Министерство науки и образования Российской Федерации
Московский Государственный Университет Геодезии и Картографии

Т. М. Королёва, Е. Г. Маркарян, Ю. М. Нейман

ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ВУЗЫ

ЧАСТЬ 2

МОСКВА

2008

УДК 517
Учебное пособие "Пособие по математике для поступающих в ВУЗы".
М.: Изд.МИИГАиК, 2008, 104 стр.

"Пособие по математике для поступающих в ВУЗы"предназначено выпускникам общеобразовательных учреждений (школ, гимназий, лицеев и т.р.) для подготовки к успешной сдаче ЕГЭ и обучению в ВУЗе. Оно может быть использовано на подготовительных курсах, факультативных занятиях в школах, а также для самостоятельных занятий учащихся.

Пособие составлено на основании программы по математике для средней школы. Его принципиальное отличие от большинства существующих пособий для подготовки к ЕГЭ состоит в том, что оно содержит теоретические основы арифметики, алгебры, геометрии и элементов математического анализа. По каждому из разделов приведены решения задач, часть из которых предлагались на ЕГЭ. Кроме того, пособие можно использовать как сборник задач. Все задачи для самостоятельного решения снабжены ответами.

Рецензенты:
профессор кафедры высшей математики МИИГАиК И.А. Лисеев
доцент кафедры высшей математики МГУПП А.О. Тимохина

Московский государственный университет
геодезии и картографии
2008

Оглавление

Глава 6

Тригонометрия

6.1 Тригонометрические преобразования и вычисления

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента :[1]

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$
$$\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\operatorname{tg}^2\alpha;\ \frac{1}{\sin^2\alpha}=1+\operatorname{ctg}^2\alpha$$

Формулы сложения :

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\ cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\sin\beta\cdot\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

Формулы двойного аргумента :

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha;\quad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha;\quad \operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha;\quad 1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha;\quad 1\pm\sin 2\alpha=(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2;$$

Формулы половинного аргумента :

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2};\quad \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2};\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Формулы преобразования суммы функций в произведение :

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

[1] Все приведенные здесь соотношения рассматриваются в области определения соответствующих функций

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta+\alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}\qquad\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

Формулы преобразования произведения в сумму :

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$$

Формулы, выражающие основные тригонометрические функции через $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$:

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)};\quad\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)};\quad\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}$$

.

Пример 6.1.1. Найдите значение выражения $\dfrac{3(\cos 20^o-\sin 20^o)}{\sqrt{2}\cdot\sin 25^o}$

1) 1 2) 3 3) -1 4) -3

Решение. По формулам приведения $\cos 20^o=\cos(90^o-70^o)=\sin 70^o$. Подставляя это значение в выражение, преобразуем разность синусов в произведение :

$$\frac{3(\cos 20^o-\sin 20^o)}{\sqrt{2}\cdot\sin 25^o}=\frac{3(\sin 70^o-\sin 20^o)}{\sqrt{2}\cdot\sin 25^o}=\frac{3\cdot 2\sin 25^o\cos 45^o}{\sqrt{2}\cdot\sin 25^o}=\frac{3\cdot 2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot 2}=3.$$

Ответ. 2.

Пример 6.1.2. Упростите выражение $\dfrac{3(\cos(\pi/5)+\sin(\pi/2-2\pi/5))}{2\cos(3\pi/10)\cdot\cos(\pi/10)}$

1) 3 2) -3 3) 1 4) -1

Решение. Используем формулы преобразования суммы в произведение, учитывая, что $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2\pi}{5}\right)=\cos\dfrac{2\pi}{5}$.

$$\frac{3(\cos(\pi/5)+\cos(2\pi/5))}{2\cos(3\pi/10)\cdot\cos(\pi/10)}=\frac{3\cdot 2\cos(3\pi/10)\cdot\cos(\pi/10)}{2\cos(3\pi/10)\cdot\cos(\pi/10)}=3.$$

Ответ. 1.

Пример 6.1.3. Найдите значение выражения $\dfrac{3-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{6\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=-2$

1) 1,7 2) 5,5 3) 8,5 4) 1,1

Решение. В данном выражении число 3 запишем в виде $3\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha$ и затем разделим числитель и знаменатель на $\cos^2\alpha$.

$$\frac{3(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{6\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{3\operatorname{tg}^2\alpha+3-\operatorname{tg}\alpha}{6-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

Подставим в полученное выражение значение $\operatorname{tg}\alpha = -2$.

Получим : $\dfrac{3(-2)^2+3+2}{6-(-2)^2} = \dfrac{17}{2} = 8,5.$

Ответ. 3.

Пример 6.1.4. Найдите значение $\operatorname{tg}2\alpha$, если $\sin(\alpha - 90^o) = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

1) $\dfrac{\sqrt{6}}{46}$ 2) $\dfrac{\sqrt{6}}{23}$ 3) $-\dfrac{4\sqrt{6}}{23}$ 4) $\dfrac{2\sqrt{6}}{23}$

Решение. По формулам приведения имеем : $sin(\alpha - 90^o) = -\sin(90^o - \alpha) = -\cos\alpha$.
Тогда $\cos\alpha = -\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$ и $\sin\alpha = \sqrt{1-\dfrac{24}{25}} = \dfrac{1}{5}$. Очевидно, что $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{-1}{2\sqrt{6}}$.
Подставляя полученное значение $\operatorname{tg}\alpha$ в формулу тангенса двойного угла, получим :

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{-1}{\sqrt{6}(1-1/24)} = -\frac{24}{\sqrt{6}\cdot 23} = -\frac{4\sqrt{6}}{23}.$$

Ответ. 3.

Пример 6.1.5. Найдите значение $\cos\left(2\alpha + \dfrac{7\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = 1,5$

1) $\dfrac{\sqrt{2}}{13}$ 2) $-\dfrac{17\sqrt{2}}{26}$ 3) $-\dfrac{7\sqrt{2}}{26}$ 4) $\dfrac{7\sqrt{2}}{26}$

Решение. $\cos\left(2\alpha + \dfrac{7\pi}{4}\right) = \cos\left(2\alpha + \pi + \dfrac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(2\alpha + \dfrac{3\pi}{4}\right) =$
$= -\cos 2\alpha \cdot \cos\dfrac{3\pi}{4} + \sin 2\alpha \cdot \sin\dfrac{3\pi}{4}.$

Для вычисления последнего выражения используем формулы, выражающие $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$:

$\sin 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{3}{1+2,25} = \dfrac{12}{13}$; $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{1-2,25}{1+2,25} = -\dfrac{5}{13}$.

Подставим полученное значение в вычисляемое выражение :

$-\cos 2\alpha \cdot \cos\dfrac{3\pi}{4} + \sin 2\alpha \cdot \sin\dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{5}{13}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + \dfrac{12}{13}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{12}{13} - \dfrac{5}{13}\right) = \dfrac{7\sqrt{2}}{26}.$

Ответ. 4.

6.2 Действия с обратными тригонометрическими функциями

Определения $\arcsin a$, $\arccos a$, $\operatorname{arctg} a$, $\operatorname{arcctg} a$:

1. $\arcsin a = \alpha$, если $\sin\alpha = a$ и $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$
2. $\arccos a = \alpha$, если $\cos\alpha = a$ и $\alpha \in [0;\pi]$
3. $\operatorname{arctg} a = \alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = a$ и $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$
4. $\operatorname{arcctg} a = \alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = a$ и $\alpha \in (0;\pi)$

Основные тождества :

$\arcsin a + \arccos a = \dfrac{\pi}{2},\ |a| \leqslant 1;$

$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \dfrac{\pi}{2},\ a \in R;$

$\arcsin(-a) = -\arcsin a,\ |a| \leqslant 1;$

$\arccos(-a) = \pi - \arccos a,\ |a| \leqslant 1;$

$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a,\ a \in R;$

$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a,\ a \in R.$

Из определения значений обратных тригонометрических функций вытекают следующие соотношения :

$\arcsin(\sin\alpha) = \alpha,$ если $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2};$

$\arccos(\cos\alpha) = \alpha,$ если $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi;$

$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha) = \alpha,$ если $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2};$

$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\alpha) = \alpha,$ если $0 < \alpha < \pi.$

Из определения обратных тригонометрических функций и соотношений между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента вытекают следующие тождества, справедливые в области определения соответствующих функций :

$$\begin{array}{ll}
\sin(\arcsin a) = a, & \cos(\arccos a) = a, \\
\cos(\arcsin a) = \sqrt{1-a^2}, & \sin(\arccos a) = \sqrt{1-a^2}, \\
\operatorname{tg}(\arcsin a) = \dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}, & \operatorname{tg}(\arccos a) = \dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}, \\
\operatorname{ctg}(\arcsin a) = \dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}, & \operatorname{ctg}(\arccos a) = \dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}, \\
\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a, & \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a, \\
\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} a) = \dfrac{1}{a}, & \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} a) = \dfrac{1}{a} \\
\sin(\operatorname{arctg} a) = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}, & \sin(\operatorname{arcctg} a) = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \\
\cos(\operatorname{arctg} a) = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}, & \cos(\operatorname{arcctg} a) = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}
\end{array}$$

Пример 6.2.1. Найдите значение выражения $\sin(\arcsin\dfrac{1}{3} - \arccos\dfrac{3}{5})$

1) $\dfrac{3-8\sqrt{2}}{15}$ 2) $\dfrac{3+\sqrt{2}}{15}$ 3) $\dfrac{\sqrt{2}}{15}$ 4) $\dfrac{3-\sqrt{2}}{15}$

Решение. $\sin(\arcsin\dfrac{1}{3} - \arccos\dfrac{3}{5}) = \sin(\arcsin\dfrac{1}{3}) \cdot \cos(\arccos\dfrac{3}{5}) -$
$- \cos(\arcsin\dfrac{1}{3}) \cdot \sin(\arccos\dfrac{3}{5}) = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{5} - \sqrt{1-\dfrac{1}{9}} \cdot \sqrt{1-\dfrac{9}{25}} = \dfrac{3-8\sqrt{2}}{15}.$
Выбираем ответ под номером 1.

Ответ. 1.

Пример 6.2.2. Найдите значение выражения $\sin(2\arcsin\frac{2}{7})$

1) $\frac{4\sqrt{5}}{49}$ 2) $\frac{12\sqrt{5}}{49}$ 3) $\frac{\sqrt{5}}{49}$ 4) $\frac{\sqrt{5}}{7}$

Решение. $\sin(2\arcsin\frac{2}{7}) = 2\sin(\arcsin\frac{2}{7})\cdot\cos(\arcsin\frac{2}{7}) = 2\cdot\frac{2}{7}\cdot\sqrt{1-\frac{4}{49}} = \frac{12\sqrt{5}}{49}$.
Выбираем ответ под номером 2.

Ответ. 2.

Пример 6.2.3. Найдите значение выражения $\arcsin(\sin\frac{17}{5}\pi)$

1) $\frac{\pi}{5}$ 2) $\frac{2\pi}{5}$ 3) $-\frac{\pi}{5}$ 4) $-\frac{2\pi}{5}$

Решение. Воспользуемся тождеством $\arcsin(\sin x) = x$, где $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Для этого преобразуем $\sin\frac{17}{5}\pi$ по формулам приведения, а именно
$\sin\frac{17}{5}\pi = \sin(3\pi+\frac{2\pi}{5}) = \sin(\pi+\frac{2\pi}{5}) = -\sin(\frac{2\pi}{5}) = \sin(-\frac{2\pi}{5})$, и аргумент $-\frac{2\pi}{5}$ принадлежит промежутку $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

Следовательно, $\arcsin(\sin\frac{17\pi}{5}) = \arcsin(\sin(-\frac{2\pi}{5})) = -\frac{2\pi}{5}$, и выбираем ответ 4.

Ответ. 4.

Пример 6.2.4. Найдите значение выражения $\arccos(\sin(-\frac{3\pi}{7}))$

1) $\frac{3\pi}{7}$ 2) $\frac{3\pi}{14}$ 3) $\frac{4\pi}{7}$ 4) $\frac{13\pi}{14}$

Решение. Воспользуемся тождеством $\arccos(\cos x) = x$, где $0 \leqslant x \leqslant \pi$ и заменим $\sin(-\frac{3\pi}{7})$ на косинус угла, принадлежащего промежутку $[0;\pi]$:

$$\sin(-\frac{3\pi}{7}) = \cos(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{7}) = \cos\frac{13\pi}{14}.$$

Следовательно, $\arccos(\sin(-\frac{3\pi}{7})) = \arccos(\cos\frac{13\pi}{14}) = \frac{13\pi}{14}$, и выбираем ответ 4.

Ответ. 4.

Пример 6.2.5. Найдите значение выражения $\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg} 10)$

1) $4\pi - 10$ 2) $\frac{7\pi}{2} - 10$ 3) $10 - 3\pi$ 4) $\frac{1}{10}+\frac{\pi}{2}$

Решение. Воспользуемся тождеством $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$, где $0 < x < \pi$ и заменим $\operatorname{tg} 10$ на котангенс угла, заключенного между 0 и π.

Используя формулы приведения, имеем $\operatorname{tg} 10 = \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2}-10) = \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2}+k\pi-10)$, где $k \in Z$ и определяется из условия $0 < \frac{\pi}{2}+k\pi-10 < \pi \Longrightarrow -\frac{\pi}{2}+10 < k\pi < \frac{\pi}{2}+10 \Longrightarrow k=3$.

Следовательно, $\operatorname{tg} 10 = \operatorname{ctg}(\frac{7\pi}{2} - 10)$ и $\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg} 10) = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(\frac{7\pi}{2} - 10)) = \frac{7\pi}{2} - 10$, и выбираем ответ 2.

Ответ. 2.

6.3 Тригонометрические уравнения

Простейшими тригонометрическими уравнениями называются уравнения вида

$$\begin{array}{ll} \sin x = a, & |a| \leqslant 1; \\ \cos x = a, & |a| \leqslant 1; \\ \operatorname{tg} x = a, & -\infty < a < \infty; \\ \operatorname{ctg} x = a, & -\infty < a < \infty. \end{array}$$

Решения этих уравнений имеют следующий вид :

$$\begin{array}{ll} \sin x = a, & x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \ n \in Z; \\ \cos x = a, & x = \pm \arccos a + 2\pi n, \ n \in Z; \\ \operatorname{tg} x = a, & x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \ n \in Z; \\ \operatorname{ctg} x = a, & x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \ n \in Z, \end{array}$$

где Z – множество целых чисел.

К простейшим тригонометрическим уравнениям сводятся уравнения вида

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$$

Методом введения вспомогательного аргумента выражение $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$ заменяется на $\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$, где φ – вспомогательный аргумент, определяемый из условий :

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Тогда уравнение приводится к простейшему :

$$\sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Тригонометрические уравнения, содержащие функции одного аргумента, можно решать методом введения новой переменной.

Пусть тригонометрическое уравнение имеет вид $f(\sin x) = 0$. Тогда подстановкой $\sin x = z$ оно сводится к алгебраическому уравнению $f(z) = 0$.

Пусть $z_1, z_2, ..., z_k$ – его корни, причем $|z_k| \leqslant 1$. Тогда уравнение $f(\sin x) = 0$ равносильно совокупности уравнений :

$$\sin x = z_1, \sin x = z_2, ... \sin x = z_k.$$

Аналогично решаются уравнения вида $f(\cos x) = 0$, $f(\operatorname{tg} x) = 0$ и $f(\operatorname{ctg} x) = 0$.

Зачастую, прежде, чем переходить к новой переменной, надо входящие в уравнение тригонометрические функции выразить через одну из них.

Покажем основные приемы таких преобразований.

Уравнения вида $a \cdot \cos^2 x + b \cdot \sin x + c = 0$ приводятся к квадратным уравнениям относительно новой переменной $y = \sin x$, $|y| \leqslant 1$. Аналогично, в уравнении $a \cdot \sin^2 x + b \cdot \cos x + c = 0$ полагают $y = \cos x$.

Уравнения вида $a \cdot \sin^{2n} x + b \cdot \sin^n x \cdot \cos^n x + c \cdot \cos^{2n} x = 0$ называются однородными относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Если $a \neq 0$, то, разделив обе части на $\cos^{2n} x$, получаем уравнение относительно $\operatorname{tg} x$:

$$a \cdot \operatorname{tg}^{2n} x + b \cdot \operatorname{tg}^n x + c = 0,$$

которое сводится к алгебраическому заменой $y = \operatorname{tg} x$.

Если $a = 0$, то уравнение эквивалентно совокупности уравнений $\cos x = 0$ и $b \cdot \sin^n x + c \cdot \cos^n x = 0$. Последнее решается путем замены $y = \operatorname{tg} x$.

Уравнения вида $a \cdot \sin^{2n} x + b \cdot \sin^n x \cdot \cos^n x + c \cdot \cos^{2n} x = d$ сводятся к однородным, если воспользоваться тождеством $d = d(\cos^2 x + \sin^2 x)^n$, а затем привести подобные члены в обеих частях уравнения.

Подстановки, которые мы рассматривали до сих пор, годились лишь для специальных случаев уравнений вида $R(\sin x, \cos x) = 0$, где $R(\sin x, \cos x)-$ рациональная функция от $\cos x$, $\sin x$, т.е. функция, получающаяся из $\sin x$ и $\cos x$ с помощью операций сложения, умножения, деления и возведения в степень с целым показателем. Однако, существует так называемая универсальная тригонометрическая подстановка $t = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$, позволяющая превратить в рациональное алгебраическое уравнение любое уравнение вида $R(\sin x, \cos x) = 0$. При этом используются формулы, выражающие $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} \quad \text{и} \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} \quad (\cos \frac{x}{2} \neq 0)$$

Тригонометрические уравнения с функциями разных аргументов обычно решаются путем сведения их к функциям одного и того же аргумента или к равенству одноименных тригонометрических функций.

Из условий равенства одноименных тригонометрических функций устанавливаются следующие связи между аргументами :

$$\begin{aligned}
&\sin x = \sin y \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y - x = 2\pi m, \\ y + x = \pi + 2\pi n \end{array} \right. \\
&\cos x = \cos y \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y - x = 2\pi m, \\ y + x = 2\pi n \end{array} \right. \\
&\operatorname{tg} y = \operatorname{tg} x \quad \Longrightarrow \quad y - x = \pi n \iff y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\
&\operatorname{ctg} y = \operatorname{ctg} x \quad \Longrightarrow \quad y - x = \pi m \iff x \neq \frac{\pi}{2} + l\pi,
\end{aligned}$$

где n, m, k, $l \in Z$.

Уравнения вида

$$\begin{gathered}
\cos \alpha x \cdot \cos \beta x = \cos \gamma x \cdot \cos \delta x, \\
\sin \alpha x \cdot \sin \beta x = \sin \gamma x \cdot \sin \delta x, \\
\sin \alpha x \cdot \cos \beta x = \sin \gamma x \cdot \cos \delta x
\end{gathered}$$

путем преобразования произведений в суммы и разности при определенных соотношениях между α, β, γ и δ можно привести к условиям равенства тригонометрических функций.

Уравнения вида

$$\begin{gathered}
\cos \alpha x + \cos \beta x = \cos \gamma x + \cos \delta x, \\
\cos \alpha x \pm \cos \beta x = \sin \gamma x + \sin \delta x, \\
\sin \alpha x + \sin \beta x = \sin \gamma x + \sin \delta x
\end{gathered}$$

путем преобразования сумм и разностей тригонометрических функций в произведения с последующим разложением на множители можно привести к совокупностям более простых уравнений.

Уравнения, содержащие только квадраты синусов и косинусов, с помощью формул понижения степени приводятся к предыдущим уравнениям.

В некоторых случаях уравнения вида $R(\sin x, \sin 3x, \cos x, \cos 3x) = 0$ решаются с использованием формул тройного аргумента, а именно :

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x,$$
$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

Особо отметим уравнения с переменной в знаменателе вида $\dfrac{T_1(x)}{T_2(x)} = 0$, где $T_1(x)$ и $T_2(x)$– тригонометрические функции.

Это уравнение равносильно системе $\begin{cases} T_1(x) = 0, \\ T_2(x) \neq 0 \end{cases}$

Ниже на примерах покажем основные методы решения тригонометрических уравнений.

Каждый из приведенных ниже примеров представляет собой тест так называемого открытого типа, в котором не предлагаются варианты ответов, а сам ответ является целым числом.

Пример 6.3.1. Найдите число корней уравнения $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$ на интервале $(0; 3\pi)$

Решение. Это уравнение решается методом введения вспомогательного аргумента. Разделив обе части уравнения на $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+3} = 2$, получим :

$\dfrac{1}{2}\cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \sin\dfrac{\pi}{6}\cos x + \cos\dfrac{\pi}{6}\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \sin(\dfrac{\pi}{6} + x) =$
$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \dfrac{\pi}{6} + x = (-1)^k\dfrac{\pi}{4} + \pi k \Longrightarrow\ x = -\dfrac{\pi}{6} + (-1)^k\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$

Подсчитаем число корней, принадлежащих интервалу $(0; 3\pi)$:

$$\text{при } k = 0 \quad x = \frac{\pi}{12} \in (0; 3\pi),$$
$$\text{при } k = 1 \quad x = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{7\pi}{12} \in (0; 3\pi),$$
$$\text{при } k = 2 \quad x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{25\pi}{12} \in (0; 3\pi),$$
$$\text{при } k = 3 \quad x = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + 3\pi = \frac{31\pi}{12} \in (0; 3\pi).$$

При $k < 0$ и $k > 3$ корни не принадлежат интервалу $(0; 3\pi)$. Следовательно, число корней равно 4.

Ответ. 4.

Пример 6.3.2. Найдите число корней уравнения $8cos^4x = 11cos2x - 1$, принадлежащих интервалу $(-\pi; \pi)$

Решение. Преобразуем уравнение к виду

$$8\cos^4 x = 11(2\cos^2 x - 1) - 1 \Longrightarrow 4\cos^4 x - 11\cos^2 x + 6 = 0.$$

Введем новую переменную $t=\cos^2 x$, где $0\leqslant t\leqslant 1$.

Тогда получим квадратное уравнение $4t^2-11t+6=0 \Longrightarrow t_1=\dfrac{3}{4}$ и $t_2=2$, где t_2 не подходит по смыслу замены.

Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ \cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$,

решением которой является множество $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k$.

Отбираем корни на интервале $(-\pi;\pi)$:

$$\begin{array}{ll}
\text{при } k=0 & x=\pm\dfrac{\pi}{6}\in(-\pi;\pi),\\
\text{при } k=1 & x=-\dfrac{\pi}{6}+\pi=\dfrac{5\pi}{6}\in(-\pi;\pi),\\
\text{при } k=-1 & x=\dfrac{\pi}{6}-\pi=-\dfrac{5\pi}{6}\in(-\pi;\pi).
\end{array}$$

Других корней на этом интервале нет. Следовательно, число корней равно 4.

Ответ. 4.

Пример 6.3.3. Найдите число корней уравнения $\sin^4 x-4\sin^2 x\cos^2 x+3\cos^4 x=0$ на интервале $(0;2\pi)$

Решение. Уравнение однородного вида, и, разделив обе части на $\cos^4 x$, получим $y^4-4y^2+3=0$, где $y=\operatorname{tg} x$. Решая биквадратное уравнение, находим $y_{1,2}=\pm 1$, $y_{3,4}=\pm\sqrt{3}$.

Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений : $\operatorname{tg} x=\pm 1$, $\operatorname{tg} x=\pm\sqrt{3}$. Отсюда $x=\pm\dfrac{\pi}{4}+\pi k$, $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi n$, $k,n\in Z$.

Отбираем корни на интервале $(0;2\pi)$:

$$\begin{array}{ll}
\text{при } k=0 & x=\dfrac{\pi}{4}\in(0;2\pi),\\
\text{при } k=1 & x=\pm\dfrac{\pi}{4}+\pi\in(0;2\pi),\\
\text{при } k=2 & x=-\dfrac{\pi}{4}+2\pi\in(0;2\pi),\\
\text{при } n=0 & x=\dfrac{\pi}{3}\in(0;2\pi),\\
\text{при } n=1 & x=\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi\in(0;2\pi),\\
\text{при } n=2 & x=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi\in(0;2\pi).
\end{array}$$

Следовательно, число корней равно 8.

Ответ. 8.

Пример 6.3.4. Найдите число корней уравнения $\sqrt{7-18\operatorname{tg} x}=6\operatorname{tg} x+11$ на интервале $(-2\pi;\pi)$

Решение. Введем новую переменную $t = \operatorname{tg} x$. Тогда получим иррациональное уравнение

$\sqrt{7-18t} = 6t+11 \Longrightarrow 36t^2+150t+114=0 \Longrightarrow 6t^2+25t+19=0 \Longrightarrow t_1=-1,\ t_2=-\dfrac{19}{6}$ – посторонний корень.

Следовательно, $\operatorname{tg} x = -1$ и $x = -\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in Z$.

Отбираем корни на интервале $(-2\pi;\pi)$:

$$\begin{aligned} &\text{при } n=0 \quad && x=-\frac{\pi}{4} \in (-2\pi;\pi),\\ &\text{при } n=1 \quad && x=-\frac{\pi}{4}+\pi \in (-2\pi;\pi),\\ &\text{при } n=-1 \quad && x=-\frac{\pi}{4}-\pi \in (-2\pi;\pi). \end{aligned}$$

Других корней на интервале $(-2\pi;\pi)$ нет. Следовательно, число корней равно 3.

Ответ. 3.

Пример 6.3.5. Найдите число корней уравнения $\sin^2 x+\sin^2 2x = \sin^2 3x+\sin^2 4x$ на интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$

Решение. Используя формулу понижения степени, получим :

$\cos 2x+\cos 4x = \cos 6x+\cos 8x \Longrightarrow 2\cos 3x\cdot\cos x = 2\cos 7x\cdot\cos x \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \cos x(\cos 7x-\cos 3x)=0 \Longrightarrow \cos x\cdot\sin 5x\cdot\sin 2x = 0 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{lll} 1. & \cos x = 0 & x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z,\\ 2. & \sin 2x=0 & x=\dfrac{\pi k}{2},\ k\in Z,\\ 3. & \sin 5x=0 & x=\dfrac{\pi m}{5},\ m\in Z. \end{array}\right. .$$

Очевидно, что первая серия решений входит во вторую серию.

Итак, $x=\dfrac{\pi k}{2},\ k\in Z$ и $x=\dfrac{\pi m}{5},\ m\in Z$.

Отбираем корни на интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$:

$$\begin{aligned} &\text{при } k=0 && x=0\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right),\\ &\text{при } |k|\geqslant 1 && \text{корни выходят за пределы данного интервала},\\ &\text{при } m=0 && x=0\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right),\\ &\text{при } m=\pm 1 && x=\pm\frac{\pi}{5}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right),\\ &\text{при } m=\pm 2 && x=\pm\frac{2\pi}{5}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right),\\ &\text{при } |m|\geqslant 3 && \text{корни выходят за пределы данного интервала}. \end{aligned}$$

Следовательно, число корней равно 5.

Ответ. 5.

Пример 6.3.6. Найдите число корней уравнения $4\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x = \cos 6x$ на интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

Решение. Умножим обе части уравнения на $\sin x$, при условии, что $\sin x \neq 0$. Тогда :

$$4\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x = \cos 6x \cdot \sin x \Longrightarrow 2\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x =$$
$$= \cos 6x \cdot \sin x \longrightarrow \sin 4x \cdot \cos 3x = \cos 6x \cdot \sin x \Longrightarrow \frac{1}{2}(\sin x + \sin 7x) =$$
$$= \frac{1}{2}(\sin 7x - \sin 5x) \Longrightarrow \sin x + \sin 5x = 0 \Longrightarrow \sin 3x \cdot \cos 2x = 0 \Longrightarrow$$
$$\left[\begin{array}{l} 1. \quad \sin 3x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \dfrac{\pi n}{3},\ n \in Z \text{ при условии } \sin x \neq 0, \\ 2. \quad \cos 2x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}, k \in Z \text{ при условии } \sin x \neq 0. \end{array}\right.$$

Отбираем корни на интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$:

при $n = 0$	$x = 0$ – не является корнем уравнения, т.к. $\sin x \neq 0$,
при $n = \pm 1$	$x = \pm\dfrac{\pi}{3} \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$,
при $\lvert n\rvert \geqslant 2$	корни выходят за пределы интервала $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$,
при $k = 0$	$x = \dfrac{\pi}{4} \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$,
при $k = -1$	$x = -\dfrac{\pi}{4} \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$,
при $k \geqslant 1$ и $k \leqslant -2$	корни выходят за пределы интервала $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Следовательно, число корней равно 4.

Ответ. 4.

Варианты ЕГЭ содержат уравнения, в которые, кроме тригонометрических функций, входят другие элементарные функции.

Рассмотрим решение таких уравнений.

Пример 6.3.7. Решите уравнение $\sin 0,6x = (\sqrt{9 - x^2})^2 + x^2 - 8$

Решение. Отметим, что областью определения функции, стоящей в правой части уравнения, является множество значений x, удовлетворяющих условию $|x| \leqslant 3$. На этом множестве выполним преобразования в правой части:

$$\sin 0,6x = 9 - x^2 + x^2 - 8 \Longrightarrow \sin 0,6x = 1 \Longrightarrow 0,6x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ (k \in Z) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x = \frac{5}{6}\pi(1 + 4k);\ (k \in Z).$$

Из полученного множества решений выбираем те, которые удовлетворяют условию $|x| \leqslant 3$. Очевидно, это будет $x = \dfrac{5\pi}{6}$.

Ответ. $x = \dfrac{5\pi}{6}$.

Пример 6.3.8. Решите уравнение $\sqrt{(2x+3)^2 + 16} = 4 - \sin^2 \dfrac{4\pi x}{3}$

Решение. Так как обе части уравнения положительны, то, возводя их в квадрат, получим уравнение, равносильное исходному :

$$(2x+3)^2+16=16-8\sin^2\frac{4\pi x}{3}+\sin^4\frac{4\pi x}{3}\Longrightarrow (2x+3)^2=$$

$$=\sin^4\frac{4\pi x}{3}-8\frac{\sin^2 4\pi x}{3}\Longrightarrow (2x+3)^2=\sin^2\frac{4\pi x}{3}\left(\sin^2\frac{4\pi x}{3}-8\right).$$

Далее, $(2x+3)^2\geqslant 0$, а $\sin^2\frac{4\pi x}{3}\left(\sin^2\frac{4\pi x}{3}-8\right)\leqslant 0$, следовательно, равенство возможно лишь в том случае, когда обе части равны нулю, т.е. при $x=-\frac{3}{2}$. Подставляя значение $x=-\frac{3}{2}$ в исходное уравнение, получим верное равенство.

Ответ. $x=-\frac{3}{2}$.

Пример 6.3.9. Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $\left(2\sin\frac{\pi}{x}-x^3+2x^2+3x-8\right)^2+(\sqrt[3]{x^2-6x+8})^4=0$

Решение. Левая часть уравнения представляет собой сумму четных степеней и потому может быть равной нулю, если оба слагаемых равны нулю. Таким образом, исходное уравнение равносильно системе : $\begin{cases}2\sin\frac{\pi}{x}-x^3+2x^2+3x-8=0\\ x^2-6x+8=0\end{cases}$

Решая второе из уравнений системы, получаем $x=4;\ x=2$. Подстановка полученных значений в первое уравнение показывает, что решение системы есть значение $x=2$.

Ответ. $x=2$.

6.4 Тригонометрические неравенства

Решение неравенств, содержащих тригонометрические функции, сводится к решению простейших неравенств вида $\sin x\geqslant a,\ \cos x\geqslant a,\ \operatorname{tg} x\geqslant a$ и т.п.

Простейшие тригонометрические неравенства удобно решать графическим способом.

Пример 6.4.1. Решите неравенство $\sin x\leqslant\frac{1}{2}$

Решение. Построим график функции $y=\sin x$ и проведем прямую $y=\frac{1}{2}$.

Решением указанного неравенства будут те значения x, которым соответствуют точки графика $y=\sin x$, лежащие ниже прямой $y=\frac{1}{2}$. Одним из таких промежутков будет $\left[-\frac{7\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]$. Воспользовавшись периодичностью функции $y=\sin x$, получим, что $x\in\left[-\frac{7\pi}{6}+2k\pi;\frac{\pi}{6}+2k\pi\right],\ k\in Z$.

Ответ. $\left[-\frac{7\pi}{6}+2k\pi;\frac{\pi}{6}+2k\pi\right]$.

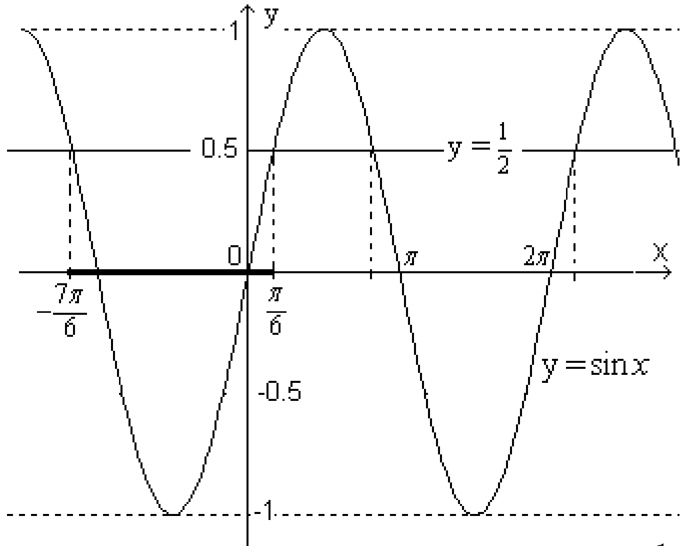

Рис. 6.4.1. Графики функций $y = \sin x$ и $y = \dfrac{1}{2}$

Пример 6.4.2. Решите неравенство $\operatorname{tg} x \geqslant -1$

<u>Решение.</u> Построим графики $y = \operatorname{tg} x$ и $y = -1$.

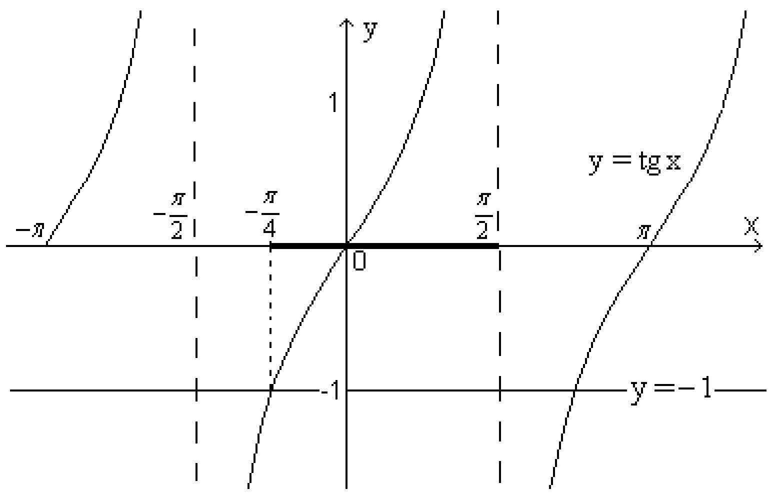

Рис. 6.4.2. Графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = -1$

Из рисунка 6.4.2 видно, что одним из промежутков, удовлетворяющих неравенству, будет $\left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Учитывая периодичность тангенса, получим $x \in \left[-\dfrac{\pi}{4} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right]$ $(k \in Z)$.

<u>Ответ.</u> $\left[-\dfrac{\pi}{4} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right]$ $(k \in Z)$.

Пример 6.4.3. Решите неравенство $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geqslant \sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

<u>Решение.</u> Отметим сразу, что $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi (k \in Z)$ и $x \neq k\pi (k \in Z)$. Обозначим $\operatorname{tg} x = t$ и на области допустимых значений x перейдем к неравенству

$$t + \frac{1}{t} \geqslant \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow \frac{3t^2 - 4\sqrt{3}t + 3}{3t} \geqslant 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (t - \sqrt{3})(t - \dfrac{\sqrt{3}}{3})t \geqslant 0 \\ t \neq 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < t \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ t \geqslant \sqrt{3} \end{array} \right.$$

Перейдем к исходной переменной и решим графически неравенства

$$0 < \operatorname{tg} x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3};\ \operatorname{tg} x \geqslant \sqrt{3}.$$

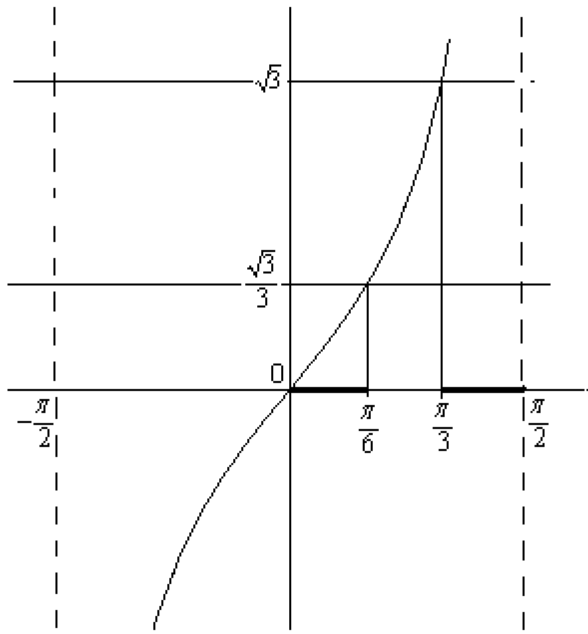

Рис. 6.4.3.

На рисунке 6.4.3 показаны промежуток $\left(0; \frac{\pi}{6}\right]$, удовлетворяющий неравенству $0 < \operatorname{tg} x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$ и промежуток $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$, удовлетворяющий неравенству $\operatorname{tg} x \geqslant \sqrt{3}$.

Учитывая периодичность тангенса, получаем ответ.

<u>Ответ.</u> $\left(\pi k; \frac{\pi}{6} + \pi k\right] \cup \left[\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in Z.$

6.5 Задачи для самостоятельного решения

№ 6.5.1. Упростите выражение

1) $\dfrac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{(1-\cos\alpha)\cos\alpha}$

2) $\dfrac{1-\sin(30^o - \alpha)}{1+\sin(30^o - \alpha)}$

3) $\cos^2 5 + \cos^2 1 - \cos 6 \cdot \cos 4$

4) $\dfrac{1 + \operatorname{tg}\beta \operatorname{ctg} 230^o}{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{ctg} 670^o}$

№ 6.5.2. Найдите значение выражения

1) $3\cos^2\alpha + 2$, если $\sin\alpha = 0,4$

2) $3\sin(\pi-\alpha)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$, если $\sin\alpha=0,5$

3) $9\sin^2\alpha+5\cos^2\alpha$, если $\cos\alpha=-0,4$

4) $\dfrac{\sin 7\pi/18-\sin\pi/9}{\cos 7\pi/18-\cos\pi/9}$

5) $16\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{3\alpha}{2}$, если $\cos\alpha=\dfrac{3}{4}$

№ 6.5.3. Докажите тождество

1) $\operatorname{ctg}^2\alpha=\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}+1$

2) $\sin 4\alpha\cdot\sin\alpha-\cos 4\alpha\cdot\cos\alpha=\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+5\alpha\right)$

3) $\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\sin 2\alpha$

4) $\dfrac{\cos\alpha+2\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\sin\alpha+2\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}=\operatorname{ctg}2\alpha$

№ 6.5.4. Пусть $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{5}{13}$, $\alpha,\ \beta\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Найдите значение $\cos\beta$

№ 6.5.5. Найдите значение выражения

1) $\dfrac{\operatorname{tg}\pi/3}{\operatorname{ctg}\pi/6}-\sqrt{2}\cos\dfrac{3\pi}{4}$

2) $\dfrac{\sin 50^o+\sin 10^o}{\cos 25^o\cdot\cos 5^o+\sin 25^o\cdot\sin 5^o}$

3) $\dfrac{\cos 25^o\cdot\cos 15^o-\sin 25^o\cdot\sin 15^o}{\cos 100^o+\cos 20^o}$

4) $\dfrac{6+7\sin 2\alpha}{5}$, если $\operatorname{ctg}\alpha=5$

№ 6.5.6. Найдите

1) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\dfrac{\sin\alpha-5\cos\alpha}{3\sin\alpha+\cos\alpha}=1$

2) $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+2\alpha\right)$, если $\sin 4\alpha=-0,2$

3) $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=3$

4) $\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$, если $\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{2}$

5) $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$, $\alpha\in\left(\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right)$

6) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, если $\alpha\in(\pi;2\pi)$ и $\dfrac{4\sin\alpha-5\cos\alpha}{3\cos\alpha-11\sin\alpha}=1$

7) $\operatorname{ctg}2\alpha$, если $\operatorname{tg}\left(\alpha+\dfrac{3\pi}{4}\right)=3$

8) $\sqrt{11}\cos\dfrac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha=-\dfrac{7}{11}$, $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

9) $\operatorname{ctg}\alpha$, если $8\sin^2\alpha-2\sin\alpha-3=0$ и $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

№ 6.5.7. Найдите значение выражения

1) $\dfrac{\sin^2 10^o-\cos^2 35^o}{\sqrt{2}\sin 65^o}$

2) $\dfrac{\cos 23^o\cdot\sin 53^o+\sin 23^o\cdot\cos 127^o}{\sin 18^o\cdot\sin 78^o+\cos 18^o\cdot\sin 12^o}$

3) $\sin 10^o\cdot\sin 50^o\cdot\sin 70^o$

4) $\dfrac{\operatorname{tg} 67^o-\operatorname{tg} 22^o}{1+\operatorname{tg} 67^o\cdot\operatorname{tg} 22^o}+4\sin 105^o\cdot\cos 105^o$

5) $\sqrt{\dfrac{1+\cos 4}{2}}+\cos 2$

6) $\left(\dfrac{\operatorname{tg}^2 43^o-\operatorname{tg}^2 17^o}{1-\operatorname{tg}^2 43^o\cdot\operatorname{tg}^2 17^o}\cdot\operatorname{tg} 64^o\right)^2$

7) $\left(\cos\dfrac{\pi}{12}-\sin\dfrac{\pi}{12}\right)\left(\cos^3\dfrac{\pi}{12}+\sin^3\dfrac{\pi}{12}\right)$

8) $\dfrac{1}{2\cos 40^o}+\dfrac{\sqrt{3}}{2\sin 40^o}$

№ 6.5.8. Вычислите

1) $\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\operatorname{tg}\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3) $\arccos\left(\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

4) $\cos\left(2\arcsin\dfrac{4}{5}\right)$

5) $\operatorname{tg}(2\operatorname{arcctg} 3)$

6) $\sin\left(\dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{12}{13}\right)\right)$

7) $\sin\left(\arccos\dfrac{4}{5}+\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

8) $\arccos\left(\cos\dfrac{29\pi}{5}\right)$

9) $\arcsin\left(\sin\dfrac{22\pi}{7}\right)$

№ 6.5.9. Укажите промежуток, содержащий сумму корней или корень, если он единственный, уравнения $(x-1)\arcsin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

1) $(-2;-1,6)$ 2) $(-1,6;-1,3)$ 3) $(-1,3;-1,0)$ 4) $(-1,0;-0,5)$

№ 6.5.10. Найдите произведение двух последовательных целых чисел, между которыми находится число $2\arccos\dfrac{1}{2}-3\arcsin 1$

№ 6.5.11. Найдите сумму двух последовательных целых чисел, между которыми находится корень уравнения $\operatorname{arcctg}(3x-4)=\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

№ 6.5.12. Укажите наименьшее число из заданной последовательности чисел

1) $\operatorname{arcctg}(-0,1)$ 2) $\operatorname{arctg} 3,5$ 3) $\operatorname{arcctg} 3,5$ $\operatorname{arctg}(-0,1)$ 5) $\operatorname{arcctg} 5$

№ 6.5.13. Укажите в градусах значение угла $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 495^o)$

№ 6.5.14. Вычислите в градусах значение выражения $\dfrac{1}{3}arcsin\ 1-arcctg\left(-\sqrt{3}\right)$

№ 6.5.15. Найдите сумму корней или корень, если он единственный, уравнения

1) $\cos(\arccos(x+2))=x^2$

2) $2(\operatorname{arctg} x)^2-5\operatorname{arctg} x+2=0$

№ 6.5.16. Решите уравнения

1) $2\sin 2x-\sin^2 x=\cos^2 x$

2) $\cos 2x=\cos x-1$

3) $\cos x+\cos 5x=0$

№ 6.5.17. Найдите сумму (в градусах) наименьшего и наибольшего корней уравнения $2-2\cos^2 x+\sqrt{2}\sin x=0,$ принадлежащих промежутку $(90^o;360^o)$

№ 6.5.18. Найдите в градусах среднее арифметическое всех различных корней уравнения $(\sin x+1)\left(\operatorname{tg} x+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=0$, принадлежащих промежутку $(-180^o;180^o)$

№ 6.5.19. Найдите в градусах среднее арифметическое всех различных корней уравнения $\sin 2x\left(\operatorname{tg} x+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=0,$ принадлежащих промежутку $(-20^o;200^o)$

№ 6.5.20. Укажите в градусах значение суммы всех корней уравнения
$\sin\ x+1=(1-\sin(270^o-2x))\cdot\operatorname{tg}^2 x$, принадлежащих промежутку $[-270^o;90^o]$

№ 6.5.21. Найдите число корней уравнения $\sin^4 x-\cos^4 x=1$ на интервале $(0;3\pi)$

№ 6.5.22. Найдите число корней уравнения $\sqrt{10-18\cos x}=6\cos x-2$ на интервале $(-2\pi;2\pi)$

№ 6.5.23. Найдите число корней уравнения $\cos 2x\cdot\sin 4x=\cos x\cdot\sin 5x$ на интервале $(-\pi;\pi)$

№ 6.5.24. Найдите в градусах наибольший отрицательный корень уравнения $\mathrm{tg}(75^o + 3x) + \mathrm{tg}(15^o - 3x) = 2$

№ 6.5.25. Найдите сумму корней (в градусах) уравнения $(1 + \cos 4x)\sin 2x = \cos^2 2x$, принадлежащих интервалу $(30^o; 90^o)$

№ 6.5.26. Найдите число корней уравнения $(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, x + 1)\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) = 0$, принадлежащих интервалу $(-100^o; 350^o)$

№ 6.5.27. Найдите число корней уравнения $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + 2x\right) = \sqrt{2}\sin(\pi + x)$, принадлежащих интервалу $(-100^o; -420^o)$

№ 6.5.28. Найдите в градусах сумму корней уравнения $(\mathrm{ctg}\, x - 1)\cdot(\cos x + 1) = 0$, принадлежащих интервалу $(-200^o; 100^o)$

№ 6.5.29. Решите уравнения

1) $\sqrt{(3\cos 2x - 5)^2} + \sqrt{4\cos^2 2x - 12\cos 2x + 9} = 8$

2) $25x^2 - 10x + 4 = \left(\sqrt{3} - \cos\dfrac{15\pi x}{2}\right)\left(\sqrt{3} + \cos\dfrac{15\pi x}{2}\right)$

3) $\sqrt{4 - (2x - 5)^2} = \sin^2\dfrac{4\pi x}{5} + 2$

4) $\sin 2x = (\sqrt{4 - x^2})^2 + x^2 - 5$

№ 6.5.30. Найдите $2\,\mathrm{tg}\, x_o$, где x_o – наибольший отрицательный корень уравнения $11\cos 2x - 3\sin 2x + 9 = 0$

№ 6.5.31. Решите неравенства

1) $2\cos x - 1 \geqslant 0$

2) $\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right) \geqslant 1$

3) $\cos\dfrac{\pi}{8}\cos x - \sin x \sin\dfrac{\pi}{8} < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4) $\sin 2x + 2\sin x > 0$

5) $-\sqrt{3} - 2\sin 3x < 0$

6) $\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) > \sqrt{3}$

№ 6.5.32. Найдите все значения p, при которых уравнение $7 - 2\cos x = p(1 + \mathrm{tg}^2\, x)$ имеет хотя бы один корень

№ 6.5.33. Найдите все значения p, при которых уравнение $3\cos 2x + \dfrac{2p}{\sin x} = -17$ имеет корни

№ 6.5.34. Найдите число корней уравнения $\sqrt{\cos 4\pi x - 1} = 15x + 4x^2 - 4x^3$

№ 6.5.35. Решите систему уравнений

1) $\begin{cases} \sin x = \cos y \\ 2\cos^2 y + \sin x = 3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{3} \\ \cos x \cdot \cos y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

3) $\begin{cases} \cos x - \dfrac{2}{\sin y} = 3 \\ 2\cos x \cdot \sin y = 1 \end{cases}$

6.6 Ответы к задачам для самостоятельного решения

6.5.1. 1) $2\,\mathrm{tg}\,\alpha$; 2) $\mathrm{tg}^2(30^o + \frac{\alpha}{2})$; 3) 1; 4) $\mathrm{ctg}(\beta - 40^o)$ **6.5.2.** 1) $4,52$; 2) -2; 3) $8,36$; 4) 0; 5) 5 **6.5.4.** $\frac{33}{65}$ **6.5.5.** 1) 2; 2) 1; 3) 1; 4) $\frac{113}{65}$ **6.5.6.** 1) -3; 2) $0,6$; 3) 11; 4) 1; 5) $-\frac{3}{2}$; 6) -4; 7) $0,75$; 8) $\sqrt{2}$; 9) $-\frac{\sqrt{7}}{3}$ **6.5.7.** 1) $-0,5$; 2) 1; 3) $\frac{1}{8}$; 4) 0; 5) 0; 6) 3; 7) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$; 8) 2 **6.5.8.** 1)0; 2) 1; 3) $\frac{3\pi}{4}$; 4) $-\frac{7}{25}$; 5) $\frac{3}{4}$; 6) $\frac{5\sqrt{26}}{26}$; 7) $\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$; 8) $\frac{\pi}{5}$; 9) $-\frac{\pi}{7}$ **6.5.9.** 2; **6.5.10.** 6; **6.5.11.** 3; **6.5.12.** $\mathrm{arctg}(-0,1)$; **6.5.13.** -45^o; **6.5.14.** -120; **6.5.15.** 1) -1; 2) $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}$; **6.5.16.** 1) $(-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$; 2) $\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $\frac{\pi}{2} + n\pi$; $n, k \in z$; 3) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$; $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ n, k \in Z$; **6.5.17.** 495; **6.5.18.** 60; **6.5.19.** 110; **6.5.20.** -180; **6.5.21.** 3; **6.5.22.** 4; **6.5.23.** 7; **6.5.24.** -10^o; **6.5.25.** 120^o; **6.5.26.** 3; **6.5.27.** 7; **6.5.28.** -90^o; **6.5.29.** 1) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z$; 2) $0,2$; 3) $2,5$; 4) $-\frac{\pi}{4}$; **6.5.30.** -10; **6.5.31.** 1) $(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi), k \in Z$; 2) $(4\pi k; (1+4k)\pi), k \in Z$; 3) $(\frac{17\pi}{24} + 2\pi k; \frac{25\pi}{24} + 2\pi k), k \in Z$; 4) $(2\pi k; (2k+1)\pi), k \in Z$; 5) $(-\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{4\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3})$; 6) $(-\frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{3} + \pi n)$; **6.5.32.** $(0; 9]$; **6.5.33** $[-7; 0) \cup (0; 7]$; **6.5.34.** 3; **6.5.35.** 1) $(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 2\pi k); k \in Z$; 2) $(\frac{\pi}{3} + \pi k; \pi k)(\pi n; -\frac{\pi}{3} + \pi n); n, k \in Z$; 3) $(\pi + 2\pi k; (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k); k \in Z$.

Глава 7

Логарифмические и показательные уравнения и неравенства

7.1 Тождественные преобразования и вычисление показательных и логарифмических выражений

Напомним основные свойства степеней и логарифмов.

$$
\begin{array}{ll}
1.\ a^x a^y = a^{x+y} & 4.\ \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \\
2.\ \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} & 5.\ (a^x)^y = a^{xy} \\
3.\ (ab)^x = a^x b^x &
\end{array}
$$

Эти равенства справедливы для любых действительных значений x и y.

Логарифмом числа $b (b > 0)$ по основанию a $(a > 0, a \neq 1)$ называется показатель степени α, в которую надо возвести основание a, чтобы получить число b, т.е. из равенства $a^\alpha = b$ следует : $\alpha = \log_a b$.

Из определения логарифма следует основное логарифмическое тождество :

$$a^{\log_a b} = b, \quad a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0.$$

Основные свойства логарифмов

1. $\log_a a = 1,\ a \neq 1,\ a > 0.$
2. $\log_a 1 = 0,\ a \neq 1,\ a > 0.$
3. $\log_a bc = \log_a b + \log_a c,\ a \neq 1,\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$
4. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c,\ a \neq 1,\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$
5. $\log_a b^k = k \cdot \log_a b,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ k \in R.$
6. Формула перехода к новому основанию логарифма :

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},\ \log_a b = \frac{1}{\log_b a},\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ a \neq 1,\ c \neq 1.$$

7. $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b,\ k \neq 0,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0.$
8. $\log_{a^k} b^k = \log_a b,\ a > 0,\ b > 0,\ a \neq 1,\ k \neq 0.$
9. $\log_{a^k} b^m = \frac{m}{k} \log_a b,\ a > 0,\ b > 0,\ a \neq 1,\ k \neq 0.$

Пример 7.1.1. Вычислите значение выражения $16^{\log_{81}3+\log_2\sqrt[4]{3}}$

1) 5 2) $4\sqrt{3}$ 3) 6 4) $9\sqrt[4]{3}$

Решение. $16^{\log_{81}3+\log_2\sqrt[4]{3}} = 16^{\log_{3^4}3}\cdot(2^4)^{1/4\cdot\log_2 3} = (2^4)^{1/4}\cdot 2^{\log_2 3} = 2\cdot 3 = 6.$
В качестве ответа выбираем вариант под номером 3.

Ответ. Ответ : 3.

Пример 7.1.2. Вычислите значение выражения $5^{\log_{1/5}4\cdot\log_{1/4}3}$

1) 25 2) 3 3) 16 4) 9

Решение. Так как $5^{\log_{1/5}4} = 5^{-\log_5 4} = \dfrac{1}{4}$, то $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\log_{1/4}3} = 3$. Следовательно, выбираем ответ под номером 2.

Ответ. 2.

Пример 7.1.3. Найдите значение выражения $5\left(\dfrac{\log_7 245}{\log_5 7} - \dfrac{\log_7 35}{\log_{35}7}\right)$

Решение. Преобразуем выражение в скобках, учитывая, что

$$\log_7 245 = \log_7(49\cdot 5) = \log_7 49 + \log_7 5 = 2 + \log_7 5$$

, а также

$$\frac{1}{\log_5 7} = \log_7 5 \text{ и } \frac{1}{\log_{35}7} = \log_7 35 = 1 + \log_7 5 \text{ (см. свойства логарифмов) :}$$

$$(2+\log_7 5)\log_7 5 - (1+\log_7 5)^2 = \log_7^2 5 + 2\log_7 5 - 1 - 2\log_7 5 - \log_7^2 5 = -1.$$

Ответ. -5.

Пример 7.1.4. Найдите значение выражения $4^{\frac{\log_3 7}{\log_3 2}} + \log_6(\log_7 125\cdot\log_5 49)$

Решение. $4^{\log_2 3\cdot\log_3 7} + \log_6(\log_7 5^3\cdot\log_5 7^2) = \left(2^{2\log_2 3}\right)^{\log_3 7} + \log_6(3\log_7 5\cdot 2\log_5 7) =$
$= \left(2^{\log_2 3}\right)^{\log_3 49} + \log_6(6\log_7 5\cdot\log_5 7) = 3^{\log_3 49} + \log_6 6 = 49 + 1 = 50.$
Ответ. 50.

Пример 7.1.5. Вычислите значение выражения $\log_{a^3b^4}\sqrt[3]{a^2b}$ при условии, что $\log_a b = \dfrac{1}{4}$

1) $\dfrac{3}{4}$ 2) $\dfrac{2}{3}$ 3) $\dfrac{1}{4}$ 4) $\dfrac{3}{16}$

Решение. В данном выражении перейдем к основанию a :

$$\log_{a^3b^4}\sqrt[3]{a^2b} = \frac{\log_a\sqrt[3]{a^2b}}{\log_a a^3b^4} = \frac{2/3+(1/3)\log_a b}{3+4\log_a b}.$$

Подставив в полученное выражение $\log_a b = \dfrac{1}{4}$, получим $\dfrac{3}{16}$.

Следовательно, надо выбрать в качестве ответа вариант под номером 4.

Ответ. 4.

7.2 Показательные уравнения

Уравнение, содержащее неизвестное только в показателе степени, называется показательным.

Рассмотрим простейшие виды показательных уравнений.

7.2.1 Уравнения вида $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$

По свойствам показательной функции из равенства $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$ следует равенство $f(x) = \varphi(x)$. Таким образом, решение показательных уравнений данного вида сводится к решению алгебраических уравнений.

Пример 7.2.1. Решите уравнение $5^{x^2-9x/5} = \sqrt[5]{25}$

Решение. Так как $\sqrt[5]{25} = 5^{2/5}$, то на основании вышесказанного $x^2 - \dfrac{9}{5}x = \dfrac{2}{5}$ и $5x^2 - 9x - 2 = 0$, откуда $x_1 = -\dfrac{1}{5}$ и $x_2 = 2$.

Ответ. $x = -\dfrac{1}{5},\ x = 2.$

Пример 7.2.2. Решите уравнение $\left(4\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{3(x-7)}{0,2}} = (0,25 \cdot 81)^{x-\frac{1}{2}}$

Решение. Приведем обе части уравнения к одному основанию

$$\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{3(x-7)}{0,2}} = \left(\frac{9}{2}\right)^{2(x-\frac{1}{2})}$$

Переходим к равенству показателей степеней

$$\frac{3(x-7)}{0,2} = 2(x - \frac{1}{2}) \Longrightarrow 15(x-7) = 2x - 1 \Longrightarrow 13x = 104;\ x = 8.$$

Ответ. $x = 8$.

7.2.2 Уравнения вида $a^{\varphi(x)} = b$

Простейшими уравнениями такого вида являются уравнения $a^x = b,\ a > 0,\ b > 0,\ a \neq 1$. Решение уравнения есть $x = \log_a b$.

Аналогично, путем логарифмирования решаются следующие показательные уравнения :

1. $a^{f(x)} = b \Longleftrightarrow f(x) = \log_a b,\ a > 0,\ b > 0,\ a \neq 1$
2. $a^{f(x)} = b^{\varphi(x)} \Longleftrightarrow f(x) = \varphi(x)\log_a b,\ a > 0,\ b > 0,\ a \neq 1,\ b \neq 1.$

Пример 7.2.3. Решите уравнение $7^{3x+1} = 4^{2-x}$

Решение. Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 7 (можно прологарифмировать по любому другому основанию).

$3x + 1 = \log_7 4^{2-x} \Longrightarrow 3x + 1 = (2 - x)\log_7 4 \Longrightarrow x(3 + \log_7 4) = 2\log_7 4 - 1 \Longrightarrow x = \dfrac{2\log_7 4 - 1}{3 + \log_7 4}$.

Замечание. Если исходное уравнение прологарифмировать по основанию 10, то

$$x = \frac{2\lg 4 - \lg 7}{3\lg 7 + \lg 4}.$$

Ответ. $x = \dfrac{2\lg 4 - \lg 7}{3\lg 7 + \lg 4}$

Пример 7.2.4. Решите уравнение $2^{3x} \cdot 7^{x-2} = 4^{x+1}$

Решение. Разделим обе части уравнения на $4^{x+1} = 2^{2x+2} \neq 0$. Получили уравнение $\dfrac{2^{3x} \cdot 7^{x-2}}{2^{2x+2}} = 1$, равносильное данному.

Последнее уравнение примет вид $2^{x-2} \cdot 7^{x-2} = 1$ или $(2 \cdot 7)^{x-2} = 1$, откуда $x - 2 = 0$; $x = 2$.

Ответ. $x = 2$.

7.2.3 Уравнения вида $Aa^{kx+n} + Ba^{kx+m} = C$

Отличительной особенностью заданного уравнения (A, B, C – коэффициенты) является наличие одного и того же коэффициента k перед x в показателе степени. Для решения этого уравнения вынесем за скобки в левой части уравнения общий множитель, содержащий a^{kx}. Тогда, очевидно, уравнение примет вид $Ma^{kx} = C$ и приводится к одному из уравнений, рассматриваемых выше. Разумеется, число слагаемых в левой части уравнения может быть больше двух.

Пример 7.2.5. Решите уравнение $5^{x-3} - 5^{x-4} - 16 \cdot 5^{x-5} = 2^{x-3}$

Решение. Вынесем в левой части уравнения 5^{x-3} :

$5^{x-3}\left(1 - \dfrac{1}{5} - \dfrac{16}{25}\right) = 2^{x-3} \Longrightarrow 5^{x-3} \cdot \dfrac{4}{25} = 2^{x-3} \Longrightarrow \left(\dfrac{5}{2}\right)^{x-3} = \dfrac{25}{4} \Longrightarrow x - 3 = 2 \Longrightarrow x = 5$.

Ответ. $x = 5$.

7.2.4 Уравнения вида $Aa^{2x} + Ba^x b^x + Cb^{2x} = 0$

Все члены уравнения $Aa^{2x} + Ba^x b^x + Cb^{2x} = 0$ содержат показательную функцию с разными основаниями, причем во втором слагаемом левой части уравнения основанием показательной функции является произведение двух других оснований. Разделим обе части уравнения на $b^{2x} \neq 0$. Получим уравнение $A\left(\dfrac{a}{b}\right)^{2x} + B\left(\dfrac{a}{b}\right)^{x} + C = 0$, которое сводится к квадратному уравнению $At^2 + Bt + C = 0$ заменой $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{x} = t$.

Замечание. Можно обе части уравнения делить на a^{2x} или на $a^x b^x$.

Пример 7.2.6. Решите уравнение $2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x + 3^{2x+1} = 0$

Решение. Сделаем преобразования, приводящие заданное уравнение к виду

$$Aa^{2x} + Ba^x b^x + Cb^{2x} = 0: \quad 2 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x \cdot 3^x + 3 \cdot 3^{2x} = 0.$$

Разделим обе части уравнения на 3^{2x} : $2\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5\left(\frac{2}{3}\right)^x + 3 = 0.$

Обозначим $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$ и решим уравнение

$$2t^2 - 5t + 3 = 0 \Longrightarrow t_1 = \frac{3}{2}; \quad t_2 = 1 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2} \end{array} \right. \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array} \right.$$

Ответ. $x = 0$; $x = -1$.

7.3 Логарифмические уравнения

К логарифмическим уравнениям относятся уравнения, содержащие неизвестное под знаком логарифма или в основании логарифма.

Простейшее логарифмическое уравнение вида

$$\log_a x = b, \text{ где } a > 0, \ a \neq 1$$

имеет решение $x = a^b$.

Уравнение

$$\log_a f(x) = b, \text{ где } a > 0, \ a \neq 1$$

сводится к решению эквивалентного ему уравнения $f(x) = a^b$.

Уравнение вида $\log_a f(x) = \log_a \varphi(x)$, где $a > 0$, $a \neq 1$ методом потенцирования приводится к равносильной системе

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = \varphi(x). \end{cases}$$

Этот метод лежит в основе решения многих логарифмических уравнений, приводимых к виду равенства логарифмов.

Простейшее уравнение вида $\log_x a = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 0$ приводится к равносильному уравнению $\log_a x = \frac{1}{b}$ с множеством допустимых значений $x > 0$, $x \neq 1$.

При решении уравнений второй и выше степени относительно логарифма необходимо обратить внимание на следующие преобразования :

1. $\log_a^n x^k = (\log_a x^k)^n = (k \cdot \log_a x)^n = k^n \cdot \log_a^n x, \ a > 0, \ a \neq 1, \ x > 0.$
2. $\log_a^n \sqrt[k]{x} = \frac{1}{k^n} \log_a^n x, \ a > 0, \ a \neq 1, \ x > 0.$
3. $\log_{a^k}^n x = (\log_{a^k} x)^n = (\frac{1}{k} \log_a x)^n = \frac{1}{k^n} \log_a^n x, \ a > 0, \ a \neq 1, \ x > 0, k \neq 0.$

Уравнения второй и более высоких степеней относительно логарифма решаются по методу замены переменной, а именно полагают $y = \log_a x$. В результате замены переменной получают рациональное (или иррациональное) уравнение относительно y, корни которого подставляют в простейшее логарифмическое уравнение $\log_a x = y_0$, где y_0 – рассматриваемый корень.

Пример 7.3.1. Решите уравнение $\dfrac{\log_7(\sqrt{x+2}+1)}{\log_7 \sqrt[5]{x-27}} = 5$

Решение. Область допустимых значений переменной определяется неравенствами $\begin{cases} x-27 \neq 1 \\ x > 27 \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq 28 \\ x > 27 \end{cases}$

На множестве значений x, удовлетворяющих этим условиям, выполним преобразования, которые приводят к равносильным уравнениям :

$\log_7(\sqrt{x+2}+1) = 5\log_7 \sqrt[5]{x-27}$; $\log_7(\sqrt{x+2}+1) = \log_7(x-27)$;

$\sqrt{x+2}+1 = x-27$; $\sqrt{x+2} = x-28$.

Последнее уравнение решаем заменой переменной: $\sqrt{x+2} = t \geqslant 0$. Далее, $x = t^2-2$, и получим уравнение $t = t^2-30$ или $t^2-t-30=0$, откуда $t=-5$ и $t=6$.

Первое из значений t не подходит, так как $t \geqslant 0$, следовательно $\sqrt{x+2} = 6$ и $x = 34$. Проверка подтверждает, что значение $x=34$ – корень уравнения.

Ответ. $x = 34$.

Пример 7.3.2. Найдите произведение корней уравнения $[\log_{0,5}(x+5)+\log_{0,5}(17-x)](x^2+2x-15)=0$

1) -252 2) 1260 3) -84 4) 84

Решение. Область определения уравнения : $\begin{cases} x+5>0, \\ 17-x>0 \end{cases} \Longleftrightarrow -5 < x < 17.$

На области определения исходное уравнение равносильно совокупности уравнений :

$$\left[\begin{array}{l} 1.\ x^2+2x-15=0, \\ 2.\ \log_{0,5}(x+5)+\log_{0,5}(17-x)=0 \end{array}\right.$$

Решая первое уравнение, получим $x_1 = 3$ и $x_2 = -5$. Очевидно, что x_2 не принадлежит интервалу $(-5;17)$ и, следовательно, не является корнем исходного уравнения.

Из второго уравнения следует

$$(x+5)(17-x)=1 \Longleftrightarrow x^2-12x-84=0 \Longrightarrow x_{1,2} = 6 \pm 2\sqrt{30}.$$

Оба корня принадлежат интервалу $(-5;17)$.

Действительно, так как $2\sqrt{30} = \sqrt{120} < \sqrt{121} = 11$, то $6+2\sqrt{30} < 17$ и $6-2\sqrt{30} > -5$.

Произведение этих корней согласно теореме Виета равно -84, а произведение всех корней исходного уравнения равно $-84 \cdot 3 = -252$.

Ответ. 1.

Пример 7.3.3. Найдите сумму корней (или корень, если он единственный) уравнения $\log_{x-1} 0,2 \cdot \log_{0,2}(x^2-6x+9) = 1$

Решение. На множестве допустимых значений переменной x, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x-1>0, \quad x \neq 2 \\ x^2-6x+9>0, \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} x>1 \\ x \neq 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

преобразуем заданное уравнение к виду : $\log_{0,2}(x^2-6x+9)=\log_{0,2}(x-1)$. На основании свойств логарифмической функции получим уравнение

$$x^2-6x+9=x-1 \Longrightarrow x^2-7x+10=0.$$

Корнями последнего уравнения являются числа 5 и 2. Последнее не удовлетворяет ОДЗ исходного уравнения.

Ответ. $x=5$.

Пример 7.3.4. Найдите корень (или произведение корней, если их несколько) уравнения $\log_{16}(x+2)^2+\log_{16}(x-3)^2=1$

Решение. Отметим, что данное уравнение определено при всех значениях x, кроме $x=-2$ и $x=3$. На этом множестве значений x произведем преобразование в левой части уравнения, используя свойства логарифмов :

$$\log_{4^2}(x+2)^2+\log_{4^2}(x-3)^2=1 \Longleftrightarrow \log_4|x+2|+\log_4|x-3|=1 \Longleftrightarrow \log_4|x^2-x-6|=$$

$$=\log_4 4 \Longleftrightarrow |x^2-x-6|=4 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-6=4 \\ x^2-x-6=-4 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-10=0 \\ x-x-2=0. \end{array}\right.$$

Очевидно, что числа -2 и 3 не являются корнями ни одного из полученных квадратных уравнений, и, следовательно, каждый из корней двух квадратных уравнений удовлетворяет исходное уравнение. По теореме Виета произведение двух корней первого из уравнений в совокупности равно -10, а произведение корней второго уравнения равно -2. Таким образом, произведение всех корней уравнения равно 20.

Ответ. 20.

Пример 7.3.5. Укажите интервал, содержащий корень уравнения $11^{\log_7 x}+x^{\log_7 11}=242$

1) $(10;12)$ 2) $(6;8)$ 3) $(48;50)$ 4) $(49;50)$

Решение. Преобразуем второе слагаемое левой части уравнения, используя переход к основанию x под знаком логарифма, а именно

$$x^{\log_7 11}=x^{\frac{\log_x 11}{\log_x 7}}=\left(x^{\log_x 11}\right)^{\frac{1}{\log_x 7}}=11^{\log_7 x},\ x>0,\ x\neq 1.$$

Тогда уравнение принимает вид

$$2\cdot 11^{\log_7 x}=242 \Longleftrightarrow 11^{\log_7 x}=11^2 \Longleftrightarrow \log_7 x=2 \text{ и } x=49$$

Следовательно, корень уравнения принадлежит интервалу (48, 50), и мы выбираем ответ 3.

Ответ. 3.

Пример 7.3.6. Найдите корень (или произведение корней, если их несколько) уравнения $\lg^2(x^3-x^2-x+1)=\lg^2\dfrac{x+1}{9}$

Решение. Преобразуем левую часть уравнения, разложив выражение, стоящее под знаком логарифма, на множители $\lg^2(x+1)(x-1)^2 = \lg^2 \dfrac{x+1}{9}$.

Очевидно, что ОДЗ этого уравнения $x > -1;\ x \neq 1$.

Извлекая корни квадратные из обеих частей уравнения, получим совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{lcr} \lg(x+1)(x-1)^2 & = & \lg\dfrac{x+1}{9} \\ \lg(x+1)(x-1)^2 & = & -\lg\dfrac{x+1}{9} \end{array}\right. \Longrightarrow \left[\begin{array}{lcc} (x+1)(x-1)^2 & = & \dfrac{x+1}{9} \\ (x+1)(x-1)^2 & = & \dfrac{9}{x+1} \end{array}\right.$$

Замечая, что $x \neq -1$, перейдем к совокупности уравнений, равносильных предыдущим :

$$\left[\begin{array}{l} (x-1)^2 = \dfrac{1}{9} \\ (x-1)^2(x+1)^2 = 9 \end{array}\right.$$

Решением первого из уравнений будут $x = 1\frac{1}{3}$ и $x = \frac{2}{3}$, удовлетворяющие ОДЗ уравнения.

Второе уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} (x+1)(x-1) = 3 \\ (x+1)(x-1) = -3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 4 \\ x^2 = -2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 2 \\ x \in \emptyset \end{array}\right.$$

Значение $x = -2$ не удовлетворяет ОДЗ исходного уравнения. Таким образом, получили три значения $x = 1\frac{1}{3}, x = \frac{2}{3}, x = 2$, подстановка которых в исходное уравнение показывает, что все они являются корнями уравнения.

Замечание. При подстановке значения $x = 2$ следует обратить внимание, что $\lg^2 \dfrac{1}{3} = \lg^2(3)^{-1} = (-1)^2 \lg^2 3 = \lg^2 3$.

7.4 Решение уравнений, содержащих логарифмическую и показательную функции

Если уравнение содержит переменную не только в показателе степени или под знаком логарифма, то ни одним из методов, перечисленных в разделах 7.2, 7.3, решить их не удается. Так, например, для решения уравнения вида $g(x)^{f(x)} = g(x)^{\varphi(x)}$ необходимо рассмотреть следующие случаи :

1) $f(x) = \varphi(x)$ (показатели степеней равны)
2) $g(x) = 1$ (основание равно 1)
3) $g(x) = 0$ (основание равно 0)
4) $g(x) = -1$ (основание равно –1)

Полученные в этих случаях решения необходимо проверить, подставив их в исходное уравнение.

Уравнения вида $(f(x))^{\varphi(x)} = g(x)$ решаются методом логарифмирования. При условии, что $f(x) > 0,\ g(x) > 0$ это уравнение при водится к виду

$$\varphi(x) \cdot \log_a f(x) = \log_a g(x)$$

Основание "a" выбирается по виду конкретного уравнения.

Пример 7.4.1. Решите уравнение $2^{x-1} = 2 - x$

Решение. Будем решать это уравнение графически. Построим графики функций $y = 2^{x-1}$ и $y = 2 - x$ (рис. 7.4.1).

Абсциссы точек пересечения графиков и есть корни заданного уравнения.

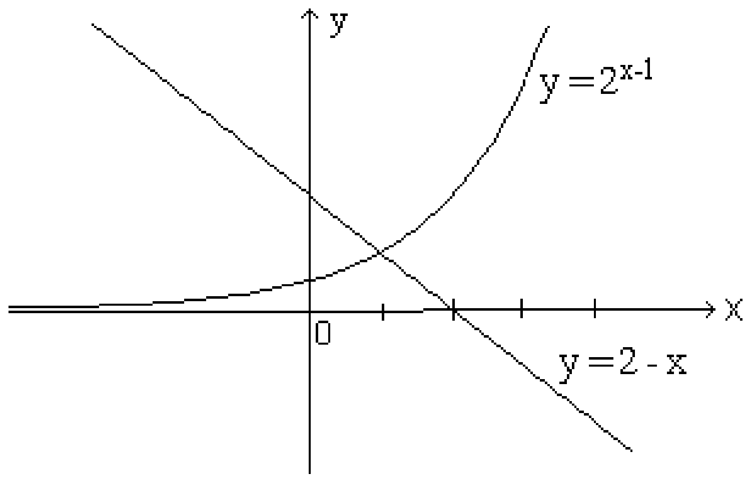

Рис. 7.4.1. Графики функций $y = 2^{x-1}$ и $y = 2 - x$

Из рисунка видно, что $x = 1$ есть корень заданного уравнения. Так как рисунок допускает погрешность, непосредственной подстановкой в уравнение убеждаемся в истинности этого утверждения.

Ответ. $x = 1$.

Пример 7.4.2. Найдите сумму корней уравнения $(x-1)^{x^2-x-4} = (x-1)^2$

1) 2 2) 3 3) 5 4) 4

Решение. Данное уравнение относится к показательно–степенным уравнениям, и к нему применима соответствующая схема решения.

1. Из равенства показателей следует

$$x^2 - x - 4 = 2 \Longrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Longrightarrow x_1 = -2 \text{ и } x_2 = 3.$$

Оба корня удовлетворяют уравнению, а именно

$$\begin{array}{lll} \text{при} & x_1 = -2 & (-3)^2 = (-3)^2, \\ \text{при} & x_2 = 3 & 2^2 = 2^2 \end{array}$$

2. Полагая основание равным 1, получим $x-1 = 1 \Longrightarrow x_3 = 2$. Очевидно, что уравнение обращается в тождество.

3. Полагая основание равным 0, получим $x - 1 = 0 \Longrightarrow x_4 = 1$. Очевидно, что левая часть уравнения не имеет смысла при $x = 1$, так как получим 0^{-4}.

4. Полагая основание равным –1, получаем $x-1 = -1 \Longrightarrow x_5 = 0$. При $x = 0$ уравнение обращается в тождество $(-1)^{-4} = (-1)^2$.

Итак, корнями уравнения являются числа $-2; 3; 2; 0$. Следовательно, сумма равна 3, и в качестве ответа выбираем ответ под номером 2.

Ответ. 2.

Пример 7.4.3. Найдите произведение корней уравнения
$$\left(\frac{10x+1}{10}\right)^{\lg(x+0,1)+2} = 1000$$

1) $0,9650$ 2) $-0,9650$ 3) $0,0320$ 4) $-0,9801$

Решение. Это уравнение решается путем логарифмирования по основанию 10 обеих частей уравнения при условии, что $\dfrac{10x+1}{10} > 0$. В результате логарифмирования получим :
$$(\lg(x+0,1)+2)\lg(x+0,1) = \lg 1000 \Longrightarrow \lg^2(x+0,1) + 2\lg(x+0,1) - 3 = 0.$$

Введем новую переменную $y = \lg(x+0,1)$.

Тогда уравнение примет вид $y^2 + 2y - 3 = 0 \Longrightarrow y_1 = 1,\ y_2 = -3$. Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности двух систем :
$$1)\ \begin{cases} x+0,1 > 0, \\ \lg(x+0,1) = 1 \end{cases} \quad \text{и } 2)\ \begin{cases} x+0,1 > 0, \\ \lg(x+0,1) = -3 \end{cases}$$

Решая их, получим $x_1 = 9,9$ и $x_2 = -99 \cdot 10^{-3}$.

Следовательно, $x_1 \cdot x_2 = -0,9801$, и выбираем ответ под номером 4.

Ответ. 4.

Пример 7.4.4. Решите уравнение $\log_2^2 x - \log_2 x + 3 = (\sqrt{9-x^2})^2 + x^2$

Решение. ОДЗ уравнения $\begin{cases} |x| \leqslant 3 \\ x > 0 \end{cases} \Longrightarrow 0 < x \leqslant 3$.

На множестве $0 < x \leqslant 3$ сделаем преобразования в правой части уравнения : $\log_2^2 x - \log_2 x + 3 = 9 - x^2 + x^2 \Longrightarrow \log_2^2 x - \log_2 x - 6 = 0$. Обозначим $\log_2 x = t$. Получим $t^2 - t - 6 = 0;\ (t-3)(t+2) = 0;\ t = 3;\ t = -2$.

Возвращаясь к исходной переменной, имеем $\left[\begin{array}{l} \log_2 x = 3 \\ \log_2 x = -2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8 \\ x = \dfrac{1}{4} \end{array}\right.$

Учитывая ОДЗ, получим $x = \dfrac{1}{4}$.

Ответ. $x = \dfrac{1}{4}$.

Пример 7.4.5. Решите уравнение
$$\left(\sqrt{5}\cos\frac{\pi}{x} + x^3 - 2x^2 + 3x - 6\right)^2 + (3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9)^2 = 0$$

Решение. Сумма квадратов равна нулю тогда и только тогда, когда каждое из слагаемых равно нулю. Следовательно, заданное уравнение равносильно системе уравнений :
$$\begin{cases} \sqrt{5}\cos\dfrac{\pi}{x} + x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = 0 \\ 3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0. \end{cases}$$

Решаем уравнение $3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$. Заменим $3^x = t$, тогда $t^2 - 10t + 9 = 0$ и $t_1 = 9;\ t_2 = 1$. Возвращаясь к исходной переменной, получим $x = 2;\ x = 0$. Непосредственной подстановкой в первое уравнение системы проверяем, что $x = 2$ является корнем этого уравнения, а $x = 0$ не входит в ОДЗ. Таким образом, единственным значением, при котором оба слагаемых одновременно обращаются в нуль, есть число 2.

Ответ. $x = 2$.

7.5 Системы показательных и логарифмических уравнений

Пример 7.5.1. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^{2y} = 16 + 6 \cdot x^y \\ x^{2y} + 5 = y \cdot x^y + 5y^2 \end{cases}$

Решение. Пусть $x^y = z > 0$. Тогда система уравнений перепишется в виде

$$\begin{cases} z^2 - 6z - 16 = 0 \\ z^2 - yz = 5y^2 - 5 \end{cases}$$

Решая первое уравнение системы, получим $z_1 = -2$; $z_2 = 8$. Так как $z > 0$, то $z = 8$ подставим во второе уравнение системы : $64 - 8y = 5y^2 - 5$. Решаем полученное квадратное относительно переменной y уравнение :

$$5y^2 + 8y - 69 = 0 \Longrightarrow y_1 = -\frac{23}{5};\ y_2 = 3.$$

Полученные значения y и z подставим в равенство $x^y = z$:

$$\begin{array}{lll} 1)\ x^{-\frac{23}{5}} = 8 & \Longrightarrow & x = 8^{-\frac{5}{23}} = 2^{-\frac{15}{23}} \\ 2)\ x^3 = 8 & \Longrightarrow & x = 2 \end{array}$$

Таким образом, получили две пары значений $\left(2^{-\frac{15}{23}}; -\frac{23}{5}\right)$; $(2; 3)$. Подстановка полученных значений в исходную систему показывает, что они являются решением системы.

Ответ. $\left(2^{-\frac{15}{23}}; -\frac{23}{5}\right)$; $(2; 3)$.

Пример 7.5.2. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2^x \log_2 x - 2y(2^x + \log_2 x) + 4y^2 = 0 \\ xy = 4 \end{cases}$

Решение. Первое из уравнений системы является квадратным уравнением относительно переменной y :

$$y^2 - \frac{2^x + \log_2 x}{2} y + \frac{2^x \log_2 x}{4} = 0$$

Замечая, что второй коэффициент этого уравнения есть сумма чисел $\frac{2^x}{2}$ и $\frac{\log_2 x}{2}$, а свободный член равен произведению тех же чисел, делаем вывод (на основании теоремы Виета), что корни этого уравнения таковы : $\frac{2^x}{2}$ и $\frac{\log_2 x}{2}$.

Таким образом, исходная система уравнений эквивалентна совокупности двух систем :

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^x = 2y \\ xy = 4 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} \log_2 x = 2y \\ xy = 4 \end{cases} \end{array}\right. \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^x = \dfrac{8}{x} \\ y = \dfrac{4}{x} \end{cases} \\ \\ \begin{cases} \log_2 x = \dfrac{8}{x} \\ y = \dfrac{4}{x} \end{cases} \end{array}\right.$$

Уравнения $2^x = \dfrac{8}{x}$ и $\log_2 x = \dfrac{8}{x}$ решаются графически. Из первого уравнения получаем $x = 2$, а из второго $x = 4$.

Итак, получили 2 решения системы.

<u>Ответ.</u> $(2;2);(4;1)$.

7.6 Показательные и логарифмические неравенства

Решение показательных неравенств основано на свойстве монотонности функции $y = a^x$:

$$\begin{cases} a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}, \\ a > 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) > \varphi(x), \\ a > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}, \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) < \varphi(x), \\ 0 < a < 1 \end{cases}$$

С помощью методов, аналогичных методам решения показательных уравнений, показательное неравенство сводится к простейшему виду :

$$a^{f(x)} > b \quad (a^{f(x)} < b)$$

При условии, что $b > 0$, это неравенство записывают следующим образом :

$$a^{f(x)} > a^{\log_a b}$$

и решают, используя свойство монотонности показательной функции.

Решение логарифмических неравенств основано на том, что функция $y = \log_a x$ при $a > 1$ монотонно возрастает, а при $0 < a < 1$ монотонно убывает.

С помощью методов, аналогичных методам решения логарифмических уравнений, логарифмическое неравенство сводится к простейшему виду :

1. $\begin{cases} \log_a f(x) > b, \\ a > 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) > a^b, \\ a > 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} \log_a f(x) > b, \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) < a^b, \\ 0 < a < 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} \log_a f(x) < b, \\ a > 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) < a^b, \\ a > 1 \end{cases}$
4. $\begin{cases} \log_a f(x) < b, \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) > a^b, \\ 0 < a < 1 \end{cases}$

5. $\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x)$. Это неравенство эквивалентно совокупности двух систем неравенств :

$$\begin{cases} f(x) > g(x) > 0, \\ a(x) > 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 0 < f(x) < g(x), \\ 0 < a(x) < 1 \end{cases} .$$

Множество решений нестрогого неравенства находится как объединение множеств решений соответствующего строгого неравенства и соответствующего уравнения.

Пример 7.6.1. Укажите количество целых решений неравенства $4^{\frac{2x-1}{x+1}} \geqslant 64$

1) 3 2) 2 3) 4 4) 5

Решение. Представим неравенство в виде $4^{\frac{2x-1}{x+1}} \geqslant 4^3$.
Так как $4 > 1$, то $\dfrac{2x-1}{x+1} \geqslant 3 \Longleftrightarrow \dfrac{x+4}{x+1} \leqslant 0 \Longleftrightarrow -4 \leqslant x < -1$.
Следовательно, число целых решений равно 3.

Ответ. 1.

Пример 7.6.2. Найдите наибольшее целое решение неравенства $(x^2 - 8x + 15)^{x-6} < 1$

1) 3 2) 4 3) 1 4) 2

Решение. Исходное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств :

1. $\begin{cases} x^2 - 8x + 15 > 1, \\ x - 6 < 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 4 + \sqrt{2}, \\ x < 4 - \sqrt{2} \end{array} \right. \\ x < 6 \end{cases} \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 4 - \sqrt{2}, \\ 4 + \sqrt{2} < x < 6 \end{array} \right.$

2. $\begin{cases} 0 < x^2 - 8x + 15 < 1, \\ x - 6 > 0 \end{cases} \Longrightarrow$ эта система решений не имеет.

Решением исходного неравенства являются все значения x, удовлетворяющие неравенствам $x < 4 - \sqrt{2}$ и $4 + \sqrt{2} < x < 6$. Очевидно, что наибольшее целое решение равно 2.

Ответ. 4.

Пример 7.6.3. Найдите количество целых решений неравенства
$\log_2(x^2 - x - 2) \leqslant \log_{1/2} \dfrac{1}{3x+10}$

1) 3 2) 6 3) 7 4) 5

Решение. Переходя к основанию "2" под знаком логарифма, получим неравенство вида

$$\log_2(x^2 - x - 2) \leqslant \log_2(3x + 10) \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 \leqslant 3x + 10, \\ x^2 - x - 2 > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 12 \leqslant 0, \\ x^2 - x - 2 > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \leqslant x < -1, \\ 2 < x \leqslant 6 \end{array} \right. .$$

Очевидно, что число целых решений равно 5.
Ответ. 4.

Пример 7.6.4. Найдите количество целых решений неравенства $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\log_3(x^2-4x+3)} \geqslant \dfrac{1}{5}$

1) 4 2) 3 3) 2 4) 0

Решение. Данное неравенство перепишем в виде

$$3^{-\log_3(x^2-4x+3)} \geqslant \frac{1}{5} \Longleftrightarrow 3^{\log_3 \frac{1}{x^2-4x+3}} \geqslant \frac{1}{5} \Longleftrightarrow \frac{1}{x^2-4x+3} \geqslant \frac{1}{5} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2-4x+3>0, \\ x^2-4x+3 \leqslant 5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>3, \\ x<1 \end{array} \right. \\ 2-\sqrt{6}<x<2+\sqrt{6} \end{cases} \Longleftrightarrow x \in [2-\sqrt{6}; 1) \cup (3; 2+\sqrt{6}].$$

На этом множестве только два целых числа : 0 и 4.

Ответ. 3.

Пример 7.6.5. Найдите количество целых решений неравенства $\log_x(6+5x-x^2)>0$

1) 5 2) 4 3) 3 4) 6

Решение. Это неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств :

1) $\begin{cases} x>1, \\ 6+5x-x^2>1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ x^2-5x-5<0 \end{cases} \Longleftrightarrow 1<x<\dfrac{5+3\sqrt{5}}{2}$

2) $\begin{cases} 0<x<1, \\ 0<6+5x-x^2<1 \end{cases}$ – эта система не имеет решений.

Следовательно, решением неравенства является интервал $\left(1; \dfrac{5+3\sqrt{5}}{2}\right)$, который включает в себя четыре целых числа : 2; 3; 4; 5.

Ответ. 2.

7.7 Задачи для самостоятельного решения

№ 7.7.1. Найдите значения выражений

1) $\log_3 189 - \log_3 7$;

2) $\log_4 20 + \log_4 3,2$;

3) $11 \log_{4\sqrt[5]{2}}(8\sqrt[5]{2})$;

4) $\dfrac{6\log_2 18}{\log_{32} 2} - \dfrac{5\log_2 9}{\log_{64} 2}$;

5) $\log_{0,4}\left(-\dfrac{3}{5}\log_{343}\dfrac{1}{49}\right)$;

6) $(49^{\log_7 5}-8)^{\log_{17} 23}$;

7) $\log_{\sqrt{2}}(9+\sqrt[3]{2\sqrt{5}-3\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{47+12\sqrt{15}} \cdot \sqrt[3]{49})$;

8) $\log_{\sqrt[3]{7}} \dfrac{7}{\sqrt{11}+\sqrt{6}} + \dfrac{3}{2}\log_{1/7} \dfrac{1}{17+2\sqrt{66}}$;

9) $144^{\log_7^{-1} 12} + \log_{1/6} \log_{25} \sqrt[3]{5}$;

10) $\dfrac{3^{\log_{11} 5}}{5^{\log_{11} 3}} + 3 \cdot 6^{\frac{2-\lg 9}{\lg 36}}$;

11) $\dfrac{3}{\log_{11} 2} - \log_2 \dfrac{121}{2} - \dfrac{\log_7 11}{\log_7 2}$;

№ 7.7.2. Вычислите $\log_{\sqrt[3]{ab}} \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b}}$, если $\log_b a = 2$

№ 7.7.3. Вычислите

1) $\log_{\sqrt{a}} ab^2 + \log_b \sqrt{\dfrac{a}{b}}$, если $\log_a b = \dfrac{1}{2}$;

2) $\log_3 \log_{64} 4 + 9^{\frac{1}{\log_6 3}}$

№ 7.7.4. Решите уравнение

1) $2^x \cdot 5^x = 0,1(10^{x-1})^5$;

2) $6^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 2^{x+8}$;

3) $9^{3+x} + 3^{2(x+1)} = 738 \cdot \dfrac{1}{81}$;

4) $\sqrt{3^{x-56}} - 7 \cdot \sqrt{3^{x-60}} = 162$;

5) $2^{2x} \cdot 9^x - 2 \cdot 6^{3x-1} + 4^{2x-1} \cdot 3^{4x-2} = 0$;

6) $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$;

7) $2^{\sqrt{1-\sin^2 2\pi x}} = 4x^2 - 28x + 51$;

8) $5^x \cdot 8^{\frac{x}{x+1}} = 100$;

9) $x^{\log_2 x} = 64x$;

10) $x^{\log_3 x} + 3^{\log_3^2 x} = 6$;

11) $(\sqrt{5^{x+1}})^{x-4} = 125^{x+1}$;

12) $(x^2-16)(10^{x+3} - 10^{\sqrt{3x+9}}) = 0$

№ 7.7.5. Найдите наибольший корень уравнения
$(3^{5x^2-1} - 81)\log_5(3-8x) = 0$

№ 7.7.6. Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения

1) $\log_3(x^2-6x+9)+\log_3(x^2+4x+4)=2;$

2) $\log_3^2 9x-2\log_3^2 x-7=0;$

3) $\log_{3x-2} 4x=\log_{3x-2}(x^2+3);$

4) $\log_2(6x^2+10x-3)=2\log_{3x}^{-1} 2;$

5) $\log_x 2\cdot\log_{x/16} 2=\log_{x/64} 2;$

6) $\log_4^2 x+(x-4)^2+3,75x-16=0;$

7) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{x}-\sin\dfrac{\pi}{x}\right)=2^{1+\ln^2(x^2-|x|-11)};$

8) $\dfrac{\log_7 5^{\sqrt{x+2}}}{\log_7 5}=x-4;$

9) $\log_2(2^x-3)+x=2;$

10) $4\log_4^2(-x)+2\log_4(x^2)=-1;$

11) $2^{\log_8(x^2-6x+9)}=3^{2\log_x\sqrt{x}-1};$

12) $\log_7^2(3x-5)+\sqrt{x^2-7x+10}=0;$

13) $\sqrt{4+(2x-5)^2}=2-\log_3^2(3-\dfrac{4}{5}x);$

14) $\log_2^2 x+(x-1)\log_2 x=6-2x$

№ 7.7.7. Решите систему уравнений

1) $\begin{cases} 9^y\cdot\sqrt[x]{100}=2,7\\ 25^y\cdot\sqrt[x]{10^4}=\dfrac{5}{4}\end{cases}$

2) $\begin{cases} x^{\lg y}=100\\ \log_y x=2\end{cases}$

3) $\begin{cases} (x-y)^{2y-x}=125\\ \lg 2(x-y)=1\end{cases}$

4) $\begin{cases} y^{\frac{1}{x}}=2\\ y^x=16\end{cases}$

5) $\begin{cases} x+y=\dfrac{3}{4}\\ \log_x y-\log_y x=\dfrac{3}{2}\end{cases}$

6) $\begin{cases} 3^x\cdot 2y=576\\ \log_{\sqrt{2}}(y-x)=4\end{cases}$

№ 7.7.8. Решите неравенство

1) $\dfrac{\log_5(x^2-6\dfrac{6}{7}x)}{\log_{1/2}9} \geqslant 0$;

2) $5^{log_x \frac{8-12x}{x-6}} > 25$;

3) $\log_3\log_{0,2}\log_{32}\dfrac{x-1}{x+5} > 0$;

4) $5^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} < 10$;

5) $\log_{(x-2)}(x^2-8x+15) > 0$;

6) $x^{\lg(x^2-6x+5)} > 1$;

7) $\dfrac{\lg(x^2-6x+8)}{\lg(x-8)} < 1$;

8) $\dfrac{3^{2x}-21}{3^x-3} > 10$;

9) $(x^2-3)^{\frac{x+1}{2-x}} \geqslant 1$;

10) $(4-\cos^2 x - 2\sin x)(\ln^2 y + 2\ln y + 5) \leqslant 8$

№ 7.7.9. Найдите сумму целых решений неравенства

1) $\log_9(x^2+16x+64) \leqslant 0$

2) $\sqrt[6]{x-6}\log_{1/3}\left(2-\dfrac{x}{5}\right) > 0$

3) $\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6}\right)^{3-\sqrt{4x-17}} \leqslant \left(\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{6}\right)^{3-\sqrt{4x-17}}$

4) $\log_{x^5}\left(\dfrac{|x-7|}{3x}\right) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{6}$

5) $\log_x(20x+3x^2-x^3) \geqslant 3$

№ 7.7.10. Найдите число целых решений неравенства

1) $(\sqrt{3})^{\overline{(x+2)(x-5)}}{}^{\frac{(x-2)^2}{}} < 1$

2) $(\log_7 6)^{\frac{(x+1)^2}{x^2-4}} > 1$

3) $3^{\log_2\frac{3x+10}{x}} > 9$

4) $|x-5|^{x^2-12x+35} < 1$

5) $(x+2)^{3-7x} \geqslant (x+2)^{6-5x}$

7.8 Ответы к задачам для самостоятельного решения

7.7.1. 1) 3; 2) 3; 3) 16; 4) 39; 5) 1; 6) 23; 7) 2; 8) 3; 9) 50; 10) 11; 11) 1 **7.7.2.** $\dfrac{2}{3}$; **7.7.3.** 1) 4,5; 2) 35 **7.7.4.** 1) 1,5; 2) 4; 3) -2; 4) 68; 5) 1; 6) 0; 7) 3,5 8) $2; -\log_5 10$; 9) $8; \dfrac{1}{4}$; 10) $3; \dfrac{1}{3}$; 11) $10; -1$; 12) $-3; 0; 4$ **7.7.5.** 0,25 **7.7.6.** 1) 2; 2) 30; 3) 3; 4) 3; 5) 12; 6) 4,25; 7) -4; 8) 7; 9) 2; 10) $-\dfrac{1}{2}$; 11) 6; 12) 2; 13) 2,5; 14) 2,25 **7.7.7.** 1) $(-2; 1,5)$; 2) $(\dfrac{1}{100}; \dfrac{1}{10}); (100; 10)$; 3) (13;8); 4) $(-2; \dfrac{1}{4}); (2; 4)$; 5) $(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4})$; 6) (2;6) **7.7.8.** 1) $[-\dfrac{1}{7}; 0) \cup (6\dfrac{6}{7}; 7)$; 2) $(\dfrac{2}{3}; 1) \cup (2; 6)$; 3) $(-\infty; -11)$; 4) $(\dfrac{1}{5}; 5)$; 5) $(4-\sqrt{2}; 3) \bigcup (4+\sqrt{2}; +\infty)$; 6) $(3-\sqrt{5}; 1) \cup (3+\sqrt{5}; +\infty)$; 7) (8;9); 8) $(0; 1) \cup (2; +\infty)$; 9) $[-2; -\sqrt{3})$; 10) $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z; y = \dfrac{1}{e}$ **7.7.9.** 1) -16; 2) 24; 3) 11; 4) 42; 5) 9 **7.7.10.** 1) 5; 2) 2; 3) 9; 4) 0; 5) 1.

Глава 8

Элементы математического анализа

8.1 Производная

8.1.1 Вычисление производных

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_o и в некоторой ее окрестности. Дадим аргументу приращение Δx и вычислим значение функции в точке $x_o + \Delta x$, а именно $f(x_o + \Delta x)$. Найдем приращение $\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$ и составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Если существует $\lim\limits_{\Delta x \longrightarrow 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, то говорят, что функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x_o)$ в точке x_o, равную значению этого предела, т.е.

$$\lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} = f'(x_o)$$

Основные правила нахождения производной сформулированы в теореме о производной суммы, произведения и частного, а именно :

если в точке x существуют производные функций $u(x)$ и $v(x)$, то

1) существует производная $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$;

2) существует производная $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$;

3) существует производная $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$, если $v(x) \neq 0$.

Кроме того, так как производная постоянной функции $y = c$ равна нулю, то постоянный множитель можно вынести за знак производной :

$$(cu(x))' = cu'(x).$$

Для вычисления производных используют таблицу производных основных элементарных функций

1) $(c)' = 0$	2) $(x)' = 1$
3) $(x^n)' = nx^{n-1}$	4) $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
5) $(\sin x)' = \cos x$	6) $(\cos x)' = -\sin x$
7) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	8) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
9) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	10) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	12) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
13) $(a^x)' = a^x \ln a$	14) $(e^x)' = e^x$
15) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	16) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

Процесс нахождения производной функции называется дифференцированием, а функцию, имеющую производную в точке x_o, называют дифференцируемой в этой точке.

Пример 8.1.1. Найдите значение производной функции $y = \dfrac{4-x}{3+x}$ в точке $x_o = -2$

Решение. При нахождении производной данной функции воспользуемся теоремой о производной дроби.

Итак, $y' = \left(\dfrac{4-x}{3+x}\right)' = \dfrac{(4-x)'(3+x)-(3+x)'(4-x)}{(3+x)^2} = -\dfrac{7}{(3+x)^2}$.

Вычислим $y'(x_o)$: $\quad y'(-2) = -\dfrac{7}{(3-2)^2} = -7$.

Ответ. -7.

При вычислении производной сложной функции используется правило вычисления производной сложной функции.

Если функция $y = \varphi(x)$ имеет производную в точке x_o, а функция $g(y)$ имеет производную в точке $y_o = \varphi(x_o)$, то сложная функция $f(x) = g[\varphi(x)]$ также имеет производную в точке x_o, причем

$$f'(x_o) = g'(\varphi(x_o)) \cdot \varphi'(x_o).$$

Пример 8.1.2. Вычислите значение производной функции $f(x) = (5x-4)^{25}$ в точке $x_o = 1$

Решение. Функцию $f(x) = (5x-4)^{25}$ можно представить в виде сложной функции : $f(x) = g(\varphi(x))$, где $g(y) = y^{25}$, $y = \varphi(x) = 5x-4$.

Так как $\varphi'(x) = 5$ и $g'(y) = 25y^{24}$, то $f'(x) = 5 \cdot 25y^{24} = 125(5x-4)^{24}$ и $f'(1) = 125$.

Ответ. 125.

Пример 8.1.3. Найдите производную функции $f(x) = \sin(x^2+3)$

Решение. Так как $f(x) = g[\varphi(x)]$, где $y = \varphi(x) = x^2+3$, $g(y) = \sin y$, то $g'(y) = \cos y$ и $\varphi'(x) = 2x$. Тогда $f'(x) = \cos y \cdot 2x = \cos(x^2+3) \cdot 2x$.

Ответ. $2x \cdot \cos(x^2+3)$.

Пример 8.1.4. Найдите производную функции $f(x) = \arccos 3x$

Решение. Функцию $f(x) = \arccos 3x$ можно представить в виде
$f(x) = g[\varphi(x)]$, где $y = \varphi(x) = 3x$ и $g(y) = \arccos y$.
По правилу дифференцирования сложной функции
$f'(x) = g'(y) \cdot \varphi'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}} \cdot 3 = -\dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$.

Ответ. $-\dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$.

Пример 8.1.5. Докажите, что производная четной функции (если она существует) есть нечетная функция

Решение. Пусть $f(x)$ – четная дифференцируемая функция. Тогда $f(-x) = f(x)$. Продифференцируем это равенство.

$(f(-x))' = (f(x))' \Longrightarrow -f'(-x) = f'(x) \Longrightarrow f'(-x) = -f'(x) \Longrightarrow f'(x)$ – нечетная функция.

Пример 8.1.6. Докажите, что, если x_o является корнем многочлена $P_n(x)$ кратности k $(k > 1)$, то x_o также является корнем кратности $k-1$ производной этого многочлена

Решение. Так как x_o является корнем кратности k многочлена $P_n(x)$ (n – степень многочлена, $n \geqslant k$), то этот многочлен можно представить в виде

$$P_n(x) = (x - x_o)^k Q_{n-k}(x),$$

где $Q_{n-k}(x)$ – многочлен степени $n-k$, причем $Q_{n-k}(x_o) \neq 0$. Продифференцируем это равенство.

$$P_n'(x) = k(x-x_o)^{k-1}Q_{n-k}(x) + (x-x_o)^k Q_{n-k}'(x) =$$
$$= (x-x_o)^{k-1}[kQ_{n-k}(x) + (x-x_o)Q_{n-k}'(x)]$$

Очевидно, что $P_n'(x)$ – многочлен, и в его разложении на множители присутствует множитель вида $(x-x_o)^{k-1}$, Следовательно, x_o – корень кратности $k-1$ этого многочлена.

8.1.2 Касательная к графику функции

Если в точке x_o функция $y = f(x)$ имеет производную, то в точке $(x_o, f(x_o))$ графика этой функции существует касательная, при этом угловой коэффициент касательной равен $f'(x_o)$. В этом состоит геометрический смысл производной. Итак, касательная к графику дифференцируемой в точке x_o функции $f(x)$ – это прямая, проходящая через точку $(x_o, f(x_o))$ и имеющая угловой коэффициент $f'(x_o)$.

Уравнение касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$, имеет вид :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Пример 8.1.7. Уравнение касательной к графику функции $y = x^2 - 2x + 5$ в точке его пересечения с осью OY имеет вид

1) $y = 5 - 2x$ 2) $y = 3 - x$ 3) $y = 5$ 4) $y = 2x - 5$

Решение. Чтобы написать уравнение искомой касательной, нужно найти значение функции и ее производной в точке касания.

Так как абсцисса точки касания по условию задачи равна нулю, то $f(x_0) = f(0) = 5$. $y' = 2x - 2$; $y'(x_0) = y'(0) = -2$.

Уравнение касательной имеет вид : $y = 5 - 2(x - 0) = 5 - 2x$.

Ответ. 1.

Пример 8.1.8. Касательные к графику функции $y = \dfrac{x+2}{x-2}$ образуют с осью OX угол 135^o в точках, сумма абсцисс которых равна

1) -1 2) 0 3) 4 4) 2

Решение. Геометрический смысл производной заключается в следующем : угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; y_0)$, равен значению производной в точке x_0 : $k = f'(x_0)$. Далее, угловой коэффициент прямой, не параллельной оси OX – это тангенс угла наклона этой прямой к оси OX. Следовательно, применительно к нашей задаче, вышесказанное запишем следующим образом :

$$\left(\frac{x+2}{x-2}\right)' = \operatorname{tg} 135^o, \text{ или } \frac{(x-2)-(x+2)}{(x-2)^2} = -1$$

$$-\frac{4}{(x-2)^2} = -1 \iff x - 2 = \pm 2; \iff x_1 = 0; \ x_2 = 4. \ x_1 + x_2 = 4.$$

Ответ. 3.

Пример 8.1.9. Если касательные к графику функции $y = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$ параллельны прямой $y = -x + 7$, то сумма абсцисс всех точек касания равна

1) $-\dfrac{8}{3}$ 2) $\dfrac{4}{3}$ 3) $-\dfrac{4}{3}$ 4) $\dfrac{8}{3}$

Решение. Так как касательная параллельна прямой $y = -x + 7$, то ее угловой коэффициент равен -1. Это означает, что значение производной от заданной функции равно -1.

$$y' = 3x^2 - 8x + 3; \ 3x^2 - 8x + 3 = -1; \ 3x^2 - 8x + 4 = 0.$$

Дискриминант уравнения $D = 64 - 48$ положителен, следовательно, это уравнение имеет два различных корня – абсциссы точек касания. По теореме Виета их сумма равна $\dfrac{8}{3}$.

Ответ. 4.

Пример 8.1.10. Если к параболам $y = x^2 + 2x + 3$ и $y = x^2$ проведена общая касательная, то сумма абсцисс точек касания равна

1) -2 2) 2 3) -3 4) 3

Решение. Если x_0 – абсцисса точки касания, то уравнение касательной к параболе $y = x^2 + 2x + 3$ имеет вид :

$$y = x_0^2 + 2x_0 + 3 + (2x_0 + 2)(x - x_0)$$

. После преобразований это уравнение запишется в виде :

$$y = 2x(x_0+1) + 3 - x_0^2.$$

Запишем уравнение касательной к параболе $y = x^2$ в точке с абсциссой

$$\bar{x}: \ y = \bar{x}^2 + 2\bar{x}(x-\bar{x}), \text{ или } y = 2\bar{x}x - \bar{x}^2$$

. Так как полученные уравнения являются уравнениями одной и той же прямой, то коэффициенты при неизвестном и свободные члены обязаны совпадать :

$$\begin{cases} 2x_0+2=2\bar{x}, \\ 3-x_0^2=-\bar{x}^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_0-\bar{x}=-1, \\ x_0^2-\bar{x}^2=3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_0-\bar{x}=-1, \\ (x_0-\bar{x})(x_0+\bar{x})=3 \end{cases} \Longleftrightarrow x_0+\bar{x}=-3$$

.

Ответ. 3.

Пример 8.1.11. Найдите сумму координат точки с отрицательной абсциссой, касательная в которой к графику функции $f(x) = x^2+4x+4$ проходит через начало координат

Решение. Представим уравнение функции в виде : $f(x) = (x+2)^2$ и запишем уравнение касательной к графику в точке $(x_o, f(x_o))$:

$$y = (x_o+2)^2 + 2(x_o+2)(x-x_o).$$

Так как эта касательная проходит через начало координат, то справедливо равенство

$$(x_o+2)^2 - 2x_o(x_o+2) = 0 \ \text{ или } \ (x_o+2)(x_o-2) = 0 \Longleftrightarrow x_o = \pm 2.$$

Значение функции в точке касания с отрицательной абсциссой $x = -2$ равно, очевидно, 0, а сумма координат равна -2.

Ответ. -2.

Пример 8.1.12. При каком значении a прямая $y = 3x + a$ является касательной к графику функции $y = 2x^2 - 5x + 1$?

Решение. Так как угловой коэффициент касательной равен 3, то значение производной от заданной функции $y' = 4x - 5$ приравняем к 3 и найдем абсциссу точки касания.

$$4x - 5 = 3 \Longrightarrow x_o = 2.$$

Тогда ордината точки касания $y_o = 2\cdot 4 - 5\cdot 2 + 1 = -1$. Координаты точки касания (x_o, y_o) подставим в уравнение касательной и найдем значение a : $-1 = 3\cdot 2 + a \Longrightarrow a = -7$.

Ответ. -7.

Пример 8.1.13. Прямая $y = 2x$ касается параболы $y = x^2 + bx + c$ в точке с абсциссой $x_o = 2$. Найдите сумму $b + c$

Решение. Подставим абсциссу $x_o = 2$ в уравнение касательной и получим ординату точки касания $y_o = 2x_o = 4$. Точка $(2;4)$ принадлежит параболе $y = x^2 + bx + c$. Следовательно, выполняется равенство

$$4 + 2b + c = 4 \Longrightarrow 2b + c = 0.$$

Производную от $y = x^2 + bx + c$ приравняем угловому коэффициенту касательной :

$$2x_o + b = 2 \Longrightarrow 4 + b = 2 \Longrightarrow b = -2.$$

Тогда из условия $2b + c = 0$ получим $c = 4$ и $b + c = 2$.

Ответ. 2.

Пример 8.1.14. При каких p касательная, проведенная к графику функции $y = x^3 - px$ в его точке с абсциссой $x_o = 1$, проходит через точку $M(2;3)$?

Решение. Найдем ординату точки касания $y_o = x^3 - px_o = 1 - p$ и составим уравнение касательной к графику функции $y = x^3 - px$ в точке $(1; 1 - p)$.

Так как $y' = 3x^2 - p|_{x=1} = 3 - p$, то уравнение касательной имеет вид $y - 1 + p = (3 - p)(x - 1)$.

Точка $M(2,3)$ принадлежит этой прямой. Следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнению прямой, т.е. $3 - 1 + p = 3 - p$. Отсюда $p = 0,5$.

Ответ. 0,5.

8.1.3 Механический смысл производной

Пусть материальная точка движется прямолинейно вдоль координатной прямой по закону $x = x(t)$, т.е. координата x этой точки есть заданная функция времени t. Тогда, для любой дифференцируемой функции $x(t)$ мгновенная скорость $v(t)$ определяется как производная от координаты x по времени t, т.е.

$$v(t) = x'(t)$$

В этом состоит механический смысл производной. Если скорость $v(t)$ на каком–либо временном промежутке положительна, то координата x растет с течением времени, а если $v(t)$ отрицательна, то координата x убывает.

Скорость движения точки есть в общем случае функция от времени t, а производная этой функции называется ускорением движения :

$$a(t) = v'(t).$$

Пример 8.1.15. Материальная точка движется вдоль оси OX прямолинейно по закону $x(t) = \dfrac{t^3}{3} - 3t^2 + 8$. Найдите момент времени t, когда ускорение равно нулю

Решение. Так как ускорение $a(t) = v'(t)$, то найдем $v(t) = x'(t) = t^2 - 6t$ и $v'(t) = 2t - 6$. Следовательно, $a(t) = v'(t) = 2t - 6 = 0$ при $t = 3$.

Ответ. 3.

Пример 8.1.16. Материальная точка движется вдоль оси OX прямолинейно по закону $x(t) = t^2 + 6t - 2$ (x – координата в метрах, t – время в секундах). Через сколько секунд после начала движения ее скорость будет равна 11 м/сек ?

Решение. Так как скорость $v(t) = x'(t) = 2t + 6$, то из условия $v(t) = 2t + 6 = 11$ находим $t = 2,5$ сек.

Ответ. 2,5.

Пример 8.1.17. Уравнение движения материальной точки вдоль оси OX имеет вид : $x = at^2 + bt + c$. В момент времени $t = 3$ сек скорость точки равна 16 см/сек. При $t = 5$ сек абсцисса точки $x = 45$ см , а скорость точки равна 28 см/сек. Найдите значение $a-b+c$

Решение. Так как $v(3) = 16$, то $x'(3) = 2at + b|_{t=3} = 6a + b = 16$
Так как $x(5) = 45$, то $25a + 5b + c = 45$.
Из системы уравнений $\begin{cases} 6a + b = 16 \\ 10a + b = 28 \\ 25a + 5b + c = 45 \end{cases}$ найдем a, b, c.
Из первых двух уравнений следует, что $4a = 12 \Longrightarrow a = 3$ и $b = -2$.
Подставив a и b в третье уравнение, получим $c = -20$ и значение $a - b + c = -15$.

Ответ. -15.

8.2 Исследование функции с помощью производной

8.2.1 Признаки возрастания и убывания функции

Как известно, функция $f(x)$ возрастает на множестве X, если для любых x_1 и x_2 из множества X, таких, что $x_2 > x_1$, выполнено неравенство $f(x_2) > f(x_1)$, и функция $f(x)$ убывает на множестве X, если для любых $x_2 > x_1$ из множества X выполнено неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

Для нахождения промежутков возрастания и убывания функции используют следующие утверждения.

Достаточный признак возрастания функции. Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала J, то функция $f(x)$ возрастает на этом интервале.

Достаточный признак убывания функции. Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала J, то функция $f(x)$ убывает на этом интервале.

Интервалы возрастания и убывания функции называются интервалами монотонности функции.

Пример 8.2.1. Найдите промежутки возрастания и убывания функции
$f(x) = 24x - 2x^3 + 9x^2 + 3$

Решение. Данная функция определена на множестве всех действительных чисел. Решая неравенство $f'(x) > 0$ или

$$24 - 6x^2 + 18x > 0 \Longleftrightarrow x^2 - 3x - 4 < 0 \Longleftrightarrow -1 < x < 4,$$

получим, что функция $f(x)$ возрастает на интервале $(-1; 4)$.

Аналогично, из решения неравенства $f'(x) < 0$ или

$$x^2 - 3x - 4 > 0 \Longleftrightarrow -\infty < x < -1 \text{ и } 4 < x < +\infty$$

следует, что функция $f(x)$ убывает на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(-4; +\infty)$.

Замечание. Если функция непрерывна в каком–либо из концов промежутков возрастания (убывания), то эту точку присоединяют к этому промежутку. В данном примере это точки -1 и 4.

Ответет. Функция возрастает на промежутке $[-1;4]$ и убывает при $x \in (-\infty;-1] \cup [4;+\infty)$.

Пример 8.2.2. Найдите все значения t такие, что функция $y = 2x^3 - 3x^2 + 7$ возрастает в интервале $(t-1;t+1)$

Решение. Из решения неравенства $y' = 6x^2 - 6x > 0$ следует, что функция y возрастает при $x \in (-\infty;0) \cup (1;+\infty)$.

Так как функция y непрерывна, то в промежутки возрастания включаются точки 0 и 1. Следовательно, функция возрастает при $-\infty < x \leqslant 0$ и $1 \leqslant x < +\infty$. Интервал $(t-1;t+1)$ должен целиком принадлежать либо области $(-\infty;0]$, либо области $[1;+\infty)$. Таким образом, значения t должны удовлетворять либо системе $\begin{cases} t-1 \leqslant 0 \\ t+1 \leqslant 0 \end{cases}$, либо системе $\begin{cases} t-1 \geqslant 1 \\ t+1 \geqslant 1 \end{cases}$. Из решений этих систем следует, что $t \leqslant 1$ и $t \geqslant 2$.

Ответ. $t \leqslant 1$ и $t \geqslant 2$

Пример 8.2.3. Найдите все такие значения b, при которых функция $y = (8-x^2)e^{x+1}$ убывает в интервале $(b;b+3)$

Решение. Из решения неравенства $y' = -2xe^{x+1} + (8-x^2)e^{x+1} < 0 \Longleftrightarrow x^2 + 2x - 8 > 0$ следует, что функция y убывает при $x < -4$ и при $x > 2$. В силу непрерывности функции y в промежутки убывания включаются точки $x = -4$ и $x = 2$. Значения b находим из условия, что интервал $(b;b+3)$ целиком принадлежит либо множеству $(-\infty;-4]$, либо множеству $[2;+\infty)$. Тогда значения b являются либо решением системы $\begin{cases} b \leqslant -4 \\ b+3 \leqslant -4 \end{cases} \Longleftrightarrow$ $b \leqslant -7$, либо решением системы $\begin{cases} b \geqslant 2 \\ b+3 \geqslant 2 \end{cases} \Longleftrightarrow b \geqslant 2$.

Ответ. $b \leqslant -7,\ b \geqslant 2$.

Пример 8.2.4. Найдите все значения a, при которых функция
$y = x^3 + 3(a-2)x^2 + 27x - 25$ возрастает на всей числовой прямой

1) $[-5;1]$ 2) $(-\infty;-1] \cup [5;+\infty)$ 3) $[-1;5]$ 4) $(-5;1)$

Решение. Функция y возрастает, если ее производная y' неотрицательна, т.е.

$$3x^2 + 6(a-2)x + 27 \geqslant 0 \Longleftrightarrow x^2 + 2(a-2)x + 9 \geqslant 0.$$

По свойству квадратного трехчлена он принимает неотрицательные значения на всей числовой оси, если его дискриминант $D \leqslant 0$. Составим дискриминант $D = 4(a-2)^2 - 36$ и найдем те значения a, при которых

$$D \leqslant 0 \Longrightarrow (a-2)^2 \leqslant 9 \Longleftrightarrow |a-2| < 3 \Longleftrightarrow -1 \leqslant a \leqslant 5.$$

Таким образом, $a \in [-1;5]$.

Ответ. 3.

8.2.2 Критические точки функции, максимумы и минимумы

Для исследования поведения функции вблизи некоторой точки вводится понятие окрестности. Окрестностью точки a называется любой интервал, содержащий эту точку. Используя понятие окрестности, дадим определения точек максимума и минимума функции.

Определение 1. Точка x_o называется точкой максимума функции $f(x)$, если для всех x из некоторой окрестности $x_o(x \neq x_o)$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_o)$.

Определение 2. Точка x_o называется точкой минимума функции $f(x)$, если для всех x из некоторой окрестности $x_o(x \neq x_o)$ выполняется неравенство $f(x) > f(x_o)$.

Точки максимума и минимума функции называются точками экстремума функции. Значения функции в этих точках называют соответственно максимумами и минимумами функции или экстремумами функции. Точки максимума обозначают x_{max}, а точки минимума x_{min}. Значения функции в этих точках обозначаются соответственно y_{max} и y_{min}.

Введем понятие критической точки функции. Внутренние точки области определения функции, в которых функция непрерывна, а ее производная равна нулю или не существует, называются критическими точками функции. Эти точки играют важную роль в исследовании функций, так как только они могут быть точками экстремума функции.

Сформулируем **необходимое условие экстремума функции.** Если точка x_o является точкой экстремума функции $f(x)$, и в этой точке существует производная f', то она равна нулю : $f'(x_o) = 0$.

При нахождении точек экстремума функции в первую очередь надо найти ее критические точки. Но вопрос о том, является ли критическая точка точкой экстремума, требует дополнительного исследования с помощью достаточных признаков экстремума.

Признак максимума функции. Если функция f непрерывна в точке x_o, а $f'(x) > 0$ на интервале $(a; x_o)$ и $f'(x) < 0$ на интервале $(x_o; b)$, то точка x_o является точкой максимума функции f.

Иначе говоря, если в точке x_o производная меняет знак с плюса на минус, то x_o есть точка максимума.

Признак минимума функции. Если функция f непрерывна в точке x_o, а $f'(x) < 0$ на интервале $(a; x_o)$ и $f'(x) > 0$ на интервале $(x_o; b)$, то точка x_o является точкой минимума функции f.

Иначе говоря, если в точке x_o производная меняет знак с минуса на плюс, то x_o есть точка минимума.

Пример 8.2.5. Сумма ординат точек экстремума функции $y = x^4 - 2x^2 - 8$ равна

1) -18 2) -26 3) 18 4) 22

Решение. 1. Находим производную функции $y' = 4x^3 - 4x$.
2. Приравняв производную к нулю, находим корни :

$$4x(x^2 - 1) = 0, \ x_1 = 0; \ x_{2,3} = \pm 1.$$

3. Полученные точки разбивают числовую ось на четыре промежутка, см. рисунок 8.2.1. Исследуем знак производной и поведение функции на каждом из промежутков.

Точки $x = \pm 1$ – точки минимума; $x = 0$ – точка максимума. Найдем значения функции в указанных точках : $y(-1) = -9$; $y(1) = -9$; $y(0) = -8$. Сумма полученных значений

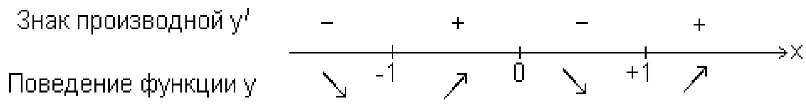

Рис. 8.2.1. Иллюстрация решения примера 8.2.5

равна –26.

Ответ. 2.

Пример 8.2.6. Пусть производная функции $f(x)$ имеет вид $f'(x) = (x-2)^2(x^2-2)(x^2-4)$. Найдите число точек экстремума функции

Решение. Перепишем производную функции в виде :

$$f'(x) = (x-2)^3(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x+2).$$

Число точек, в которых производная обращается в нуль, равно 4. Нетрудно убедиться, что, переходя через каждую из них слева направо, производная меняет свой знак, следовательно, каждая из них является точкой экстремума.

Ответ. 4.

Пример 8.2.7. Найдите точку максимума функции $y = -x^3 + 9x^2 - 24$

1) 0 2) 6 3) 3 4) 5

Решение. 1. Находим производную $y' = -3x^2 + 18x$.

2. Находим корни производной : $-3x^2 + 18x = 0 \Longrightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 6$.

3. Полученные точки разбивают числовую ось на три промежутка (рис. 8.2.2.)

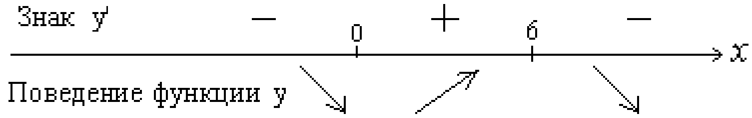

Рис. 8.2.2. Иллюстрация решения примера 8.2.7

Таким образом, $x = 6$ – точка максимума функции.

Ответ. 2.

Пример 8.2.8. Найдите все значения a, при которых функция $y = \dfrac{x^3}{3} + (a+5)\cdot\dfrac{x^2}{2} + 4x - 19$ имеет ровно две точки экстремума

1) $(-\infty;-9)\cup(-1;\infty)$ 2) $[1;9]$ 3) $(-\infty;-9]\cup[-1;\infty)$ 4) $[-9;-1]$

Решение. Если производная функции $y' = x^2 + (a+5)x + 4$ имеет два различных корня, то функция y имеет ровно две точки экстремума. Так как квадратное уравнение $x^2 + (a+5)x + 4 = 0$ имеет два различных корня при условии, что $D = (a+5)^2 - 16 > 0$, то искомые значения a являются решением неравенства $(a+5)^2 > 16 \Longleftrightarrow |a+5| > 4 \Longleftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} a > -1 \\ a < -9 \end{array}\right.$, т.е. $a \in (-\infty; -9) \cup (-1; \infty)$.

Ответ. 1.

Пример 8.2.9. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, если график ее производной $f'(x)$ на этом отрезке имеет вид (рис. 8.2.3.)

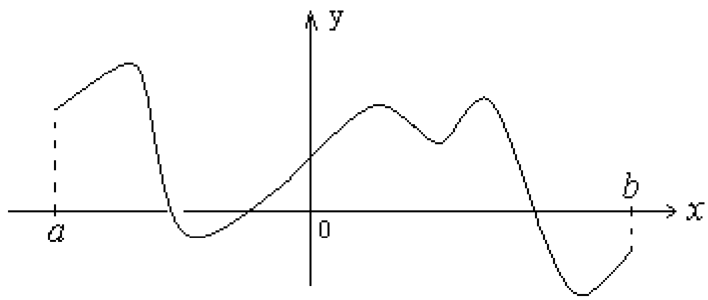

Рис. 8.2.3. График производной $f'(x)$

Решение. При прохождении через ось OX производная $f'(x)$ только один раз меняет знак с $-$ на $+$. Следовательно, на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ имеет одну точку минимума.

Ответ. 1.

8.2.3 Наибольшее и наименьшее значения функции

Задача об отыскании наибольшего и наименьшего значений функции основывается на теореме Вейерштрасса, утверждающей, что непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция f принимает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения.

Чтобы отыскать наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек, нужно вычислить значения функции во всех критических точках и на концах отрезка, а затем из полученных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример 8.2.10. Сумма наибольшего и наименьшего значений функции $y = \dfrac{4}{3}x^3 - 4x$ на отрезке $[0; 2]$ равна

1) $\dfrac{16}{3}$ 2) $-\dfrac{16}{3}$ 3) 0 4) $\dfrac{8}{3}$

Решение. Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке, нужно найти значения функции в точках промежутка, где $y' = 0$, на концах промежутка, и выбрать среди полученных значений наибольшее и наименьшее значения.

$$y' = 4x^2 - 4;\ 4x^2 - 4 = 0;\ x = \pm 1.$$

Заметим, что $x = -1$ не принадлежит указанному промежутку.

$$y(0) = 0;\ y(2) = \frac{32}{3} - 8 = \frac{8}{3};\ y(1) = \frac{4}{3} - 4 = -\frac{8}{3}.$$

Среди полученных значений функции наименьшее $y = -\dfrac{8}{3}$; наибольшее $y = \dfrac{8}{3}$. Их сумма равна 0.

Ответ. 3.

Пример 8.2.11. Найдите количество целых значений функции $y = \dfrac{9}{2}(x-1)\sqrt{x}$ в промежутке $[0;1]$

Решение. Найдем критические точки функции, принадлежащие интервалу $(0;1)$. С этой целью вычислим y' и решим уравнение $y' = 0$:

$$y' = \frac{9}{2}\left[\sqrt{x} + \frac{x-1}{2\sqrt{x}}\right] = \frac{9}{4\sqrt{x}}(3x-1) = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{3} \in (0;1).$$

Вычислим значения функции в точках $x = 0,\ x = \dfrac{1}{3},\ x = 1$:

$$f(0) = 0,\ f(\frac{1}{3}) = -\sqrt{3},\ f(1) = 0.$$

Следовательно, $f_{\text{наиб.}} = 0$, $f_{\text{наим.}} = -\sqrt{3}$, и все значения функции f для $x \in [0;1]$ принадлежат отрезку $[-\sqrt{3};0]$. Это множество содержит два целых значения : $-1;0$.

Ответ. 2.

Пример 8.2.12. Найдите положительное значение a, при котором наименьшее значение функции $y = x\sqrt{x+a}$ равно $-6\sqrt{3}$

Решение. Данную функцию рассматривают в области определения на множестве $[-a;+\infty)$. Определим критические точки функции :

$$y' = \sqrt{x+a} + \frac{x}{2\sqrt{x+a}} = \frac{3x+2a}{2\sqrt{x+a}} = 0 \Longrightarrow x = -\frac{2a}{3}.$$

Производная $y' < 0$ на интервале $(-a;-\dfrac{2a}{3})$ и $y' > 0$ на интервале $(-\dfrac{2a}{3};+\infty)$. При $x = -a$ $y = 0$, а при $x = -\dfrac{2a}{3}$ $y = -\dfrac{2a}{3}\sqrt{\dfrac{a}{3}}$, и это наименьшее значение функции на всем множестве $[-a;+\infty)$. Из условия $y_{\text{наим.}} = -6\sqrt{3}$ найдем a :

$$\frac{2}{3\sqrt{3}}a^{3/2} = 6\sqrt{3} \Longrightarrow \sqrt{a} = 3 \Longrightarrow a = 9.$$

Ответ. 9.

8.3 Первообразная и интеграл

8.3.1 Первообразная, ее свойства и правила нахождения

Определение первообразной. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка

$$F'(x) = f(x) \tag{8.3.1}$$

При этом предполагается, что $F(x)$ имеет производную в каждой точке x рассматриваемого промежутка.

Пример 8.3.1. Укажите все номера промежутков, для которых $F(x) = x^2 - \ln|x| + 1$ является первообразной для функции $f(x) = 2x - \dfrac{1}{x}$

1) R 2) $(0; +\infty)$ 3) $(-3; 3)$ 4) $(-3; 0)$

Решение. Областью определения функций $F(x)$ и $f(x)$ являются все значения $x \neq 0$. Кроме того, $F'(x) = 2x - \dfrac{1}{x} = f(x)$. Следовательно, промежутки под номерами 2 и 4 являются решением поставленной задачи.

Ответ. 2, 4.

Отыскание всех первообразных для заданной функции $f(x)$ называется интегрированием. Общий вид первообразных функции $f(x)$ можно записать как

$$F(x) + C \tag{8.3.2}$$

где $F(x)$ – одна из первообразных для функции $f(x)$, C – произвольная постоянная.

Имеют место следующие **свойства первообразной :**

1) какое бы число не поставить в выражение (8.3.2) вместо C, получим первообразную для $f(x)$;

2) для любых двух первообразных $\Phi(x)$ и $F(x)$ одной и той же функции $f(x)$ выполняется равенство

$$\Phi(x) - F(x) = C. \tag{8.3.3}$$

Множество всех первообразных функции $f(x)$ обозначают символом

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{8.3.4}$$

где $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, x – переменная интегрирования.

Символ $\int f(x)dx$ называют неопределенным интегралом.

Для нахождения первообразных используются **следующие правила :**

1) если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, а $G(x)$ – первообразная для $g(x)$, то $F(x)+G(x)$ – первообразная для $f(x) + g(x)$;

2) если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, а k – постоянная, то $kF(x)$ – первообразная для $kf(x)$;

3) если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, а $k \neq 0$ и b – постоянные, то $\dfrac{1}{k}F(kx + b)$ – первообразная для $f(kx + b)$.

Таблица 8.1. Таблица первообразных некоторых функций

Функция $f(x)$	Первообразные $F(x)+C$
$y=k$	$kx+C$
$y=x^{\alpha}$ $(\alpha\in R,\ \alpha\neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$
$y=\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+C$
$y=\sin x$	$-\cos x+C$
$y=\cos x$	$\sin x+C$
$y=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x+C$
$y=\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x+C$
$y=e^x$	e^x+C
$y=a^x$	$\dfrac{a^x}{\ln a}+C$

Пример 8.3.2. Пусть функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)=12\cos x$. Найдите $F\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$, если график функции $y=F(x)$ проходит через точку $M\left(\dfrac{\pi}{2};19\right)$

Решение. Общий вид первообразных данной функции $12\sin x+C$.

Из условия $F\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=19$ найдем значение $C: 12\sin\dfrac{\pi}{2}+C=19\Longrightarrow C=7$. Следовательно, первообразная имеет вид $F(x)=12\sin x+7$. Тогда $F\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=-12+7=-5$.

Ответ. -5.

Пример 8.3.3. Найдите для функции $f(x)=\sqrt{2x-1}$ такую первообразную $F(x)$, график которой проходит через точку $M(1;2)$, и укажите промежуток, на котором функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$

Решение. Так как для функции $\sqrt{x}$ первообразной является функция $\dfrac{2}{3}x^{3/2}+C$, то для функции $\sqrt{2x-1}$ первообразной является $\dfrac{1}{3}(2x-1)^{3/2}+C$.

Найдем C из условия, что график первообразной проходит через точку $(2;2)$, т.е. $\dfrac{1}{3}(2-1)^{3/2}+C=2\Longrightarrow C=\dfrac{5}{3}$ и $F(x)=\dfrac{(2x-1)^{3/2}+5}{3}$. Эта функция является первообразной в области определения $f(x)$, а именно на множестве $[\dfrac{1}{2};+\infty)$.

Ответ. $\dfrac{(2x-1)^{3/2}+5}{3}$.

Пример 8.3.4. Пусть F_1 и F_2 – две различные первообразные функции $f(x)$, причем $F_1(3)=5,\ F_2(5)=7,\ F_1(5)=5$. Найдите $F_2(3)$

Решение. Так как две различные первообразные отличаются на константу, то

$$F_2(x) - F_1(x) = C \Longrightarrow F_2(5) - F_1(5) = 7 - 5 = C \Longrightarrow C = 2.$$

Следовательно, $F_2(x) - F_1(x) = 2$. Подставим $x = 3:$ $F_2(3) - F_1(3) = 2$.

Отсюда $F_2(3) = F_1(3) + 2 = 5 + 2 = 7$.

Ответ. 7.

Пример 8.3.5. Найдите корни первообразной функции $f(x) = -8x + 3$, если один из них на 5 больше другого, и выпишите формулу для этой первообразной

Решение. Составим общий вид первообразных для данной функции

$$F(x) = -4x^2 + 3x + C,$$

и константу C найдем из условий задачи.

Рассмотрим уравнение $F(x) = 0 \Longrightarrow -4x^2 + 3x + C = 0$ и обозначим его корни x_1 и $x_2 = x_1 + 5$.

По теореме Виета $x_1 + x_2 = 2x_1 + 5 = \dfrac{3}{4} \Longrightarrow x_1 = -\dfrac{17}{8}$ и $x_2 = \dfrac{23}{8}$.

Тогда $x_1 \cdot x_2 = -\dfrac{17 \cdot 23}{64} = -\dfrac{C}{4}$ и $C = \dfrac{391}{16}$.

Следовательно, первообразная, удовлетворяющая условиям задачи, имеет вид

$$F(x) = -4x^2 + 3x + \frac{391}{16}.$$

Ответ. $-4x^2 + 3x + \dfrac{391}{16}$.

Если $f(x)$ – непрерывная функция на отрезке $[a; b]$, то вводится число $\int\limits_a^b f(x)dx$, которое называют по определению интегралом функции $f(x)$ от a до b. Если $F(x)$ – какая–либо первообразная для $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{8.3.5}$$

Формула (8.3.5) называется формулой Ньютона–Лейбница.

Для удобства записи разность $F(b) - F(a)$ принято сокращенно обозначать $F(x)\Big|_a^b$.

Пользуясь этим обозначением, формулу Ньютона–Лейбница обычно записывают в виде

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b \tag{8.3.6}$$

Пример 8.3.6. Вычислите интеграл $\int\limits_{1/3}^{3} (3x - 1)^2 dx$

Решение. Так как одной из первообразных функции x^2 является $\dfrac{x^3}{3}$, то для функции $(3x-1)^2$ первообразной является

$$F(x) = \frac{1}{3}\frac{(3x-1)^3}{3} = \frac{(3x-1)^2}{9}.$$

Тогда по формуле (8.3.6)

$$\int\limits_{1/3}^{3} (3x-1)^2 dx = \frac{(3x-1)^3}{9}\Bigg|_{1/3}^{3} = \frac{512}{9} = 56\frac{8}{9}.$$

Ответ. $56\dfrac{8}{9}$.

Пример 8.3.7. Вычислите интеграл $\int\limits_3^4 (|x| + |x-2|)dx$

Решение. На отрезке $[3;4]$ подынтегральная функция $f(x)$ имеет вид $f(x) = x + x - 2 = 2x - 2$, и одна из ее первообразных $F(x) = x^2 - 2x$. Тогда по формуле (8.3.6)

$$\int\limits_3^4 (|x| + |x-2|)dx = x^2 - 2x\Big|_3^4 = 16 - 8 - 9 + 6 = 5.$$

Ответ. 5.

Пример 8.3.8. Найдите значение a из интервала $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, при котором выполнено равенство $\int\limits_{\pi/4}^{a} \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \sqrt{3} - 1$

Решение. По формуле (8.3.6) вычислим

$$\int\limits_{\pi/4}^{a} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x\Big|_{\pi/4}^{a} = \operatorname{tg} a - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \operatorname{tg} a - 1.$$

Найдем a из решения уравнения

$$\operatorname{tg} a - 1 = \sqrt{3} - 1 \Longrightarrow \operatorname{tg} a = \sqrt{3} \;\text{ и }\; a = \frac{\pi}{3} + \pi k,\; k \in Z.$$

Тогда из условия $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ находим $a = \dfrac{\pi}{3}$.

Ответ. $\dfrac{\pi}{3}$.

8.4 Приложения интеграла

Если $f(x) \geqslant 0$ на отрезке $[a;b]$, то площадь S криволинейной трапеции (рис.8.4.1), ограниченной сверху функцией $f(x)$, снизу осью OX, слева прямой $x = a$, справа прямой

$x = b$, выражается формулой

$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad (8.4.1)$$

Используя формулу Ньютона–Лейбница, площадь $S = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$.

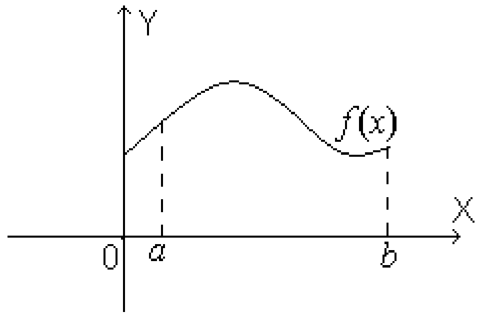

Рис. 8.4.1. Криволинейная трапеция

Если криволинейная трапеция ограничена сверху функцией $f(x)$, снизу функцией $g(x)$, справа $x = b$, слева $x = a$ (рис.8.4.2), то площадь этой трапеции S выражается формулой

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)dx. \qquad (8.4.2)$$

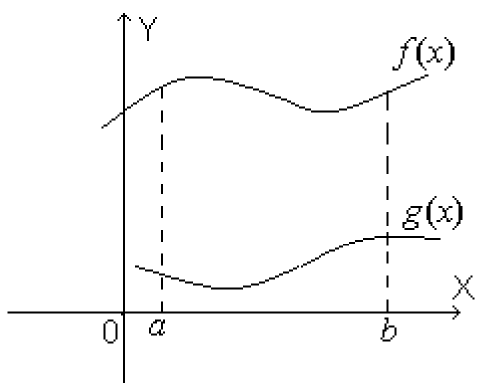

Рис. 8.4.2. Криволинейная трапеция

Если верхняя граница криволинейной трапеции задана следующим образом : $f(x)$ для $a \leqslant x \leqslant c$ и $g(x)$ для $c < x \leqslant b$ (рис.8.4.3), то площадь этой трапеции S выражается суммой двух интегралов

$$S = S_1 + S_2 = \int_a^b f(x)dx + \int_c^b g(x)dx. \qquad (8.4.3)$$

Аналогично определяется площадь криволинейной трапеции, если ее нижняя граница на отрезке $[a; b]$ меняет закон зависимости от x.

Пример 8.4.1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

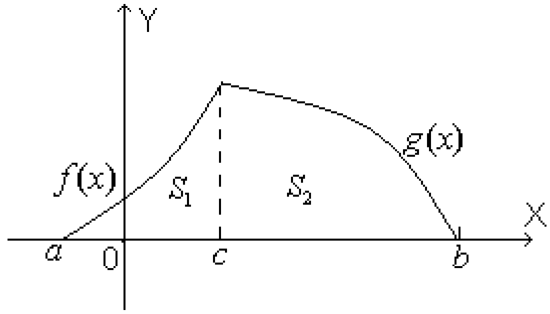

Рис. 8.4.3. Криволинейная трапеция

$y = 4x - x^2$, $y = 4 - x$

Решение. Изобразим эти линии (рис.8.4.4) и найдем абсциссы точек их пересечения из уравнения $4x - x^2 = 4 - x$. Решая это уравнение, находим $x = 1$ и $x = 4$. Очевидно, что криволинейная трапеция ограничена сверху функцией $4x - x^2$, а снизу функцией $4 - x$. Тогда по формуле (8.4.2) площадь находится как

$$S = \int_1^4 (4x - x^2 - (4 - x))dx = \int_1^4 (5x - x^2 - 4)dx = \left(\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 4x\right)\Bigg|_1^4 =$$

$$= 40 - \frac{64}{3} - 16 - \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{3} - 4\right) = 4,5.$$

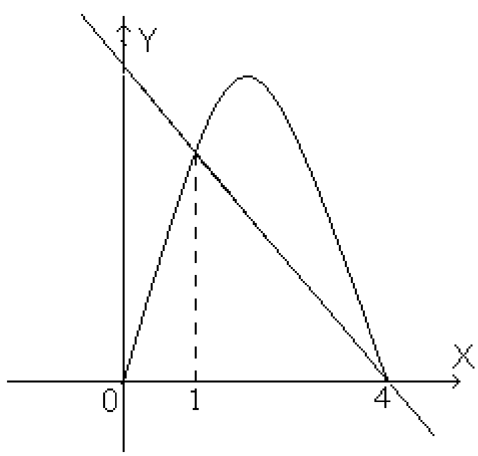

Рис. 8.4.4. Криволинейная трапеция

Ответ. 4,5.

Пример 8.4.2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = -0,5x + 5$,
$x = -1$, $x = 3$

Решение. Изобразим эти линии (рис. 8.4.5) и получим вид фигуры, ограниченной заданными прямыми.

Найдем абсциссу точки пересечения прямых $y = x$ и $y = -0,5x + 5$.

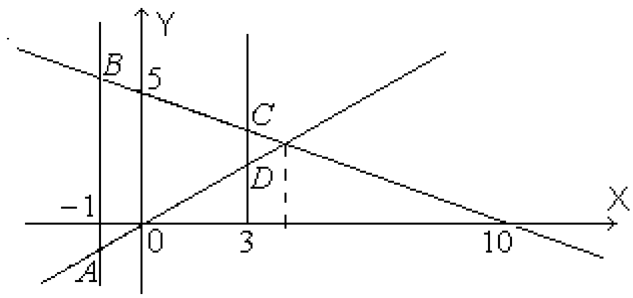

Рис. 8.4.5. Изображение фигуры $ABCD$

Тогда $x = -0,5x + 5 \Longrightarrow x = \dfrac{10}{3}$. Следовательно, прямая $x = 3$ проходит левее точки пересечения прямых $y = x$ и $y = -0,5x + 5$.

Таким образом, необходимо найти площадь трапеции $ABCD$, и это можно сделать, применив интеграл :

$$S = \int_{-1}^{3} (-0,5x + 5 - x)dx = 5x - \frac{3}{4}x^2 \Big|_{-1}^{3} = 14.$$

<u>Ответ.</u> 14.

Пример 8.4.3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x^2$, $y = 12x - 2x^2$, $y = 0$

<u>Решение.</u> Изобразим эти линии (рис.8.4.6) и найдем точки пересечения парабол $y = 2x^2$ и $y = 12x - 2x^2$:

$$12x - 2x^2 = 2x^2 \Longrightarrow x = 0 \ \text{ и } \ x = 3.$$

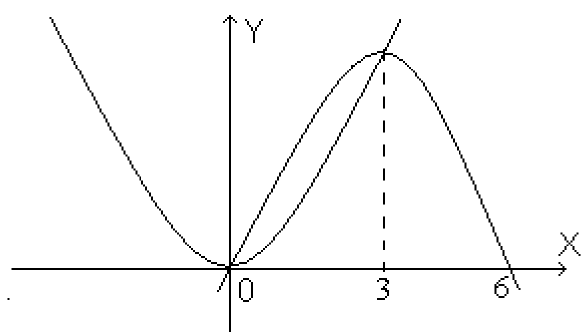

Рис. 8.4.6. Криволинейная трапеция

Данная фигура ограничена снизу осью OX, а сверху параболой $y = 2x^2$ для $x \in [0; 3]$ и параболой $y = 12x - 2x^2$ для $x \in [3; 6]$.

Следовательно, площадь фигуры равна сумме двух интегралов, а именно

$$S = \int_{0}^{3} 2x^2 dx + \int_{3}^{6} (12x - 2x^2)dx = \frac{2}{3}x^3 \Big|_{0}^{3} + (6x^2 - \frac{2}{3}x^3)\Big|_{3}^{6} = 54.$$

<u>Ответ.</u> 54.

Пример 8.4.4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = |x-2|+5$ и $y = x^2 - 4x + 3$

Решение. Построим графики заданных функций (рис.8.4.7) и найдем абсциссы их точек пересечения :

$$|x-2|+5 = x^2-4x+3 \Longrightarrow x = 5 \text{ и } x = -1.$$

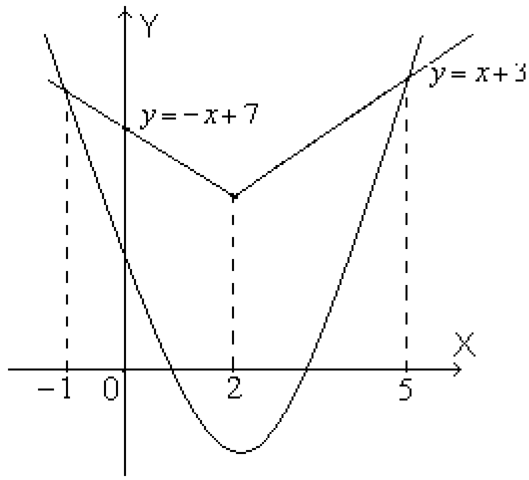

Рис. 8.4.7. Изображение заданной фигуры

Данная фигура симметрична относительно прямой $x = 2$, поэтому достаточно вычислить площадь ее левой половины, ограниченной сверху прямой $y = -x+7$, а снизу параболой $y = x^2-4x+3$ при изменении x от -1 до 2. Тогда площадь всей фигуры равна

$$S = 2\int_{-1}^{2}(7-x-(x^2-4x+3))dx = 2\left(4x+\frac{3}{2}x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = 27.$$

Ответ. 27.

Пример 8.4.5. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4-x^2$, $y = |x-3|+1$, $y = 0$

Решение. Построим графики функций и определим вид заданной области (рис.8.4.8).

Данная фигура ограничена снизу осью OX, а ее верхняя граница задана следующим образом :

$y = 4-x^2$ при $-2 \leqslant x \leqslant 0$, $y = 4-x$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $y = 4-x^2$ при $1 \leqslant x \leqslant 2$.

Площадь этой фигуры можно представить в виде разности площадей фигуры, ограниченной параболой и осью OX, и фигуры, ограниченной той же параболой и прямой $y = 4-x$.

Следовательно,

$$S = \int_{-2}^{2}(4-x^2)dx - \int_{0}^{1}(4-x^2-(4-x))dx = \left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2} - \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{1} = \frac{32}{3}-\frac{1}{6} = 10,5.$$

Ответ. 10,5.

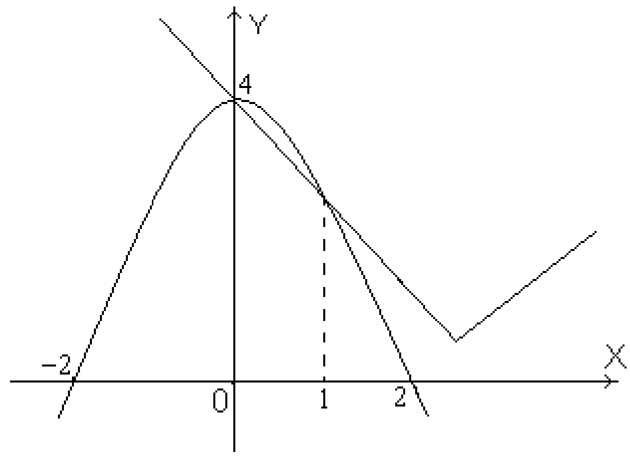

Рис. 8.4.8. Изображение заданной фигуры

8.5 Задачи для самостоятельного решения

№ 8.5.1. Вычислите производную функции $y = x\cos x$ в точке $x_o = \dfrac{\pi}{2}$

1) $\dfrac{\pi}{2}$ 2) $-\dfrac{\pi}{2}$ 3) 1 4) 0

№ 8.5.2. Вычислите производную функции $y = \dfrac{(3x-2)^2}{1+x}$ в точке $x_o = 1$

1) 2,75 2) 2,5 3) 2,25 4) 2

№ 8.5.3. Вычислите производную функции $y = 5^{2x} + x\sqrt{x}$ в точке $x_o = 0$

1) $3\ln 5$ 2) $2\ln 5$ 3) $ln5$ 4) 1

№ 8.5.4. Найдите значение производной функции $y = \sin(3x+2) + \cos(3\pi+2)$ в точке $x_o = 0$

1) 0 2) $\cos 2 - \sin 2$ 3) $3\cos 2 - 3\sin 2$ 4) $3\cos 2$

№ 8.5.5. Найдите значение производной функции $y = x\sin 4x$ в точке $x_o = \dfrac{\pi}{2}$

1) π 2) 2π 3) 2 4) 4

№ 8.5.6. Найдите значение производной функции $y = \mathrm{tg}(2x - \dfrac{\pi}{4})$ в точке $x_o = \dfrac{\pi}{4}$

1) 1 2) -3 3) 6 4) 4

№ 8.5.7. Найдите значение производной функции $y = e^{2x+x^2}$ в точке $x_o = -1$

1) 0 2) -2 3) e^{-1} 4) $-2e^{-1}$

№ 8.5.8. Найдите значение производной функции $y = x^6\ln(ex)$ в точке $x_o = e^2$

1) $18e^{10}$ 2) $19e^{10}$ 3) $20e^{10}$ 4) $21e^{10}$

№ 8.5.9. Найдите значение производной функции $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x^5}}$ в точке $x_o = e^2$

1) $-4e^{-7}$ 2) $\dfrac{2}{5}e^{-5}$ 3) $4e^{-7}$ 4) $6e^{-7}$

№ 8.5.10. Две точки движутся по оси OX по законам движения $x_1(t) = t^3 - 7t$ и $x_2(t) = \dfrac{2t^3}{3} + 1,5t^2 + 3t$ (x – координата, t – время). Определите промежуток времени, в течение которого скорость первой точки меньше скорости второй

1) $(0;6)$ 2) $(0;5)$ 3) $(0;\infty)$ 4) $(5;\infty)$

№ 8.5.11. Материальная точка движется по оси OX по закону $x(t) = \dfrac{t^3}{3} + t^2 - 8t$ (x – координата в метрах, t – время в секундах). Через сколько секунд после начала движения точка остановится ?

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

№ 8.5.12. Уравнение движения точки вдоль оси OX имеет вид : $x = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$. В момент времени $t = 4$ сек. абсцисса точки $x = 4$ см, а скорость точки равна 15 см/сек. При $t = 5$ сек. скорость точки равна 19 см/сек. Найдите значение $a + b - c$

№ 8.5.13. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = x^3 - 4x^2 + x - 7$ в точке с абсциссой $x_o = -2$

№ 8.5.14. Пусть касательная к графику функции $y = f(x)$, проведенная в точке $M(5;29)$, параллельна прямой $24x - 4y - 4 = 0$. Найдите значение производной $f'(5)$

1) 2 2) 3 3) 5 4) 6

№ 8.5.15. Укажите абсциссу точки, в которой угловой коэффициент касательной к графику функции $y = 3x^2 - 7x + 5$ равен 5

1) 1 2) 2 3) $\dfrac{1}{2}$ 4) 3

№ 8.5.16. Через точку графика функции $y = 3e^{2x+2} - 3x^3$ с абсциссой $x_o = -1$ проведена касательная. Найдите тангенс угла наклона этой касательной к оси абсцисс

№ 8.5.17. На рисунке 8.5.1 изображен график функции $y = ax^2 + bx + c$ и четыре прямые. Одна из этих прямых – график производной данной функции. Укажите номер этой прямой

№ 8.5.18. Функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a;b]$. На рисунке 8.5.2 изображен график ее производной $y = f'(x)$. Определите количество точек графика функции $y = f(x)$, в которых касательная к нему параллельна оси OX

№ 8.5.19. Прямая $y = -3 - 5x$ касается параболы $y = x^2 + bx + c$ в точке с абсциссой $x = -1$. Найдите сумму $b + c$

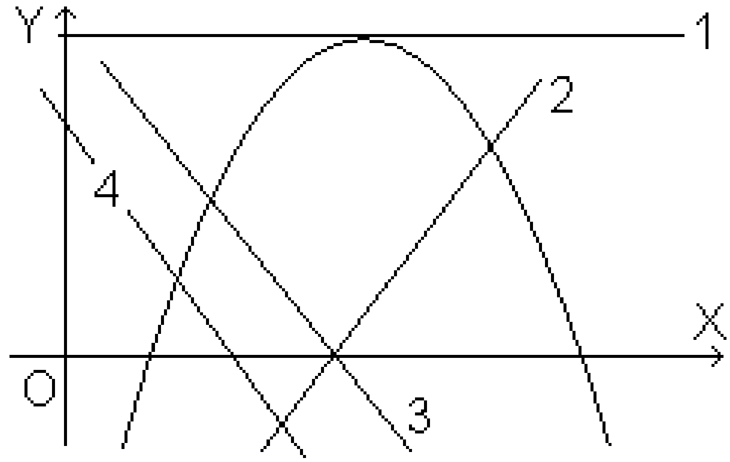

Рис. 8.5.1. См. задачу № 8.5.17

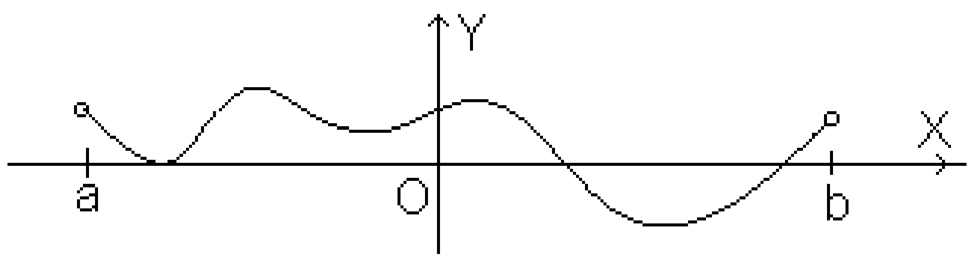

Рис. 8.5.2. См. задачу № 8.5.18

1) -1 2) -2 3) -3 4) -5

№ 8.5.20. Касательная к параболе $y = ax^2 + bx + 1$ в точке $M_0(-2; 2)$ имеет вид $y = -\dfrac{3}{2}x - 1$. Найдите $a + b$

1) 1 2) 2 3) 3 4) -2

№ 8.5.21. Уравнение касательной к графику функции $y = 2x - 4\sqrt{x-4}$, где она составляет угол в 45^o с осью ординат, имеет вид

1) $y = x$ 2) $y = x + 4$ 3) $y = x - 4$ 4) $y = x + 8$

№ 8.5.22. Угол между касательными, проведенными к графику функции $y = x^2 - 5x + 6$ в точках пересечения его с осью OX, равен

1) $\dfrac{\pi}{4}$ 2) $\dfrac{3\pi}{4}$ 3) $\dfrac{\pi}{6}$ 4) $\dfrac{\pi}{2}$

№ 8.5.23. Если две касательные, проведенные к графику функции $y = x^2 - 5x + 8$, и ось OX образуют правильный треугольник, то сумма абсцисс точек касания равна

1) 5 2) $\dfrac{5}{2}$ 3) -5 4) $-\dfrac{5}{2}$

№ 8.5.24. Если две касательные, проведенные к графику функции $y = \dfrac{2x+9}{2x-9}$, параллельны прямой $y = 4 - x$, то сумма абсцисс точек касания равна

1) -9 2) 9 3) 3 4) 0

№ 8.5.25. Касательная, проведенная к графику функции $y = 2x + \dfrac{a}{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$, параллельна прямой $y = -4x + 5$, если a равно

1) -4 2) -6 3) 1 4) 6

№ 8.5.26. Найдите сумму координат точки с положительной абсциссой, касательная в которой к графику функции $y = \dfrac{x+28}{x-4}$ параллельна прямой $y = -2x + 3$

1) 16 2) 17 3) 18 4) 19

№ 8.5.27. К графику функции $f(x) = -\dfrac{2}{x+5}$ проведены две параллельные касательные, одна из которых проходит через точку $(-4; -2)$. Найдите сумму координат точки касания второй касательной

№ 8.5.28. Найдите количество точек экстремума функции $y = 3x^5 + 5x^3 + 8$

№ 8.5.29. Найдите $2M - m$, где M и m – значения функции $y = -6 + x + \dfrac{4}{x-4}$ соответственно в точках максимума и минимума

№ 8.5.30. Пусть m и M – значения функции $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ в точках минимума и максимума соответственно. Тогда значение $2m - M$ равно

1) 0 2) 3 3) -3 4) 1

№ 8.5.31. Количество целых значений x на интервале убывания функции $f(x) = 16x^3 - 24x^2 + 9x - 1$ равно

1) 0 2) 1 3) 2 4) 3

№ 8.5.32. Если функция $y = \dfrac{a-3}{3}x^3 - ax^2 + (3a-6)x$ возрастает на всей числовой оси, то a принадлежит множеству, в котором наименьшее целое значение a равно

1) 3 2) 4 3) 6 4) 7

№ 8.5.33. Пусть производная функции $f(x)$ имеет вид $f'(x) = (x^2-1)(x^2-9)(x^2-16)$. Тогда суммарная длина промежутков убывания функции $f(x)$ равна

1) 1 2) 4 3) 3 4) 2

№ 8.5.34. Найдите длину промежутка возрастания функции $y = \dfrac{x}{x^2+1}$

№ 8.5.35. Пусть производная функции $f(x)$ имеет вид $f'(x) = x^2(x^2-1)(7-x^2)$. Тогда число промежутков возрастания функции равно

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

№ 8.5.36. Пусть производная функции $f(x)$ имеет вид $f'(x) = (x-3)^2(x^2-1)(x^2-9)$. Тогда сумма значений точек максимума функции равна

1) -2 2) 2 3) 0 4) -4

№ 8.5.37. Найдите все значения a, при которых функция $y = \dfrac{x^3}{3} + \left(\dfrac{a-3}{2}\right)x^2 + 9x - 12$ имеет две точки экстремума

1) $[-9;3]$ 2) $[-9;-3]$ 3) $(-\infty;-9) \cup (-3;\infty)$ 4) $(-\infty;-3) \cup (9;\infty)$

№ 8.5.38. Найдите все значения a, при которых функция $y = x^3 + 3(a-2)x^2 + 27x - 25$ возрастает на всей числовой прямой

1) $[-5;1]$ 2) $(-\infty;-1] \cup [5;\infty)$ 3) $[-1;5]$ 4) $(-\infty;-1) \cup (5;\infty)$

№ 8.5.39. Найдите все значения a, при которых функция $y = -\dfrac{x^3}{3} + (a+2)x^2 - 4x + 3$ имеет две точки экстремума

1) $(-\infty;0) \cup (4;\infty)$ 2) $(-\infty;-4) \cup (0;\infty)$ 3) $[-4;0]$ 4) $(-4;0)$

№ 8.5.40. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если график ее производной $f'(x)$ на этом отрезке имеет вид

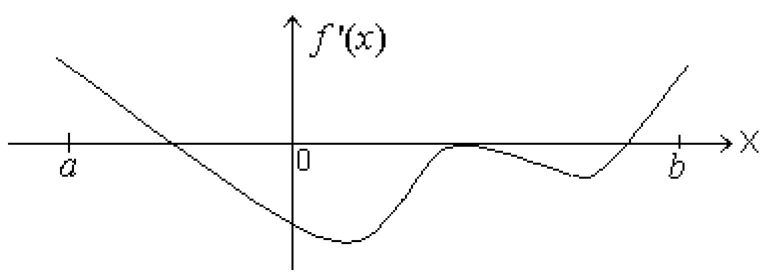

Рис. 8.5.3. Рисунок к примеру 8.5.40

№ 8.5.41. Найдите количество интервалов убывания функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если график ее производной $f‘(x)$ на этом отрезке имеет вид

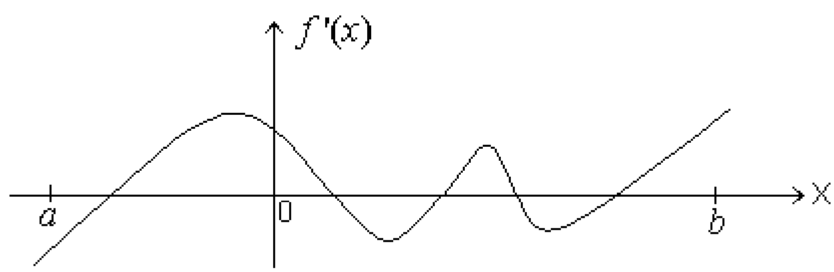

Рис. 8.5.4. Рисунок к примеру 8.5.41

№ 8.5.42. Найдите все значения a, при которых функция $y = x^3 + 3(a-2)x^2 + 75x - 10$

возрастает на всей числовой прямой

1) $(-3;7)$ 2) $(-3;\infty)$ 3) $[-3;7]$ 4) $(-\infty;7)$

№ 8.5.43. Найдите наименьшее значение функции $y = \dfrac{1}{-x^2+ax-5}$, если график этой функции проходит через точку $M\left(-2;-\dfrac{1}{16}\right)$

1) $-1\dfrac{2}{23}$ 2) $-\dfrac{4}{7}$ 3) $-\dfrac{9}{11}$ 4) $-\dfrac{16}{31}$

№ 8.5.44. Сумма наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)=-x^3+3x^2+5$ на отрезке $[1;3]$ равна

1) 9 2) 14 3) 5 4) 0

№ 8.5.45. Сумма наибольшего и наименьшего значений функции $f(x) = 2^{3x+1} - 9\cdot 2^{2x} + 12\cdot 2^x$ на отрезке $[1;2]$ равна

1) 41 2) 37 3) 32 4) 36

№ 8.5.46. Найдите сумму целых значений функции $y = 2^{2+2x-x^2}$

№ 8.5.47. Найдите наименьшее целое значение функции $y = \log_2(3x^2-6x+11)$

№ 8.5.48. Найдите наибольшее целое значение функции $y = \log_2(16x^2-x^3)+\log_2 x$

№ 8.5.49. Найдите наибольшее из возможных значений величины $\dfrac{xy}{2}$, если известно, что числа $x-2y$, $y+3x$ и 20 являются последовательными членами арифметической прогрессии

№ 8.5.50. Найдите наименьшее из возможных значений величины $\dfrac{xy}{2}$, если известно, что числа $x-3y$, $2y+1$ и 40 являются последовательными членами геометрической прогрессии

№ 8.5.51. Первообразная $F(x)$ функции $f(x) = (2+3x)^2$ проходит через точку $(-1;\dfrac{3}{4})$. Найдите ее значение при $x=-2$

№ 8.5.52. Найдите для функции $f(x) = \dfrac{1}{x^3} - 10x^4 + 3$ первообразную, график которой проходит через точку $M(1;5)$

1) $\dfrac{1}{2x^2}-2x^5+3x+3,5$ 2) $\dfrac{1}{x^2}-2x^5+3x+3$ 3) $-\dfrac{1}{2x^2}-2x^5+3x+4,5$ 4) $-\dfrac{1}{x^2}-2x^5+3x+5$

№ 8.5.53. Найдите для функции $f(x) = \sqrt{2x-1}$ первообразную, график которой проходит через точку $M(1;2)$

1) $(2x-1)^{3/2}+1$ 2) $\dfrac{(2x-1)^{3/2}}{2}+\dfrac{3}{2}$ 3) $\dfrac{(2x-1)^{3/2}}{3}+\dfrac{1}{3}$ 4) $\dfrac{(2x-1)^{3/2}}{3}+\dfrac{5}{3}$

№ 8.5.54. Первообразная функции $f(x) = 3x^2 + 2x$ при $x = 1$ принимает значение 81. Найдите ее значение при $x = -1$

№ 8.5.55. Пусть $\mathcal{F}_1(x)$ и $\mathcal{F}_2(x)$ – две различные первообразные функции $f(x)$, причем $\mathcal{F}_1(3) = 5$, $\mathcal{F}_2(5) = 7$, $\mathcal{F}_1(5) = 5$. Найдите $\mathcal{F}_2(3)$

№ 8.5.56. Пусть $\mathcal{F}_1(x)$ и $\mathcal{F}_2(x)$ – две различные первообразные функции $f(x)$, причем $\mathcal{F}_1(-1) = 5$, $\mathcal{F}_2(-1) = 9$, $\mathcal{F}_2(8) = 3$. Найдите $\mathcal{F}_1(8)$

№ 8.5.57. Найдите сумму абсцисс всех точек пересечения графиков функции $y = (x-1)(x+2)$ и ее первообразной, если одна из этих точек находится на оси ординат

№ 8.5.58. Вычислите интеграл $\int\limits_{-1}^{1}(x^4 + a^2x)dx$

№ 8.5.59. Вычислите интеграл $\int\limits_{1/2}^{1}(2x-1)^3dx$

№ 8.5.60. Вычислите интеграл $\int\limits_{1/3}^{3}\sqrt[3]{3x-1}\,dx$

№ 8.5.61. Найдите наибольшее целое значение a, для которого выполняется неравенство $\int\limits_{3}^{a}(x-5)dx < 6$

№ 8.5.62. Найдите значение a, для которого выполняется равенство $\int\limits_{a}^{a+3}\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$

№ 8.5.63. Вычислите площадь фигуры, расположенной в первой координатной четверти и ограниченной линиями $y = 4\sqrt[3]{x},\ y = x$

№ 8.5.64. Вычислите площадь фигуры, расположенной в первой координатной четверти и ограниченной линиями $y = 12 - 3x^2$, $y = 0$, $x = 0$

№ 8.5.65. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y = 68-x$, $x = 0$

№ 8.5.66. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $x+y = 10$, $x = 1$

№ 8.5.67. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = -e^2$, $x = -e$

№ 8.5.68. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - x$, $y = 5 + 2x - x^2$, $y = 0$

№ 8.5.69. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 25 - x^2$, $y = |3x-7| - 22$

№ 8.5.70. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 39 - 2x - x^2$, $y = |x+1| - 2$

8.6 Ответы к задачам для самостоятельного решения

8.5.1. 2; **8.5.2.** 1; **8.5.3.** 2; **8.5.4.** 4; **8.5.5.** 2; **8.5.6.** 4; **8.5.7.** 1; **8.5.8.** 2; **8.5.9.** 1; **8.5.10.** 2; **8.5.11.** 2; **8.5.12.** 6; **8.5.13.** 29; **8.5.14.** 4; **8.5.15.** 2; **8.5.16.** -3; **8.5.17.** 3; **8.5.18.** 3; **8.5.19.** 4; **8.5.20.** 1; **8.5.21.** 1; **8.5.22.** 4; **8.5.23.** 1; **8.5.24.** 2; **8.5.25.** 4; **8.5.26.** 2; **8.5.27.** -4; **8.5.28.** 0; **8.5.29.** -14; **8.5.30.** 3; **8.5.31.** 1; **8.5.32.** 3; **8.5.33.** 2; **8.5.34.** 2; **8.5.35.** 2; **8.5.36.** 1; **8.5.37.** 4; **8.5.38.** 3; **8.5.39.** 2; **8.5.40.** 2; **8.5.41.** 3; **8.5.42.** 2; **8.5.43.** 4; **8.5.44.** 1; **8.5.45.** 4; **8.5.46.** 36; **8.5.47.** 3; **8.5.48.** 12; **8.5.49.** 2,5; **8.5.50.** -21; **8.5.51.** 6 ; **8.5.52.** 3; **8.5.53.** 4; **8.5.54.** 79; **8.5.55.** 7; **8.5.56.** -1; **8.5.57.** 1,5; **8.5.58.** 0,4; **8.5.59.** 0,125; **8.5.60.** 4; **8.5.61.** 8; **8.5.62.** 1; **8.5.63.** 16; **8.5.64.** 32; **8.5.65.** 200; **8.5.66.** 4,75; **8.5.67.** 1; **8.5.68.** 21,875; **8.5.69.** 302,5; **8.5.70.** 364.

Глава 9

Геометрия

9.1 Векторы

Если в пространстве задана прямоугольная система координат $OXYZ$, то каждой точке пространства поставлена в соответствие тройка чисел $(x; y; z)$ – так называемых координат точки.

Рассмотрим две точки пространства : $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$.

Направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке A и концом в точке B называют вектором. Тот факт, что вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $(x; y; z)$, записывают так :

$$\overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы, направленные вдоль осей OX, OY и OZ соответственно.

Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ находят по формулам :

$$x = x_2 - x_1,\ y = y_2 - y_1,\ z = z_2 - z_1.$$

Модуль вектора $\overrightarrow{AB}$, или его длина, определяется по формуле :

$$\overrightarrow{|AB|} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Вектор, длина которого равна нулю, называется нуль–вектором и обозначается $\bar{0}$ (или просто 0).

Над векторами, заданными в координатной форме, можно проводить линейные операции по следующим правилам. Так, если

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k},$$
$$\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k},$$

то

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= \vec{d} = (a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j} + (a_3 + b_3)\vec{k}\ ; \\ \vec{a} - \vec{b} &= \vec{c} = (a_1 - b_1)\vec{i} + (a_2 - b_2)\vec{j} + (a_3 - b_3)\vec{k}\ ; \\ \lambda \cdot \vec{a} &= \lambda a_1\vec{i} + \lambda a_2\vec{j} + \lambda a_3\vec{k}. \end{aligned}$$

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, обозначаемое как $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $(\vec{a}, \vec{b})$ и равное

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Заметим, что угол φ между двумя векторами определяется как наименьший угол поворота от одного вектора до другого. Следовательно, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы координатами : $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$, то скалярное произведение выражается формулой :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Очевидно, что $\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\vec{a}|^2$ и $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.

Так как $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$, то косинус угла между векторами $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ находится по формуле :

$$\cos\varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – ненулевые векторы, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны. Следовательно, необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов имеет вид :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0.$$

Необходимое и достаточное условие коллинеарности (параллельности) векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеет вид :

$$\vec{a} = \lambda \vec{b} \quad (\vec{b} \neq 0).$$

Если $\vec{b} = 0$, то ему коллинеарен любой вектор.

В координатной форме условие коллинеарности записывается следующим образом :

$$\begin{aligned} a_1 &= \lambda b_1, \\ a_2 &= \lambda b_2, \\ a_3 &= \lambda b_3 \end{aligned} \qquad \text{или} \qquad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \lambda.$$

Аналогичным образом рассматриваются векторы на плоскости в декартовой системе координат OXY. Вектор на плоскости задается двумя координатами :

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j},$$

где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – единичные векторы, направленные вдоль осей OX и OY соответственно.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}(a_1; a_2)$ и $\vec{b}(b_1; b_2)$ выражается формулой :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2,$$

и угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ находится по формуле :

$$\cos\varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)}}$$

Пример 9.1.1. Длина вектора $\vec{a}(\sqrt{3}; m+1; m+2)$ не превышает 8 для всех значений m, принадлежащих множеству

1) $[-7; 4]$ 2) $[-8; 4]$ 3) $[-8; 3]$ 4) $[-6; 5]$

<u>Решение.</u> По условию задачи $|a| \leqslant 8$. Следовательно,

$$\sqrt{3+(m+1)^2+(m+2)^2} \leqslant 8 \Longrightarrow 2m^2+6m-56 \leqslant 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow m^2+3m-28 \leqslant 0 \Longrightarrow -7 \leqslant m \leqslant 4.$$

Выбираем ответ под номером 1.

Ответ. 1.

Пример 9.1.2. Даны векторы $\vec{a}(3;-2;1)$ и $\vec{b}(-2;4;-3)$. Тогда длина вектора $\vec{c} = 2\vec{a}+3\vec{b}$ равна

1) $\sqrt{110}$ 2) $\sqrt{113}$ 3) $\sqrt{115}$ 4) $\sqrt{116}$

Решение. Используя правила сложения и умножения на число для векторов, заданных в координатной форме, найдем координаты вектора

$$\vec{c}(c_1;c_2;c_3): \ c_1 = 2a_1+3b_1 = 0, \ c_2 = 2a_2+3b_2 = 8, \ c_3 = 2a_3+3b_3 = -7.$$

Тогда $|c| = \sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2} = \sqrt{64+49} = \sqrt{113}$.
Следовательно, выбираем ответ под номером 2.

Ответ. 2.

Пример 9.1.3. Даны точки $A(-1;2;-1), B(3;1;4), C(4;3;1)$. Найдите сумму координат точки $M(x,y,z)$, если $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{CA}$

1) 6 2) -12 3) -8 4) -9

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{CA}$:

$$\overrightarrow{AB}(3+1;1-2;4+1) \ \text{ или } \ \overrightarrow{AB}(4;-1;5);$$

$$\overrightarrow{BM}(x-3;y-1;z-4);$$

$$\overrightarrow{CA}(-1-4;2-3;-1-1) \ \text{ или } \ \overrightarrow{CA}(-5;-1;-2).$$

Из векторного равенства $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{CA}$ следует равенство соответствующих координат, а именно

$$\begin{aligned} &4+2(x-3) = 3(-5) \Longrightarrow x = -6,5 \\ &-1+2(y-1) = 3(-1) \Longrightarrow y = 0 \\ &5+2(z-4) = 3(-2) \Longrightarrow z = -1,5 \end{aligned}$$

и $x+y+z = -8$.

Ответ. 3.

Пример 9.1.4. Если векторы $\vec{a}(3;-2;\alpha)$ и $\vec{b}(\beta;4;2)$ коллинеарны, то произведение $\alpha\cdot\beta$ равно

1) -6 2) 4 3) 6 4) -8

Решение. Из условия коллинеарности векторов следует :

$\dfrac{3}{\beta} = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{\alpha}{2} \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = -\dfrac{1}{2}$ и $-2\beta = 12 \Longrightarrow \alpha = -1$ и $\beta = -6$.

Тогда произведение $\alpha \cdot \beta = 6$, и выбираем ответ под номером 3.

Ответ. 3.

Пример 9.1.5. Даны три вершины $A(3;-4;7)$, $B(-5;3;-2)$ и $C(1;2;-3)$ параллелограмма $ABCD$. Тогда сумма координат вершины D, противоположной B, равна

1) 10 2) 8 3) 6 4) 12

Решение. Обозначим через x, y и z координаты точки D. По условию задачи векторы $\overrightarrow{AB}(-8;7;-9)$ и $\overrightarrow{DC}(1-x;2-y;-3-z)$ равны. Тогда выполняется равенство соответствующих координат, а именно

$$1-x=-8,\ 2-y=7,\ -3-z=-9 \Longrightarrow x=9,\ y=-5,\ z=6$$

и $x+y+z=10$. Следовательно, выбираем ответ 1.

Ответ. 1.

Пример 9.1.6. Если вектор $\vec{p}$ направлен противоположно вектору $\vec{q}(-4;4;6)$ и $|\vec{p}| = \sqrt{17}$, то сумма координат вектора $\vec{p}$ равна

1) 7 2) -3 3) 3 4) -1

Решение. Обозначим координаты вектора $\vec{p}(x,y,z)$. Так как $\vec{p}||\vec{q}$, то $\vec{p} = \alpha\vec{q}$, где α – некоторое число. Так как $\vec{p}$ и $\vec{q}$ – противоположные векторы, то α – отрицательное число. Это число можно найти из условия $|\vec{p}| = |\alpha| \cdot |\vec{q}|$ или $\sqrt{17} = |\alpha|\sqrt{16+16+36}$ или

$$\sqrt{17} = |\alpha|\sqrt{68} \Longrightarrow |\alpha| = \frac{1}{2} \text{ и } \alpha = -\frac{1}{2}.$$

Тогда, из условия $\vec{p} = -\dfrac{1}{2}\vec{q}$ найдем координаты вектора $\vec{p}$, а именно

$x = -\dfrac{1}{2}(-4) = 2,\ y = -\dfrac{1}{2} \cdot 4 = -2,\ z = -\dfrac{1}{2} \cdot 6 = -3$ и $x+y+z=-3$.

Ответ. 2.

Пример 9.1.7. Точка $A(3;5;-7)$ принадлежит прямой, проходящей через точки $B(x;2;z)$ и $C(1;4;-6)$. Найдите произведение $x \cdot z$

Решение. Так как точки A, B, C принадлежат одной прямой, то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны. Следовательно, координаты этих векторов пропорциональны.

Если $\overrightarrow{AB}(x-3;-3;z+7)$, $\overrightarrow{AC}(-2;-1;1)$, то должны выполняться равенства

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{-3}{-1} = \frac{z+7}{1}.$$

Тогда, $x-3=-6$ и $x=-3$, $z+7=3$ и $z=-4$. Таким образом, $x \cdot z = 12$.

Ответ. 12.

Пример 9.1.8. Найдите значение α, при котором векторы $\vec{a}(\alpha-2; 5-2\alpha; 2\alpha-4)$ и $\vec{b}(2;4;2)$ перпендикулярны

Решение. Условием перпендикулярности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является выполнение равенства $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. Запишем это условие в координатной форме

$$2(\alpha-2)+4(5-2\alpha)+2(2\alpha-4)=0 \text{ или } 2\alpha=8 \text{ и } \alpha=4.$$

Ответ. 4.

Пример 9.1.9. Если вектор $\vec{a}(x;2;z)$ перпендикулярен вектору $\vec{b}(2;3;-2)$ и оси OX, то сумма координат $x+z$ равна

1) 2 2) 4 3) -3 4) 3

Решение. Из условия перпендикулярности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ следует, что

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Longrightarrow 2x+6-2z=0 \Longrightarrow x-z=-3$$

. Из условия перпендикулярности вектора $\vec{a}$ и оси OX следует $\vec{a}\cdot\vec{i}=0$, где $\vec{i}(1;0;0)$ – направляющий вектор оси OX. Тогда $x\cdot 1=0 \Longrightarrow x=0 \Longrightarrow z=3$.

Следовательно, $x+z=3$, и выбираем ответ под номером 4.

Ответ. 4.

Пример 9.1.10. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ составляют угол 30^o и скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}$, то площадь параллелограмма, построенного на этих векторах, равна

1) 2 2) $\sqrt{3}$ 3) $\dfrac{3}{2}$ 4) $\dfrac{1}{2}$

Решение. Как известно, площадь параллелограмма $S=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Следовательно, $S=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin 30^o=\dfrac{|a|\cdot|b|}{2}$. По условию задачи $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}$ или $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi=\sqrt{3} \Longrightarrow |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3} \Longrightarrow |a|\cdot|b|=2$. Тогда $S=\dfrac{2}{2}=1$, и выбираем ответ 1.

Ответ. 1.

Пример 9.1.11. В треугольнике с вершинами в точках $A(3;-2;1)$, $B(3;0;2)$ и $C(1;2;5)$ угол, образованный медианой BD и основанием AC, равен

1) $\dfrac{\pi}{6}$ 2) $\dfrac{\pi}{3}$ 3) $\dfrac{\pi}{2}$ 4) $\dfrac{\pi}{4}$

Решение. Находим координаты точки D как середины отрезка AC :

$$x_D=\frac{x_A+x_C}{2}=2;\ y_D=\frac{y_A+y_C}{2}=0;\ z_D=\frac{z_A+z_C}{2}=3.$$

После этого вычисляем координаты векторов $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{BD}(-1;0;1)$ и $\overrightarrow{AC}(-2;4;4)$. Далее находим косинус угла φ между векторами $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{BD}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{2+4}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{36}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, угол $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, и выбираем ответ под номером 4.

Ответ. 4.

Пример 9.1.12. Если вектор $\vec{a}(1; y; z)$ перпендикулярен векторам $\vec{b}(3; -3; 0)$ и $\vec{c}(2; 1; 1)$, то произведение координат $y \cdot z$ равно

1) -2 2) 2 3) -3 4) 3

Решение. Так как $\vec{a} \perp \vec{b}$ и $\vec{a} \perp \vec{c}$, то выполняются равенства $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ и $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$, которые в координатной форме имеют вид

$$3 - 3y = 0 \text{ и } 2 + y + z = 0.$$

Из этих уравнений следует, что $y = 1$ и $z = -3$. Тогда $y \cdot z = -3$.

Ответ. 3.

Пример 9.1.13. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол в 120^o и $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5$, то длина вектора $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ равна

1) $\sqrt{17}$ 2) $\sqrt{11}$ 3) $\sqrt{14}$ 4) $\sqrt{19}$

Решение. Выразим длину вектора $\vec{c}$ через скалярное произведение :

$$|\vec{c}|^2 = \vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2.$$

Вычислим скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \cos 120^o = 3 \cdot 5 \left(-\frac{1}{2}\right) = -7,5.$$

Тогда, $|\vec{c}|^2 = 9 - 15 + 25 = 19$ и $|\vec{c}| = \sqrt{19}$.

Ответ. 4.

Пример 9.1.14. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – единичные векторы, и $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}$, то скалярное произведение $(3\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$ равно

1) 2 2) 3 3) 4 4) 5

Решение. Так как $(3\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) = 3\vec{a} \cdot \vec{a} + 3\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b} = 3|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{b}|^2$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, то надо вычислить скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Из условия $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}$ следует, что

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 3 \text{ или } |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 3 \text{ и } \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}.$$

Тогда $(3\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) = 3 + 1 - 1 = 3$.

Ответ. 2.

9.2 Метод координат на плоскости и в пространстве

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат OXY, и каждой точке плоскости поставлена в соответствие пара чисел $(x; y)$ – так называемые координаты точки.

Расстояние между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ определяется по формуле

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

По этой же формуле находится длина отрезка AB.

Координаты $(x_o; y_o)$ середины отрезка AB определяются по формулам

$$x_o = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_o = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Аналогичные формулы имеют место в пространстве, если в нем задана прямоугольная система координат $OXYZ$. Тогда каждой точке пространства поставлена в соответствие тройка чисел $(x; y; z)$ – координаты точки.

Расстояние между точками $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ определяется по формуле

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Координаты $(x_o; y_o; z_o)$ середины отрезка AB определяются по формулам

$$x_o = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_o = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z_o = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Метод координат используют для описания так называемых геометрических мест точек.

Геометрическим местом точек называется фигура, состоящая из всех точек, обладающих определенным свойством.

Например, окружность можно определить как геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки – центра окружности.

Составим уравнение окружности в декартовой системе координат OXY с центром в точке $M_o(x_o, y_o)$ и радиусом R (рис.9.2.1).

Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ на окружности. Расстояние от нее до центра M_o равно R. Квадрат расстояния от точки M до точки M_o равен $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2$.

Таким образом, координаты x и y каждой точки M окружности удовлетворяют уравнению

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = R^2.$$

Пример 9.2.1. Если точка, равноудаленная от точек $A(-2; 2)$ и $B(-1; 3)$, находится на оси OX, то сумма ее координат равна

1) -2 2) 2 3) -1 4) 1

Решение. Пусть $(x; 0)$ – координаты искомой точки. Приравнивая расстояния от нее до данных точек, получим $(x+2)^2+4 = (x+1)^2+9 \Longrightarrow x = 1$, и сумма координат также 1.

Ответ. 4.

Пример 9.2.2. Если точки $A(2; 0)$ и $B(-2; 6)$ являются концами диаметра окружности, то ее уравнение имеет вид

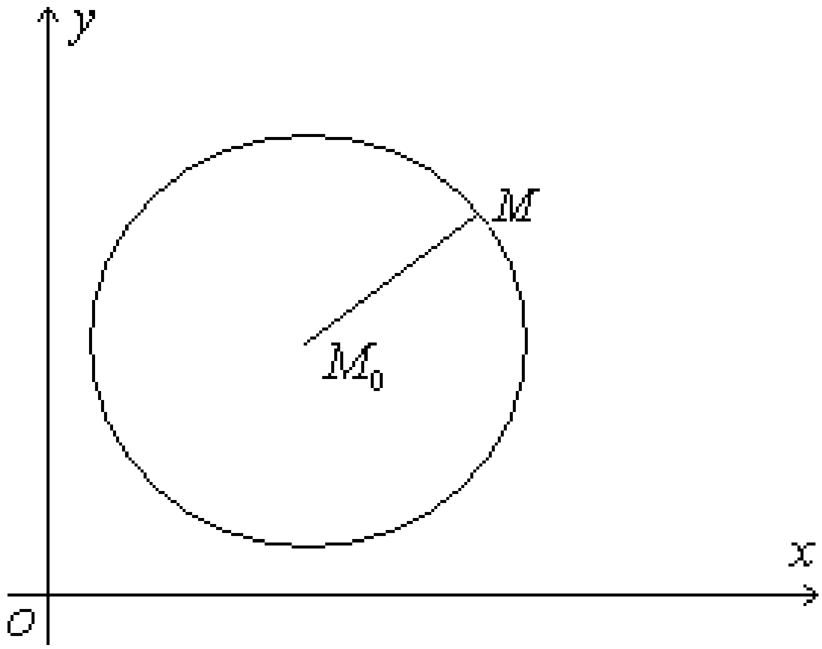

Рис. 9.2.1. Окружность с центром в точке M_o

1) $(x-3)^2+y^2=13$ 2) $x^2+(y+3)^2=13$ 3) $(x+3)^2+y^2=15$ 4) $x^2+(y-3)^2=13$

Решение. Найдем координаты $(x_o; y_o)$ центра окружности

$$x_o = \frac{2-2}{2} = 0; \quad y_o = \frac{0+6}{2} = 3.$$

Тогда радиус окружности R находится по формуле расстояния между двумя точками

$$R^2 = (2-0)^2 + (0-3)^2 = 13.$$

Используя уравнение окружности с центром в точке $(x_o; y_o)$ радиуса R $(x-x_o)^2+(y-y_o)^2 = R^2$, получим уравнение окружности

$$x^2 + (y-3)^2 = 13.$$

Ответ. 4.

Пример 9.2.3. В треугольнике ABC с вершинами $A(1;3)$, $B(5;-7)$ и $C(-1;9)$ уравнение прямой, содержащей медиану AM, имеет вид

1) $y=-2x+5$ 2) $y=2x-5$ 3) $y=-2x-5$ 4) $y=-2x-1$

Решение. Найдем координаты точки $M(x_M; y_M)$ – середины отрезка BC.

$$x_M = \frac{5-1}{2} = 2; \quad y_M = \frac{-7+9}{2} = 1.$$

Составим уравнение прямой, проходящей через точки $A(1;3)$ и $M(2;1)$. Возьмем уравнение искомой прямой в виде $y = kx + b$ и подставим в него координаты точек A и M : $\begin{cases} 3 = k+b, \\ 1 = 2k+b \end{cases}$. Решая эту систему относительно k и b, получим $k=-2$, $b=5$ и $y=-2x+5$.

Ответ. 1.

Пример 9.2.4. Если точки $A(6;7;8)$, $B(8;2;6)$, $C(4;3;2)$, $D(2;8;4)$ являются вершинами четырехугольника $ABCD$, то этот четырехугольник

1) трапеция 2) параллелограмм 3) прямоугольник 4) ромб

Решение. Эту задачу можно решать с применением векторов. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$:
$\overrightarrow{AB}(2;-5;-2)$; $\overrightarrow{BC}(-4;1;-4)$; $\overrightarrow{CD}(-2;5;2)$; $\overrightarrow{DA}(4;-1;4)$.
Очевидно, что векторы попарно параллельны : $\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{DA}$.
Кроме того, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+25+4} = \sqrt{33}$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{16+1+16} = \sqrt{33}$, $|\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{DA}| = \sqrt{33}$.
Все стороны 4–угольника равны по длине и попарно параллельны.
Вычислим $(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}) = -8-5+8 = -5 \neq 0$, следовательно, угол между этими векторами отличен от прямого. Таким образом, данный четырехугольник является ромбом.

Ответ. 4.

Пример 9.2.5. Если точка $M(3;4)$ лежит на окружности $x^2+y^2 = R^2$ и является вершиной вписанного в него квадрата, то сторона квадрата равна

1) 6 2) 8 3) $\sqrt{10}$ 4) $5\sqrt{2}$

Решение. Так как точка $M(3;4)$ лежит на окружности, то ее координаты удовлетворяют уравнению окружности, т.е. $9+16 = R^2$ и $R = 5$. Как известно, сторона квадрата a, вписанного в окружность, связана с радиусом соотношением $a = R\sqrt{2}$. Следовательно, $a = 5\sqrt{2}$.

Ответ. 4.

Пример 9.2.6. В треугольнике с вершинами в точках $A(3;4;-1)$, $B(2;3;-1)$, $C(2;4;0)$ сумма углов при основании AC равна

1) 90^o 2) 120^o 3) 150^o 4) 135^o

Решение. Используя заданные координаты вершин треугольника, вычислим длины его сторон :

$$AB = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2},$$
$$BC = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2},$$
$$AC = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}.$$

Следовательно, $\triangle ABC$ – равносторонний, и сумма углов при основании равна 120^o.

Ответ. 2.

Пример 9.2.7. Найдите площадь четырехугольника, ограниченного прямыми $\dfrac{x}{3} + 2y = -12$, $\dfrac{x}{3} + 2y = -6$ и осями координат

Решение. Построим четырехугольник $ABCD$, используя заданные границы (рис. 9.2.2).

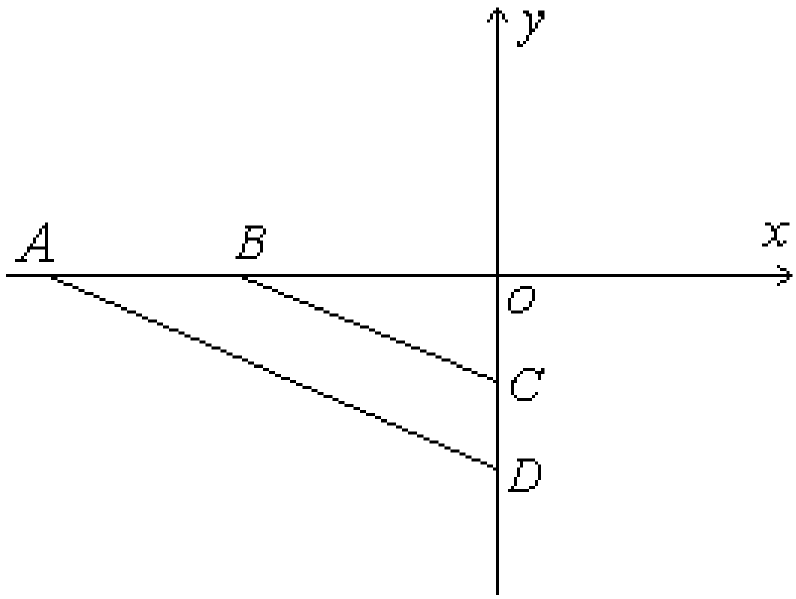

Рис. 9.2.2. Четырехугольник $ABCD$

Очевидно, что $ABCD$ – трапеция, так как стороны BC и AD параллельны (они лежат на параллельных прямых). Площадь этой трапеции можно представить как разность площадей двух прямоугольных треугольников : $\triangle AOD$ и $\triangle BOD$. Катеты OA, OB, OC и OD этих треугольников находим с помощью координат точек пересечения прямых $\frac{x}{3}+2y=-12$ и $\frac{x}{3}+2y=-6$. Полагая $y=0$, находим из первого уравнения $x_A=-36$ и из второго уравнения $x_B=-18$. Полагая $x=0$, находим $y_D=-6$ и $y_C=-3$. Таким образом,

$$S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2}AO\cdot OD=\frac{1}{2}\cdot 36\cdot 6=108$$
$$S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}OB\cdot OC=\frac{1}{2}\cdot 18\cdot 3=27$$

и площадь трапеции $ABCD$ равна 81.

Ответ. 81.

Пример 9.2.8. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$ с вершинами в точках $A(-3;3), B(2;-2), C(-4;-1), D(-6;-2)$

Решение. Построим четырехугольник $ABCD$ (рис.9.2.3).

Соединим пунктирной линией точки D и B. Тогда площадь четырехугольника $ABCD$ равна разности площадей $\triangle ABD$ и $\triangle DCB$. Очевидно, что отрезок DB параллелен оси OX и равен 8, а высоты h_1 и h_2 треугольников ABD и DCB, опущенные из вершин A и C на сторону DB, параллельны оси OY и равны соответственно 5 и 1.

Следовательно, $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}DB\cdot h_1=20,\ S_{\triangle DCB}=\frac{1}{2}DB\cdot h_2=4$ и площадь четырехугольника $ABCD$ равна 16.

Ответ. 16.

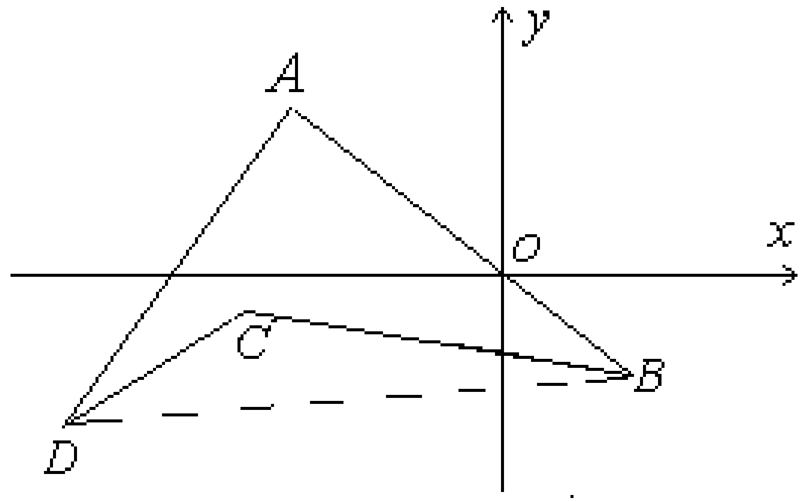

Рис. 9.2.3. Четырехугольник $ABCD$

Пример 9.2.9. Найдите площадь в кв.ед. земельного участка $ABCDEF$ с вершинами в точках $A(1;2), B(-2;7), C(9;6), D(11;1), E(9;-8), F(-2;-3)$

Решение. Построим шестиугольник по координатам его вершин (рис.9.2.4).

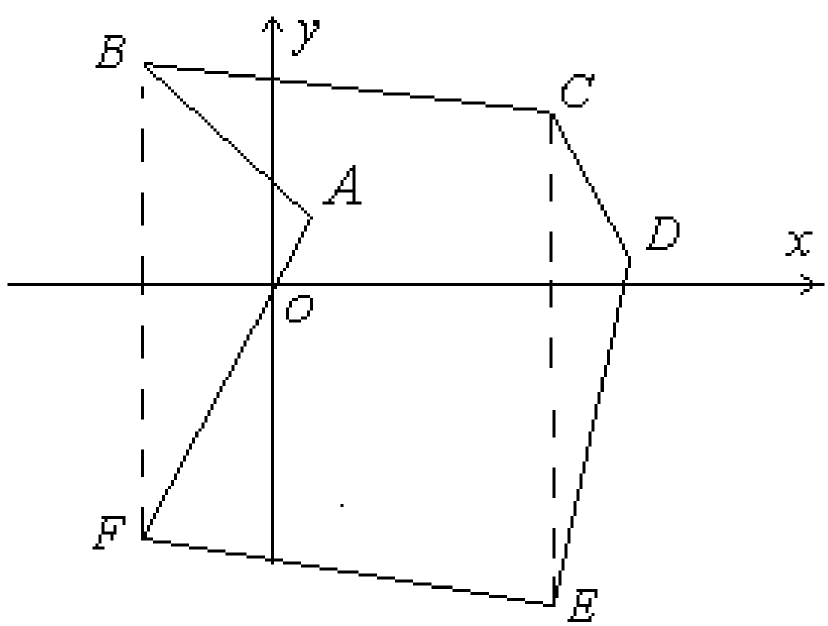

Рис. 9.2.4. Шестиугольник $ABCDEF$

Соединим пунктирными линиями точки B, F и C, E. Четырехугольник $BCEF$ – трапеция, так как стороны CE и BF параллельны. Заметим, что CE и BF параллельны оси OY. Площадь шестиугольника $ABCDEF$ можно вычислить так : к площади трапеции $BCEF$ прибавить площадь $\triangle CDE$ и вычесть площадь $\triangle BAF$.

Высота h_1 трапеции, опущенная из вершины F, равна 11, а основания $BF = 10$ и $CE = 14$. Тогда площадь трапеции

$$S_{BCEF} = \frac{1}{2}(CE + BF) \cdot h_1 = \frac{1}{2}(14 + 10) \cdot 11 = 132.$$

Высота h_2, опущенная из вершины D на сторону CE, равна 2. Тогда

$$S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2}CE \cdot h_2 = 14.$$

Высота h_3, опущенная из вершины A на сторону BF, равна 3. Тогда

$$S_{\triangle BAF} = \frac{1}{2}h_3 \cdot BF = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10 = 15$$

и площадь шестиугольника равна

$$S_{ABCDEF} = 132 + 14 - 15 = 131 \text{ кв.ед.}$$

Ответ. 131.

Пример 9.2.10. Даны точки $O(0;0)$, $A(2;4)$ и $B(7;4)$, $OABC$ – равнобедренная трапеция. Найдите наименьшее из возможных значений сумм координат точки C

Решение. Построим все возможные равнобедренные трапеции с фиксированными вершинами $O(0;0), A(2;4)$ и $B(7;4)$ (рис. 9.2.5).

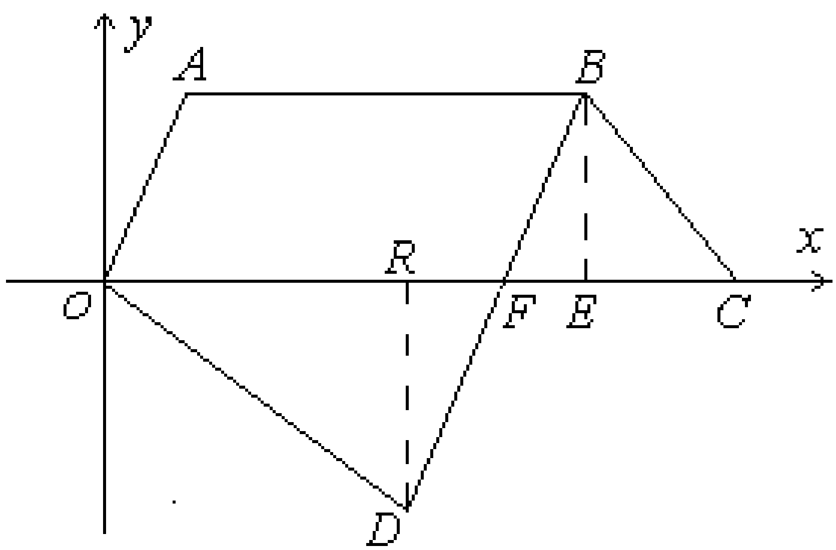

Рис. 9.2.5. Трапеции $ABCO$ и $OABD$

Четвертая вершина равнобедренной трапеции может быть в точке C или в точке D.

Координаты точки $C(9;0)$, и их сумма равна 9. Координаты точки $D(x;y)$, и их надо найти, используя тот факт, что трапеция $OABD$ – равнобедренная с основаниями OA и DB.

Так как $AB = OF = OD = 5$, то $x^2 + y^2 = 25$. Опустим из точек B и D перпендикуляры на ось OX и рассмотрим треугольники KFD и FBE (рис.9.2.5).

Из подобия этих треугольников следует :

$$KD : BE = KF : FE, \text{ где } KD = |y|,\ BE = 4,\ KF = 5 - x,\ FE = 2.$$

Тогда, $\dfrac{5-x}{|y|} = \dfrac{2}{4}$ и $|y| = 10 - 2x$.

Подставив y в уравнение $x^2 + y^2 = 25$, получим уравнение для x

$$x^2 - 8x + 15 = 0 \Longrightarrow x = 3 \text{ и } x = 5.$$

Если $x = 5$, то $y = 0$, и получаем координаты точки F. Абсцисса точки D – это $x = 3$. Так как ордината точки D отрицательная, и $|y| = 10 - 2x = 10 - 6 = 4$, то $y = -4$.

Таким образом, $D(3; -4)$, и сумма координат этой точки, равная -1, будет наименьшей.

Ответ. -1.

Пример 9.2.11. Найдите площадь фигуры, координаты всех точек которой удовлетворяют условию $|x + 5| + |y - 4| \leqslant 9$

Решение. Построим фигуру, ограниченную линией
$|x + 5| + |y - 4| = 9 \Longrightarrow |y - 4| = 9 - |x + 5| \geqslant 0 \Longrightarrow |x + 5| \leqslant 9$ и $-14 \leqslant x \leqslant 4$.

Тогда $y = 13 - |x + 5|$ и $y = -5 + |x + 5|$ – верхняя и нижняя границы фигуры $ABCD$, и $x \in [-14; 4]$ (рис.9.2.6).

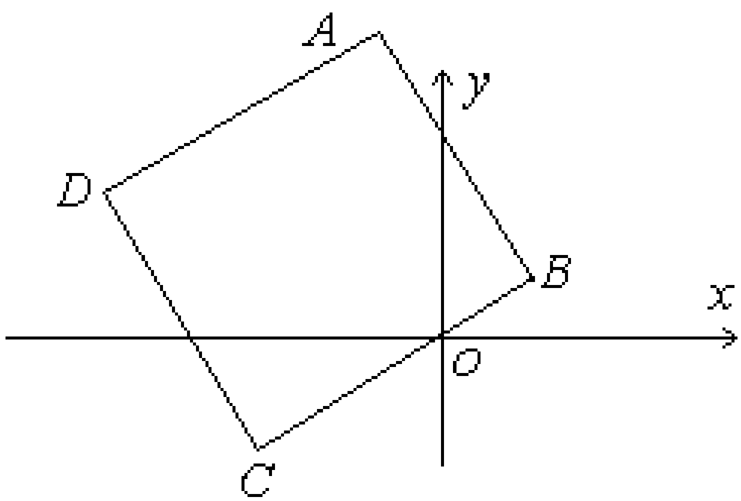

Рис. 9.2.6. Фигура $ABCD$

Координаты точки A: $x = -5$, $y = 13$.
Координаты точки C: $x = -5$, $y = -5$.
Координаты точек D и B найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} y = 13 - |x + 5| \\ y = -5 + |x + 5| \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} |x + 5| = 9 \\ y = 4 \end{cases}$$

Тогда, координаты точки D: $x = -14$, $y = 4$, координаты точки B: $x = 4, y = 4$. Фигура $ABCD$ – квадрат с диагональю, равной 18. Следовательно, площадь квадрата равна 162.

Ответ. 162.

Пример 9.2.12. Уравнение геометрического места точек плоскости, равноудаленн:н от двух прямых $y = -7x + 7$ и $y = -7x - 21$, имеет вид

1) $y + 7x + 7 = 0$ 2) $y - 7x + 7 = 0$ 3) $y + 7x + 14 = 0$ 4) $y - 7x + 14 = 0$

Решение. Прямые $y = -7x + 7$ и $y = -7x - 21$ параллельны. Следовательно, все точки, равноудаленные от этих прямых, лежат на прямой, параллельной им и заданной уравнением $y = -7x + b$. Чтобы найти b, достаточно указать одну точку, равноудаленную от прямых $y = -7x + 7$ и $y = -7x - 21$. Эти прямые пересекают ось OX соответственно в точках $(1; 0)$ и $(-3; 0)$. Следовательно, точка $(-1; 0)$ равноудалена от заданных прямых и должна принадлежать прямой $y = -7x + b$. Подставив $y = 0,\ x = -1$, получим $b = -7$, и уравнение геометрического места точек имеет вид $y + 7x + 7 = 0$.

Ответ. 1.

Пример 9.2.13. Составьте уравнение геометрического места точек, равноудаленных от концов отрезка AB, если $A(3; 4)$ и $B(-1; 2)$

1) $2x - y - 5 = 0$ 2) $2x + y - 5 = 0$ 3) $x - 2y - 5 = 0$ 4) $x + 2y - 5 = 0$

Решение. Пусть точка $M(x; y)$ равноудалена от $A(3; 4)$ и от $B(-1; 2)$, т.е. $AM = MB$. Вычислим длины отрезков AM и MB.

$$AM = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}, \quad MB = \sqrt{(-1-x)^2 + (2-y)^2}.$$

Составим равенство $(x-3)^2 + (y-4)^2 = (x+1)^2 + (y-2)^2$. Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые. В результате получим :

$$8x + 4y - 20 = 0 \Longrightarrow 2x + y - 5 = 0.$$

Ответ. 2.

Пример 9.2.14. Если точка $M(x_o; y_o)$ – центр окружности, описанной около треугольника с вершинами в точках $A(-3; -5), B(-1; 1), C(3; -3)$, то сумма $x_o + y_o$ равна

1) $-2,5$ 2) $-3,0$ 3) $-3,5$ 4) $-4,0$

Решение. Построим этот треугольник (рис. 9.2.7).

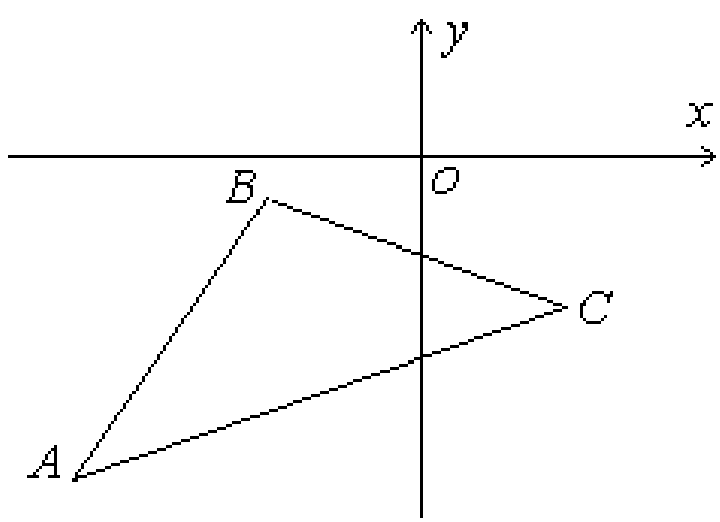

Рис. 9.2.7. Треугольник ABC

Убедимся в том, что это треугольник – прямоугольный, и $\angle B = 90^o$.

С этой целью вычислим скалярное произведение $\overrightarrow{BA}(2;4)$ на $\overrightarrow{BC}(4;-2)$.

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 2 \cdot 4 + 4(-2) = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC} \text{ и } \angle B = 90^o.$$

Как известно, центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, находится на середине гипотенузы. В данном случае это середина отрезка AC. Тогда

$$x_o = \frac{3 + (-3)}{2} = 0, \; y_o = \frac{-5 - 3}{2} = -4 \text{ и } x_o + y_o = -4.$$

Ответ. 4.

9.3 Планиметрия

1. Треугольники.

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины треугольника.

Медиана делит треугольник на два равновеликих (имеющих одинаковые площади) треугольника.

Биссектрисой треугольника, проведенной из данной вершины, называется отрезок прямой, делящий угол пополам и соединяющий эту вершину с точкой на противоположной стороне.

Биссектриса треугольника делит его сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам : $BK : KC = AB : AC$.

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, лежащей внутри треугольника и являющейся центром окружности, вписанной в треугольник.

Высотой треугольника называется перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на противоположную сторону или на ее продолжение.

Высота, проведенная из вершины равнобедренного треугольника, является также биссектрисой и медианой.

Три серединных перпендикуляра пересекаются в точке, равноудаленной от вершин треугольника (центр описанной окружности).

В прямоугольном треугольнике катеты a, b и гипотенуза c связаны равенством :

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{(теорема Пифагора)}.$$

Если a, b, c – стороны произвольного треугольника, и A, B, C – углы, лежащие против этих сторон, то :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad \text{(теорема синусов)}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \quad \text{(теорема косинусов)}$$

Формулы для вычисления площади треугольника :

$$S = \frac{1}{2} a h_a; \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{– формула Герона}$$

$$S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C; \quad S = \frac{abc}{4R}; \quad S = pr$$

Здесь h_a – высота, опущенная на сторону a ; R – радиус описанной окружности; r – радиус вписанной окружности ; $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

2. Четырехугольники.

Четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны, называется параллелограммом.

Свойства параллелограмма :

1) противоположные стороны параллелограмма равны ;

2) противоположные углы параллелограмма равны ;

3) диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам ;

4) сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон.

Параллелограмм, у которого все стороны равны, называется ромбом. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его внутренних углов.

Параллелограмм, у которого все углы прямые, называется прямоугольником.

Площадь параллелограмма :

$$S = ah_a; \quad S = ab \cdot \sin\alpha,$$

где a, b – стороны параллелограмма; h_a – высота параллелограмма, опущенная на сторону a; α – угол между смежными сторонами a и b.

В параллелограмм можно вписать окружность тогда и только тогда, когда он является ромбом.

Параллелограмм можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда он является прямоугольником.

Трапеция. Четырехугольник, две стороны которого параллельны, а две – нет, называется трапецией.

$S = \frac{1}{2}(a + b)h$, где S – площадь, a и b – основания трапеции, h – высота.

В трапецию можно вписать окружность тогда и только тогда, когда сумма боковых сторон равна сумме оснований.

Трапецию можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда она равнобочная.

3. Окружность и круг.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется хордой.

Диаметр, делящий хорду пополам, перпендикулярен к ней.

Равные хорды окружности равноудалены от ее центра; равноудаленные от центра окружности хорды равны.

Если через точку А, лежащую внутри окружности, проведены две хорды MN и KL, то $MA \cdot AN = KA \cdot AL = R^2 - AO^2$, см. левую часть рисунка 9.3.1.

Если из точки А, лежащей вне окружности, проведены касательная AB и секущая AD, то $AB^2 = AD \cdot AC = AO^2 - R^2$, см. правую часть рисунка 9.3.1.

Длины касательных, проведенных из одной точки к заданной окружности, равны между собой.

Угол, образованный двумя хордами, исходящими из одной точки окружности, называется вписанным. Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

Длина окружности $L = 2\pi R$,

площадь круга $S = \pi R^2$,

длина дуги окружности $l = R\alpha$,

площадь сектора круга $S_{sector} = \frac{1}{2}R^2\alpha$.

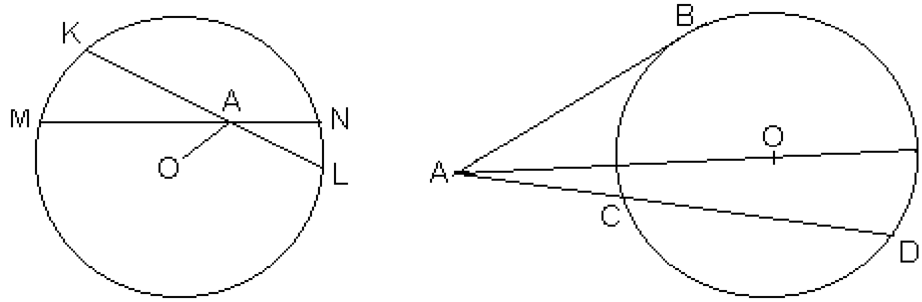

Рис. 9.3.1.

Здесь R – радиус окружности, α – центральный угол, выраженный в радианах.

Пример 9.3.1. Две хорды окружности AB и CD (рис.9.3.2) пересекаются в точке M; длина отрезка AM равна длине отрезка MB, длина отрезка CM равна 16 см. Найдите длину отрезка AB, если $\dfrac{DM}{MC} = \dfrac{1}{4}$.

Решение.

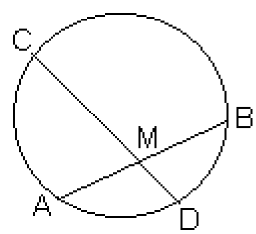

Рис. 9.3.2. Рисунок к примеру 9.3.1

Из соотношения $\dfrac{DM}{MC} = \dfrac{1}{4}$следует, что $MC = 4DM$. Подставляя в это равенство значение $MC = 16$ см, получаем, что $DM = 4$ см. Так как $CM \cdot MD = AM \cdot MB$ (свойство пересекающихся в окружности хорд), то, подставляя в это равенство CM и MD и учитывая, что $AM = MB$, получим 64 см$^2 = AM^2$; AM=8 см. Тогда AB=16 см.

Ответ. 16 см.

Пример 9.3.2. Из точки, лежащей вне окружности, проведены секущая AD и касательная AB. Найдите длину касательной, если $AC = 18$ см, $CD = 50$ см.

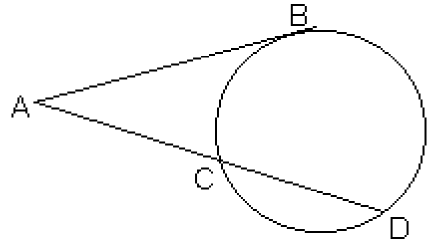

Рис. 9.3.3. Рисунок к примеру 9.3.2

Решение. По свойству секущей и касательной, проведенных из одной точки к окружности (рис.9.3.3)

$AB^2 = AC \cdot AD$; $AD = AC + CD = 18$ см $+ 50$ см $= 68$ см ;

$AB = \sqrt{68 \cdot 18}$ см $= 6\sqrt{34}$ см .

Ответ. $6\sqrt{34}$ см.

Пример 9.3.3. Найдите площадь правильного многоугольника, если его внешний угол равен 30^o, а диаметр описанной около него окружности равен 0,8

Решение. Так как внешний угол многоугольника равен 30^o, то внутренний угол ABC, как смежный, равен 150^o (см. рис. 9.3.4.).

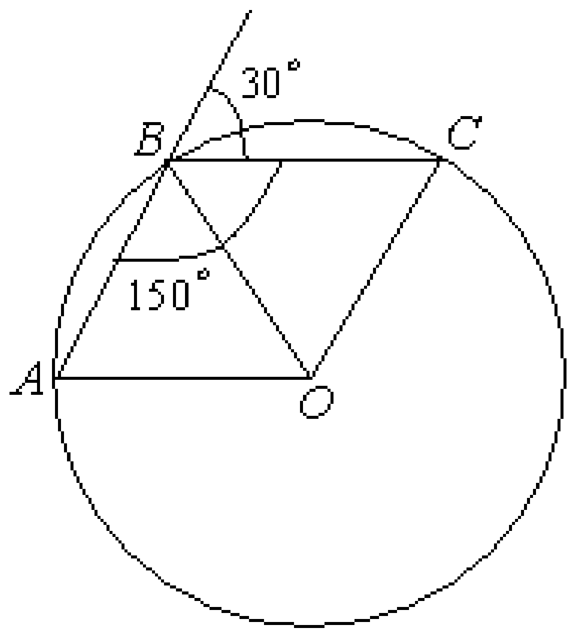

Рис. 9.3.4. Рисунок к примеру 9.3.3

Тогда сумма всех внутренних углов рассматриваемого n–угольника равна $150^o \cdot n$. С другой стороны, по известной формуле эта сумма должна быть равной $180^o \cdot n - 360^o$. Из равенства $180^o \cdot n - 360^o = 150^o \cdot n$ находим $n = 12$.

Очевидно, что угол BOC, опирающийся на сторону вписанного 12–угольника, равен 30^o, а площадь $\triangle BOC$ находим по формуле

$$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} r^2 \sin 30^o = \frac{1}{4} \cdot 0,4^2.$$

Искомая площадь 12–угольника равна $12 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0,4^2 = 0,48$.

Ответ. 0,48.

Пример 9.3.4. Дан ромб $ABCD$ с острым углом C. Его сторона равна $6\sqrt{11}$, а косинус угла C равен $\frac{5}{6}$. Высота BT пересекает диагональ AC в точке K. Найдите длину отрезка KT

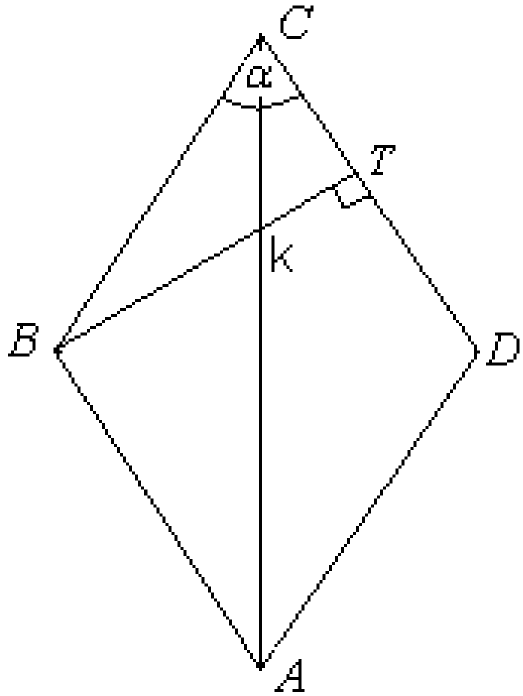

Рис. 9.3.5. Рисунок к примеру 9.3.4

Решение. Из прямоугольного треугольника BCT (рис. 9.3.5) находим CT :

$$CT = BC \cdot \cos\alpha = \frac{6\sqrt{11}\cdot 5}{6} = 5\sqrt{11}.$$

Так как диагонали ромба делят углы пополам, то угол KCT равен $\dfrac{\alpha}{2}$. Из треугольника KCT можем найти KT :

$$KT = CT \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = CT \cdot \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = 5\sqrt{11}\cdot\sqrt{\frac{1-5/6}{1+5/6}} = 5\sqrt{11}\cdot\sqrt{\frac{1}{11}} = 5.$$

Ответ. $CT = 5$.

Пример 9.3.5. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла D пересекает сторону AB в точке K, и прямую BC в точке M. Найдите периметр треугольника MBK ($P_{\triangle MBK}$), если $DM = 25;\ AD = 8;\ CD = 20$

Решение. На рис. 9.3.6 отмечены равные углы : $\angle\, 1 = \angle\, 2$ (по условию); $\angle\, 1 = \angle\, 3$ (внутренние накрест лежащие при параллельных и секущей).

Из указанных равенств вытекает равенство углов $\angle\, 2 = \angle\, 3$, и потому $\triangle DMC$ – равнобедренный, т.е. $MC = CD = 20$. Так как $BC = AD = 8$ (равенство противоположных сторон параллелограмма), то $MB = 12$. Далее, $\triangle MCD \sim \triangle MBK$, а отношение периметров подобных треугольников равно отношению сходственных сторон :

$$\frac{P_{\triangle MCD}}{P_{\triangle MBK}} = \frac{CD}{BK} \Longrightarrow P_{\triangle MBK} = \frac{P_{\triangle MCD}}{CD}BK = \frac{20+20+25}{20}\cdot 12 = 39.$$

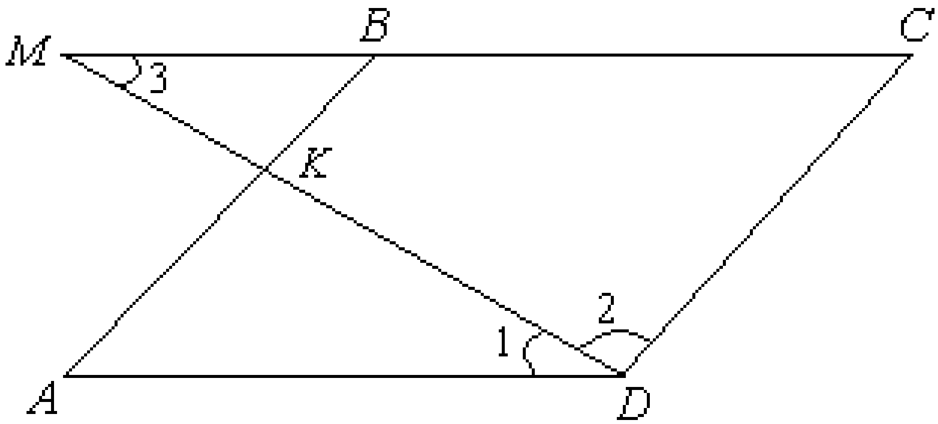

Рис. 9.3.6. Рисунок к примеру 9.3.5

Ответ. 39.

Пример 9.3.6. Радиусы вписанной и описанной около прямоугольного треугольника окружностей равны соответственно 3 и 11. Найдите площадь треугольника

Решение. На рис. 9.3.7 изображен прямоугольный треугольник ABC с вписанной в него окружностью, центром которой является точка O.

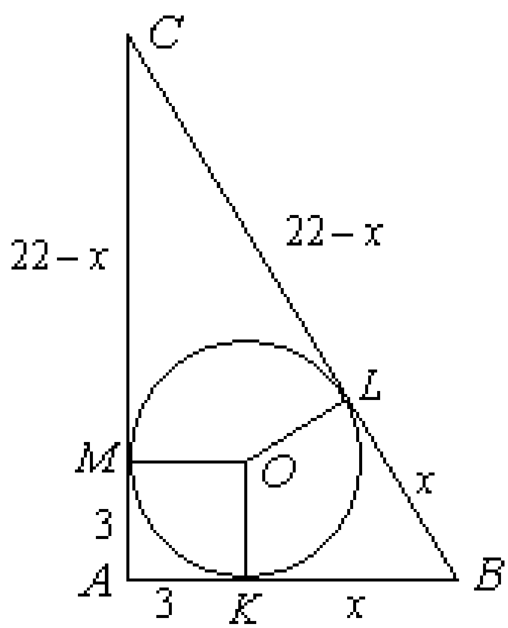

Рис. 9.3.7. Рисунок к примеру 9.3.6

Отрезки OK, MO, OL являются радиусами вписанной окружности; они перпендикулярны соответствующим сторонам треугольника ABC. Гипотенуза CB – диаметр описанной около треугольника ABC окружности, и потому она равна 22. Так как отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны, то

$$BK = BL = x;\ LC = CM = 22 - x;\ MA = AK = 3.$$

Последнее равенство следует из того, что четырехугольник $KAMO$ – квадрат. Принимая во внимание указанное равенство, запишем теорему Пифагора для данного треугольника :

$$(x+3)^2 + (22 - x + 3)^2 = 22^2.$$

Преобразуем квадратное уравнение :

$$(x+3)^2 + (25-x)^2 = 22^2 \Longrightarrow x^2 - 22x + 75 = 0 \Longrightarrow x^2 - 22x = -75.$$

Искомая площадь равна :

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot AB = \frac{1}{2}(25-x)(x+3) = -\frac{1}{2}(x^2 - 22x - 75).$$

Подставляя в полученное выражение площади вместо $(x^2 - 22x)$ его значение, равное – 75, получим $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}150 = 75$ кв.ед.

Ответ. 75.

Пример 9.3.7. В параллелограмме $ABCD$ сторона AB равна 10, и точка M делит сторону AD пополам. Через точки A и M проведена окружность с диаметром AM, причем точка B лежит вне этой окружности, см. рис.9.3.8. Найдите сторону AD, если $BM = 8$ и площадь четырехугольника $BCDM$ равна 72

Решение. Четырехугольник $BCDM$ – трапеция (рис.9.3.8). Ее площадь равна $72 = \dfrac{3}{2}y \cdot h$, где h – высота трапеции $BCDM$ и параллелограмма, и $AD = 2y$.

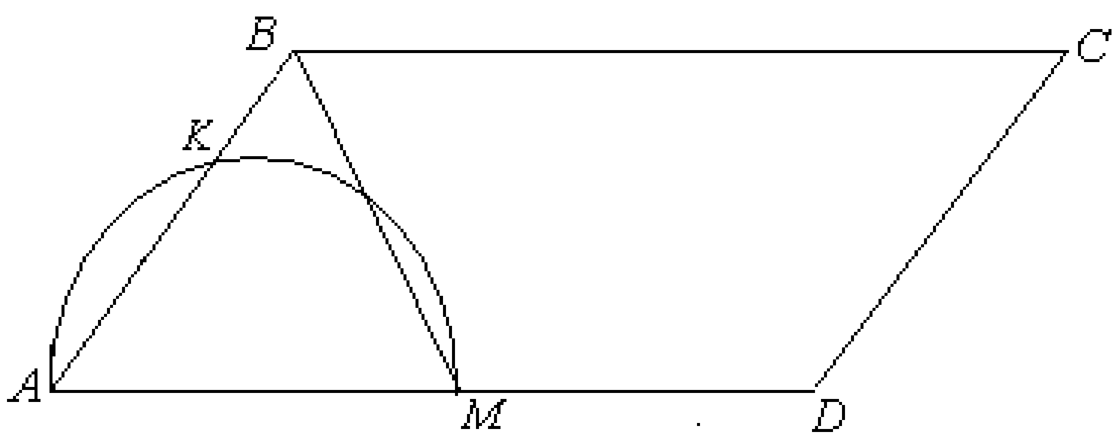

Рис. 9.3.8. Рисунок к примеру 9.3.7

В выбранных обозначениях площадь треугольника ABM выразится формулой $S_{\triangle ABM} = \dfrac{1}{2}y \cdot h$ и, следовательно, равна 24.

С другой стороны, $S_{\triangle ABM} = \dfrac{1}{2}AB \cdot KM$, где K – точка пересечения стороны AB с окружностью (угол AKM – прямой, так как опирается на диаметр AM).

$$24 = \frac{1}{2}AB \cdot KM \Longrightarrow KM = \frac{48}{AB} = 4,8.$$

Из прямоугольного треугольника ABM находим

$$KB = \sqrt{BM^2 - KM^2} = \sqrt{8^2 - (4,8)^2} = 6,4,$$

и тогда $AK = 10 - 6,4 = 3,6$.

Из прямоугольного треугольника AKM :

$$y = \sqrt{AK^2 + KM^2} = \sqrt{(3,6)^2 + (4,8)^2} = 6, \quad AD = 2y = 12.$$

Ответ. 12.

9.4 Стереометрия

Основные геометрические объекты пространства – точка, прямая, плоскость.

Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.

Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.

Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, притом только одну.

Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.

Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.

Две непересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости – параллельны; две непересекающиеся прямые, не лежащие в одной плоскости –скрещивающиеся. Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра. Оно равно расстоянию между параллельными плоскостями, проходящими через эти прямые.

Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой–нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости (признак параллельности прямой и плоскости).

Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

Две плоскости параллельны, если одна из них параллельна двум пересекающимся прямым, лежащим в другой плоскости (признак параллельности двух плоскостей).

Через точку вне данной плоскости можно провести плоскость, параллельную данной, и притом только одну.

Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны.

Отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, равны.

Прямая, пересекающая плоскость, называется перпендикулярной этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой в плоскости, проходящей через точку пересечения данной прямой и плоскости.

Если прямая, пересекающая плоскость, перпендикулярна двум прямым в этой плоскости, проходящим через точку пересечения, то она перпендикулярна плоскости (признак перпендикулярности прямой и плоскости).

Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.

Прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной перпендикулярно ее проекции, перпендикулярна и самой наклонной. И обратно : если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной (теорема о трех перпендикулярах).

Две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными, если какая–либо плоскость, перпендикулярная прямой пересечения этих плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым.

Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны (признак перпендикулярности плоскостей).

Если прямая, лежащая в одной из двух перпендикулярных плоскостей, перпендикулярна их линии пересечения, то она перпендикулярна и другой плоскости.

Призма – многогранник, две параллельные грани которого (основания) $n-$угольники, а остальные n граней – параллелограммы. Очевидно, что все боковые ребра призмы равны, и в основаниях – равные $n-$угольники с соответственно параллельными сторонами.

Имеют место формулы :

$$S_\delta = Pl; \qquad V = S_{osn} \cdot H,$$

где S_δ – площадь боковой поверхности призмы, P – периметр перпендикулярного сечения, l – длина бокового ребра, V – объем, S_{osn} – площадь основания, H – высота призмы.

Параллелепипед – призма, у которой основаниями служат параллелограммы.

Прямой параллелепипед – параллелепипед, у которого боковые ребра перпендикулярны плоскости основания.

Прямоугольный параллелепипед – это прямой параллелепипед, основаниями которого являются прямоугольники.

Куб – прямоугольный параллелепипед с равными ребрами.

Пирамида – многогранник, в основании которого $n-$угольник, а остальные n граней – треугольники с общей вершиной.

Объем пирамиды V вычисляется по формуле :

$$V = \frac{1}{3}SH,$$

где S – площадь основания пирамиды, H – высота пирамиды.

Правильная пирамида – пирамида, основанием которой является правильный многоугольник, а высота пирамиды проходит через центр основания.

Усеченная пирамида – это часть пирамиды, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию.

Объем усеченной пирамиды вычисляется по формуле :

$$V = \frac{1}{3}H\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}\right),$$

где H – высота усеченной пирамиды, S_1 и S_2 – площади ее оснований.

Прямой круговой цилиндр – это тело, полученное при вращении прямоугольника вокруг одной из его сторон.

Имеют место формулы :

$$V = \pi R^2 H; \quad S_\delta = 2\pi RH; \quad S = 2\pi RH + 2\pi R^2,$$

где V – объем, S_δ – площадь боковой поверхности, S – площадь полной поверхности цилиндра, R – радиус основания, H – высота цилиндра.

Прямой круговой конус – это тело, полученное при вращении прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов.

Имеют место формулы :

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H; \quad S_b = \pi RL,$$

где V – объем конуса, S_b – площадь боковой поверхности, R – радиус основания, H – высота, L – образующая конуса.

Усеченный конус – это часть конуса, ограниченная его основанием и сечением, параллельным плоскости основания.

Имеют место формулы :

$$V = \frac{1}{3}\pi h \left(R_1^2 + R_1 \cdot R_2 + R_2^2\right); \quad S_b = \pi(R_1 + R_2)l,$$

где V – объем усеченного конуса, S_b – площадь его боковой поверхности, h – высота усеченного конуса, R_1 и R_2 – радиусы верхнего и нижнего оснований, l – его образующая.

Шар – это тело, полученное вращением полукруга вокруг диаметра.

Поверхность шара называется сферой.

Объем шара радиуса R вычисляется по формуле :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Площадь сферы радиуса R вычисляется по формуле :

$$S = 4\pi R^2.$$

Шаровой сегмент – это часть шара, ограниченная секущей плоскостью.

Имеют место формулы :

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h\right); \quad S = 2\pi Rh,$$

где V – объем шарового сегмента, S – площадь его поверхности, R – радиус шара, h – высота сегмента.

При решении задач на комбинацию тел вращения и многогранников необходимо помнить :

1. Если шар описан около многогранника, то все его вершины лежат на поверхности шара.

2. Если многогранник вписан в шар, то вокруг каждой из его граней можно описать окружность.

3. Если шар вписан в многогранник (все грани касаются шара), то его центр равноудален от всех граней. Этот центр лежит на пересечении плоскостей, делящих двугранные углы многогранника пополам.

Пример 9.4.1. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро равно $3\sqrt{2}$, а угол между ним и плоскостью основания равен 45^o. Найдите объем пирамиды

Решение. Основание пирамиды – квадрат, и вершина пирамиды S проектируется в центр квадрата точку O (рис.9.4.1).

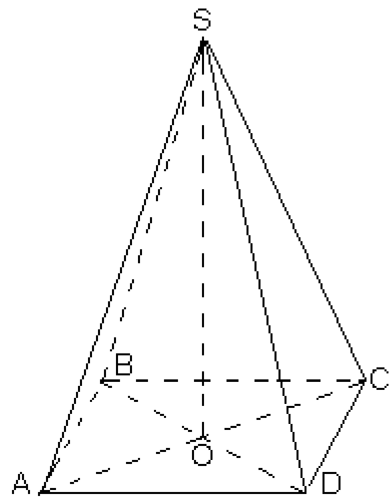

Рис. 9.4.1. Рисунок к примеру 9.4.1

По условию задачи $\angle SAO = 45^o$ и $\triangle SAO$ – равнобедренный и прямоугольный. Следовательно, $SO = AO = h$ – высота пирамиды.

Из $\triangle SAO:\ AO^2 + OS^2 = AS^2 \Longrightarrow 2h^2 = 18 \Longrightarrow h = 3.$

Из $\triangle ACD:\ AD^2 + DC^2 = AC^2 \Longrightarrow 2AD^2 = 36 \Longrightarrow AD^2 = 18.$

Тогда объем пирамиды $V = \dfrac{1}{3}hS_{osn} = \dfrac{1}{3}h \cdot AD^2 = 18.$

Ответ. 18.

Пример 9.4.2. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см. Объем пирамиды равен 40 см^3. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под одинаковым углом. Найдите этот угол

Решение. Так как боковые ребра наклонены к плоскости основания под одинаковым углом, то эти ребра равны, а вершина S пирамиды проектируется в точку K – середину гипотенузы AB (рис.9.4.2). По условию $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{100} = 10$ см и $AK = 5$ см .

Так как объем пирамиды $V = \dfrac{1}{3}hS_{osn}$, где $h = SK$ – высота пирамиды и $S_{osn} = \dfrac{1}{2}AC \cdot CB = 24$ см ^{2} – площадь основания, то

$$h = \frac{3V}{S_{0sn}} = \frac{120}{24} = 5 \text{ см} .$$

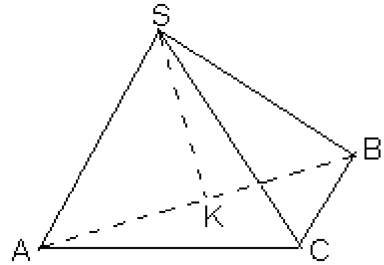

Рис. 9.4.2. Рисунок к примеру 9.4.2

Следовательно, $\triangle ASK$–равнобедренный и прямоугольный ($AK = KS = 5$ см) и $\angle SAB = 45^o$.

Ответ. 45^o.

Пример 9.4.3. Боковое ребро правильной четырехугольной призмы равно стороне основания. Расстояние между серединами двух непараллельных ребер, принадлежащих разным основаниям, равно $3\sqrt{6}$. Найдите объем призмы

Решение. На рис. 9.4.3 изображена правильная четырехугольная призма, т.е. в основании ее лежит квадрат.

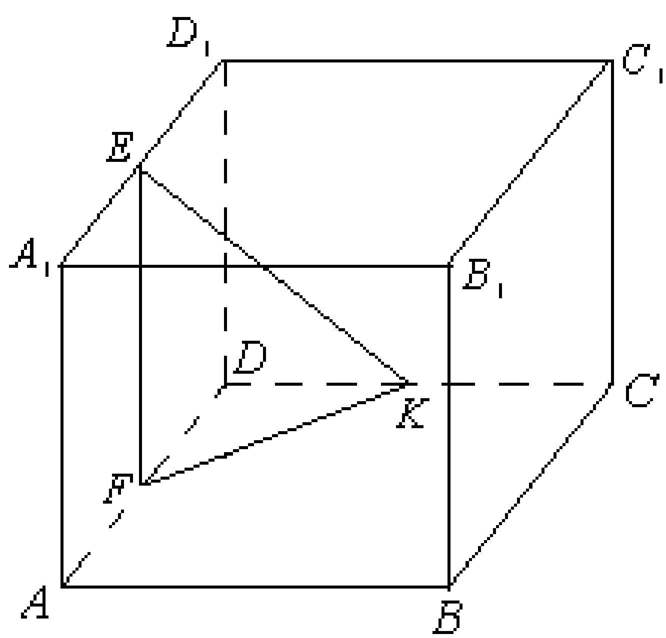

Рис. 9.4.3. Рисунок к примеру 9.4.3

Так как боковое ребро равно стороне основания, то заданная призма есть куб, ребро которого обозначим a. Отрезок $EK = 3\sqrt{6}$ соединяет середины ребер DC и A_1D_1; $EF \| AA_1$. Следовательно, EF перпендикулярно плоскости основания, и потому $EF \perp FK$.

Из треугольника FDK находим $FK = \dfrac{a}{2}\sqrt{2}$.

Из треугольника EFK по теореме Пифагора имеем соотношение

$$a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = (3\sqrt{6})^2,$$

откуда находим $a = 6$. Тогда объем куба равен $6^3 = 216$.

Ответет. 216.

Пример 9.4.4. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник с катетами $AB = 4$ и $BC = 6$. Высота призмы равна 10. Найдите объем пирамиды с вершинами в точке C_1 и серединах ребер BC, BB_1 и A_1B_1

Решение. Основанием пирамиды FC_1ED будем считать $\triangle DC_1E$, который лежит в плоскости CC, B_1B (F, D, E – середины ребер A_1B_1, CB и BB_1 соответственно, рис. 9.4.4).

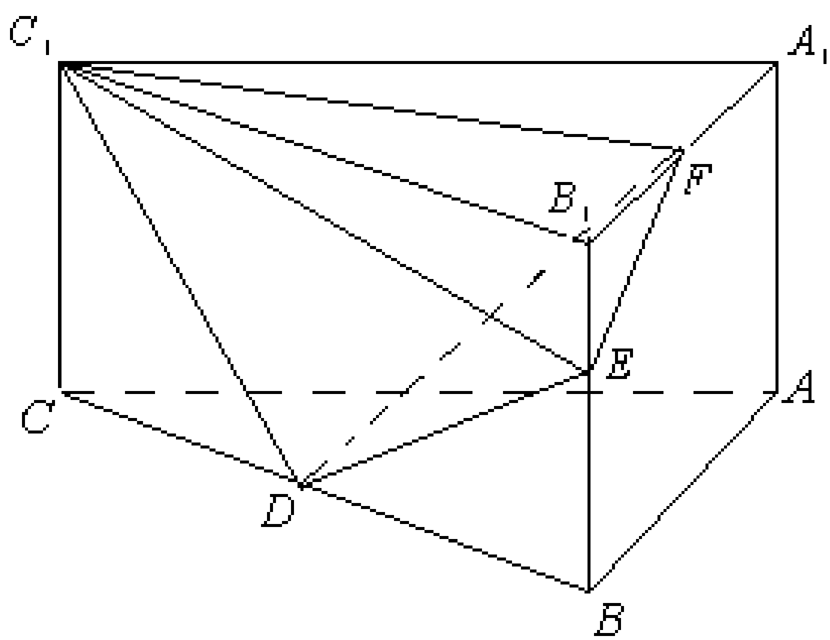

Рис. 9.4.4. Рисунок к примеру 9.4.4

Тогда высотой пирамиды является, очевидно, отрезок FB_1 ,так как $FB_1 \perp C_1B_1$ и $FB_1 \perp B_1B$ (по условию задачи), а, следовательно, FB_1 перпендикулярен плоскости грани C_1CBB_1 , и потому перпендикулярен основанию C_1ED рассматриваемой пирамиды.

Итак, высота пирамиды равна $\frac{1}{2}B_1A_1$.

$$S_{\triangle C_1DE} = S_{CC_1B_1B} - S_{\triangle C_1B_1E} - S_{\triangle EDB} - S_{\triangle C_1CD} =$$

$$= CC_1 \cdot CB - \frac{1}{2}C_1B_1 \cdot BE - \frac{1}{2}DB \cdot BE - \frac{1}{2}CC_1 \cdot CD = 10 \cdot 6 - \frac{1}{2}3 \cdot 5 - \frac{1}{2}6 \cdot 5 - \frac{1}{2}10 \cdot 3 = 22,5.$$

$$V\text{пир.} = \frac{1}{3}S\text{осн.} \cdot h = \frac{1}{3}S_{\triangle CDE} \cdot FB_1 = \frac{1}{3}22,5 \cdot 2 = 15.$$

Ответ. 15.

Пример 9.4.5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ заданы длины сторон $AB = 5; BC = 12; BB_1 = 1\frac{12}{13}$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, параллельной прямой AC и содержащей прямую BA_1

Решение. Плоскость, содержащая $\triangle BA_1C_1$ будет параллельна прямой AC (признак параллельности прямой и плоскости), и, следовательно, требуется найти площадь треугольника BA_1C_1 (рис. 9.4.5).

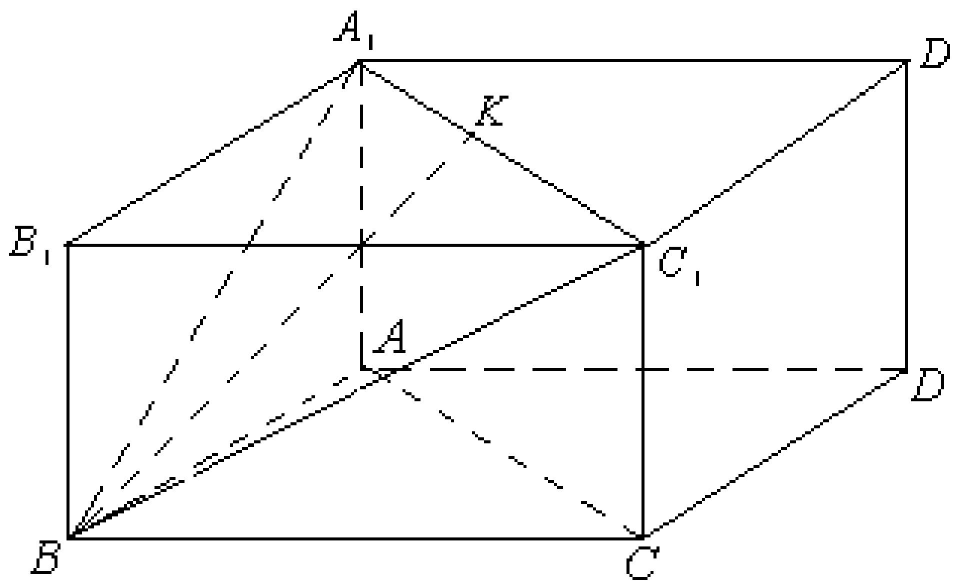

Рис. 9.4.5. Рисунок к примеру 9.4.5

Из $\triangle BC_1C$: $(BC_1)^2 = 144 + \left(\frac{25}{13}\right)^2$.

Из $\triangle BAA_1$: $(BA_1)^2 = 25 + \left(\frac{25}{13}\right)^2$.

Из $\triangle A_1B_1C_1$: $(A_1C_1)^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2 \Longrightarrow A_1C_1 = 13$.

В треугольнике BA_1C_1 опустим высоту BK на сторону A_1C_1 и обозначим $A_1K = x$. Тогда $KC_1 = 13 - x$.

Из треугольников BKA_1 и KBC_1 запишем равенство

$$(BA_1)^2 - (A_1K)^2 = (BC_1)^2 - (KC_1)^2,$$

или

$$25 + \left(\frac{25}{13}\right)^2 - x^2 = 144 + \left(\frac{25}{13}\right)^2 - (13 - x)^2 \Longrightarrow$$

$$(13 - x)^2 - x^2 = 119 \Longrightarrow 169 - 26x = 119 \Longrightarrow x = \frac{25}{13}.$$

Далее :

$$BK = \sqrt{(BA)^2 - x^2} = \sqrt{25 + \left(\frac{25}{13}\right)^2 - \left(\frac{25}{13}\right)^2} = 5.$$

$$S_{\triangle BA_1C_1} = \frac{1}{2}A_1C_1 \cdot BK = \frac{1}{2}13 \cdot 5 = 32,5.$$

Ответ. 32,5.

Пример 9.4.6. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 2. Перпендикуляр, опущенный из центра шара, описанного около пирамиды, на ее боковую грань, образует с высотой угол, равный $\operatorname{arcctg}\dfrac{3}{5}$. Определите объем пирамиды

Решение. На рис.9.4.6 изображена правильная пирамида $SABC$.

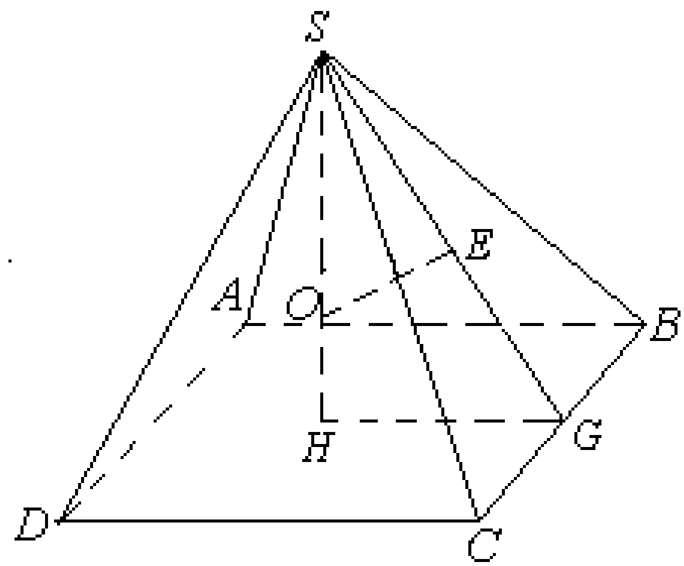

Рис. 9.4.6. Рисунок к примеру 9.4.6

Вершина S проектируется в центр основания H, центр шара лежит на высоте, перпендикуляр из центра шара проектируется на апофему боковой грани. Рассмотрим сечение пирамиды, проведенное через высоту SH и апофему SG. Тогда заданный угол – это угол EOS, образованный перпендикуляром OE и радиусом шара OS. Из прямоугольного треугольника SGH находим

$$GH = HS \cdot \operatorname{tg} \angle ESO = 2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg}\frac{3}{5}\right) = 2 \cdot \frac{3}{5} = 1,2.$$

Отсюда $V = \dfrac{2}{3} \cdot (2 \cdot 1,2)^2 = 3,84.$

Ответ. 3,84.

9.5 Задачи для самостоятельного решения

№ 9.5.1. Если в параллелограмме $ABCD$ заданы $\overrightarrow{AB}(-5;-1;2)$, $\overrightarrow{CB}(-3;-3;4)$ и $A(2;8;-2)$, то сумма координат точки пересечения его диагоналей равна

1) 7 2) 6 3) 5 4) 4

№ 9.5.2. Если в параллелограмме $ABCD$ заданы $A(-5;2;8)$, $\overrightarrow{AB}(-3;4;1)$ и $\overrightarrow{BD}(-2;4;1)$, то сумма координат вершины С равна

1) 9 2) 10 3) 11 4) 12

№ 9.5.3. Если в треугольнике ABC точки M и N – середины сторон AB и BC соответственно, векторы $\overrightarrow{MN}(-2;1;0)$, $\overrightarrow{AB}(3;-5;6)$, то сумма координат вектора $\overrightarrow{BC}$ равна

1) -6 2) -7 3) -8 4) -9

№ 9.5.4. Если при $x = x_o$ векторы $\vec{a}(-1;1;2)$ и $\vec{b}(x^2;x-2;x^2-12)$ коллинеарны, то значение выражения $x_o(x_o-2)$ равно

1) 8 2) -1 3) 4 4) -2

№ 9.5.5. Даны векторы $\overrightarrow{AB}(3;5;-4)$ и $\overrightarrow{BC}(\alpha;\beta;8)$. Если точки A, B и C лежат на одной прямой, то сумма $\alpha+\beta$ равна

1) -24 2) -18 3) -16 4) -14

№ 9.5.6. Дан треугольник с вершинами $A(3;4;-3)$, $B(5;2;-2)$, $C(1;-2;1)$. Вычислите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BM}$, где точка M – середина отрезка AC

1) 22 2) 18 3) 16 4) 12

№ 9.5.7. Если вектор $\vec{p}$ одинаково направлен с вектором $\vec{q}(6;-12;18)$ и $|\vec{p}| = \sqrt{14}$, то сумма координат вектора $\vec{p}$ равна

1) 2 2) -2 3) 3 4) -3

№ 9.5.8. Если вектор $\vec{p}$ направлен противоположно вектору $\vec{q}(18;-24;-36)$ и $|\vec{p}| = \sqrt{61}$, то сумма координат вектора $\vec{p}$ равна

1) 5 2) 11 3) 13 4) 7

№ 9.5.9. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ составляют угол 30^o, и скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b} = 3$, то площадь треугольника, построенного на этих векторах, равна

1) $\sqrt{3}$ 2) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 3) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ 4) $2\sqrt{3}$

№ 9.5.10. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол в 60^o и $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$, то длина вектора $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ равна

1) $\sqrt{7}$ 2) $\sqrt{5}$ 3) 3 4) $\sqrt{10}$

№ 9.5.11. Даны вектор $\vec{a}(4;2)$ и точка $A(2;0)$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если известно, что точка B принадлежит оси OY, и скалярное произведение $\vec{a}\cdot\overrightarrow{AB}$ равно 10

1) $3\sqrt{10}$ 2) $\sqrt{85}$ 3) 9 4) 8

№ 9.5.12. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ составляют угол 60^o, и скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$, то площадь параллелограмма, построенного на этих векторах, равна

1) $2\sqrt{2}$ 2) 4 3) $2\sqrt{3}$ 4) $3\sqrt{3}$

№ 9.5.13. Если вектор $\vec{a}(1;y;z)$ перпендикулярен векторам $\vec{b}(3;-3;0)$ и $\vec{c}(2;1;1)$, то произведение координат $y\cdot z$ равно

1) -2 2) 2 3) -3 4) 3

№ 9.5.14. Даны вектор $\vec{a}(2;-1,7)$ и точка $A(3;8;0)$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$, перпендикулярного вектору $\vec{a}$, если известно, что точка B принадлежит оси OX

1) $\sqrt{34}$ 2) $3\sqrt{7}$ 3) $6\sqrt{2}$ 4) $4\sqrt{5}$

№ 9.5.15. Если векторы $\vec{a}(k+1;-2;3)$ и $\vec{b}(-3;3k;7)$ перпендикулярны, то длина вектора $\vec{a}+\vec{b}$ равна

1) $\sqrt{115}$ 2) $2\sqrt{29}$ 3) $3\sqrt{13}$ 4) $6\sqrt{7}$

№ 9.5.16. Если векторы $\vec{a}(4k-1;-2;7)$ и $\vec{b}(-4;k;2)$ перпендикулярны, то длина вектора $\vec{a}-\vec{b}$ равна

1) $\sqrt{82}$ 2) $\sqrt{83}$ 3) $2\sqrt{21}$ 4) $\sqrt{85}$

№ 9.5.17. Найдите площадь фигуры, координаты всех точек которой удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} y \geqslant |x+2|-1 \\ y \leqslant 8-|x-1| \end{cases}$

№ 9.5.18. Найдите площадь фигуры, координаты всех точек которой удовлетворяют условию $|x-3|+|y+3| \leqslant 4$

№ 9.5.19. Найдите площадь фигуры, координаты всех точек которой удовлетворяют условию $|x-1|+|y+5| \leqslant 6$

№ 9.5.20. Радиус окружности, описанной около треугольника с вершинами в точках $A(3;7;-4), B(5;-3;2), C(1;3;-10)$, равен

1) 5 2) 6 3) $3\sqrt{7}$ 4) 7

№ 9.5.21. Площадь треугольника с вершинами в точках $A(9;3;-5), B(2;10;-5), C(2;3;2)$ равна

1) $7\sqrt{3}$ 2) 49 3) $49\sqrt{3}$ 4) $\dfrac{49\sqrt{3}}{2}$

№ 9.5.22. Найдите площадь четырехугольника, ограниченного графиками функций $y=4|x+1|-3$ и $y=5-4|x+1|$

№ 9.5.23. Найдите площадь треугольника с вершинами в точках $A(2;–2)$, $B(5;3)$, $C(5;–5)$

№ 9.5.24. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в точках $A(-3;4)$, $B(1;2)$, $C(1;-1)$, $D(-3;-2)$

№ 9.5.25. Найдите площадь в кв.ед. земельного участка $ABCDEF$ с вершинами в точках $A(3;5), B(8;8), C(15;5), D(16;-2), E(12;1), F(6;-2)$

№ 9.5.26. Если точка $A(-1;-1)$ лежит на окружности, а точка $B(-4;3)$ является ее центром, то уравнение окружности имеет вид

1) $(x+4)^2+(y-3)^2=5$ 2) $(x-4)^2+(y+3)^2=25$
3) $(x+4)^2+(y-3)^2=25$ 4) $(x-4)^2+(y+3)^2=5$

№ 9.5.27. Уравнение геометрического места точек пространства, равноудаленных от точки $A(2;3;-1)$ и начала координат, имеет вид

1) $2x+3y-z-7=0$ 2) $x+3y-z-7=0$ 3) $x+y-z+2=0$ 4) $x+2y+z-1=0$

№ 9.5.28. Найдите площадь четырехугольника, ограниченного прямыми $x+3y=6$, $4x+12y=36$ и осями координат

1) 21 2) 3,5 3) 15 4) 7,5

№ 9.5.29. Найдите площадь четырехугольника, ограниченного графиками функций $y=\dfrac{1}{2}|x+1|-1$ и $y=2-\dfrac{1}{2}|x+1|$

№ 9.5.30. Даны точки $O(0;0), A(-2;-4)$ и $B(-7;-4)$, $OABC$ – равнобедренная трапеция. Найдите наибольшее из возможных значений суммы координат точки C

№ 9.5.31. В прямоугольном треугольнике ADC с прямым углом C проведена биссектриса DK, причем $DC=6, KC=3$. Найдите площадь треугольника ADC

№ 9.5.32. Площадь равнобедренного треугольника ABC равна 90, а боковая сторона равна $10\sqrt{3}$. К основанию AB и стороне BC проведены высоты CP и AH, пересекающиеся в точке K. Найдите площадь треугольника CKH

№ 9.5.33. Найдите среднюю линию равнобедренной трапеции, описанной около окружности радиуса 4, если тангенс угла при основании трапеции равен $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

№ 9.5.34. Стороны треугольника ABC относятся как $7:2:6$. Разность между наибольшей и наименьшей стороной подобного ему треугольника $A_1B_1C_1$ равна 15 см. Найдите периметр треугольника $A_1B_1C_1$

№ 9.5.35. Общая хорда двух пересекающихся окружностей стягивает в каждом круге дугу 60^o и равна $\sqrt{6}$ см. Найдите (в кв.см) площадь общей части этих кругов

№ 9.5.36. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 8. Найдите расстояние от середины гипотенузы до большей средней линии треугольника

№ 9.5.37. В прямоугольном треугольнике ABC точки D и E лежат соответственно на катетах BC и AC так, что $CD = CE = 1$. Точка O есть точка пересечения отрезков AD и BE. Площадь $\triangle BOD$ больше площади $\triangle AOE$ на 0,5. Кроме того, $AD = \sqrt{10}$. Найдите длину гипотенузы AB

№ 9.5.38. Найдите площадь равнобедренной трапеции, если длина ее диагонали равна $2\sqrt{13}$, а длина средней линии равна 4

№ 9.5.39. Найдите длину радиуса окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, если длина средней линии трапеции равна $5\sqrt{10}$, а косинус угла при основании трапеции равен $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

№ 9.5.40. Около окружности описана равнобокая трапеция, площадь которой равна 162. Найдите длину боковой стороны трапеции, если острый угол при основании равен 30^o

№ 9.5.41. Найдите площадь трапеции, у которой длины оснований равны 10 и 15, а длины боковых сторон равны 7 и 4

№ 9.5.42. В круг с радиусом, равным 4, вписана трапеция. Большее основание трапеции образует с боковой стороной угол 60^o, а с диагональю – угол 15^o. Найдите площадь трапеции

№ 9.5.43. Найдите площадь параллелограмма с длинами диагоналей $3\sqrt{5}$ и 3 и острым углом при основании, равным 45^o

№ 9.5.44. На боковой стороне BC равнобедренного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая основание этого треугольника в точке D. Найдите квадрат расстояния от вершины A до центра окружности, если $AD = \sqrt{3}$, а $\angle ABC = 120^o$

№ 9.5.45. Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, если длина ее средней линии равна 5

№ 9.5.46. В треугольнике длины двух сторон равны соответственно $2\sqrt{22}$ и $6\sqrt{2}$. Медианы, проведенные к этим сторонам, взаимно перпендикулярны. Найдите длину третьей стороны треугольника

№ 9.5.47. Найдите площадь ромба $ABCD$, если радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и ABD, равны 1 и 3

№ 9.5.48. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса AD и медиана BE. Точки M и N являются ортогональными проекциями на сторону AB точек D и E соответственно, причем $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{9}{1}$ и $\dfrac{AN}{NB} = \dfrac{2}{3}$. Найдите отношение $\dfrac{AD^2}{BE^2}$

№ 9.5.49. В параллелограмме с длинами сторон 7 и 3 и острым углом, равным 30^o, проведены биссектрисы четырех углов. Найдите площадь четырехугольника, образованного биссектрисами

№ 9.5.50. Центрами четырех кругов радиуса 3 являются вершины квадрата с длиной стороны, равной 3. Найдите площадь общей части этих кругов

№ 9.5.51. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C опущена высота CD. Известно, что радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, равны 3 и 4. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC

№ 9.5.52. Диаметр окружности с радиусом, равным 3, является стороной правильного треугольника. Найдите площадь части треугольника, лежащей вне данной окружности

№ 9.5.53. К окружности из одной точки A проведены касательная AK с точкой касания K длиной $AK = 20$ см и секущая AMN, пересекающая окружность в точках M и N, длиной $AN = 40$ см. Секущая удалена от центра круга на 8 см. Найдите (в см) радиус круга

№ 9.5.54. Определите, чему равна (в см) длина стороны треугольника, лежащей против тупого угла, если длины двух других сторон равны 7 см и 8 см, а площадь треугольника равна $14\sqrt{3}$ см^2

№ 9.5.55. В четырехугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, $sin\angle A = \dfrac{2}{5}$, $sin\angle B = \dfrac{1}{3}$, сумма длин диагоналей равна 22 см. Найдите длину меньшей диагонали (в см)

№ 9.5.56. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ на ребрах AA' и BB' отложены точки P и Q так, что $AP = BQ = 17$ см, а на ребрах DD' и CC' отложены точки T и R так, что $DT = CR = 23$ см. Ребра $A'B' = 11$ см, $B'C' = \sqrt{133}$ см. Найдите площадь сечения $PQRT$ (в кв. см)

№ 9.5.57. Все вершины правильной шестиугольной пирамиды с боковым ребром 4 см находятся на сфере. Площадь сферы равна 100π см^2. Найдите (в см) высоту пирамиды

№ 9.5.58. В цилиндре периметр осевого сечения равен 56 см, диагональ этого сечения образует с плоскостью основания угол 45^o. Найдите объем цилиндра (в куб.см)

№ 9.5.59. В цилиндре сечение площадью $16\sqrt{3}$ см^2, параллельное оси, отсекает от окружности основания дугу в 120^o. Найдите площадь (в кв.см) боковой поверхности цилиндра

№ 9.5.60. Осевое сечение цилиндра – квадрат, площадь которого равна 100. Найдите площадь основания цилиндра

№ 9.5.61. Найдите длину ребра куба, вписанного в конус с радиусом основания, равным 3, и высотой, равной 5

№ 9.5.62. Найдите площадь полной поверхности конуса, описанного около правильного тетраэдра с длиной ребра, равной 3

№ 9.5.63. Дана правильная четырехугольная пирамида с длиной стороны основания, равной 3, и плоским углом при вершине 60^o. Найдите ее объем

№ 9.5.64. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой $a = 18$. Каждое боковое ребро образует с плоскостью основания угол $\beta = 60^o$. Найдите высоту пирамиды

№ 9.5.65. Образующая конуса длиной, равной 13, наклонена к плоскости основания под углом 45^o. В конус вписан цилиндр так, что нижнее основание цилиндра лежит в плоскости основания конуса. Найдите высоту цилиндра, если его осевое сечение – квадрат

№ 9.5.66. Сумма площадей оснований правильной четырехугольной призмы равна площади ее боковой поверхности. Расстояние между серединами двух непараллельных ребер, принадлежащих разным основаниям, равно $2\sqrt{3}$. Найдите длину стороны основания призмы

№ 9.5.67. Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелограмм $ABCD$, в котором $AD = 3, \angle BAD = 120^o$. Высота призмы равна $6\sqrt{3}$. Найдите тангенс угла между плоскостью основания призмы и плоскостью BAD

№ 9.5.68. Сумма площадей оснований правильной четырехугольной призмы равна площади ее боковой поверхности. Расстояние между серединами двух непараллельных ребер, принадлежащих разным основаниям, равно $2\sqrt{3}$. Найдите длину стороны основания

№ 9.5.69. Основание прямой призмы $BCDB_1C_1D_1$ – треугольник BCD, в котором $BD = BC = 12, CD = 8\sqrt{6}$. На ребре BB_1 отмечена точка H так, что $BH : HB_1 = 4 : 5$. Угол между плоскостями BCD и CDH равен 30^o. Найдите расстояние между прямыми CD и B_1D_1

№ 9.5.70. Концы отрезка AB лежат на окружностях двух оснований цилиндра. Угол между прямой AC и плоскостью основания цилиндра равен 60^o, объем цилиндра равен 150π. Найдите площадь осевого сечения цилиндра

№ 9.5.71. Радиус основания цилиндра равен 5, а площадь боковой поверхности – 80π. На окружностях оснований цилиндра отмечены точки A и C так, что тангенс угла между прямой и плоскостью основания равен 2. Секущая плоскость проходит через прямую AC параллельно оси цилиндра. Найдите периметр сечения

№ 9.5.72. В конус с высотой 8 см и образующей 10 см вписан шар. Найдите объем шара (в куб.см)

№ 9.5.73. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с высотой , равной 12, длина стороны основания равна $4\sqrt{3}$. Точки N, K, M являются серединами соответственно боковых ребер AS, BS, CS. Найдите радиус шара, касающегося основания пирамиды и прямых AK, CN, BM

№ 9.5.74. В правильный октаэдр вписана сфера. Определите радиус сферы, если площадь поверхности октаэдра равна $12\sqrt{3}$

9.6 Ответы к задачам для самостоятельного решения

9.5.1. 1 **9.5.2.** 4 **9.5.3.** 1 **9.5.4.** 1 **9.5.5.** 3 **9.5.6.** 3 **9.5.7.** 1 **9.5.8.** 4 **9.5.9.** 2 **9.5.10.** 1 **9.5.11.** 2 **9.5.12.** 3 **9.5.13.** 3 **9.5.14.** 4 **9.5.15.** 2 **9.5.16.** 2 **9.5.17.** 36 **9.5.18.** 32 **9.5.19.** 72 **9.5.20.** 4 **9.5.21.** 4 **9.5.22.** 8 **9.5.23.** 12 **9.5.24.** 18 **9.5.25.** 80 **9.5.26.** 3 **9.5.27.** 3 **9.5.28.** 3 **9.5.29.** 9 **9.5.30.** 1 **9.5.2.31** 24 **9.5.32.** 32 **9.5.33.** 12 **9.5.34.** 45 **9.5.35.** $2\pi - 3\sqrt{3}$ **9.5.36.** 2,4 **9.5.37.** 5 **9.5.38.** 24 **9.5.39.** 2,5 **9.5.40.** 18 **9.5.41.** $20\sqrt{6}$ **9.5.42.** 12 **9.5.43.** 9 **9.5.44.** 17 **9.5.45.** 25 **9.5.46.** $4\sqrt{2}$ **9.5.47.** 2,16 **9.5.48.** 2 **9.5.49.** 4 **9.5.50.** $9(\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3})$ **9.5.51.** 5 **9.5.52.** $\frac{3}{2}(3\sqrt{3} - \pi)$ **9.5.53.** 17 **9.5.54.** 13 **9.5.55.** 10 **9.5.56.** 143 **9.5.57.** 1,6 **9.5.58.** 686π **9.5.59.** 32π **9.5.60.** 25π **9.5.61.** $\frac{15\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+5}$ **9.5.62.** $3\pi(\sqrt{3}+1)$ **9.5.63.** $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ **9.5.64.** $9\sqrt{3}$ **9.5.65.** $\frac{13\sqrt{2}}{3}$ **9.5.66.** 4 **9.5.67.** 4 **9.5.68.** 4 **9.5.69.** 9 **9.5.70.** 60 **9.5.71.** 24 **9.5.72.** 36π **9.5.73.** 2 **9.5.74.** 1.