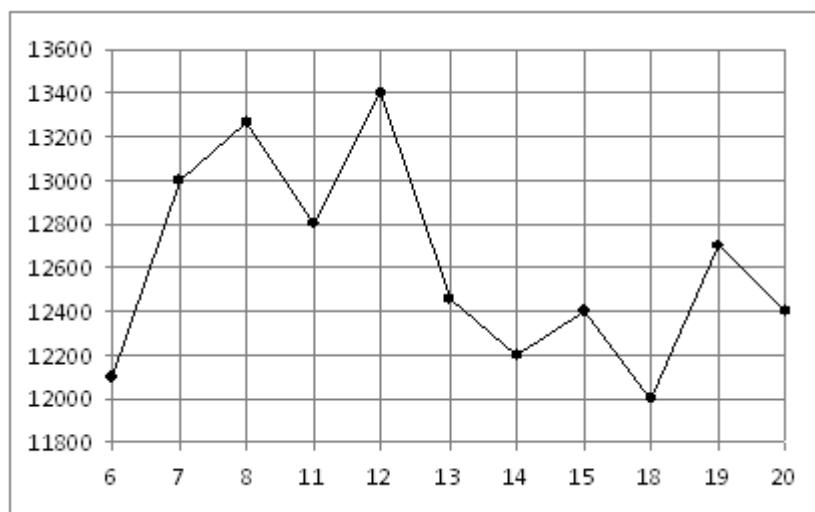


Диагностическая работа по математике.**11 класс. 19 ноября 2009 года.****Вариант 01****Часть 1**

Ответом на задания В1-В12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно. Записывайте ответы под номером задания

- B1** Керамическая плитка стоит 150 рублей за штуку. Какое наибольшее число таких плиток можно купить на 500 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 25%?

- B2** На рисунке жирными точками показана цена никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 6 по 20 мая 2009 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны никеля в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшую цену никеля на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за тонну).



- B3** Найдите корень уравнения $\sqrt{2x - 5} = 3$.

- B4** В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC боковая сторона AB равна 15, а $\cos A = \frac{3}{5}$. Найдите высоту, проведенную к основанию.

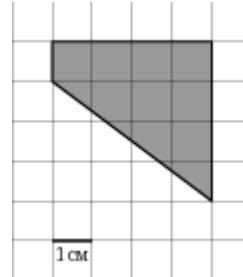
B5

Для остекления веранды требуется заказать 20 одинаковых стекол в одной из трех фирм. Площадь каждого стекла $0,25 \text{ м}^2$. В таблице приведены цены на стекло и на резку стекол. Сколько рублей будет стоить самый дешевый заказ?

Фирма	Цена стекла (руб. за 1 м^2)	Резка стекла (руб. за одно стекло)	Дополнительные условия
A	300	17	
Б	320	13	
В	340	8	При заказе на сумму больше 2500 руб. резка бесплатно.

B6

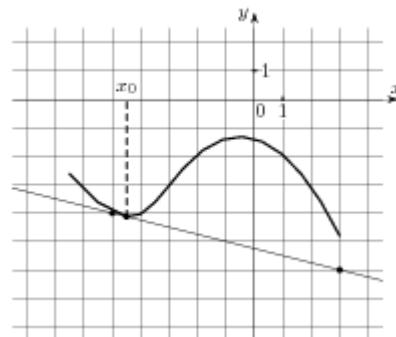
На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см \times 1 см изображена фигура (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.

**B7**

Найдите значение выражения: $7^2 \cdot 3^7 : 21^2$.

B8

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

**B9**

Объем прямоугольного параллелепипеда равен 1. Каждое ребро этого параллелепипеда увеличили в 2 раза. Найдите объем получившегося параллелепипеда.

B10

Для одного из предприятий-монополистов зависимость объёма спроса на продукцию q (единиц в месяц) от её цены p (тыс. руб.) задаётся формулой: $q = 40 - 5p$. Определите максимальное значение цены p (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = q \cdot p$ составит не менее 75 тыс. руб.

B11 Найдите наибольшее значение функции $y = 9x - 8\sin x + 3$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

B12 Два велосипедиста одновременно отправились в 192-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 4 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 4 часа раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

Часть 2

Выполняя задания С1-С6, запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите систему

$$\begin{cases} \frac{\sin 2x - \cos x}{\sqrt{y+1}} = 0, \\ y = 4 \sin x - 3. \end{cases}$$

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AA_1 = 4$, $A_1D_1 = 6$, $C_1D_1 = 6$, найдите тангенс угла между плоскостью ADD_1 и прямой EF , проходящей через середины ребер AB и B_1C_1 .

C3 Решите неравенство

$$\sqrt{7-x} < \frac{\sqrt{x^3 - 6x^2 + 14x - 7}}{\sqrt{x-1}}.$$

C4 Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 2$, $BC = 3$, $\angle A = 60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x+ax+a \geq 0, \\ x-2a-2 \\ x+ax > 8 \end{cases}$$

не имеет решений.

C6

Множество A состоит из натуральных чисел. Количество чисел в A больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из A равно 210. Для любых двух чисел из A их наибольший общий делитель больше единицы. Произведение всех чисел из A делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа. Найти числа, из которых состоит A .

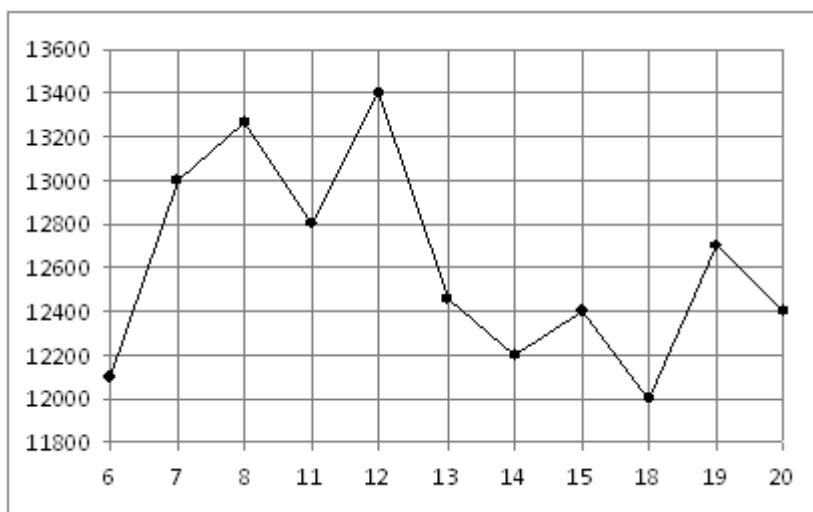
Диагностическая работа по математике.
11 класс. 19 ноября 2009 года.
Вариант 02

Часть 1

Ответом на задания В1-В12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно. Записывайте ответы под номером задания

В1 Лампочка стоит 20 рублей. Какое наибольшее число таких лампочек можно будет купить на 700 рублей после повышения цены на 10%?

В2 На рисунке жирными точками показана цена никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 6 по 20 мая 2009 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны никеля в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшую цену никеля на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за тонну).



В3 Найдите корень уравнения $\sqrt{3x-5} = 7$.

В4 В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 14$, $AC = 7\sqrt{3}$. Найдите $\sin A$.

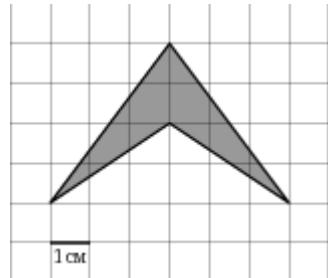
В5

Для изготовления книжных полок требуется заказать 30 одинаковых стекол в одной из трех фирм. Площадь каждого стекла $0,35 \text{ м}^2$. В таблице приведены цены на стекло, а также на резку стекол и шлифовку края. Сколько рублей будет стоить самый дешевый заказ?

Фирма	Цена стекла (руб. за 1 м^2)	Резка и шлифовка (руб. за одно стекло)
А	390	85
Б	410	75
В	430	65

B6

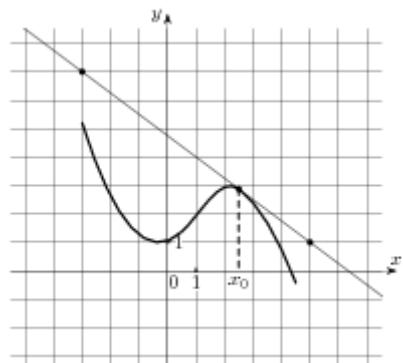
На клетчатой бумаге с клетками размером $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ изображена фигура (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.

**B7**

Найдите значение выражения: $11^6 \cdot 3^6 : 33^5$.

B8

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

**B9**

Объем прямоугольного параллелепипеда равен 1. Каждое ребро этого параллелепипеда увеличили в 2 раза. Найдите объем получившегося параллелепипеда.

B10

В боковой стенке цилиндрического бака вблизи дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём меняется по закону $H(t) = at^2 + bt + H_0$, где $H_0 = 4,5$ — начальный уровень воды, $a = \frac{1}{200}$ и $b = -\frac{3}{10}$ — постоянные. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? (Ответ дайте в минутах.)

B11

Найдите наибольшее значение функции $y = 17x - 7 \sin x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

B12

Два велосипедиста одновременно отправились в 104-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 5 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 5 часов раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

Часть 2

Выполняя задания С1-С6, запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1

Решите систему

$$\begin{cases} \frac{\sin 2x + \cos x}{\sqrt{y-1}} = 0, \\ y = 4 \sin x + 3. \end{cases}$$

C2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 4$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостью ABC и прямой EF , проходящей через середины ребер AA_1 и C_1D_1 .

C3

Решите неравенство

$$\sqrt{5-x} < \frac{\sqrt{x^3 - 7x^2 + 14x - 5}}{\sqrt{x-1}}.$$

C4

Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 3$, $BC = 5$, $\angle A = 60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.

C5

Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \frac{x+ax+a}{x-2a-2} \geq 0, \\ x+ax > 8 \end{cases}$$

не имеет решений.

C6

Множество A состоит из натуральных чисел. Количество чисел в A больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из A равно 210. Для любых двух чисел из A их наибольший общий делитель больше единицы. Произведение всех чисел из A делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа. Найти числа, из которых состоит A .

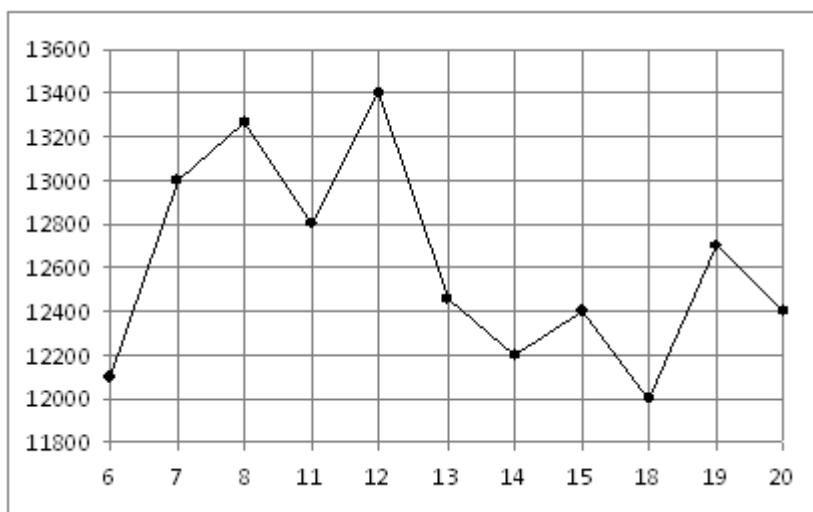
Диагностическая работа по математике.
11 класс. 19 ноября 2009 года.
Вариант 03

Часть 1

Ответом на задания В1-В12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно. Записывайте ответы под номером задания

В1 Тетрадь стоит 40 рублей. Какое наибольшее число таких тетрадей можно будет купить на 650 рублей после понижения цены на 15%?

В2 На рисунке жирными точками показана цена никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 6 по 20 мая 2009 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны никеля в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшую цену никеля на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за тонну).



В3 Найдите корень уравнения $\sqrt{5 - 2x} = 7$.

В4 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC боковая сторона AB равна 10, а высота, проведенная к основанию, равна $\sqrt{19}$. Найдите косинус угла $\angle A$.

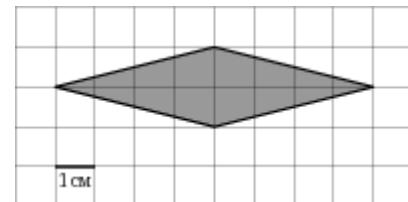
B5

Строительной фирме нужно приобрести 40 кубометров строительного бруса у одного из трех поставщиков. Какова наименьшая стоимость такой покупки с доставкой (в рублях)? Цены и условия доставки приведены в таблице.

Поставщик	Цена бруса (руб. за м^3)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
A	3600	10700	
Б	4100	8700	При заказе на сумму больше 150000 руб. доставка бесплатно
В	3700	8700	При заказе на сумму больше 200000 руб. доставка бесплатно

B6

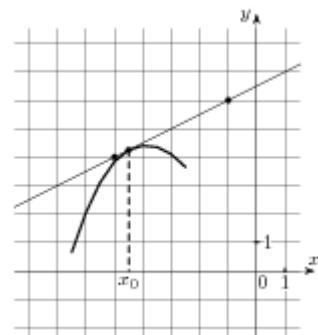
На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см \times 1 см изображена фигура (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.

**B7**

Найдите значение выражения: $2^4 \cdot 7^3 : 14^2$.

B8

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

**B9**

Объем прямоугольного параллелепипеда равен 1. Каждое ребро этого параллелепипеда увеличили в 2 раза. Найдите объем получившегося параллелепипеда.

B10

Для одного из предприятий-монополистов зависимость объёма спроса на продукцию q (единиц в месяц) от её цены p (тыс. руб.) задаётся формулой: $q = 150 - 10p$. Определите максимальное значение цены p (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = q \cdot p$ составит не менее 440 тыс. руб.

B11

Найдите наименьшее значение функции $y = 12\sin x - 17x + 8$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

B12

Моторная лодка прошла против течения реки 55 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 часов меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Часть 2

Выполняя задания C1-C6, запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1

Решите систему

$$\begin{cases} \frac{\sin 2x - \cos x}{\sqrt{y+1}} = 0, \\ y = 4 \sin x - 3. \end{cases}$$

C2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AA_1 = 4$, $A_1D_1 = 6$, $C_1D_1 = 6$, найдите тангенс угла между плоскостью ADD_1 и прямой EF , проходящей через середины ребер AB и B_1C_1 .

C3

Решите неравенство

$$\sqrt{7-x} < \frac{\sqrt{x^3 - 6x^2 + 14x - 7}}{\sqrt{x-1}}.$$

C4

Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 2$, $BC = 3$, $\angle A = 60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.

C5

Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \frac{x+ax+a}{x-2a-2} \geq 0, \\ x+ax > 8 \end{cases}$$

не имеет решений.

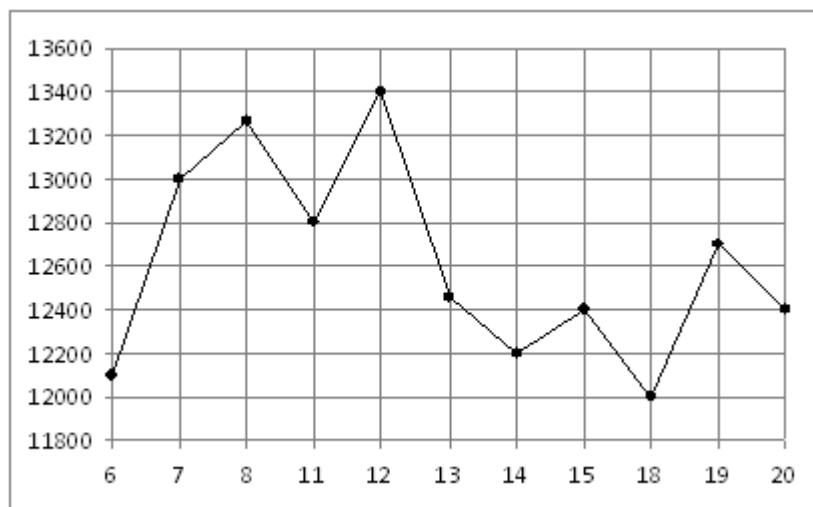
C6

Множество A состоит из натуральных чисел. Количество чисел в A больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из A равно 210. Для любых двух чисел из A их наибольший общий делитель больше единицы. Произведение всех чисел из A делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа. Найти числа, из которых состоит A .

Диагностическая работа по математике.**11 класс. 19 ноября 2009 года.****Вариант 04****Часть 1**

Ответом на задания В1-В12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно. Записывайте ответы под номером задания

- B1** Магазин закупает футболки по оптовой цене 260 рублей за штуку и продает с наценкой 30%. Какое наибольшее число таких футболок можно купить в этом магазине на 3000 рублей?
- B2** На рисунке жирными точками показана цена никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 6 по 20 мая 2009 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны никеля в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшую цену никеля на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за тонну).



- B3** Найдите корень уравнения $\sqrt{4 - 3x} = 5$.
- B4** В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\sin A = \frac{8}{9}$, $AC = 2\sqrt{17}$. Найдите AB .

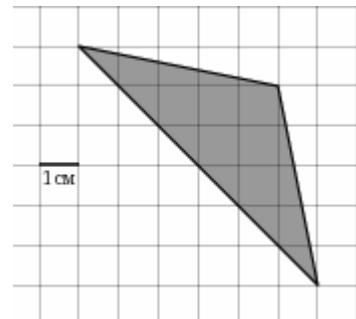
B5

Строительной фирме нужно приобрести 70 кубометров пенобетона у одного из трех поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую покупку с доставкой?

Поставщик	Цена пенобетона (руб. за м^3)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
A	2650	4400	
Б	2800	5400	При заказе на сумму больше 150000 руб. доставка бесплатно
В	2680	3400	При заказе более 75 м^3 доставка бесплатно

B6

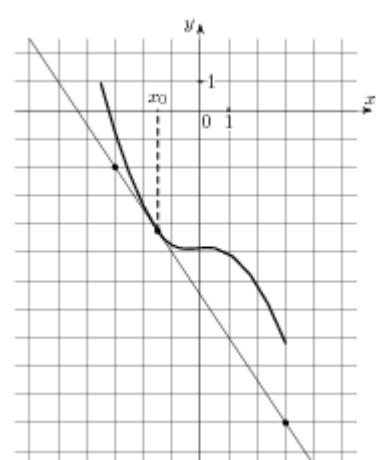
На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен треугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

**B7**

Найдите значение выражения: $7^4 \cdot 3^2 : 21^2$.

B8

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



B9

Объем прямоугольного параллелепипеда равен 1. Каждое ребро этого параллелепипеда увеличили в 2 раза. Найдите объем получившегося параллелепипеда.

B10

В боковой стенке цилиндрического бака вблизи дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём меняется по закону $H(t) = at^2 + bt + H_0$, где $H_0 = 2$ — начальный уровень воды, $a = \frac{1}{50}$ и $b = -\frac{2}{5}$ — постоянные. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? (Ответ дайте в минутах.)

B11

Найдите наименьшее значение функции $y = 12\sin x - 16x + 3$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

B12

Моторная лодка прошла против течения реки 165 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 4 часа меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Часть 2

Выполняя задания C1-C6, запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1

Решите систему

$$\begin{cases} \frac{\sin 2x + \cos x}{\sqrt{y-1}} = 0, \\ y = 4 \sin x + 3. \end{cases}$$

C2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 4$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостью ABC и прямой EF , проходящей через середины ребер AA_1 и C_1D_1 .

C3

Решите неравенство

$$\sqrt{5-x} < \frac{\sqrt{x^3 - 7x^2 + 14x - 5}}{\sqrt{x-1}}.$$

C4

Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 3$, $BC = 5$, $\angle A = 60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.

C5

Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \frac{x+ax+a}{x-2a-2} \geq 0, \\ x+ax > 8 \end{cases}$$

не имеет решений.

C6

Множество A состоит из натуральных чисел. Количество чисел в A больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из A равно 210. Для любых двух чисел из A их наибольший общий делитель больше единицы. Произведение всех чисел из A делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа. Найти числа, из которых состоит A .

Диагностическая работа по математике.
11 класс. 19 ноября 2009 года.

Ответы к части В

Вариант 1

B1	B2	B3	B4	B5	B6
4	13400	7	12	1840	10
B7	B8	B9	B10	B11	B12
243	-0,25	8	5	3	12

Вариант 2

B1	B2	B3	B4	B5	B6
31	13400	18	0,5	6465	6
B7	B8	B9	B10	B11	B12
33	-0,75	8	30	5	8

Вариант 3

B1	B2	B3	B4	B5	B6
19	13400	-22	0,9	154700	8
B7	B8	B9	B10	B11	B12
28	0,5	8	11	8	8

Вариант 4

B1	B2	B3	B4	B5	B6
8	13400	-7	18	189900	12
B7	B8	B9	B10	B11	B12
49	-1,5	8	10	3	13

Решения и критерии оценивания заданий С1-С6

Варианты 1, 3

C1

Решите систему

$$\begin{cases} \frac{\sin 2x - \cos x}{\sqrt{y+1}} = 0, \\ y = 4 \sin x - 3. \end{cases}$$

Решение.

1. $\sin 2x - \cos x = 0 \Leftrightarrow (2 \sin x - 1) \cos x = 0$, откуда $\sin x = \frac{1}{2}$, $\sin x = 1$ или $\sin x = -1$.

2. Если $\sin x = \frac{1}{2}$, то

$$y = 4 \sin x - 3 = -1; \text{ тогда } y + 1 = 0.$$

что невозможно, так как иначе в знаменателе дроби стоит 0.

3. Если $\sin x = -1$, то

$$y = 4 \sin x - 3 = -7; \text{ тогда } y + 1 < 0. \text{ Это невозможно.}$$

4. Если $\sin x = 1$, то

$$y = 4 \sin x - 3 = 1, \text{ тогда } y + 1 > 0,$$

и в этом случае получаются решения системы.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, y = 1$.

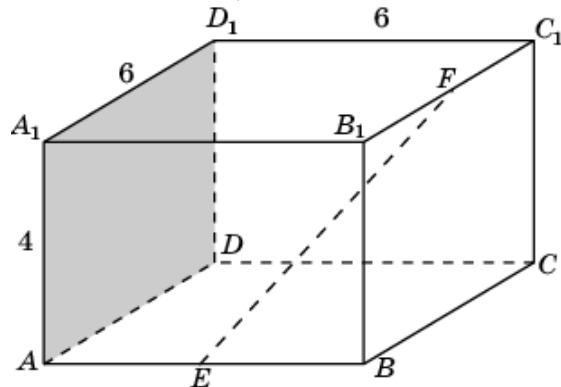
Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за того, что в решении не учтена положительность подкоренного выражения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AA_1 = 4$, $A_1D_1 = 6$, $C_1D_1 = 6$, найдите тангенс угла между плоскостью ADD_1 и прямой EF , проходящей через середины ребер AB и B_1C_1 .

Решение. Найдем угол между прямой EF и плоскостью грани BB_1C_1C . Точка B - проекция точки E на эту плоскость.



Искомый угол есть $\angle EFB$. $EB = \frac{6}{2} = 3$. $FB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. $\tg \angle EFB = \frac{3}{5}$.

Ответ: $\frac{3}{5}$.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C3

Решите неравенство

$$\sqrt{7-x} < \frac{\sqrt{x^3 - 6x^2 + 14x - 7}}{\sqrt{x-1}}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \sqrt{7-x} &< \frac{\sqrt{x^3 - 6x^2 + 14x - 7}}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{7-x} \cdot \sqrt{x-1} < \sqrt{x^3 - 6x^2 + 14x - 7} \\ x \neq 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1) \cdot (7-x) < x^3 - 6x^2 + 14x - 7 \\ 1 < x \leq 7 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 5x^2 + 6x > 0 \ (\Leftrightarrow x(x-2)(x-3) > 0) \\ 1 < x \leq 7 \end{cases} \end{aligned}$$

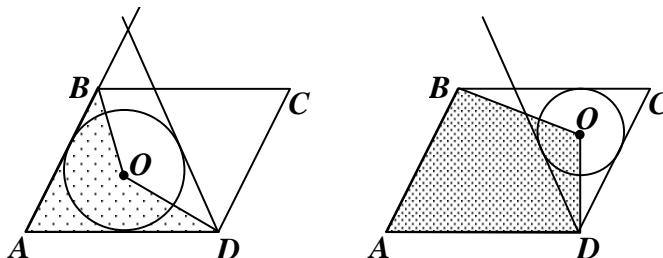
Ответ: $1 < x < 2, 3 < x \leq 7$.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Ответ неточен или из-за арифметической ошибки, или из-за того, что в него включены (отброшены) значения переменной, при которых подкоренные выражения обращаются в ноль.	2
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C4

Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 2$, $BC = 3$, $\angle A = 60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.



правильного треугольника.

Решение. Окружностей две: каждая из них – вписанная в правильный треугольник. Эти треугольники имеют стороны равные 3 и 2 – соответственно. Поэтому радиусы окружностей равны третьей части высоты

Для треугольника со стороной 3 радиус равен $r = \frac{3 \cdot \sin 60^\circ}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Найдем площадь невыпуклого четырехугольника как сумму площадей треугольников AOB и AOD :

$$S_{ABOD} = \frac{1}{2} AB \cdot r + \frac{1}{2} AD \cdot r = \frac{5\sqrt{3}}{4}.$$

Для треугольника со стороной 2 радиус равен $r = \frac{2 \cdot \sin 60^\circ}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Чтобы найти площадь четырехугольника $ABOD$, вычтем из площади параллелограмма площади треугольников BOC и DOC :

$$S_{ABOD} = AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ - \frac{1}{2} BC \cdot r - \frac{1}{2} CD \cdot r = \frac{13\sqrt{3}}{6}.$$

Ответ: $\frac{5\sqrt{3}}{4}, \frac{13\sqrt{3}}{6}$.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C5Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \frac{x+ax+a}{x-2a-2} \geq 0, \\ x+ax > 8 \end{cases}$$

не имеет решений.

Решение. Рассмотрим второе неравенство системы

$$(1+a)x > 8.$$

Если $a = -1$, то неравенство, а значит и система не имеет решений.Если $a > -1$, то решение неравенства – луч $x > \frac{8}{1+a}$.Если $a < -1$, то решение неравенства – луч $x < \frac{8}{1+a}$.При $a \neq -1$ первое неравенство системы принимает вид

$$\begin{cases} (1-a)\left(x-\frac{a}{1-a}\right)(x-2(1-a)) \geq 0, \\ x \neq 2(1-a) \end{cases}$$

Если $a > -1$, то решение этой системы – два луча с концами в точках

$$-\frac{a}{1+a}, 2(1+a).$$

Если $a < -1$, то решение этой системы – полуинтервал с концами в точках

$$-\frac{a}{1+a}, 2(1+a).$$

Отметим, что точки $x = 2(1+a)$ нет в множестве решений второго неравенства.

Для того, чтобы система не имела решений, при $a \neq -1$ необходимо и достаточно:

$$\begin{cases} a \leq -1, \\ -\frac{a}{1+a} \geq \frac{8}{1+a}, \\ 2(1+a) \geq \frac{8}{1+a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 \leq a \leq -1, \\ (1+a)^2 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq a \leq -1$$

Ответ: $-3 \leq a \leq -1$.

Критерии:

Балл	Характеристика решения задачи С5
4	Обоснованно получен верный ответ.
3	Либо получен верный ответ, но при его обосновании допущены ошибки, либо обоснованно получен ответ, отличный от верного только из-за потери (приобретения) одного–двух искомых значений параметра.
2	Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдено хотя бы одно верное расположение луча и полуинтервала.
1	Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдены некоторые из искомых значений параметра.
0	Все ситуации, отличные от описанных выше.

C6

Множество A состоит из натуральных чисел. Количество чисел в A больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из A равно 210. Для любых двух чисел из A их наибольший общий делитель больше единицы. Произведение всех чисел из A делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа. Найти числа, из которых состоит A .

Решение. Наименьшее общее кратное чисел, составляющих множество A , равно $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Поэтому числа, составляющие множество A – это делители 210. Всего делителей 16:

$$1, 2, 3, 5, 7, 2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, 3 \cdot 5, 3 \cdot 7, 5 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 7, 2 \cdot 5 \cdot 7, 3 \cdot 5 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

Каждый делитель содержит не более одного множителя 2. А произведение всех чисел из A делится $1920 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5$. Поэтому среди чисел, составляющих A , должно быть, по крайней мере семь чётных, а их всего восемь:

$$2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 7, 2 \cdot 5 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

Если число 2 входит в A , то любое другое число из A должно делится на 2. Значит,

$$A = \{2, 6, 10, 14, 30, 42, 70, 210\},$$

но произведение этих чисел равно $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^4 = (2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2)^2$.

Значит, 2 не входит в A , а числа

$$2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 7, 2 \cdot 5 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

входят в A , но их всего семь. Поэтому этот набор нужно расширить, добавляя делители 210, не взаимно простые со всеми указанными семью числами. Такой делитель единственный – число $3 \cdot 5 \cdot 7$.

Ответ: $A = \{6, 10, 14, 30, 42, 70, 105, 210\}$

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ правilen, но недостаточно обоснован, однако правильно выбраны семь чётных чисел, входящих в искомое множество.	3
Ответ может быть даже не сформулирован, однако указано, что числа, составляющие искомое множество – это делители 210 и по крайней мере семь из них – чётные.	2
Ответа нет, однако предложен «разумный» перебор.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Диагностическая работа по математике.
11 класс. 19 ноября 2009 года.

Решения и критерии оценивания заданий С1-С6
 Варианты 2, 4

C1 Решите систему

$$\begin{cases} \frac{\sin 2x + \cos x}{\sqrt{y-1}} = 0, \\ y = 4 \sin x + 3. \end{cases}$$

Решение.

1. $\sin 2x + \cos x = 0 \Leftrightarrow (2 \sin x + 1) \cos x = 0$, откуда $\sin x = -\frac{1}{2}$, $\sin x = 1$ или $\sin x = -1$.

2. Если $\sin x = -\frac{1}{2}$, то

$y = 4 \sin x + 3 = 1$, тогда $y - 1 = 0$, что невозможно.

3. Если $\sin x = -1$, то

$y = 4 \sin x + 3 = -1$, тогда $y - 1 < 0$, что невозможно.

4. Если $\sin x = 1$, то

$y = 4 \sin x + 3 = 7$, тогда $y - 1 > 0$,

и в этом случае получаются решения системы.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $y = 7$.

Критерии:

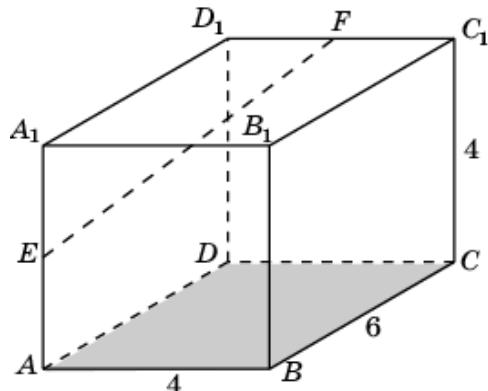
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за того, что в решении не учтена положительность подкоренного выражения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 4$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостью ABC и прямой EF , проходящей через середины ребер AA_1 и C_1D_1 .

Решение.

Будем искать угол между прямой EF и плоскостью грани $A_1B_1C_1D_1$. Точка A_1 - проекция точки E на эту плоскость.



Искомый угол $\angle EFA_1$. $A_1E = \frac{4}{2} = 2$. $A_1F = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$.

$$\operatorname{tg} \angle EFA_1 = \frac{2}{2\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C3

Решите неравенство

$$\sqrt{5-x} < \frac{\sqrt{x^3 - 7x^2 + 14x - 5}}{\sqrt{x-1}}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \sqrt{5-x} &< \frac{\sqrt{x^3 - 7x^2 + 14x - 5}}{\sqrt{x-1}} \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{x-1} < \sqrt{x^3 - 7x^2 + 14x - 5} \\ x \neq 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1) \cdot (5-x) < x^3 - 7x^2 + 14x - 5 \\ 1 < x \leq 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 8x > 0 \ (\Leftrightarrow x(x-2)(x-4) > 0) \\ 1 < x \leq 5 \end{cases}$$

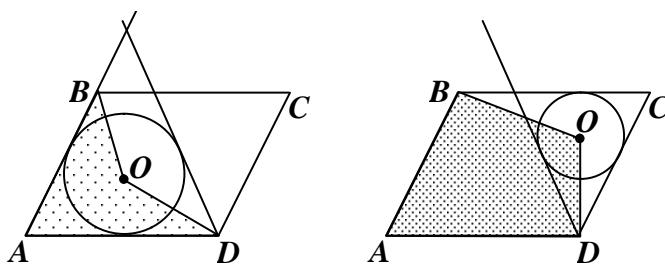
Ответ: $1 < x < 2, 4 < x \leq 5$.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Ответ неточен или из-за арифметической ошибки, или из-за того, что в него включены (отброшены) значения переменной, при которых подкоренные выражения обращаются в ноль.	2
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C4

Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 3$, $BC = 5$, $\angle A = 60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.



правильного треугольника.

Решение. Окружностей две: каждая из них – вписанная в правильный треугольник. Эти треугольники имеют стороны равные 5 и 3 – соответственно. Поэтому радиусы окружностей равны третьей части высоты

Для треугольника со стороной 5 радиус равен $r = \frac{5 \sin 60^\circ}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$.

Найдем площадь невыпуклого четырехугольника как сумму площадей треугольников AOB и AOD :

$$S_{ABOD} = \frac{1}{2} AB \cdot r + \frac{1}{2} AD \cdot r = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

Для треугольника со стороной 3 радиус равен $r = \frac{3 \sin 60^\circ}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Чтобы найти площадь четырехугольника $ABOD$, вычтем из площадь параллелограмма площади треугольников BOC и DOC :

$$S_{ABOD} = AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ - \frac{1}{2} BC \cdot r - \frac{1}{2} CD \cdot r = \frac{11\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{10\sqrt{3}}{3}, \frac{11\sqrt{3}}{2}$.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C5

Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \frac{x+ax+a}{x-2a-2} \geq 0, \\ x+ax > 8 \end{cases}$$

не имеет решений.

Решение. Рассмотрим второе неравенство системы
 $(1+a)x > 8$.

Если $a = -1$, то неравенство, а значит и система не имеет решений.

Если $a > -1$, то решение неравенства – луч $x > \frac{8}{1+a}$.

Если $a < -1$, то решение неравенства – луч $x < \frac{8}{1+a}$.

При $a \neq -1$ первое неравенство системы принимает вид

$$\begin{cases} (1-a)\left(x-\frac{a}{1-a}\right)(x-2(1-a)) \geq 0, \\ x \neq 2(1-a) \end{cases}$$

Если $a > -1$, то решение этой системы – два луча с концами в точках

$$-\frac{a}{1+a}, 2(1+a).$$

Если $a < -1$, то решение этой системы – полуинтервал с концами в точках

$$-\frac{a}{1+a}, 2(1+a).$$

Отметим, что точки $x = 2(1+a)$ нет в множестве решений второго неравенства.

Для того, чтобы система не имела решений, при $a \neq 1$ необходимо и достаточно:

$$\begin{cases} a \leq -1, \\ -\frac{a}{1+a} \geq \frac{8}{1+a}, \\ 2(1+a) \geq \frac{8}{1+a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 \leq a \leq -1, \\ (1+a)^2 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq a \leq -1$$

Ответ: $-3 \leq a \leq -1$.

Критерии:

Балл	Характеристика решения задачи С5
4	Обоснованно получен верный ответ.
3	Либо получен верный ответ, но при его обосновании допущены ошибки, либо обоснованно получен ответ, отличный от верного только из-за потери (приобретения) одного–двух искомых значений параметра.
2	Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдено хотя бы одно верное расположение луча и полуинтервала.
1	Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдены некоторые из искомых значений параметра.
0	Все ситуации, отличные от описанных выше.

C6

Множество A состоит из натуральных чисел. Количество чисел в A больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из A равно 210. Для любых двух чисел из A их наибольший общий делитель больше единицы. Произведение всех чисел из A делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа. Найти числа, из которых состоит A .

Решение. Наименьшее общее кратное чисел, составляющих множество A , равно $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Поэтому числа, составляющие множество A – это делители 210. Всего делителей 16:

$$1, 2, 3, 5, 7, 2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, 3 \cdot 5, 3 \cdot 7, 5 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 7, 2 \cdot 5 \cdot 7, 3 \cdot 5 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

Каждый делитель содержит не более одного множителя 2. А произведение всех чисел из A делится на $1920 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5$. Поэтому среди чисел, составляющих A , должно быть, по крайней мере семь чётных, а их всего восемь:

Если число 2 входит в A , то любое другое число из A должно делится на 2. Значит,

$$A = \{2, 6, 10, 14, 30, 42, 70, 210\},$$

но произведение этих чисел равно $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^4 = (2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2)^2$.

Значит, 2 не входит в A , а числа

$$2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 7, 2 \cdot 5 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

входят в A , но их всего семь. Поэтому этот набор нужно расширить, добавляя делители 210, не взаимно простые со всеми указанными семью числами. Такой делитель единственный – число $3 \cdot 5 \cdot 7$.

Ответ: $A = \{6, 10, 14, 30, 42, 70, 105, 210\}$

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ правilen, но недостаточно обоснован, однако правильно выбраны семь чётных чисел, входящих в искомое множество.	3
Ответ может быть даже не сформулирован, однако указано, что числа, составляющие искомое множество – это делители 210 и по крайней мере семь из них – чётные.	2
Ответа нет, однако предложен «разумный» перебор.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0