

Диагностическая работа по математике.

11 класс. 19 ноября 2009 года.

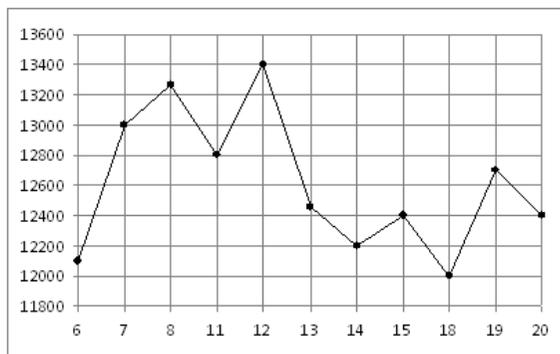
Вариант 5

Часть 1

Ответом на задания В1-В12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно. Записывайте ответы под номером задания

В1 Банка краски стоит 160 рублей. Какое наибольшее число таких банок можно купить на 1000 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 25%?

В2 На рисунке жирными точками показана цена никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 6 по 20 мая 2009 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны никеля в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшую цену никеля на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за тонну).



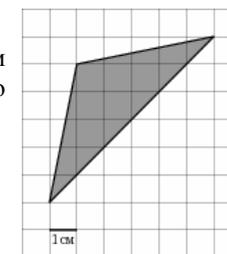
В3 Найдите корень уравнения $\sqrt{1-2x} = 7$.

В4 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC боковая сторона AB равна 10, а высота, проведенная к основанию, равна $2\sqrt{21}$. Найдите косинус угла $\angle A$.

В5 Для изготовления книжных полок требуется заказать 42 одинаковых стекла в одной из трех фирм. Площадь каждого стекла $0,25 \text{ м}^2$. В таблице приведены цены на стекло, а также на резку стекол и шлифовку края. Сколько рублей будет стоить самый дешевый заказ?

Фирма	Цена стекла (руб. за 1 м^2)	Резка и шлифовка (руб. за одно стекло)
А	415	75
Б	430	65
В	465	60

В6 На клетчатой бумаге с клетками размером $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ изображен треугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

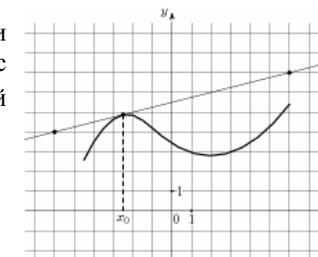


В7

Найдите значение выражения: $3^9 \cdot 2^6 : 6^5$.

В8

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



В9

Объем прямоугольного параллелепипеда равен 1. Каждое ребро этого параллелепипеда увеличили в 2 раза. Найдите объем получившегося параллелепипеда.

B10 Для одного из предприятий-монополистов зависимость объёма спроса на продукцию q (единиц в месяц) от её цены p (тыс. руб.) задаётся формулой: $q = 100 - 10p$. Определите максимальное значение цены p (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = q \cdot p$ составит не менее 240 тыс. руб.

B11 Найдите наибольшее значение функции $y = 14 \cos x + 7x\sqrt{3} - \frac{7\pi\sqrt{3}}{3} + 6$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

B12 Из А в В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 15 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 90 км/ч, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля, если известно, что она больше 54 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Часть 2

Выполняя задания C1-C6, запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите систему
$$\begin{cases} \frac{\sin 2x - \cos x}{\sqrt{y+1}} = 0, \\ y = 4 \sin x - 3. \end{cases}$$

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AA_1 = 4$, $A_1 D_1 = 6$, $C_1 D_1 = 6$, найдите тангенс угла между плоскостью ADD_1 и прямой EF , проходящей через середины ребер AB и $B_1 C_1$.

C3 Решите неравенство
$$\sqrt{7-x} < \frac{\sqrt{x^3 - 6x^2 + 14x - 7}}{\sqrt{x-1}}.$$

C4 Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 2$, $BC = 3$, $\angle A = 60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x - ax - a \geq 0, \\ x - 2 + 2a \\ x - 8 > ax \end{cases}$$

не имеет решений.

C6 Последние члены двух конечных арифметических прогрессий $a_1 = 5, a_2 = 8, \dots, a_N$ и $b_1 = 9, b_2 = 14, \dots, b_M$ совпадают, а сумма всех совпадающих (взятых по одному разу) членов этих прогрессий равна 815. Найдите число членов в каждой прогрессии.

Диагностическая работа по математике.

11 класс. 19 ноября 2009 года.

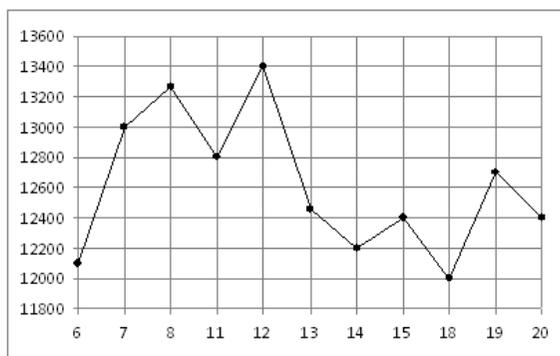
Вариант 6

Часть 1

Ответом на задания B1-B12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.
Записывайте ответы под номером задания

B1 Шариковая ручка стоит 40 рублей. Какое наибольшее число таких ручек можно будет купить на 900 рублей после повышения цены на 10%?

B2 На рисунке жирными точками показана цена никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 6 по 20 мая 2009 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны никеля в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшую цену никеля на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за тонну).



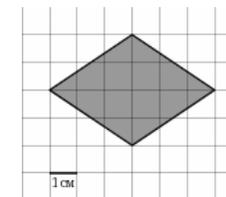
B3 Найдите корень уравнения $\sqrt{2x+3} = 5$.

B4 В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 30$, $AC = 3\sqrt{19}$. Найдите $\sin A$.

B5 Для остекления веранды требуется заказать 30 одинаковых стекол в одной из трех фирм. Площадь каждого стекла $0,25 \text{ м}^2$. В таблице приведены цены на стекло и на резку стекол. Сколько рублей будет стоить самый дешевый заказ?

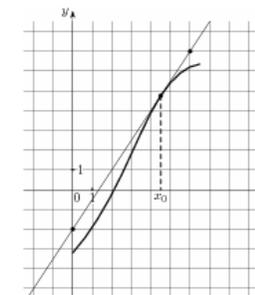
Фирма	Цена стекла (руб. за 1 м^2)	Резка стекла (руб. за одно стекло)	Дополнительные условия
А	300	25	
Б	290	30	
В	360	20	При заказе на сумму больше 2500 руб. резка бесплатно.

B6 На клетчатой бумаге с клетками размером $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ изображена фигура (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.



B7 Найдите значение выражения: $5^9 \cdot 2^8 : 10^7$.

B8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



B9 Объем прямоугольного параллелепипеда равен 1. Каждое ребро этого параллелепипеда увеличили в 2 раза. Найдите объем получившегося параллелепипеда.

В10 В боковой стенке цилиндрического бака вблизи дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём меняется по закону $H(t) = 5 - 0,8t + 0,032t^2$, где t — время в минутах. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ дайте в минутах.

В11 Найдите наименьшее значение функции $y = 5 + \frac{2\pi\sqrt{3}}{3} - 2x\sqrt{3} - 4\cos x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

В12 Из А в В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 12 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 72 км/ч, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля, если известно, что она больше 45 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Часть 2

Выполняя задания С1-С6, запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

С1 Решите систему
$$\begin{cases} \frac{\sin 2x + \cos x}{\sqrt{y-1}} = 0, \\ y = 4 \sin x + 3. \end{cases}$$

С2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 4$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостью ABC и прямой EF , проходящей через середины ребер AA_1 и $C_1 D_1$.

С3 Решите неравенство

$$\sqrt{5-x} < \frac{\sqrt{x^3 - 7x^2 + 14x - 5}}{\sqrt{x-1}}.$$

С4 Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 3$, $BC = 5$, $\angle A = 60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.

С5 Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \frac{x-ax-a}{x-2+2a} \geq 0, \\ x-8 > ax \end{cases}$$

не имеет решений.

С6 Последние члены двух конечных арифметических прогрессий $a_1 = 5, a_2 = 8, \dots, a_N$ и $b_1 = 9, b_2 = 14, \dots, b_M$ совпадают, а сумма всех совпадающих (взятых по одному разу) членов этих прогрессий равна 815. Найдите число членов в каждой прогрессии.

Диагностическая работа по математике.

11 класс. 19 ноября 2009 года.

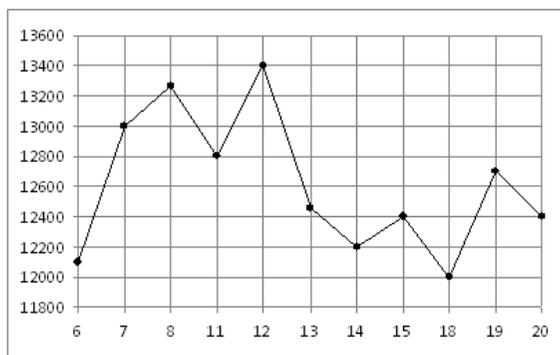
Вариант 7

Часть 1

Ответом на задания В1-В12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.
Записывайте ответы под номером задани

В1 Тетрадь стоит 10 рублей. Какое наибольшее число таких тетрадей можно будет купить на 650 рублей после понижения цены на 20%?

В2 На рисунке жирными точками показана цена никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 6 по 20 мая 2009 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны никеля в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшую цену никеля на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за тонну).



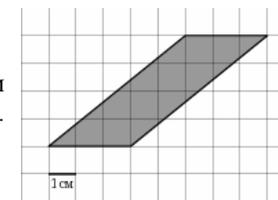
В3 Найдите корень уравнения $\sqrt{1-3x} = 5$.

В4 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC боковая сторона AB равна 17, а $\cos A = \frac{8}{17}$. Найдите высоту, проведенную к основанию.

В5 Строительной фирме нужно приобрести 40 кубометров строительного бруса у одного из трех поставщиков. Какова наименьшая стоимость такой покупки с доставкой (в рублях)? Цены и условия доставки приведены в таблице.

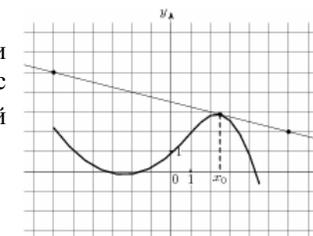
Поставщик	Цена бруса (руб. за м ³)	Стоимость доставки	Дополнительные условия
А	3800	10300	
Б	4500	8300	При заказе на сумму больше 150000 руб. доставка бесплатно
В	3900	8300	При заказе на сумму больше 200000 руб. доставка бесплатно

В6 На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена фигура (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.



В7 Найдите значение выражения: $9^6 \cdot 7^4 : 63^4$.

В8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



В9 Объем прямоугольного параллелепипеда равен 1. Каждое ребро этого параллелепипеда увеличили в 2 раза. Найдите объем получившегося параллелепипеда.

B10 Для одного из предприятий-монополистов зависимость объёма спроса на продукцию q (единиц в месяц) от её цены p (тыс. руб.) задаётся формулой: $q = 165 - 15p$. Определите максимальное значение цены p (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = q \cdot p$ составит не менее 420 тыс. руб.

B11 Найдите наибольшее значение функции $y = 7\sqrt{2} \cos x + 7x - \frac{7\pi}{4} + 4$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

B12 Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 72 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 6 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 6 часов. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из А в В. Ответ дайте в км/ч.

Часть 2

Выполняя задания C1-C6, запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите систему
$$\begin{cases} \frac{\sin 2x - \cos x}{\sqrt{y+1}} = 0, \\ y = 4 \sin x - 3. \end{cases}$$

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AA_1 = 4$, $A_1 D_1 = 6$, $C_1 D_1 = 6$, найдите тангенс угла между плоскостью ADD_1 и прямой EF , проходящей через середины ребер AB и $B_1 C_1$.

C3 Решите неравенство
$$\sqrt{7-x} < \frac{\sqrt{x^3 - 6x^2 + 14x - 7}}{\sqrt{x-1}}.$$

C4 Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 2$, $BC = 3$, $\angle A = 60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x - ax - a \geq 0, \\ x - 2 + 2a \\ x - 8 > ax \end{cases}$$

не имеет решений.

C6 Последние члены двух конечных арифметических прогрессий $a_1 = 5, a_2 = 8, \dots, a_N$ и $b_1 = 9, b_2 = 14, \dots, b_M$ совпадают, а сумма всех совпадающих (взятых по одному разу) членов этих прогрессий равна 815. Найдите число членов в каждой прогрессии.

Диагностическая работа по математике.

11 класс. 19 ноября 2009 года.

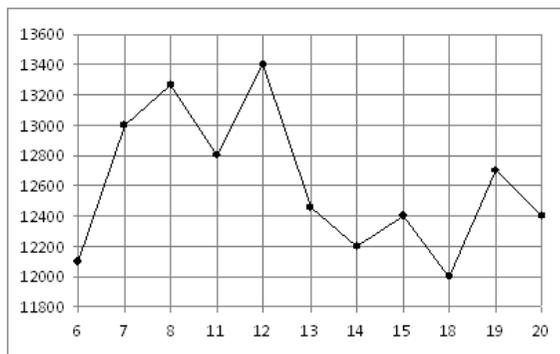
Вариант 8

Часть 1

Ответом на задания В1-В12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.
Записывайте ответы под номером задания

В1 Магазин закупает учебники по оптовой цене 110 рублей за штуку и продает с наценкой 20%. Какое наибольшее число таких учебников можно купить в этом магазине на 1100 рублей?

В2 На рисунке жирными точками показана цена никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 6 по 20 мая 2009 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны никеля в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшую цену никеля на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за тонну).



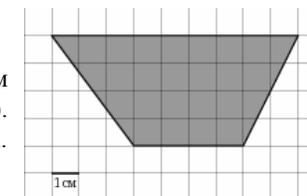
В3 Найдите корень уравнения $\sqrt{3x+1}=8$.

В4 В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\cos B = \frac{20}{29}$, $AB = 29$. Найдите AC .

В5 Строительной фирме нужно приобрести 74 кубометра пенобетона у одного из трех поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую покупку с доставкой?

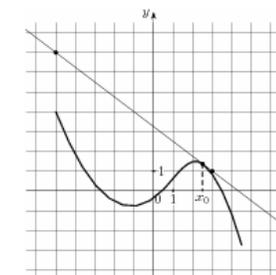
Поставщик	Цена пенобетона (руб. за 1 м^3)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
А	2750	4900	
Б	3100	5900	При заказе на сумму больше 150000 руб. доставка бесплатно
В	2780	3900	При заказе более 75 м^3 доставка бесплатно

В6 На клетчатой бумаге с клетками размером $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ изображена трапеция (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.



В7 Найдите значение выражения: $121^7 \cdot 2^{11} : 242^7$.

В8 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



В9 Объем прямоугольного параллелепипеда равен 1. Каждое ребро этого параллелепипеда увеличили в 2 раза. Найдите объем получившегося параллелепипеда.

B10

В боковой стенке цилиндрического бака вблизи дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём меняется по закону $h(t) = 5 - 1,6t + 0,128t^2$, где t — время в минутах. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ дайте в минутах.

B11

Найдите наименьшее значение функции $y = 2 + \frac{3\pi}{2} - 6x - 6\sqrt{2} \cos x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

B12

Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 70 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 3 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 3 часа. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из А в В. Ответ дайте в км/ч.

Часть 2

Выполняя задания C1-C6, запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1

Решите систему

$$\begin{cases} \frac{\sin 2x + \cos x}{\sqrt{y-1}} = 0, \\ y = 4 \sin x + 3. \end{cases}$$

C2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 4$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостью ABC и прямой EF , проходящей через середины ребер AA_1 и $C_1 D_1$.

C3

Решите неравенство

$$\sqrt{5-x} < \frac{\sqrt{x^3 - 7x^2 + 14x - 5}}{\sqrt{x-1}}.$$

C4

Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 3$, $BC = 5$, $\angle A = 60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.

C5

Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \frac{x-ax-a}{x-2+2a} \geq 0, \\ x-8 > ax \end{cases}$$

не имеет решений.

C6

Последние члены двух конечных арифметических прогрессий

$$a_1 = 5, a_2 = 8, \dots, a_N \quad \text{и} \quad b_1 = 9, b_2 = 14, \dots, b_M$$

совпадают, а сумма всех совпадающих (взятых по одному разу) членов этих прогрессий равна 815. Найдите число членов в каждой прогрессии.

**Диагностическая работа по математике.
11 класс. 19 ноября 2009 года.**

Вариант 5

B1	B2	B3	B4	B5	B6
8	13400	-24	0,4	7245	12
B7	B8	B9	B10	B11	B12
162	0,25	8	6	13	60

Вариант 6

B1	B2	B3	B4	B5	B6
20	13400	11	0,9	2700	12
B7	B8	B9	B10	B11	B12
50	1,5	8	12,5	3	48

Вариант 7

B1	B2	B3	B4	B5	B6
81	13400	-8	15	162300	12
B7	B8	B9	B10	B11	B12
81	-0,25	8	7	11	6

Вариант 8

B1	B2	B3	B4	B5	B6
8	13400	21	21	208400	26
B7	B8	B9	B10	B11	B12
16	-0,75	8	6,25	-4	7

Решения и критерии оценивания заданий С1-С6

Варианты 5, 7

С1

Решите систему

$$\begin{cases} \frac{\sin 2x - \cos x}{\sqrt{y+1}} = 0, \\ y = 4 \sin x - 3. \end{cases}$$

Решение.

1. $\sin 2x - \cos x = 0 \Leftrightarrow (2 \sin x - 1) \cos x = 0$, откуда $\sin x = \frac{1}{2}$, $\sin x = 1$ или $\sin x = -1$.

2. Если $\sin x = \frac{1}{2}$, то

$$y = 4 \sin x - 3 = -1; \text{ тогда } y + 1 = 0.$$

что невозможно, так как иначе в знаменателе дроби стоит 0.

3. Если $\sin x = -1$, то

$$y = 4 \sin x - 3 = -7; \text{ тогда } y + 1 < 0. \text{ Это невозможно.}$$

4. Если $\sin x = 1$, то

$$y = 4 \sin x - 3 = 1, \text{ тогда } y + 1 > 0,$$

и в этом случае получаются решения системы.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, y = 1.$

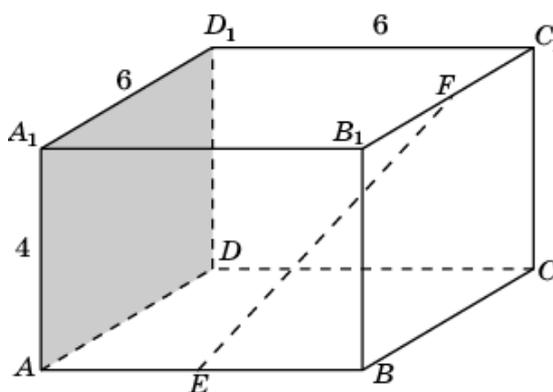
Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за того, что в решении не учтена положительность подкоренного выражения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AA_1 = 4$, $A_1 D_1 = 6$, $C_1 D_1 = 6$, найдите тангенс угла между плоскостью ADD_1 и прямой EF , проходящей через середины ребер AB и $B_1 C_1$.

Решение. Найдем прямую EF и $BB_1 C_1 C$. Точка B - на эту плоскость.



угол между плоскостью грани $BB_1 C_1 C$ и прямой EF - тангенс угла между плоскостью ADD_1 и прямой EF .

Искомый угол есть $\angle EFB$. $EB = \frac{6}{2} = 3$. $FB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. $\operatorname{tg} \angle EFB = \frac{3}{5}$.

Ответ: $\frac{3}{5}$.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С3

Решите неравенство

$$\sqrt{7-x} < \frac{\sqrt{x^3 - 6x^2 + 14x - 7}}{\sqrt{x-1}}.$$

Решение.

$$\sqrt{7-x} < \frac{\sqrt{x^3 - 6x^2 + 14x - 7}}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{7-x} \cdot \sqrt{x-1} < \sqrt{x^3 - 6x^2 + 14x - 7} \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1) \cdot (7-x) < x^3 - 6x^2 + 14x - 7 \\ 1 < x \leq 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 5x^2 + 6x > 0 \quad (\Leftrightarrow x(x-2)(x-3) > 0) \\ 1 < x \leq 7 \end{cases}$$

Ответ: $1 < x < 2, 3 < x \leq 7$.

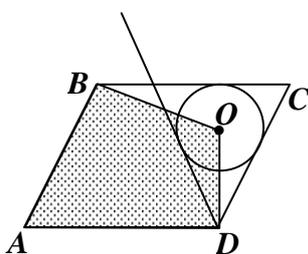
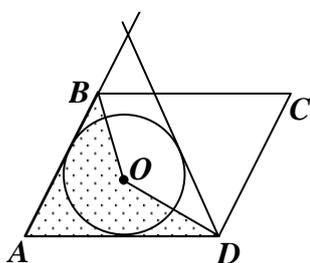
Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Ответ неточен или из-за арифметической ошибки, или из-за	2

того, что в него включены (отброшены) значения переменной, при которых подкоренные выражения обращаются в ноль.	
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С4

Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 2$, $BC = 3$, $\angle A = 60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.



Решение. Окружностей две: каждая из них – вписанная в правильный треугольник. Эти треугольники имеют стороны равные 3 и 2 – соответственно. Поэтому радиусы окружностей равны третьей части высоты

правильного треугольника.

Для треугольника со стороной 3 радиус равен $r = \frac{3 \cdot \sin 60^\circ}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Найдем площадь невыпуклого четырехугольника как сумму площадей треугольников AOB и AOD :

$$S_{ABOD} = \frac{1}{2} AB \cdot r + \frac{1}{2} AD \cdot r = \frac{5\sqrt{3}}{4}.$$

Для треугольника со стороной 2 радиус равен $r = \frac{2 \cdot \sin 60^\circ}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Чтобы найти площадь четырехугольника $ABOD$, вычтем из площади параллелограмма площади треугольников BOC и DOC :

$$S_{ABOD} = AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ - \frac{1}{2} BC \cdot r - \frac{1}{2} CD \cdot r = \frac{13\sqrt{3}}{6}.$$

Ответ: $\frac{5\sqrt{3}}{4}, \frac{13\sqrt{3}}{6}$.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3

Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C5

Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \frac{x-ax-a}{x-2+2a} \geq 0, \\ x-8 > ax \end{cases}$$

не имеет решений.

Решение. Рассмотрим второе неравенство системы
 $(1-a)x > 8.$

Если $a = 1$, то неравенство, а значит и система не имеет решений.

Если $a < 1$, то решение неравенства – луч $x > \frac{8}{1-a}.$

Если $a > 1$, то решение неравенства – луч $x < \frac{8}{1-a}.$

При $a \neq 1$ первое неравенство системы принимает вид

$$\begin{cases} (1-a)\left(x - \frac{a}{1-a}\right)(x - 2(1-a)) \geq 0, \\ x \neq 2(1-a) \end{cases}$$

Если $a < 1$, то решение этой системы – два луча с концами в точках

$$\frac{a}{1-a}, 2(1-a).$$

Если $a > 1$, то решение этой системы – полуинтервал с концами в точках

$$\frac{a}{1-a}, 2(1-a).$$

Отметим, что точки $x = 2(1-a)$ нет в множестве решений второго неравенства.

Для того, чтобы система не имела решений, при $a \neq 1$ необходимо и достаточно:

$$\begin{cases} a \geq 1, \\ \frac{a}{1-a} \geq \frac{8}{1-a}, \\ 2(1-a) \geq \frac{8}{1-a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq a \leq 8, \\ (1-a)^2 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq a \leq 3.$$

Ответ: $1 \leq a \leq 3$.

Критерии:

Балл	Характеристика решения задачи С5
4	Обоснованно получен верный ответ.
3	Либо получен верный ответ, но при его обосновании допущены ошибки, либо обоснованно получен ответ, отличный от верного только из-за потери (приобретения) одного–двух искомых значений параметра.
2	Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдено хотя бы одно верное расположение луча и полуинтервала.
1	Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдены некоторые из искомых значений параметра.
0	Все ситуации, отличные от описанных выше.

С6

Последние члены двух конечных арифметических прогрессий

$$a_1 = 5, a_2 = 8, \dots, a_N \quad \text{и} \quad b_1 = 9, b_2 = 14, \dots, b_M$$

совпадают, а сумма всех совпадающих (взятых по одному разу) членов этих прогрессий равна 815. Найдите число членов в каждой прогрессии.

Решение. Ясно, что

$$a_m = 5 + 3(m - 1), m = 1, \dots, N$$

$$b_k = 9 + 5(k - 1), k = 1, \dots, M$$

Общие члены прогрессий удовлетворяют уравнению

$$5 + 3(m - 1) = 9 + 5(k - 1) \Leftrightarrow 3m = 5k + 2.$$

Левая часть последнего уравнения делится на 3, поэтому

$$k = 3n - 1, 3m = 15n - 3,$$

где $1 \leq n \leq L$.

Найдём L . Общие члены двух прогрессий сами образуют арифметическую прогрессию с первым членом равным 14, а последним – равным $15L - 1$.

Значит,

$$\frac{14+15L-1}{2}L = 815 \Leftrightarrow 15L^2 + 13L - 1630 = 0.$$

Откуда $L = 10$. Поэтому $M = 5L - 1 = 29, N = 3L - 1 = 49$.

Ответ: 49 и 29.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ неверен из-за арифметической ошибки, но правильно указана арифметическая прогрессия общих членов.	3
Ответ неверен, однако есть попытка доказать, что общие члены прогрессий образуют арифметическую прогрессию.	2
Общие члены арифметических прогрессий находятся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Варианты 6, 8

C1

Решите систему

$$\begin{cases} \frac{\sin 2x + \cos x}{\sqrt{y-1}} = 0, \\ y = 4 \sin x + 3. \end{cases}$$

Решение.

1. $\sin 2x + \cos x = 0 \Leftrightarrow (2\sin x + 1)\cos x = 0$, откуда $\sin x = -\frac{1}{2}$, $\sin x = 1$ или $\sin x = -1$.

2. Если $\sin x = -\frac{1}{2}$, то

$y = 4\sin x + 3 = 1$, тогда $y - 1 = 0$, что невозможно.

3. Если $\sin x = -1$, то

$y = 4\sin x + 3 = -1$, тогда $y - 1 < 0$, что невозможно.

4. Если $\sin x = 1$, то

$y = 4\sin x + 3 = 7$, тогда $y - 1 > 0$,

и в этом случае получаются решения системы.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, y = 7$.

Критерии:

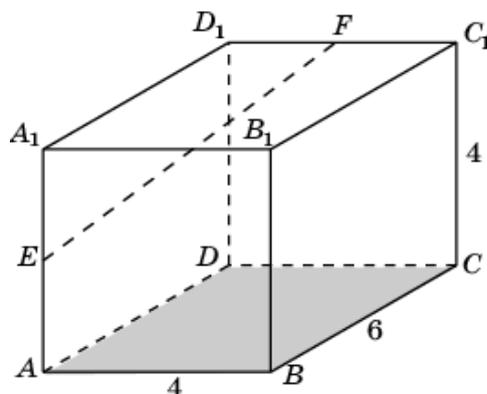
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за того, что в решении не учтена положительность подкоренного выражения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 4$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостью ABC и прямой EF , проходящей через середины ребер AA_1 и $C_1 D_1$.

Решение.

Будем искать угол между прямой EF и плоскостью грани $A_1B_1C_1D_1$. Точка A_1 - проекция точки E на эту плоскость.



Искомый угол $\angle EFA_1$. $A_1E = \frac{4}{2} = 2$. $A_1F = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$.

$$\operatorname{tg} \angle EFA_1 = \frac{2}{2\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С3

Решите неравенство

$$\sqrt{5-x} < \frac{\sqrt{x^3 - 7x^2 + 14x - 5}}{\sqrt{x-1}}.$$

Решение.

$$\sqrt{5-x} < \frac{\sqrt{x^3 - 7x^2 + 14x - 5}}{\sqrt{x-1}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{x-1} < \sqrt{x^3 - 7x^2 + 14x - 5} \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1) \cdot (5-x) < x^3 - 7x^2 + 14x - 5 \\ 1 < x \leq 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 8x > 0 \quad (\Leftrightarrow x(x-2)(x-4) > 0) \\ 1 < x \leq 5 \end{cases}$$

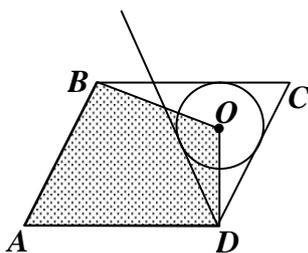
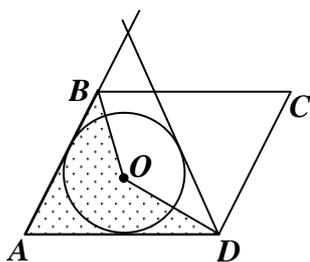
Ответ: $1 < x < 2, 4 < x \leq 5$.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Ответ неточен или из-за арифметической ошибки, или из-за того, что в него включены (отброшены) значения переменной, при которых подкоренные выражения обращаются в ноль.	2
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С4

Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 3$, $BC = 5$, $\angle A = 60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.



Решение. Окружностей две: каждая из них – вписанная в правильный треугольник. Эти треугольники имеют стороны равные 5 и 3 – соответственно. Поэтому радиусы окружностей равны третьей части высоты

правильного треугольника.

Для треугольника со стороной 5 радиус равен $r = \frac{5 \cdot \sin 60^\circ}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$.

Найдем площадь невыпуклого четырехугольника как сумму площадей треугольников AOB и AOD :

$$S_{ABOD} = \frac{1}{2} AB \cdot r + \frac{1}{2} AD \cdot r = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

Для треугольника со стороной 3 радиус равен $r = \frac{3 \cdot \sin 60^\circ}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Чтобы найти площадь четырехугольника $ABOD$, вычтем из площади параллелограмма площади треугольников BOC и DOC :

$$S_{ABOD} = AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ - \frac{1}{2} BC \cdot r - \frac{1}{2} CD \cdot r = \frac{11\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{10\sqrt{3}}{3}, \frac{11\sqrt{3}}{2}$.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C5

Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \frac{x-ax-a}{x-2+2a} \geq 0, \\ x-8 > ax \end{cases}$$

не имеет решений.

Решение. Рассмотрим второе неравенство системы $(1-a)x > 8$.

Если $a = 1$, то неравенство, а значит и система не имеет решений.

Если $a < 1$, то решение неравенства – луч $x > \frac{8}{1-a}$.

Если $a > 1$, то решение неравенства – луч $x < \frac{8}{1-a}$.

При $a \neq 1$ первое неравенство системы принимает вид

$$\begin{cases} (1-a)\left(x - \frac{a}{1-a}\right)(x - 2(1-a)) \geq 0, \\ x \neq 2(1-a) \end{cases}$$

Если $a < 1$, то решение этой системы – два луча с концами в точках

$$\frac{a}{1-a}, 2(1-a).$$

Если $a > 1$, то решение этой системы – полуинтервал с концами в точках

$$\frac{a}{1-a}, 2(1-a).$$

Отметим, что точки $x = 2(1-a)$ нет в множестве решений второго неравенства.

Для того, чтобы система не имела решений, при $a \neq 1$ необходимо и достаточно:

$$\begin{cases} a \geq 1, \\ \frac{a}{1-a} \geq \frac{8}{1-a}, \\ 2(1-a) \geq \frac{8}{1-a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq a \leq 8, \\ (1-a)^2 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq a \leq 3.$$

Ответ: $1 \leq a \leq 3$.

Критерии:

Балл	Характеристика решения задачи С5
4	Обоснованно получен верный ответ.
3	Либо получен верный ответ, но при его обосновании допущены ошибки, либо обоснованно получен ответ, отличный от верного только из-за потери (приобретения) одного–двух искомых значений параметра.
2	Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдено хотя бы одно верное расположение луча и полуинтервала.
1	Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдены некоторые из искомых значений параметра.
0	Все ситуации, отличные от описанных выше.

C6

Последние члены двух конечных арифметических прогрессий

$$a_1 = 5, a_2 = 8, \dots, a_N \quad \text{и} \quad b_1 = 9, b_2 = 14, \dots, b_M$$

совпадают, а сумма всех совпадающих (взятых по одному разу) членов этих прогрессий равна 815. Найдите число членов в каждой прогрессии.

Решение. Ясно, что

$$a_m = 5 + 3(m - 1), m = 1, \dots, N$$

$$b_k = 9 + 5(k - 1), k = 1, \dots, M$$

Общие члены прогрессий удовлетворяют уравнению

$$5 + 3(m - 1) = 9 + 5(k - 1) \Leftrightarrow 3m = 5k + 2.$$

Левая часть последнего уравнения делится на 3, поэтому

$$k = 3n - 1, 3m = 15n - 3,$$

где $1 \leq n \leq L$.

Найдём L . Общие члены двух прогрессий сами образуют арифметическую прогрессию с первым членом равным 14, а последним – равным $15L - 1$.

Значит,

$$\frac{14 + 15L - 1}{2} L = 815 \Leftrightarrow 15L^2 + 13L - 1630 = 0.$$

Откуда $L = 10$. Поэтому $M = 5L - 1 = 29, N = 3L - 1 = 49$.

Ответ: 49 и 29.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ неверен из-за арифметической ошибки, но правильно указана арифметическая прогрессия общих членов.	3
Ответ неверен, однако есть попытка доказать, что общие члены прогрессий образуют арифметическую прогрессию.	2
Общие члены арифметических прогрессий находятся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0