)$

1) $(-\infty; 0) \cup (7; +\infty)$ 2) $(0; +\infty)$ 3) $(0; 7)$ 4) $(-\infty; -7) \cup (0; +\infty)$

№ 5.6.4. Найдите сумму всех целых чисел, входящих в область определения функции $y = \lg(3x + 5 - |x^2 - 5|)$



1) 6 2) 10 3) 15 4) 20

№ 5.6.5. Найдите множество значений функции $y = \log_2(x^2+4)$

1) $[1; +\infty)$ 2) $(-\infty; +\infty)$ 3) $[2; +\infty)$ 4) $[0; +\infty)$

№ 5.6.6. Найдите множество значений функции $y = 3\sin^2 x - \cos^2 x - 3$

1) $[-3; 0]$ 2) $[-4; 0]$ 3) $[-3; 1]$ 4) $[-4; -1]$

№ 5.6.7. Укажите все номера только нечетных функций данного множества
1) $y = (x^2+3)\sin 5x$ 2) $y = x \cdot 6^{x^2+1}$ 3) $y = x - x^4$ 4) $y = \operatorname{ctg} 6x - x^3$

1) 2, 3, 4 2) 1, 2 3) 1, 2, 4 4) 1, 3

№ 5.6.8. Укажите все номера только четных функций данного множества
1) $y = x^4 - \operatorname{tg}^2 2x$ 2) $y = x^2(1+3^{2x})$ 3) $y = (x^4+1)\lg|x|$ 4) $y = \sin 2x \cdot \operatorname{ctg}^2 x$

1) 2, 3, 4 2) 1, 3 3) 1, 3, 4 4) 2, 3

№ 5.6.9. Четная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = x(x+1)(3x+2)(x-3)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

№ 5.6.10. Четная функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для функции $g(x) = x + (x-4)f(x-4) + 4$ вычислите сумму $g(2) + g(4) + g(6)$

№ 5.6.11. Найдите значение функции $y = \dfrac{g(x) - f(-x) + 2g(-x)}{f(x)}$ в точке x_o, если известно, что функция $y = f(x)$ – четная, функция $y = g(x)$ – нечетная, $f(x_o) = 2$, $g(x_o) = -3$

№ 5.6.12. Найдите наименьший положительный период функции $f(x) = \sin\dfrac{\pi x}{4} + \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{6}$

№ 5.6.13. Найдите произведение всех значений a, при которых наименьший положительный период функции $y = \cos((2a-11)x)$ равен $\dfrac{\pi}{4}$

№ 5.6.14. Укажите наименьшее значение функции $y = 4\sqrt{3}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$, если $x \in \left[\dfrac{5\pi}{6}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$

№ 5.6.15. Укажите наибольшее значение функции $y = 4\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$, если $x \in \left[\dfrac{7\pi}{6}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$

№ 5.6.16. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом, равным 4. На промежутке $(-6; -2]$ уравнение $f(x) = 0$ имеет ровно 5 различных корней, а на промежутке $(-2; 0]$ оно имеет ровно 3 различных корня. Сколько корней имеет это уравнение на промежутке $(0; 6]$?

№ 5.6.17. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом, равным 10. Известно, что $f(1) = 1$, $f(5) = 3$ и на отрезке $[1; 5]$ функция является линейной. Найдите значение функции $f(24)$

№ 5.6.18. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом, равным 4. На промежутке $(1; 5]$ она задается формулой $f(x) = -x^2 + 4x - 2$. Найдите значение выражения $5f(-17) - 2f(24)$

№ 5.6.19. Найдите значение функции $y = 3f(-a)(f(a) - 5g(-a)) + 2(g(-a))^2$, если известно, что функция $y = f(x)$– четная, функция $y = g(x)$ – нечетная, $f(a) = -2$, $g(a) = -3$

№ 5.6.20. Найдите значение функции $y = 2f(-x) - g(x)g(-x)$ в точке x_0, если известно, что функция $y = f(x)$ – четная, функция $y = g(x)$ – нечетная, $f(x_0) = -3$, $g(x_0) = 2$

№ 5.6.21. Четная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для функции $g(x) = 3,8 + \dfrac{f(x - 3,5)}{x - 3,5}$ вычислите сумму $g(3) + g(4)$

№ 5.6.22. Найдите значение функции $g(4)$, если известно, что $f(2x - 1) = x - 3$ и $f(g(x)) = 2x - 5$

№ 5.6.23. Найдите значение функции $g(-2)$, если известно, что $f(3x + 5) = 2x + 3$ и $f(g(x)) = 4x - 1$

№ 5.6.24. Нечетная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для каждого неотрицательного значения аргумента x значение этой функции на 1 меньше, чем значение функции $g(x) = (x^2 - x - 1)^2$. Найдите число корней уравнения $f(x) = 0$

№ 5.6.25. Четная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для каждого неотрицательного значения аргумента x значение этой функции совпадает с значениями функции $g(x) = -x^3 + 7x - 6$. Найдите число корней уравнения $f(x) = 0$

5.7 Ответы к задачам для самостоятельного решения

5.6.1. 3; **5.6.2.** 3; **5.6.3.** 3; **5.6.4.** 2; **5.6.5.** 3; **5.6.6.** 2; **5.6.7.** 3; **5.6.8.** 2; **5.6.9.** 3; **5.6.10.** 24; **5.6.11.** 0,5; **5.6.12.** 24; **5.6.13.** 14,25; **5.6.14.** −6; **5.6.15.** 2; **5.6.16.** 5; **5.6.17.** 2,5; **5.6.18.** 9; **5.6.120.** ; **5.6.20.** −2; **5.6.21.** 7,6; **5.6.22.** 11; **5.6.23.** −13; **5.6.24.** 5; **5.6.25.** 4.