

Тренировочная работа №2
по МАТЕМАТИКЕ
Ноябрь, 2009

Вариант №1

Район _____

Город (населенный пункт) _____

Школа _____

Класс _____

Фамилия _____

Имя _____

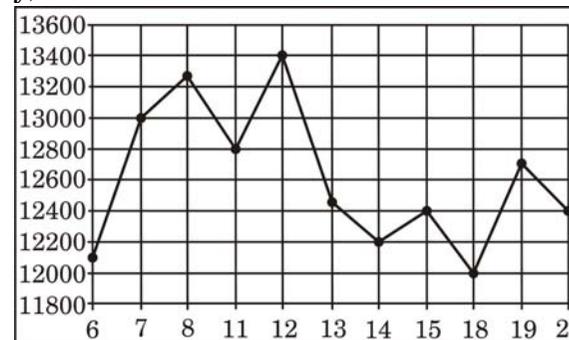
Отчество _____

Ответом в заданиях В1 – В12 является целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Укажите ответ в отведенном для него поле. Единицы измерения в ответе не пишите.

В1 Банка краски стоит 160 рублей. Какое наибольшее число таких банок можно купить на 1000 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 25%?

Ответ:

В2 На рисунке жирными точками показана цена никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 6 по 20 мая 2009 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны никеля в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшую цену никеля на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за тонну).



Ответ:

В3 Найдите корень уравнения $\sqrt{1-2x} = 7$.

Ответ:

Часть 2

В4 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC боковая сторона AB равна 10, а высота, проведенная к основанию, равна $2\sqrt{21}$. Найдите косинус угла $\angle A$.

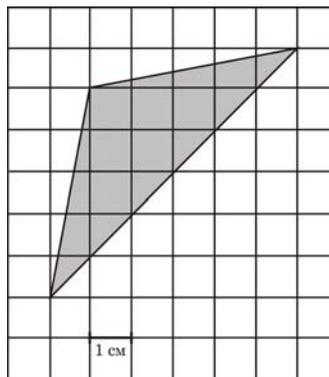
Ответ:

В5 Для изготовления книжных полок требуется заказать 42 одинаковых стекла в одной из трех фирм. Площадь каждого стекла $0,25 \text{ м}^2$. В таблице приведены цены на стекло, а также на резку стекол и шлифовку края. Сколько рублей будет стоить самый дешевый заказ?

Фирма	Цена стекла (руб. за 1 м^2)	Резка и шлифовка (руб. за одно стекло)
А	415	75
Б	430	65
В	465	60

Ответ:

В6 На клетчатой бумаге с клетками размером $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ изображен треугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

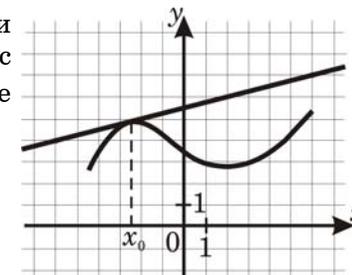


Ответ:

В7 Найдите значение выражения: $3^9 \cdot 2^6 : 6^5$.

Ответ:

В8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ:

В9 Объем прямоугольного параллелепипеда равен 1. Каждое ребро этого параллелепипеда увеличили в 2 раза. Найдите объем получившегося параллелепипеда.

Ответ:

В10 Для одного из предприятий-монополистов зависимость объёма спроса на продукцию q (единиц в месяц) от её цены p (тыс. руб.) задаётся формулой: $q = 100 - 10p$. Определите максимальное значение цены p (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = q \cdot p$ составит не менее 240 тыс. руб.

Ответ:

В11 Найдите наибольшее значение функции $y = 14\cos x + 7x\sqrt{3} - \frac{7\pi\sqrt{3}}{3} + 6$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ:

В12 Из А в В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 15 км/ч , а вторую половину пути — со скоростью 90 км/ч , в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля, если известно, что она больше 54 км/ч . Ответ дайте в км/ч .

Ответ:

При выполнении заданий C1 – C6 необходимо записать решение.

C1

Решите систему
$$\begin{cases} \frac{\sin 2x - \cos x}{\sqrt{y+1}} = 0, \\ y = 4\sin x - 3. \end{cases}$$

C2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AA_1 = 4$, $A_1 D_1 = 6$, $C_1 D_1 = 6$, найдите тангенс угла между плоскостью ADD_1 и прямой EF , проходящей через середины ребер AB и $B_1 C_1$.

C3

Решите неравенство
$$\sqrt{7-x} < \frac{\sqrt{x^3 - 6x^2 + 14x - 7}}{\sqrt{x-1}}.$$

C4

Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 2$, $BC = 3$, $\angle A = 60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.

C5

Найдите все значения a , при каждом из которых система
$$\begin{cases} \frac{x - ax - a}{x - 2 + 2a} \geq 0, \\ x - 8 > ax \end{cases}$$
 не имеет решений.

C6

Последние члены двух конечных арифметических прогрессий $a_1 = 5$, $a_2 = 8$, ..., a_N и $b_1 = 9$, $b_2 = 14$, ..., b_M совпадают, а сумма всех совпадающих (взятых по одному разу) членов этих прогрессий равна 815. Найдите число членов в каждой прогрессии.

Тренировочная работа №2
по МАТЕМАТИКЕ
Ноябрь, 2009

Вариант №2

Район _____

Город (населенный пункт) _____

Школа _____

Класс _____

Фамилия _____

Имя _____

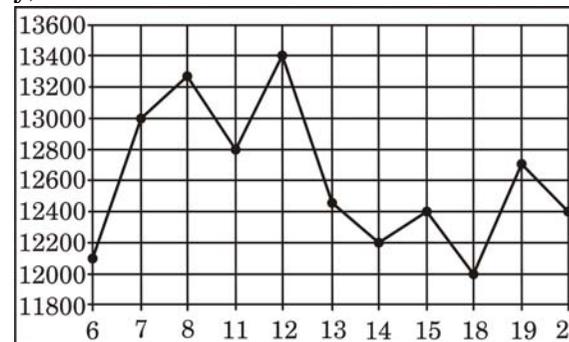
Отчество _____

Ответом в заданиях В1 – В12 является целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Укажите ответ в отведенном для него поле. Единицы измерения в ответе не пишете.

В1 Шариковая ручка стоит 40 рублей. Какое наибольшее число таких ручек можно будет купить на 900 рублей после повышения цены на 10%?

Ответ:

В2 На рисунке жирными точками показана цена никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 6 по 20 мая 2009 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны никеля в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшую цену никеля на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за тонну).



Ответ:

В3 Найдите корень уравнения $\sqrt{2x+3} = 5$.

Ответ:

Часть 2

В4 В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 30$, $AC = 3\sqrt{19}$. Найдите $\sin A$.

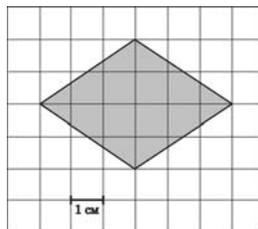
Ответ:

- В5** Для остекления веранды требуется заказать 30 одинаковых стекол в одной из трех фирм. Площадь каждого стекла $0,25 \text{ м}^2$. В таблице приведены цены на стекло и на резку стекол. Сколько рублей будет стоить самый дешевый заказ?

Фирма	Цена стекла (руб. за 1 м^2)	Резка стекла (руб. за одно стекло)	Дополнительные условия
А	300	25	
Б	290	30	
В	360	20	При заказе на сумму больше 2500 руб. резка бесплатно

Ответ:

- В6** На клетчатой бумаге с клетками размером $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ изображена фигура (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.

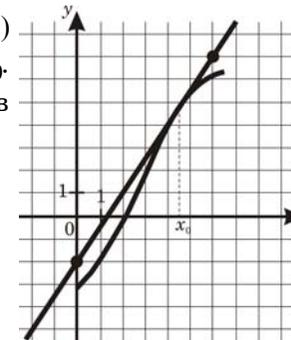


Ответ:

- В7** Найдите значение выражения: $5^9 \cdot 2^8 : 10^7$.

Ответ:

- В8** На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ:

- В9** Объем прямоугольного параллелепипеда равен 1. Каждое ребро этого параллелепипеда увеличили в 2 раза. Найдите объем получившегося параллелепипеда.

Ответ:

- В10** В боковой стенке цилиндрического бака вблизи дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём меняется по закону $H(t) = 5 - 0,8t + 0,032t^2$, где t — время в минутах. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ дайте в минутах.

Ответ:

- В11** Найдите наименьшее значение функции $y = 5 + \frac{2\pi\sqrt{3}}{3} - 2x\sqrt{3} - 4\cos x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ:

- В12** Из А в В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 12 км/ч , а вторую половину пути — со скоростью 72 км/ч , в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля, если известно, что она больше 45 км/ч . Ответ дайте в км/ч .

Ответ:

При выполнении заданий C1 – C6 необходимо записать решение.

C1

Решите систему
$$\begin{cases} \frac{\sin 2x + \cos x}{\sqrt{y-1}} = 0, \\ y = 4\sin x + 3. \end{cases}$$

C2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 4$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостью ABC и прямой EF , проходящей через середины ребер AA_1 и $C_1 D_1$.

C3

Решите неравенство
$$\sqrt{5-x} < \frac{\sqrt{x^3 - 7x^2 + 14x - 5}}{\sqrt{x-1}}.$$

C4

Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 3$, $BC = 5$, $\angle A = 60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.

C5

Найдите все значения a , при каждом из которых система
$$\begin{cases} \frac{x-ax-a}{x-2+2a} \geq 0, \\ x-8 > ax \end{cases}$$
 не имеет решений.

C6

Последние члены двух конечных арифметических прогрессий $a_1 = 5$, $a_2 = 8$, ..., a_N и $b_1 = 9$, $b_2 = 14$, ... b_M совпадают, а сумма всех совпадающих (взятых по одному разу) членов этих прогрессий равна 815. Найдите число членов в каждой прогрессии.

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите систему $\begin{cases} \frac{\sin 2x - \cos x}{\sqrt{y+1}} = 0, \\ y = 4\sin x - 3. \end{cases}$

Решение.

- $\sin 2x - \cos x = 0 \Leftrightarrow (2\sin x - 1)\cos x = 0$, откуда $\sin x = \frac{1}{2}$, $\sin x = 1$ или $\sin x = -1$.
- Если $\sin x = \frac{1}{2}$, то $y = 4\sin x - 3 = -1$; тогда $y + 1 = 0$, что невозможно, так как иначе в знаменателе дроби стоит 0.
- Если $\sin x = -1$, то $y = 4\sin x - 3 = -7$; тогда $y + 1 < 0$. Это невозможно.
- Если $\sin x = 1$, то $y = 4\sin x - 3 = 1$, тогда $y + 1 > 0$, и в этом случае получаются решения системы.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, y = 1$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за того, что в решении не учтена положительность подкоренного выражения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AA_1 = 4$, $A_1 D_1 = 6$, $C_1 D_1 = 6$, найдите тангенс угла между плоскостью ADD_1 и прямой EF , проходящей через середины ребер AB и $B_1 C_1$.

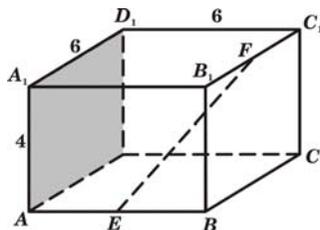
Решение.

Найдем угол между прямой EF и плоскостью грани $BB_1 C_1 C$. Точка B – проекция точки E на эту плоскость.

Искомый угол есть $\angle EFB$. $EB = \frac{6}{2} = 3$.

$FB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. $\angle EFB = \frac{3}{5}$.

Ответ: $\frac{3}{5}$.



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C3 Решите неравенство $\sqrt{7-x} < \frac{\sqrt{x^3 - 6x^2 + 14x - 7}}{\sqrt{x-1}}$.

Решение.

$\sqrt{7-x} < \frac{\sqrt{x^3 - 6x^2 + 14x - 7}}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{7-x} \cdot \sqrt{x-1} < \sqrt{x^3 - 6x^2 + 14x - 7} \\ x \neq 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1) \cdot (7-x) < x^3 - 6x^2 + 14x - 7 \\ 1 < x \leq 7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 5x^2 + 6x > 0 \ (\Leftrightarrow x(x-2)(x-3) > 0) \\ 1 < x \leq 7 \end{cases}$

Ответ: $1 < x < 2, 3 < x \leq 7$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Ответ неточен или из-за арифметической ошибки, или из-за того, что в него включены (отброшены) значения переменной, при которых подкоренные выражения обращаются в ноль.	2
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С4 Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 2$, $BC = 3$, $\angle A = 60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырехугольника $ABOD$.

Решение.

Окружностей две: каждая из них – вписанная в правильный треугольник. Эти треугольники имеют стороны равные 3 и 2 – соответственно. Поэтому радиусы окружностей равны третьей части высоты правильного треугольника.

Для треугольника со стороной 3 радиус равен $r = \frac{3 \cdot \sin 60^\circ}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Найдем площадь невыпуклого четырехугольника как сумму площадей треугольников AOB и AOD :

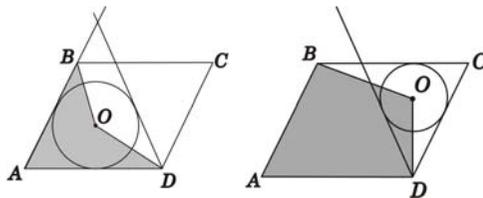
$$S_{ABOD} = \frac{1}{2}AB \cdot r + \frac{1}{2}AD \cdot r = \frac{5\sqrt{3}}{4}.$$

Для треугольника со стороной 2 радиус равен $r = \frac{2 \cdot \sin 60^\circ}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Чтобы найти площадь четырехугольника $ABOD$, вычтем из площади параллелограмма площади треугольников BOC и DOC :

$$S_{ABOD} = AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ - \frac{1}{2}BC \cdot r - \frac{1}{2}CD \cdot r = \frac{13\sqrt{3}}{6}.$$

Ответ: $\frac{5\sqrt{3}}{4}$, $\frac{13\sqrt{3}}{6}$.



Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С5 Найдите все значения a , при каждом из которых система
$$\begin{cases} x - ax - a \geq 0, \\ x - 2 + 2a \geq 0, \\ x - 8 > ax \end{cases}$$
 не имеет решений.

Решение.

Рассмотрим второе неравенство системы $(1 - a)x > 8$.

Если $a = 1$, то неравенство, а значит и система не имеет решений.

Если $a < 1$, то решение неравенства – луч $x > \frac{8}{1 - a}$.

Если $a > 1$, то решение неравенства – луч $x < \frac{8}{1 - a}$.

При $a \neq 1$ первое неравенство системы принимает вид

$$\begin{cases} (1 - a)\left(x - \frac{a}{1 - a}\right)(x - 2(1 - a)) \geq 0, \\ x \neq 2(1 - a) \end{cases}$$

Если $a < 1$, то решение этой системы – два луча с концами в точках $\frac{a}{1 - a}$, $2(1 - a)$.

Если $a > 1$, то решение этой системы – полуинтервал с концами в точках $\frac{a}{1 - a}$, $2(1 - a)$.

Отметим, что точки $x = 2(1 - a)$ нет в множестве решений второго неравенства.

Для того, чтобы система не имела решений, при $a \neq 1$ необходимо и достаточно:

$$\begin{cases} a \geq 1, \\ \frac{a}{1 - a} \geq \frac{8}{1 - a}, \\ 2(1 - a) \geq \frac{8}{1 - a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq a \leq 8, \\ (1 - a)^2 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq a \leq 3.$$

Ответ: $1 \leq a \leq 3$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4
Либо получен верный ответ, но при его обосновании допущены ошибки, либо обоснованно получен ответ, отличный от верного только из-за потери (приобретения) одного–двух искомых значений параметра.	3
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдено хотя бы одно верное расположение луча и полуинтервала.	2
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдены некоторые из искомых значений параметра.	1
Все ситуации, отличные от описанных выше.	0

С6 Последние члены двух конечных арифметических прогрессий $a_1 = 5, a_2 = 8, \dots, a_N$ и $b_1 = 9, b_2 = 14, \dots, b_M$ совпадают, а сумма всех совпадающих (взятых по одному разу) членов этих прогрессий равна 815. Найдите число членов в каждой прогрессии.

Решение.

Ясно, что

$$a_m = 5 + 3(m - 1) \quad m = 1, \dots, N$$

$$b_k = 9 + 5(k - 1), \quad k = 1, \dots, M$$

Общие члены прогрессий удовлетворяют уравнению $5 + 3(m - 1) = 9 + 5(k - 1) \Leftrightarrow 3m = 5k + 2$.

Левая часть последнего уравнения делится на 3, поэтому $k = 3n - 1$ $3m = 15n - 3$, где $1 \leq n \leq L$.

Найдём L Общие члены двух прогрессий сами образуют арифметическую прогрессию с первым членом равным 14, а последним – равным $15L - 1$.

Значит, $\frac{14 + 15L - 1}{2}L = 815 \Leftrightarrow 15L^2 + 13L - 1630 = 0$.

Откуда $L = 10$. Поэтому $M = 5L - 1 = 29, N = 3L - 1 = 49$.

Ответ: 49 и 29.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ неверен из-за арифметической ошибки, но правильно указана арифметическая прогрессия общих членов.	3
Ответ неверен, однако есть попытка доказать, что общие члены прогрессий образуют арифметическую прогрессию.	2
Общие члены арифметических прогрессий находятся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите систему
$$\begin{cases} \frac{\sin 2x + \cos x}{\sqrt{y-1}} = 0, \\ y = 4\sin x + 3. \end{cases}$$

Решение.

- $\sin 2x + \cos x = 0 \Leftrightarrow (2\sin x + 1)\cos x = 0$, откуда $\sin x = -\frac{1}{2}$, $\sin x = 1$ или $\sin x = -1$.
- Если $\sin x = -\frac{1}{2}$, то $y = 4\sin x + 3 = 1$, тогда $y - 1 = 0$, что невозможно.
- Если $\sin x = -1$, то $y = 4\sin x + 3 = -1$, тогда $y - 1 < 0$, что невозможно.
- Если $\sin x = 1$, то $y = 4\sin x + 3 = 7$, тогда $y - 1 > 0$, и в этом случае получаются решения системы.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, y = 7$.

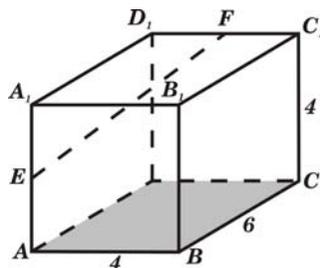
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за того, что в решении не учтена положительность подкоренного выражения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 4$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостью ABC и прямой EF , проходящей через середины ребер AA_1 и $C_1 D_1$.

Решение.

Будем искать угол между прямой EF и плоскостью грани $A_1 B_1 C_1 D_1$. Точка A_1 – проекция точки E на эту плоскость. Искомый угол $\angle EFA_1$. $A_1 E = \frac{4}{2} = 2$.
 $A_1 F = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$. $\angle EFA_1 = \frac{2}{2\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{10}}$.



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C3 Решите неравенство
$$\sqrt{5-x} < \frac{\sqrt{x^3 - 7x^2 + 14x - 5}}{\sqrt{x-1}}$$

Решение.

$$\begin{aligned} \sqrt{5-x} &< \frac{\sqrt{x^3 - 7x^2 + 14x - 5}}{\sqrt{x-1}} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{x-1} < \sqrt{x^3 - 7x^2 + 14x - 5} \\ x \neq 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1) \cdot (5-x) < x^3 - 7x^2 + 14x - 5 \\ 1 < x \leq 5 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 8x > 0 \quad (\Leftrightarrow x(x-2)(x-4) > 0) \\ 1 < x \leq 5 \end{cases} \end{aligned}$$

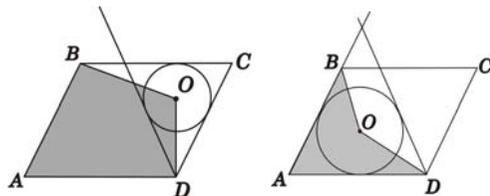
Ответ: $1 < x < 2, 4 < x \leq 5$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Ответ неточен или из-за арифметической ошибки, или из-за того, что в него включены (отброшены) значения переменной, при которых подкоренные выражения обращаются в ноль.	2
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С4 Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 3$, $BC = 5$, $\angle A = 60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырехугольника $ABOD$.

Решение.

Окружностей две: каждая из них – вписанная в правильный треугольник. Эти треугольники имеют стороны равные 5 и 3 – соответственно. Поэтому радиусы окружностей равны третьей части высоты правильного треугольника.



Для треугольника со стороной 5 радиус равен $r = \frac{5 \cdot \sin 60^\circ}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$.

Найдем площадь невыпуклого четырехугольника как сумму площадей треугольников AOB и AOD :

$$S_{ABOD} = \frac{1}{2}AB \cdot r + \frac{1}{2}AD \cdot r = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

Для треугольника со стороной 3 радиус равен $r = \frac{3 \cdot \sin 60^\circ}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Чтобы найти площадь четырехугольника $ABOD$, вычтем из площади параллелограмма площади треугольников BOC и DOC :

$$S_{ABOD} = AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ - \frac{1}{2}BC \cdot r - \frac{1}{2}CD \cdot r = \frac{11\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{10\sqrt{3}}{3}, \frac{11\sqrt{3}}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С5 Найдите все значения a , при каждом из которых система
$$\begin{cases} x - ax - a \geq 0, \\ x - 2 + 2a \geq 0, \\ x - 8 > ax \end{cases}$$
 не имеет решений.

Решение.

Рассмотрим второе неравенство системы $(1 - a)x > 8$.

Если $a = 1$, то неравенство, а значит и система не имеет решений.

Если $a < 1$, то решение неравенства – луч $x > \frac{8}{1 - a}$.

Если $a > 1$, то решение неравенства – луч $x < \frac{8}{1 - a}$.

При $a \neq 1$ первое неравенство системы принимает вид

$$\begin{cases} (1 - a)\left(x - \frac{a}{1 - a}\right)(x - 2(1 - a)) \geq 0, \\ x \neq 2(1 - a) \end{cases}$$

Если $a < 1$, то решение этой системы – два луча с концами в точках $\frac{a}{1 - a}, 2(1 - a)$.

Если $a > 1$, то решение этой системы – полуинтервал с концами в точках $\frac{a}{1 - a}, 2(1 - a)$.

Отметим, что точки $x = 2(1 - a)$ нет в множестве решений второго неравенства.

Для того, чтобы система не имела решений, при $a \neq 1$ необходимо и достаточно:

$$\begin{cases} a \geq 1, \\ \frac{a}{1 - a} \geq \frac{8}{1 - a}, \\ 2(1 - a) \geq \frac{8}{1 - a} \end{cases}, \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq a \leq 8, \\ (1 - a)^2 \Leftrightarrow 1 \leq a \leq 3. \end{cases}$$

Ответ: $1 \leq a \leq 3$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4
Либо получен верный ответ, но при его обосновании допущены ошибки, либо обоснованно получен ответ, отличный от верного только из-за потери (приобретения) одного–двух искомых значений параметра.	3
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдено хотя бы одно верное расположение луча и полуинтервала.	2
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдены некоторые из искомых значений параметра.	1
Все ситуации, отличные от описанных выше.	0

С6 Последние члены двух конечных арифметических прогрессий $a_1 = 5, a_2 = 8, \dots, a_N$ и $b_1 = 9, b_2 = 14, \dots, b_M$ совпадают, а сумма всех совпадающих (взятых по одному разу) членов этих прогрессий равна 815. Найдите число членов в каждой прогрессии.

Решение.

Ясно, что

$$a_m = 5 + 3(m - 1) \quad m = 1, \dots, N$$

$$b_k = 9 + 5(k - 1) \quad k = 1, \dots, M$$

Общие члены прогрессий удовлетворяют уравнению $5 + 3(m - 1) = 9 + 5(k - 1) \Leftrightarrow 3m = 5k + 2$.

Левая часть последнего уравнения делится на 3, поэтому $k = 3n - 1$, $3m = 15n - 3$, где $1 \leq n \leq L$.

Найдём L . Общие члены двух прогрессий сами образуют арифметическую прогрессию с первым членом равным 14, а последним – равным $15L - 1$.

Значит, $\frac{14 + 15L - 1}{2}L = 815 \Leftrightarrow 15L^2 + 13L - 1630 = 0$.

Откуда $L = 10$. Поэтому $M = 5L - 1 = 29, N = 3L - 1 = 49$.

Ответ: 49 и 29.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ неверен из-за арифметической ошибки, но правильно указана арифметическая прогрессия общих членов.	3
Ответ неверен, однако есть попытка доказать, что общие члены прогрессий образуют арифметическую прогрессию.	2
Общие члены арифметических прогрессий находятся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0