

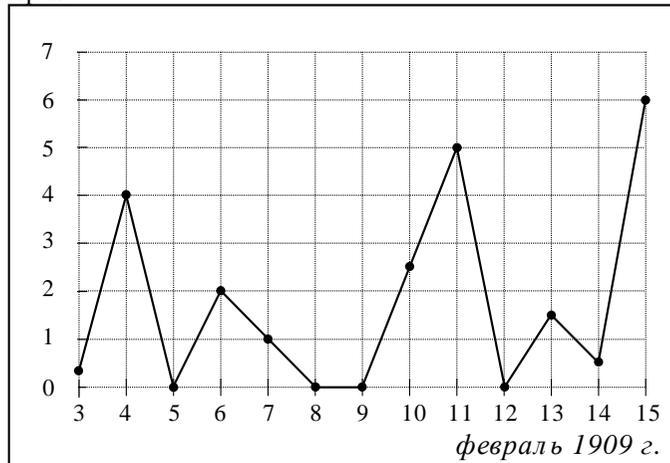
Часть 1

Ответом на задания В1–В12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

В1 В магазине бейсболка стоит 200 рублей. Какое наибольшее число таких бейсболок можно купить на 900 рублей во время распродажи, когда скидка на все товары составляет 15%?

Ответ: _____

В2 На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Казани с 3 по 15 февраля 1909 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какое наибольшее суточное количество осадков выпадало за указанный период. Ответ дайте в миллиметрах.



Ответ: _____

В3 Найдите корень уравнения $\sqrt{7x-3} = 5$.

Ответ: _____

В4 В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\sin A = \frac{8}{9}$, $AC = 2\sqrt{17}$. Найдите AB .

Ответ: _____

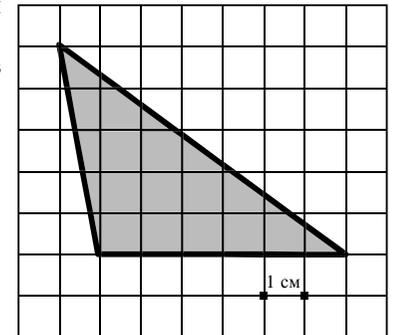
В5 Интернет-провайдер (компания, оказывающая услуги по подключению к сети Интернет) предлагает три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
1. План "700"	600 руб. за 700 Мб трафика в месяц	2,5 руб. за 1 Мб сверх 700 Мб
2. План "1000"	820 руб. за 1000 Мб трафика в месяц	2 руб. за 1 Мб сверх 1000 Мб
3. План "Безлимитный"	1100 руб. в месяц	Нет

Пользователь предполагает, что его трафик составит 1200 Мб в месяц и, исходя из этого, выбирает наиболее дешевый тарифный план. Сколько рублей заплатит пользователь за месяц, если его трафик действительно будет 1200 Мб?

Ответ: _____

В6 На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен треугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

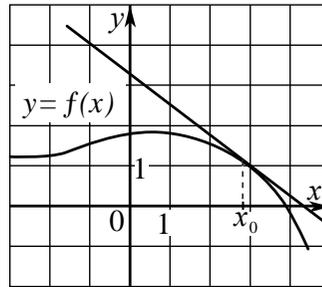


Ответ: _____

В7 Найдите значение выражения: $5^8 \cdot 4^5 : 20^5$.

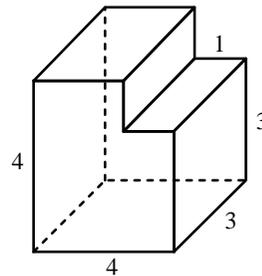
Ответ: _____

B8 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____

B9 Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).



Ответ: _____

B10 Для одного из предприятий-монополистов зависимость объема спроса на продукцию q (единиц в месяц) от её цены p (тыс. руб.) задается формулой $q = 165 - 15p$. Определите максимальный уровень цены p (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = q \cdot p$ составит не менее 420 тыс. руб.

Ответ: _____

B11 Найдите наибольшее значение функции $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 6$ на отрезке $[0; 2]$.

Ответ: _____

B12 Два велосипедиста одновременно отправились в 130-километровый пробег. Первый ехал со скоростью на 3 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 3 часа раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{\sqrt{y}} = 0, \\ y - \cos x = 0. \end{cases}$$

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 4$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостями CDD_1 и BDA_1 .

C3 Решите неравенство

$$\left(x + \frac{3}{x}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1}{\sqrt{5 - x} - 1}\right)^2 \geq 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1}{\sqrt{5 - x} - 1}\right)^2.$$

C4 Через середину стороны AB квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образующая с прямой AB угол α , $\operatorname{tg} \alpha = 3$. Найдите площадь треугольника BMT , если сторона квадрата $ABCD$ равна 4.

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых решения неравенства $|2x - a| + 1 \leq |x + 3|$ образуют отрезок длины 1.

C6 Найдите все пары $(x; y)$ целых чисел, удовлетворяющие системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 18x - 20y - 166, \\ 32x - y^2 > x^2 + 12y + 271. \end{cases}$$

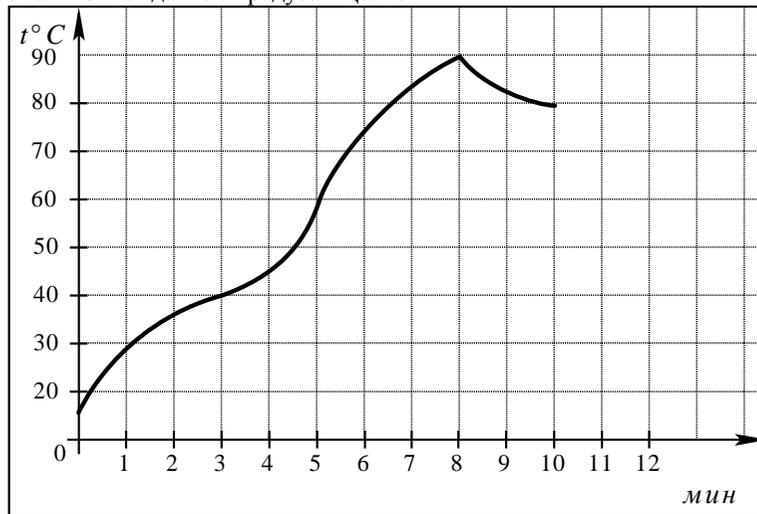
Часть 1

Ответом на задания В1–В12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

- В1** Больному прописано лекарство, которое нужно принимать по 0,5 таблетки 4 раза в день на протяжении 14 дней. Лекарство продается в упаковках по 10 таблеток. Какое наименьшее количество упаковок потребуется на весь курс лечения?

Ответ: _____

- В2** На графике показан процесс разогрева двигателя легкового автомобиля. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее от момента запуска двигателя, на оси ординат — температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику наибольшую температуру, до которой разогрелся двигатель. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: _____

- В3** Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-7} = 27$.

Ответ: _____

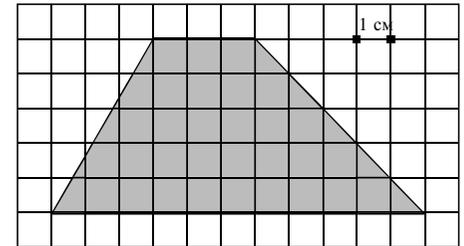
- В4** В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 6$, $\sin A = \frac{4}{5}$. Найдите AC .

Ответ: _____

- В5** Семья из трех человек планирует поездку из Санкт-Петербурга в Вологду. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине. Билет на поезд на одного человека стоит 760 рублей. Автомобиль расходует 13 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 700 км, а цена бензина 17,5 рублей за литр. Сколько рублей будет стоить самая дешевая поездка для этой семьи?

Ответ: _____

- В6** На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.

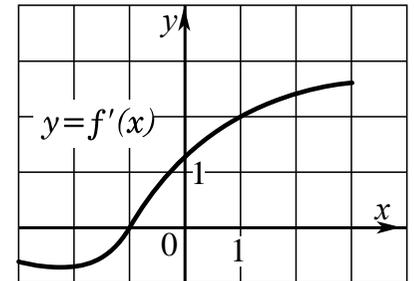


Ответ: _____

- В7** Найдите значение выражения: $5^{\sqrt{6}+3} \cdot 5^{-1-\sqrt{6}}$.

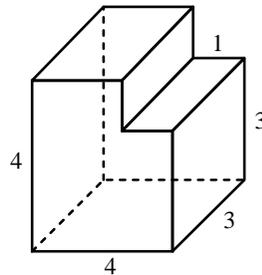
Ответ: _____

- В8** На рисунке изображен график производной $y = f'(x)$ некоторой функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3;3)$. Укажите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 2x$ или совпадает с ней.



Ответ: _____

В9 Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).



Ответ: _____

В10 Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя вычисляется по формуле $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$. При каком значении температуры нагревателя T_1 (в градусах Кельвина) КПД этого двигателя будет равен 80%, если температура холодильника $T_2 = 200$ К?

Ответ: _____

В11 Найдите наименьшее значение функции $f(x) = -x^3 + 7x^2 - 11x + 8$ на отрезке $[0; 3]$.

Ответ: _____

В12 Моторная лодка прошла против течения реки 72 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 часов меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0, \\ \sqrt{-y} \\ y = -\cos x. \end{cases}$$

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 6$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостями ACD_1 и $A_1 B_1 C_1$.

C3 Решите неравенство

$$\left(x + \frac{4}{x}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 8x + 16} - 1}{\sqrt{6-x} - 1}\right)^2 \geq 5 \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 8x + 16} - 1}{\sqrt{6-x} - 1}\right)^2.$$

C4 Дана трапеция $ABCD$, основания которой $BC = 44$, $AD = 100$, $AB = CD = 35$. Окружность, касающаяся прямых AD и AC , касается стороны CD в точке K . Найдите длину отрезка CK .

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых решения неравенства $|3x - a| + 2 \leq |x - 4|$ образуют отрезок длины 1.

C6 Найдите все пары целых чисел (x, y) , удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 24x - 28y + 167 < 0, \\ x + 2y < \frac{15}{2}. \end{cases}$$

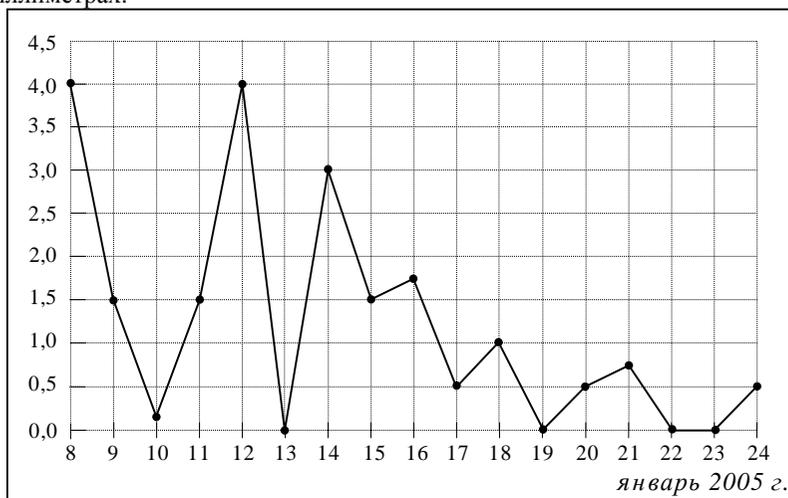
Часть 1

Ответом на задания В1–В12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

В1 Оптовая цена одной электрической розетки 150 рублей. Розничная цена на 20% выше оптовой. Какое наибольшее число таких розеток можно купить на 800 рублей в розницу?

Ответ: _____

В2 На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Томске с 8 по 24 января 2005 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какое наибольшее суточное количество осадков выпадало за данный период. Ответ дайте в миллиметрах.



Ответ: _____

В3 Найдите корень уравнения $\sqrt{6x-5} = 7$.

Ответ: _____

В4 В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\sin B = \frac{20}{29}$, $AB = 29$. Найдите BC .

Ответ: _____

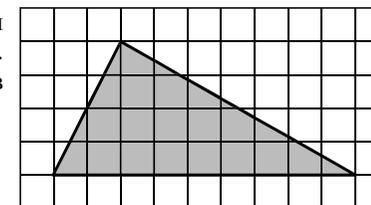
В5 Интернет-провайдер (компания, оказывающая услуги по подключению к сети Интернет) предлагает три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
1. План "0"	Нет	2,5 руб. за 1 Мб
2. План "500"	550 руб. за 500 Мб трафика в месяц	2 руб. за 1 Мб сверх 500 Мб
3. План "800"	700 руб. за 800 Мб трафика в месяц	1,5 руб. за 1 Мб сверх 800 Мб

Пользователь предполагает, что его трафик составит 650 Мб в месяц и, исходя из этого, выбирает наиболее дешевый тарифный план. Сколько рублей заплатит пользователь за месяц, если его трафик действительно будет 650 Мб?

Ответ: _____

В6 На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен треугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

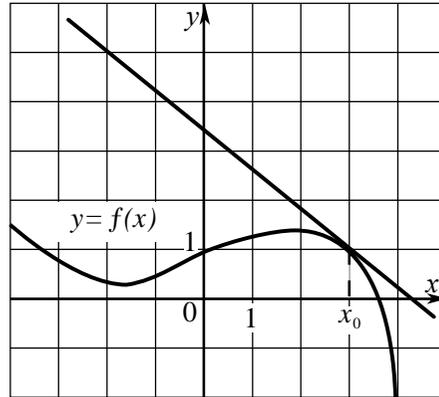


Ответ: _____

В7 Найдите значение выражения: $25^7 \cdot 11^7 : 275^6$.

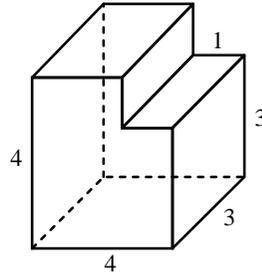
Ответ: _____

B8 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____

B9 Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).



Ответ: _____

B10 Для одного из предприятий-монополистов зависимость объема спроса на продукцию q (единиц в месяц) от её цены p (тыс. руб.) задается формулой $q = 255 - 15p$. Определите максимальный уровень цены p (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = q \cdot p$ составит не менее 990 тыс. руб.

Ответ: _____

B11 Найдите наибольшее значение функции $f(x) = -x^3 - 5x^2 - 7x + 1$ на отрезке $[-2; 0]$.

Ответ: _____

B12 Первая труба пропускает на 3 литра воды за минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды за минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 130 литров она заполняет на 3 минуты дольше, чем вторая труба?

Ответ: _____

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0, \\ \sqrt{y} \\ y - \cos x = 0. \end{cases}$$

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 4$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостями CDD_1 и BDA_1 .

C3 Решите неравенство

$$\left(x + \frac{3}{x}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1}{\sqrt{5 - x} - 1}\right)^2 \geq 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1}{\sqrt{5 - x} - 1}\right)^2.$$

C4 Через середину стороны AB квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образующая с прямой AB угол α , $\operatorname{tg} \alpha = 3$. Найдите площадь треугольника BMT , если сторона квадрата $ABCD$ равна 4.

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых решения неравенства $|2x - a| + 1 \leq |x + 3|$ образуют отрезок длины 1.

C6 Найдите все пары $(x; y)$ целых чисел, удовлетворяющие системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 18x - 20y - 166, \\ 32x - y^2 > x^2 + 12y + 271. \end{cases}$$

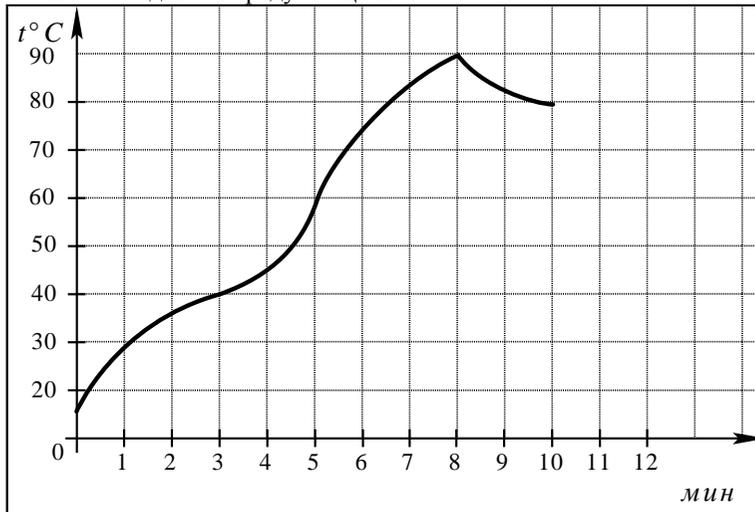
Часть 1

Ответом на задания В1–В12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

- В1** Больному прописано лекарство, которое нужно принимать по 1,5 таблетки 2 раза в день на протяжении 42 дней. Лекарство продается в упаковках по 12 таблеток. Какое наименьшее количество упаковок потребуется на весь курс лечения?

Ответ: _____

- В2** На графике показан процесс разогрева двигателя легкового автомобиля. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее от момента запуска двигателя, на оси ординат — температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, наибольшую температуру, до которой разогрелся двигатель. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: _____

- В3** Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{4}\right)^{3x-11} = 16$.

Ответ: _____

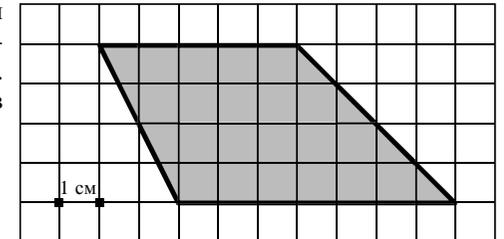
- В4** В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 8$, $\operatorname{tg} A = \frac{3}{4}$. Найдите высоту CH .

Ответ: _____

- В5** Семья из трех человек планирует поездку из Москвы в г. Чебоксары. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине. Билет на поезд на одного человека стоит 800 рублей. Автомобиль расходует 13 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 700 км, а цена бензина равна 19,5 рублей за литр. Сколько рублей будет стоить самая дешевая поездка для этой семьи?

Ответ: _____

- В6** На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.

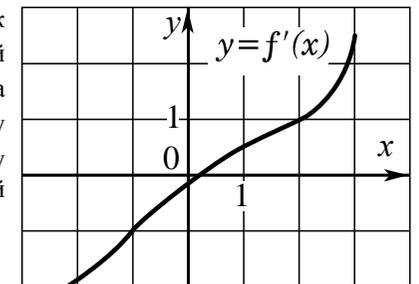


Ответ: _____

- В7** Найдите значение выражения: $3^{\sqrt{3}+1} \cdot 3^{1-\sqrt{3}}$.

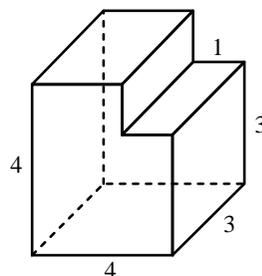
Ответ: _____

- В8** На рисунке изображен график производной $y = f'(x)$ некоторой функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3; 3)$. Укажите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 4 + x$ или совпадает с ней.



Ответ: _____

B9 Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).



Ответ: _____

B10 Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя вычисляется по формуле $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$. При каком значении температуры нагревателя T_1 (в градусах Кельвина) КПД этого двигателя будет равен 60%, если температура холодильника $T_2 = 400$ К?

Ответ: _____

B11 Найдите наименьшее значение функции $f(x) = x^3 + 7x^2 + 11x + 1$ на отрезке $[-3; 0]$.

Ответ: _____

B12 Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми 40 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. Известно, что за час автомобилист проезжает на 70 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт B на 3,5 часа позже автомобилиста. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0, \\ y = -\cos x. \end{cases}$$

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 6$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостями ACD_1 и $A_1 B_1 C_1$.

C3 Решите неравенство

$$\left(x + \frac{4}{x}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 8x + 16} - 1}{\sqrt{6-x} - 1}\right)^2 \geq 5 \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 8x + 16} - 1}{\sqrt{6-x} - 1}\right)^2.$$

C4 Дана трапеция $ABCD$, основания которой $BC = 44$, $AD = 100$, $AB = CD = 35$. Окружность, касающаяся прямых AD и AC , касается стороны CD в точке K . Найдите длину отрезка CK .

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых решения неравенства $|3x - a| + 2 \leq |x - 4|$ образуют отрезок длины 1.

C6 Найдите все пары целых чисел (x, y) , удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 24x - 28y + 167 < 0, \\ x + 2y < \frac{15}{2}. \end{cases}$$

B1	B2	B3	B4	B5	B6
5	6	4	18	1100	15
B7	B8	B9	B10	B11	B12
125	-0,75	45	7	-3	10

C1

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{\sqrt{y}} = 0, \\ y - \cos x = 0. \end{cases}$$

Решение.

Из уравнения $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ находим: $\sin x = \frac{1}{2}$ или $\sin x = 1$.

1) Пусть $\sin x = \frac{1}{2}$, тогда либо $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, и $y = \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$,

либо $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, и $y = \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$ — не дает решения.

2) Пусть $\sin x = 1$, тогда $y = \cos x = 0$ — не дает решения.

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

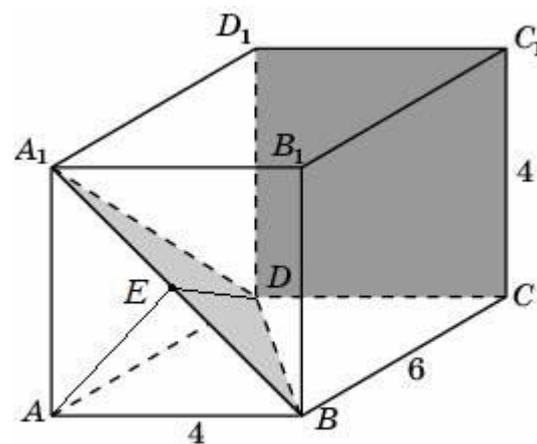
Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за того, что в решении не учтено, что знаменатель дроби существует и отличен от нуля.	1
Обоснованно получен правильный ответ.	2

C2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 4, BC = 6, CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостями CDD_1 и BDA_1 .

Решение.

Вместо плоскости CDD_1 возьмем параллельную ей плоскость ABB_1 . Пусть E — середина BA_1 . $DE \perp BA_1, AE \perp BA_1$. Значит, угол DEA — линейный угол искомого угла. Из прямоугольного треугольника DAE находим:



$$\operatorname{tg} \angle DEA = \frac{AD}{AE} = \frac{6}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Обоснованно получен правильный ответ.	2

С3 Решите неравенство

$$\left(x + \frac{3}{x}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1}{\sqrt{5-x} - 1}\right)^2 \geq 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1}{\sqrt{5-x} - 1}\right)^2.$$

Решение.

Решение неравенства ищем при условиях:

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ 5 - x \geq 0, \text{ откуда} \\ 5 - x \neq 1 \end{cases} \begin{cases} x \leq 5, \\ x \neq 0, \\ x \neq 4. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

1) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 1$, т.е. $|x - 3| = 1$ и, значит, $x = 2$ или $x = 4$.

Значит, $x = 2$ — решение задачи.

2) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} \neq 1$. Разделив обе части неравенства на $\left(\frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1}{\sqrt{5-x} - 1}\right)^2$,

получим: $x + \frac{3}{x} \geq 4$, откуда $\frac{(x-1)(x-3)}{x} \geq 0$. Решим это неравенство:

$$0 < x \leq 1, \quad x \geq 3.$$

С учетом ограничений получаем: $0 < x \leq 1, x = 2, 3 \leq x < 4, 4 < x \leq 5$.

Ответ: $0 < x \leq 1, x = 2, 3 \leq x < 4, 4 < x \leq 5$.

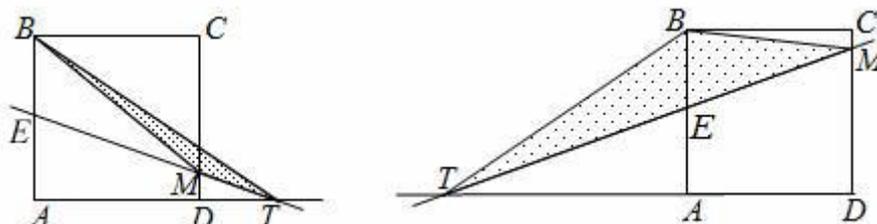
Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1

Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Обоснованно получен правильный ответ.	3

C4

Через середину стороны AB квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образующая с прямой AB угол α , $\operatorname{tg} \alpha = 3$. Найдите площадь треугольника BMT , если сторона квадрата $ABCD$ равна 4.

Решение.



Рассмотрим два случая (см. рис. 1 и рис. 2):

$$1) S_{\Delta BMT} = S_{\Delta BTE} - S_{\Delta BME} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AT - \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AD =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot BE \cdot (AE \cdot \operatorname{tg} \alpha - AD) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2 \cdot 3 - 4) = 2.$$

$$2) S_{\Delta BMT} = S_{\Delta BTE} + S_{\Delta BME} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AT + \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AD =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot BE \cdot (AE \cdot \operatorname{tg} \alpha + AD) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2 \cdot 3 + 4) = 10.$$

Ответ: 2 или 10.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3

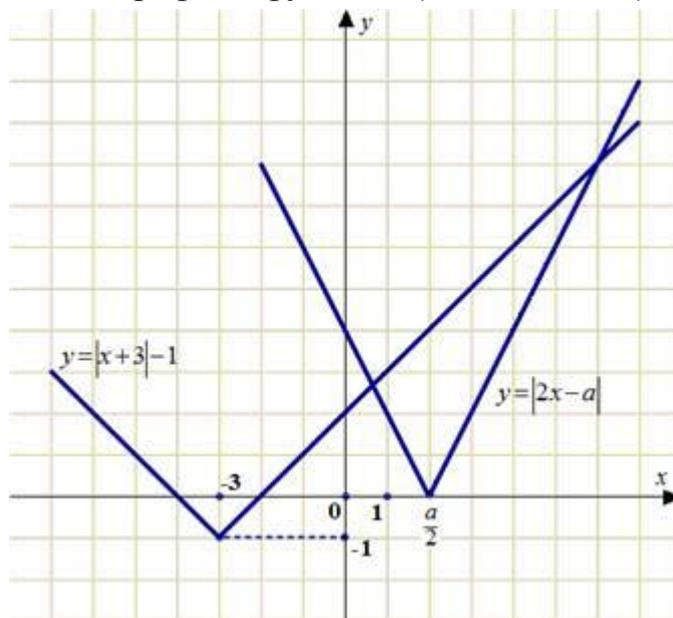
C5

Найдите все значения a , при каждом из которых решения неравенства $|2x - a| + 1 \leq |x + 3|$ образуют отрезок длины 1.

Решение.

Перенесем единицу: $|2x - a| \leq |x + 3| - 1$.

Построим схематично графики функций $y = |2x - a|$ и $y = |x + 3| - 1$.



На рисунке видно, что неравенство имеет решения только при $\frac{a}{2} \leq -4$ или $\frac{a}{2} \geq -2$.

$$1) \begin{cases} a \leq -8, \\ |2x - a| \leq -x - 4; \end{cases} \begin{cases} a \leq -8, \\ 2x - a \leq -x - 4, \\ 2x - a \geq x + 4; \end{cases} \begin{cases} a \leq -8, \\ x \leq \frac{a - 4}{3}, \\ x \geq a + 4. \end{cases}$$

Решения образуют отрезок длины 1, если $\frac{a - 4}{3} - (a + 4) = 1$, откуда $a = -\frac{19}{2}$.

$$2) \begin{cases} a \geq -4, \\ |2x - a| \leq x + 2; \end{cases} \begin{cases} a \geq -4, \\ 2x - a \leq x + 2, \\ 2x - a \geq -x - 2; \end{cases} \begin{cases} a \geq -4, \\ x \leq a + 2, \\ x \geq \frac{a - 2}{3}. \end{cases}$$

Решения образуют отрезок длины 1, если $a + 2 - \frac{a-2}{3} = 1$, откуда $a = -\frac{5}{2}$.

Ответ: $a = -\frac{5}{2}$, $a = -\frac{19}{2}$.

Содержание критерия	Балл
Все ситуации, отличные от описанных ниже.	0
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдены промежутки, содержащие правильные значения параметра.	1
Ответ неверен, но в решении представлена правильная графическая интерпретация или правильная аналитика.	2
Либо получен верный ответ, но при его обосновании допущены ошибки, либо обоснованно получен ответ, отличный от верного только из-за потери одного из значений параметра.	3
Обоснованно получен верный ответ.	4

С6 Найдите все пары $(x; y)$ целых чисел, удовлетворяющие системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 18x - 20y - 166, \\ 32x - y^2 > x^2 + 12y + 271. \end{cases}$$

Решение.

Выделяя полные квадраты, получаем:

$$\begin{cases} (x-9)^2 + (y+10)^2 < 15, \\ (x-16)^2 + (y+6)^2 < 21, \\ x, y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Из первого и второго неравенств системы:

$$\begin{cases} (x-9)^2 < 15, \\ (x-16)^2 < 21; \end{cases} \begin{cases} 6 \leq x \leq 12, \\ 12 \leq x \leq 20; \end{cases} \quad x = 12.$$

Подставляя $x = 12$ в систему, получаем:

$$\begin{cases} (y+10)^2 < 6, \\ (y+6)^2 < 5, \\ y \in \mathbb{Z}; \end{cases} \begin{cases} -2 \leq y+10 \leq 2, \\ -2 \leq y+6 \leq 2, \\ y \in \mathbb{Z}; \end{cases} \begin{cases} -12 \leq y \leq -8, \\ -8 \leq y \leq -4, \\ y \in \mathbb{Z}; \end{cases} \quad y = -8.$$

Ответ: $(12; -8)$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Решения ищутся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Ответ неверен, однако есть попытка провести перебор с использованием геометрических или аналитических соображений.	2
Ответ неверен из-за арифметической ошибки, но правильно обозначена идея перебора основанная на выделении полного квадрата.	3
Обоснованно получен правильный ответ.	4

B1	B2	B3	B4	B5	B6
3	90	2	5	1592,5	35
B7	B8	B9	B10	B11	B12
25	1	45	1000	3	9

C1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{2\sin^2 x + 3\sin x + 1}{\sqrt{-y}} = 0, \\ y = -\cos x. \end{cases}$$

Решение.

Из уравнения $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$ находим: $\sin x = -\frac{1}{2}$ или $\sin x = -1$.

1) Пусть $\sin x = -\frac{1}{2}$, тогда либо $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и

$$y = -\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0,$$

либо $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и $y = -\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ — не дает решения.

2) Пусть $\sin x = -1$, тогда $y = -\cos x = 0$ — не дает решения.

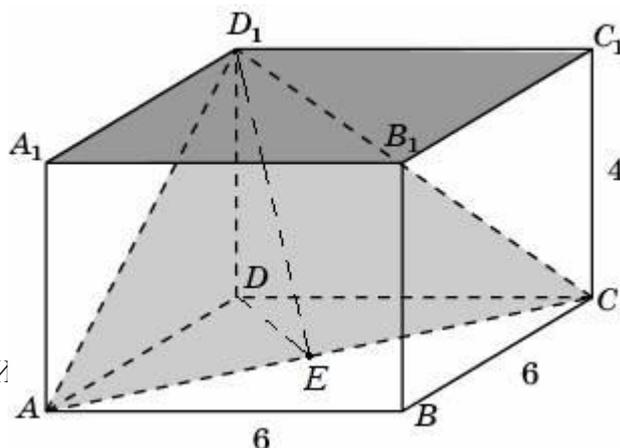
Ответ: $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за того, что в решении не учтено, что знаменатель дроби существует и отличен от нуля.	1
Обоснованно получен правильный ответ.	2

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 6$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостями ACD_1 и $A_1 B_1 C_1$.

Решение.

Вместо плоскости $A_1 B_1 C_1$ возьмем параллельную ей плоскость ABC . Пусть E — середина AC . $D_1 E \perp AC$, $DE \perp AC$. Значит, угол DED_1 — линейный угол искомого угла. Из



прямоугольного треугольника D_1DE находим:

$$\operatorname{tg} \angle DED_1 = \frac{DD_1}{DE} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Обоснованно получен правильный ответ.	2

С3 Решите неравенство

$$\left(x + \frac{4}{x}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 8x + 16} - 1}{\sqrt{6-x} - 1}\right)^2 \geq 5 \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 8x + 16} - 1}{\sqrt{6-x} - 1}\right)^2.$$

Решение.

Решение неравенства ищем при условиях: $\begin{cases} x \neq 0, \\ 6-x \geq 0 \\ 6-x \neq 1 \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x \leq 6, \\ x \neq 0, \\ x \neq 5. \end{cases}$

Рассмотрим два случая:

1) $\sqrt{x^2 - 8x + 16} = 1$, т.е. $|x - 4| = 1$ и, значит, $x = 3$ или $x = 5$.

Значит, $x = 3$ — решение задачи.

2) $\sqrt{x^2 - 8x + 16} \neq 1$. Разделив обе части неравенства на $\left(\frac{\sqrt{x^2 - 8x + 16} - 1}{\sqrt{6-x} - 1}\right)^2$, получим: $x + \frac{4}{x} \geq 5$, откуда $\frac{(x-1)(x-4)}{x} \geq 0$. Решим это

неравенство:

$$0 < x \leq 1, \quad x \geq 4.$$

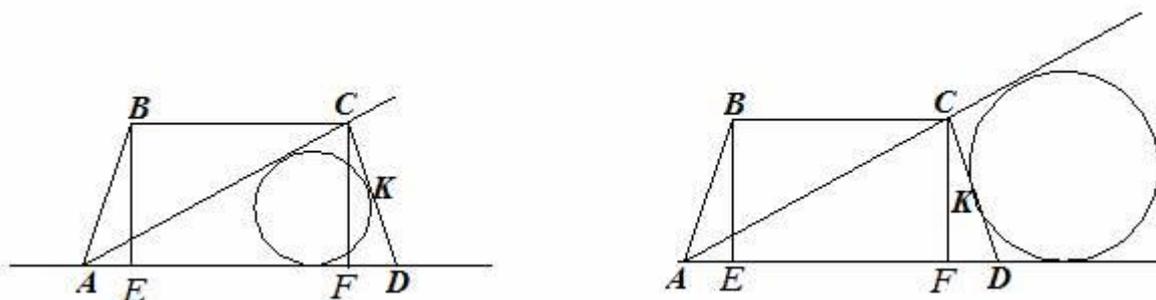
С учетом ограничений получаем: $0 < x \leq 1, x = 3, 4 \leq x < 5, 5 < x \leq 6$.

Ответ: $0 < x \leq 1, x = 3, 4 \leq x < 5, 5 < x \leq 6$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Обоснованно получен правильный ответ.	3

- С4** Дана трапеция $ABCD$, основания которой $BC = 44$, $AD = 100$, $AB = CD = 35$. Окружность, касающаяся прямых AD и AC , касается стороны CD в точке K . Найдите длину отрезка CK .

Решение.



Найдем диагональ AC . Опустим из вершин B и C на сторону AD перпендикуляры BE и CF соответственно. $AE = FD$, так как трапеция равнобедренная. $BCFE$ – прямоугольник.

$$AE = \frac{100 - 44}{2} = 28, \quad BE = \sqrt{35^2 - 28^2} = 21,$$

$$AC = \sqrt{AF^2 + CF^2} = \sqrt{72^2 + 21^2} = 75.$$

Возможны две геометрические конфигурации.

Первый случай: окружность вписана в треугольник ACD .

$$CK = \frac{AC + CD - AD}{2} = \frac{75 + 35 - 100}{2} = 5.$$

Второй вариант: окружность касается продолжений сторон AC и AD за точками C и D соответственно и отрезка CD .

$$CK = \frac{AD + CD - AC}{2} = \frac{100 + 35 - 75}{2} = 30.$$

Ответ: 5 или 30.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3

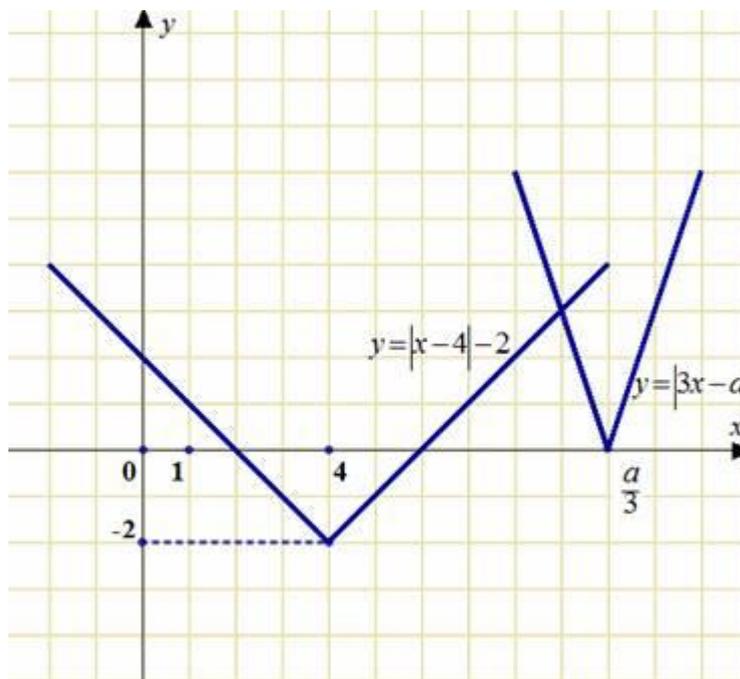
C5

Найдите все значения a , при каждом из которых решения неравенства $|3x - a| + 2 \leq |x - 4|$ образуют отрезок длины 1.

Решение.

Перенесем двойку: $|3x - a| \leq |x - 4| - 2$.

Построим схематично графики функций $y = |3x - a|$ и $y = |x - 4| - 2$.



На рисунке видно, что неравенство имеет решения только при $\frac{a}{3} \leq 2$ или

$$\frac{a}{3} \geq 6.$$

$$1) \begin{cases} a \leq 6 \\ |3x - a| \leq -x + 2; \end{cases} \begin{cases} a \leq 6, \\ 3x - a \leq -x + 2, \\ 3x - a \geq x - 2; \end{cases} \begin{cases} a \leq 6, \\ x \leq \frac{a+2}{4}, \\ x \geq \frac{a-2}{2}. \end{cases}$$

Решения образуют отрезок длины 1, если $\frac{a+2}{4} - \frac{a-2}{2} = 1$, откуда $a = 2$.

$$2) \begin{cases} a \geq 18, \\ |3x - a| \leq x - 6; \end{cases} \begin{cases} a \geq 18, \\ 3x - a \leq x - 6, \\ 3x - a \geq -x + 6; \end{cases} \begin{cases} a \geq 18, \\ x \leq \frac{a-6}{2}, \\ x \geq \frac{a+6}{4}. \end{cases}$$

Решения образуют отрезок длины 1, если $\frac{a-6}{2} - \frac{a+6}{4} = 1$, откуда $a = 22$.

Ответ: $a = 2, a = 22$.

Содержание критерия	Балл
Все ситуации, отличные от описанных ниже.	0
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдены некоторые из искомых значений параметра.	1
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдено хотя бы один верный интервал значений параметра.	2
Либо получен верный ответ, но при его обосновании допущены ошибки, либо обоснованно получен ответ, отличный от верного только из-за потери (приобретения) одного–двух искомых значений параметра.	3
Обоснованно получен верный ответ.	4

С6 Найдите все пары целых чисел (x, y) , удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 24x - 28y + 167 < 0, \\ x + 2y < \frac{15}{2}. \end{cases}$$

Решение.

Выделяя полные квадраты, получаем:

$$\begin{cases} (x+6)^2 + (y-7)^2 < \frac{3}{2} = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2, \\ x + 2y < \frac{15}{2}, \\ x, y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Первое неравенство имеет пять пар решений:

$(-6; 7), (-5; 7), (-6; 8), (-7; 7), (-6; 6)$.

Второму условию системы удовлетворяют только четвёртая и пятая пары.

Ответ: $(-7; 7), (-6; 6)$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Решения ищутся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Ответ неверен, однако есть попытка провести перебор с использованием геометрических или аналитических соображений.	2
Ответ неверен из-за арифметической ошибки, но правильно обозначена идея перебора основанная на выделении полного квадрата.	3
Обоснованно получен правильный ответ.	4

B1	B2	B3	B4	B5	B6
4	4	9	21	700	18
B7	B8	B9	B10	B11	B12
275	-0,8	45	11	4	10

C1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{\sqrt{y}} = 0, \\ y - \cos x = 0. \end{cases}$$

Решение.

Из уравнения $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ находим: $\sin x = \frac{1}{2}$ или $\sin x = 1$.

1) Пусть $\sin x = \frac{1}{2}$, тогда либо $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, и $y = \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$,

либо $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, и $y = \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$ — не дает решения.

2) Пусть $\sin x = 1$, тогда $y = \cos x = 0$ — не дает решения.

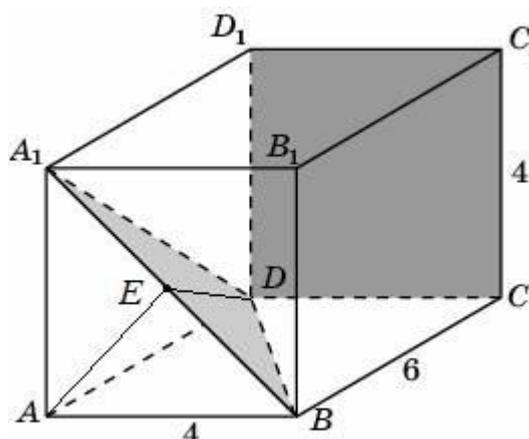
Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за того, что в решении не учтено, что знаменатель дроби существует и отличен от нуля.	1
Обоснованно получен правильный ответ.	2

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 4$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостями CDD_1 и BDA_1 .

Решение.

Вместо плоскости CDD_1 возьмем параллельную ей плоскость ABB_1 . Пусть E — середина BA_1 . $DE \perp BA_1$, $AE \perp BA_1$. Значит, угол DEA — линейный угол искомого угла. Из прямоугольного треугольника DAE находим:



$$\operatorname{tg} \angle DEA = \frac{AD}{AE} = \frac{6}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Обоснованно получен правильный ответ.	2

С3 Решите неравенство

$$\left(x + \frac{3}{x}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1}{\sqrt{5-x} - 1}\right)^2 \geq 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1}{\sqrt{5-x} - 1}\right)^2.$$

Решение.

Решение неравенства ищем при условиях: $\begin{cases} x \neq 0, \\ 5-x \geq 0, \\ 5-x \neq 1 \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x \leq 5, \\ x \neq 0, \\ x \neq 4. \end{cases}$

Рассмотрим два случая:

1) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 1$, т.е. $|x - 3| = 1$ и, значит, $x = 2$ или $x = 4$.

Значит, $x = 2$ — решение задачи.

2) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} \neq 1$. Разделив обе части неравенства на $\left(\frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1}{\sqrt{5-x} - 1}\right)^2$,

получим: $x + \frac{3}{x} \geq 4$, откуда $\frac{(x-1)(x-3)}{x} \geq 0$. Решим это неравенство:

$$0 < x \leq 1, \quad x \geq 3.$$

С учетом ограничений получаем: $0 < x \leq 1, x = 2, 3 \leq x < 4, 4 < x \leq 5$.

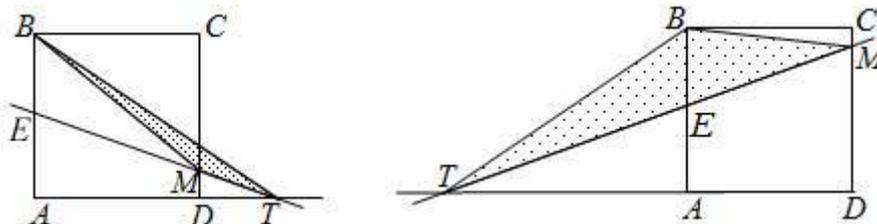
Ответ: $0 < x \leq 1, x = 2, 3 \leq x < 4, 4 < x \leq 5$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Обоснованно получен правильный ответ.	3

C4

Через середину стороны AB квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образующая с прямой AB угол α , $\operatorname{tg}\alpha = 3$. Найдите площадь треугольника BMT , если сторона квадрата $ABCD$ равна 4.

Решение.



Рассмотрим два случая (см. рис. 1 и рис. 2):

$$1) S_{\Delta BMT} = S_{\Delta BTE} - S_{\Delta BME} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AT - \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AD = \\ = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot (AE \cdot \operatorname{tg}\alpha - AD) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2 \cdot 3 - 4) = 2.$$

$$2) S_{\Delta BMT} = S_{\Delta BTE} + S_{\Delta BME} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AT + \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AD = \\ = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot (AE \cdot \operatorname{tg}\alpha + AD) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2 \cdot 3 + 4) = 10.$$

Ответ: 2 или 10.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3

C5

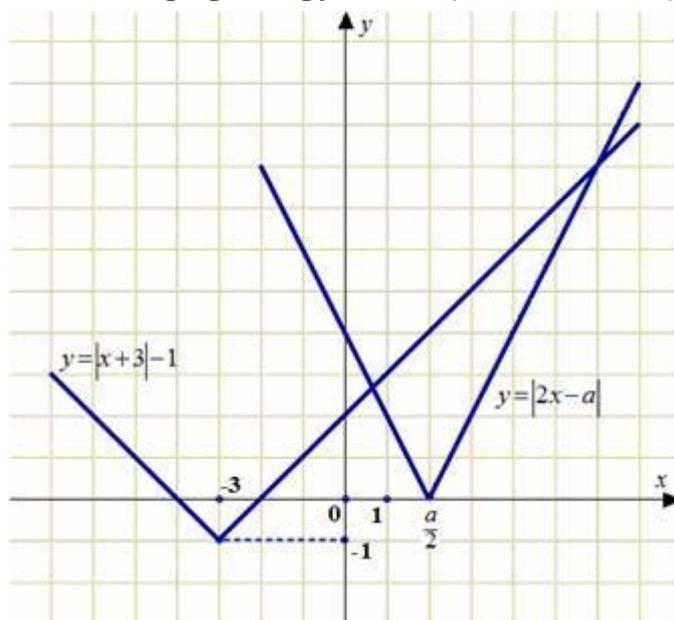
Найдите все значения a , при каждом из которых решения неравенства $|2x - a| + 1 \leq |x + 3|$ образуют отрезок длины 1.

Решение.

Перенесем единицу:

$$|2x - a| \leq |x + 3| - 1.$$

Построим схематично графики функций $y = |2x - a|$ и $y = |x + 3| - 1$.



На рисунке видно, что неравенство имеет решения только при $\frac{a}{2} \leq -4$ или $\frac{a}{2} \geq -2$.

$$1) \begin{cases} a \leq -8, \\ |2x - a| \leq -x - 4; \end{cases} \begin{cases} a \leq -8, \\ 2x - a \leq -x - 4, \\ 2x - a \geq x + 4; \end{cases} \begin{cases} a \leq -8, \\ x \leq \frac{a - 4}{3}, \\ x \geq a + 4. \end{cases}$$

Решения образуют отрезок длины 1, если $\frac{a - 4}{3} - (a + 4) = 1$, откуда $a = -\frac{19}{2}$.

$$2) \begin{cases} a \geq -4, \\ |2x - a| \leq x + 2; \end{cases} \begin{cases} a \geq -4, \\ 2x - a \leq x + 2, \\ 2x - a \geq -x - 2; \end{cases} \begin{cases} a \geq -4, \\ x \leq a + 2, \\ x \geq \frac{a - 2}{3}. \end{cases}$$

Решения образуют отрезок длины 1, если $a + 2 - \frac{a-2}{3} = 1$, откуда $a = -\frac{5}{2}$.

Ответ: $a = -\frac{5}{2}$, $a = -\frac{19}{2}$.

Содержание критерия	Балл
Все ситуации, отличные от описанных ниже.	0
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдены промежутки, содержащие правильные значения параметра.	1
Ответ неверен, но в решении представлена правильная графическая интерпретация или правильная аналитика.	2
Либо получен верный ответ, но при его обосновании допущены ошибки, либо обоснованно получен ответ, отличный от верного только из-за потери одного из значений параметра.	3
Обоснованно получен верный ответ.	4

С6 Найдите все пары $(x; y)$ целых чисел, удовлетворяющие системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 18x - 20y - 166, \\ 32x - y^2 > x^2 + 12y + 271. \end{cases}$$

Решение.

Выделяя полные квадраты, получаем:

$$\begin{cases} (x-9)^2 + (y+10)^2 < 15, \\ (x-16)^2 + (y+6)^2 < 21, \\ x, y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Из первого и второго неравенств системы:

$$\begin{cases} (x-9)^2 < 15, \\ (x-16)^2 < 21; \end{cases} \begin{cases} 6 \leq x \leq 12, \\ 12 \leq x \leq 20; \end{cases} \quad x = 12.$$

Подставляя $x = 12$ в систему, получаем:

$$\begin{cases} (y+10)^2 < 6, \\ (y+6)^2 < 5, \\ y \in \mathbb{Z}; \end{cases} \begin{cases} -2 \leq y+10 \leq 2, \\ -2 \leq y+6 \leq 2, \\ y \in \mathbb{Z}; \end{cases} \begin{cases} -12 \leq y \leq -8, \\ -8 \leq y \leq -4, \\ y \in \mathbb{Z}; \end{cases} \quad y = -8.$$

Ответ: $(12; -8)$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Решения ищутся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Ответ неверен, однако есть попытка провести перебор с использованием геометрических или аналитических соображений.	2
Ответ неверен из-за арифметической ошибки, но правильно обозначена идея перебора основанная на выделении полного квадрата.	3
Обоснованно получен правильный ответ.	4

B1	B2	B3	B4	B5	B6
11	90	3	3	1774,5	24
B7	B8	B9	B10	B11	B12
9	2	45	1000	-4	10

C1

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{2\sin^2 x + 3\sin x + 1}{\sqrt{-y}} = 0, \\ y = -\cos x. \end{cases}$$

Решение.

Из уравнения $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$ находим: $\sin x = -\frac{1}{2}$ или $\sin x = -1$.

1) Пусть $\sin x = -\frac{1}{2}$, тогда либо $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и

$$y = -\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0,$$

либо $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и $y = -\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ — не дает решения.

2) Пусть $\sin x = -1$, тогда $y = -\cos x = 0$ — не дает решения.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

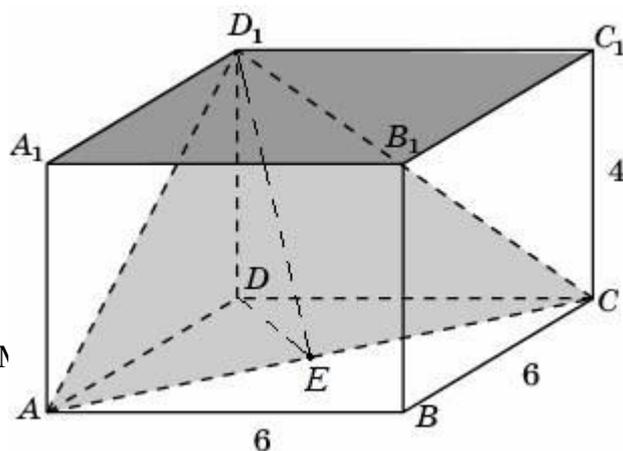
Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за того, что в решении не учтено, что знаменатель дроби существует и отличен от нуля.	1
Обоснованно получен правильный ответ.	2

C2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 6$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостями ACD_1 и $A_1 B_1 C_1$.

Решение.

Вместо плоскости $A_1 B_1 C_1$ возьмем параллельную ей плоскость ABC . Пусть E — середина AC . $D_1 E \perp AC$, $DE \perp AC$. Значит, угол DED_1 — линейный угол искомого угла.



Из прямоугольного треугольника D_1DE находим:

$$\operatorname{tg} \angle DED_1 = \frac{DD_1}{DE} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Обоснованно получен правильный ответ.	2

С3 Решите неравенство

$$\left(x + \frac{4}{x}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 8x + 16} - 1}{\sqrt{6-x-1}}\right)^2 \geq 5 \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 8x + 16} - 1}{\sqrt{6-x-1}}\right)^2.$$

Решение.

Решение неравенства ищем при условиях: $\begin{cases} x \neq 0, \\ 6-x \geq 0 \\ 6-x \neq 1 \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x \leq 6, \\ x \neq 0, \\ x \neq 5. \end{cases}$

Рассмотрим два случая:

1) $\sqrt{x^2 - 8x + 16} = 1$, т.е. $|x - 4| = 1$ и, значит, $x = 3$ или $x = 5$.

Значит, $x = 3$ — решение задачи.

2) $\sqrt{x^2 - 8x + 16} \neq 1$. Разделив обе части неравенства на $\left(\frac{\sqrt{x^2 - 8x + 16} - 1}{\sqrt{6-x-1}}\right)^2$, получим: $x + \frac{4}{x} \geq 5$, откуда $\frac{(x-1)(x-4)}{x} \geq 0$. Решим это

неравенство:

$$0 < x \leq 1, \quad x \geq 4.$$

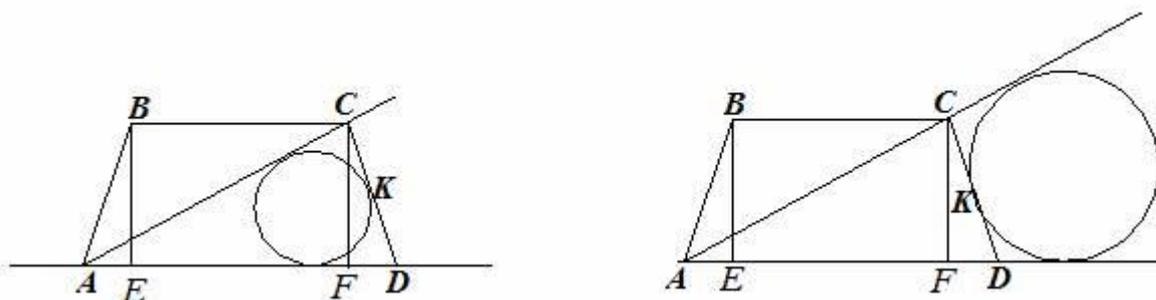
С учетом ограничений получаем: $0 < x \leq 1, x = 3, 4 \leq x < 5, 5 < x \leq 6$.

Ответ: $0 < x \leq 1, x = 3, 4 \leq x < 5, 5 < x \leq 6$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Обоснованно получен правильный ответ.	3

С4 Дана трапеция $ABCD$, основания которой $BC = 44$, $AD = 100$, $AB = CD = 35$. Окружность, касающаяся прямых AD и AC , касается стороны CD в точке K . Найдите длину отрезка CK .

Решение.



Найдем диагональ AC . Опустим из вершин B и C на сторону AD перпендикуляры BE и CF соответственно. $AE = FD$, так как трапеция равнобедренная. $BCFE$ – прямоугольник.

$$AE = \frac{100 - 44}{2} = 28, \quad BE = \sqrt{35^2 - 28^2} = 21,$$

$$AC = \sqrt{AF^2 + CF^2} = \sqrt{72^2 + 21^2} = 75.$$

Возможны две геометрические конфигурации.

Первый случай: окружность вписана в треугольник ACD .

$$CK = \frac{AC + CD - AD}{2} = \frac{75 + 35 - 100}{2} = 5.$$

Второй вариант: окружность касается продолжений сторон AC и AD за точками C и D соответственно и отрезка CD .

$$CK = \frac{AD + CD - AC}{2} = \frac{100 + 35 - 75}{2} = 30.$$

Ответ: 5 или 30.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже.	0
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3

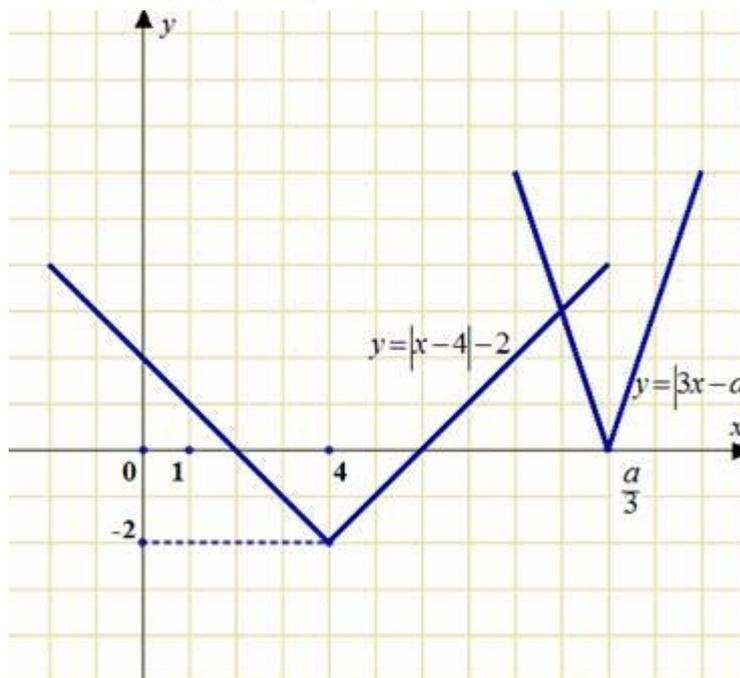
C5

Найдите все значения a , при каждом из которых решения неравенства $|3x - a| + 2 \leq |x - 4|$ образуют отрезок длины 1.

Решение.

Перенесем двойку: $|3x - a| \leq |x - 4| - 2$.

Построим схематично графики функций $y = |3x - a|$ и $y = |x - 4| - 2$.



На рисунке видно, что неравенство имеет решения только при $\frac{a}{3} \leq 2$ или

$$\frac{a}{3} \geq 6.$$

$$1) \begin{cases} a \leq 6 \\ |3x - a| \leq -x + 2; \end{cases} \begin{cases} a \leq 6, \\ 3x - a \leq -x + 2, \\ 3x - a \geq x - 2; \end{cases} \begin{cases} a \leq 6, \\ x \leq \frac{a+2}{4}, \\ x \geq \frac{a-2}{2}. \end{cases}$$

Решения образуют отрезок длины 1, если $\frac{a+2}{4} - \frac{a-2}{2} = 1$, откуда $a = 2$.

$$2) \begin{cases} a \geq 18, \\ |3x - a| \leq x - 6; \end{cases} \begin{cases} a \geq 18, \\ 3x - a \leq x - 6, \\ 3x - a \geq -x + 6; \end{cases} \begin{cases} a \geq 18, \\ x \leq \frac{a-6}{2}, \\ x \geq \frac{a+6}{4}. \end{cases}$$

Решения образуют отрезок длины 1, если $\frac{a-6}{2} - \frac{a+6}{4} = 1$, откуда $a = 22$.

Ответ: $a = 2, a = 22$.

Содержание критерия	Балл
Все ситуации, отличные от описанных ниже.	0
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдены некоторые из искомых значений параметра.	1
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдено хотя бы один верный интервал значений параметра.	2
Либо получен верный ответ, но при его обосновании допущены ошибки, либо обоснованно получен ответ, отличный от верного только из-за потери (приобретения) одного–двух искомых значений параметра.	3
Обоснованно получен верный ответ.	4

С6 Найдите все пары целых чисел (x, y) , удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 24x - 28y + 167 < 0, \\ x + 2y < \frac{15}{2}. \end{cases}$$

Решение.

Выделяя полные квадраты, получаем:

$$\begin{cases} (x+6)^2 + (y-7)^2 < \frac{3}{2} = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2, \\ x + 2y < \frac{15}{2}, \\ x, y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Первое неравенство имеет пять пар решений:

$(-6; 7), (-5; 7), (-6; 8), (-7; 7), (-6; 6)$.

Второму условию системы удовлетворяют только четвёртая и пятая пары.

Ответ: $(-7; 7), (-6; 6)$.

Содержание критерия	Балл
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Решения ищутся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Ответ неверен, однако есть попытка провести перебор с использованием геометрических или аналитических соображений.	2
Ответ неверен из-за арифметической ошибки, но правильно обозначена идея перебора основанная на выделении полного квадрата.	3
Обоснованно получен правильный ответ.	4