

Тренировочная работа № 4
по МАТЕМАТИКЕ

11 класс

Вариант №1

Район _____

Город (населенный пункт) _____

Школа _____

Класс _____

Фамилия _____

Имя _____

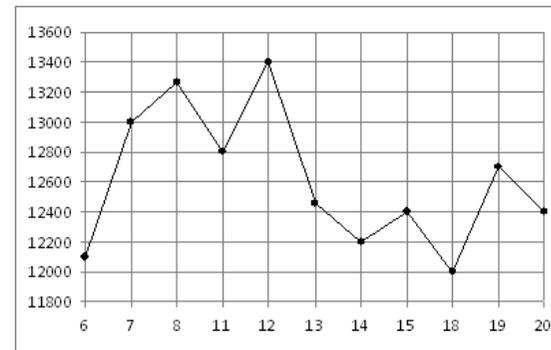
Отчество _____

Ответом в заданиях В1 – В12 является целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Укажите ответ в отведенном для него поле. Единицы измерения в ответе не пишете.

В1 Флакон шампуня стоит 150 рублей. Какое наибольшее число флаконов можно купить на 500 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 25%?

Ответ:

В2 На рисунке жирными точками показана цена никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 6 по 20 мая 2009 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны никеля в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьшую цену никеля на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за тонну).



Ответ:

В3 Найдите корень уравнения: $\log_3(3 - x) = 3$.

Ответ:

Часть 2

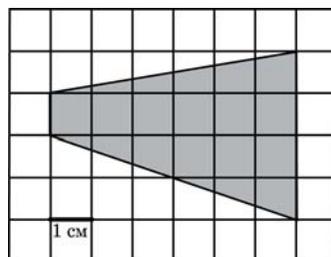
В4 В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 40$, $BC = 24$. Найдите $\cos A$.

Ответ:

- В5** Семья из трех человек едет из Москвы в г.Чебоксары. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине. Билет на поезд на одного человека стоит 770 рублей. Автомобиль расходует 15 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 700 км, а цена бензина равна 20 руб. за литр. Сколько рублей будет стоить самая дешевая поездка для этой семьи?

Ответ:

- В6** На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.

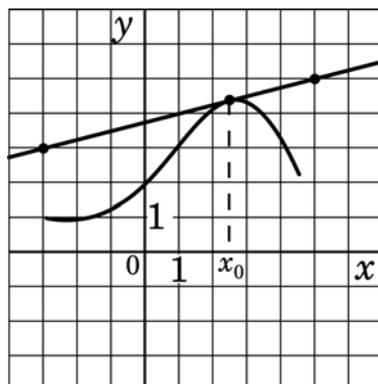


Ответ:

- В7** Найдите значение выражения: $7^7 \cdot 11^8 : 77^6$.

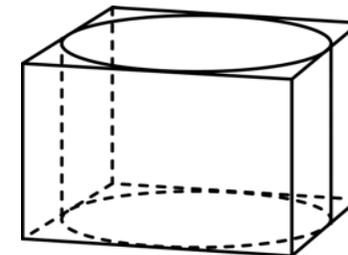
Ответ:

- В8** На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ:

- В9** Правильная четырехугольная призма описана около цилиндра, радиус основания которого равен 1. Площадь боковой поверхности призмы равна 16. Найдите высоту цилиндра.



Ответ:

- В10** Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела вычисляется по формуле: $P = \sigma S T^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ — числовой коэффициент, площадь S измеряется в квадратных метрах, температура — в градусах Кельвина, а мощность — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{81} \cdot 10^{16}$ м², а излучаемая ею мощность P не менее $9,12 \cdot 10^{21}$, определите наименьшую возможную температуру этой звезды (в градусах Кельвина).

Ответ:

- В11** Найдите наименьшее значение функции $y = (x - 20)e^{x-19}$ на отрезке $[18; 20]$.

Ответ:

- В12** Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 72 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 6 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 2 часа. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из А в В. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:

При выполнении заданий C1 – C4 необходимо записать решение.

C1

Решите систему $\begin{cases} 25^{tgx} + 5^{tgx+1} - 50 = 0, \\ \sqrt{2}\cos x + 2y = 3\sqrt[4]{2}. \end{cases}$

C2

Сторона основания правильной треугольной призмы $ABC A_1 B_1 C_1$ равна 8. Высота этой призмы равна 6. Найти угол между прямыми CA_1 и AB_1 .

C3

Решите неравенство $\log_{6x^2-5x+1} 2 > \log_{\sqrt{6x^2-5x+1}} 2$.

C4

В прямоугольнике $ABCD$, $AB = 2 BC = \sqrt{3}$. Точка E на прямой AB выбрана так, что $\angle AED = \angle DEC$. Найдите AE .

Тренировочная работа № 4
по МАТЕМАТИКЕ

11 класс

Вариант №2

Район _____

Город (населенный пункт) _____

Школа _____

Класс _____

Фамилия _____

Имя _____

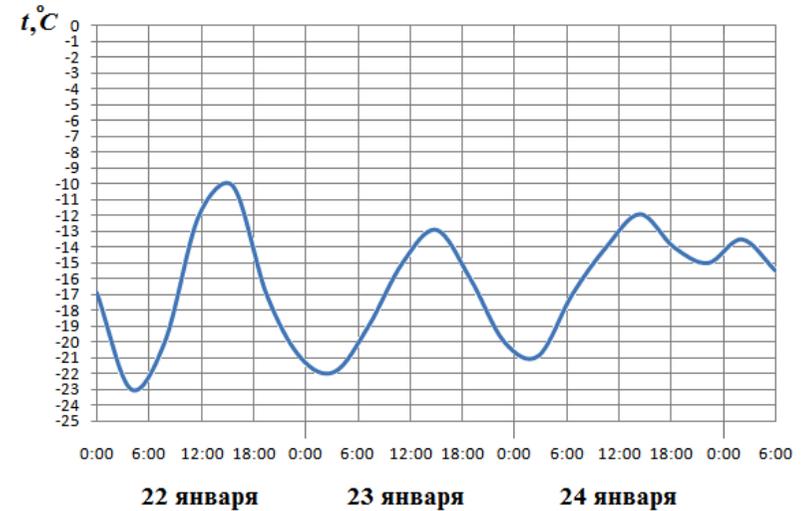
Отчество _____

Ответом в заданиях В1 – В12 является целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Укажите ответ в отведенном для него поле. Единицы измерения в ответе не пишите.

В1 Теплоход рассчитан на 900 пассажиров и 25 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 80 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

Ответ:

В2 На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наименьшую температуру воздуха 24 января. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ:

В3 Найдите корень уравнения: $\sqrt{\frac{2}{3x-27}} = \frac{1}{3}$.

Ответ:

Часть 2

В4 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC боковая сторона AB равна 17, а $\cos A = \frac{8}{17}$. Найдите высоту, проведенную к основанию.

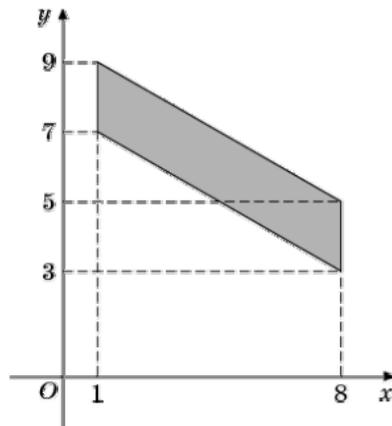
Ответ:

В5 Для изготовления книжных полок требуется заказать 40 одинаковых стекол в одной из трех фирм. Площадь каждого стекла $0,25 \text{ м}^2$. В таблице приведены цены на стекло, а также на резку стекол и шлифовку края. Сколько рублей будет стоить самый дешевый заказ?

| Фирма | Цена стекла (руб. за 1 м^2) | Резка и шлифовка (руб. за одно стекло) |
|-------|--|--|
| А | 415 | 75 |
| Б | 430 | 65 |
| В | 465 | 60 |

Ответ:

В6 Найдите площадь четырехугольника, изображенного на рисунке.

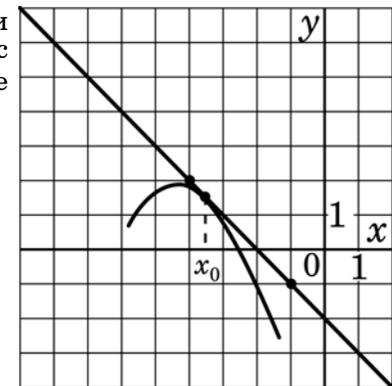


Ответ:

В7 Найдите значение выражения $\log_8 288 - \log_8 4,5$.

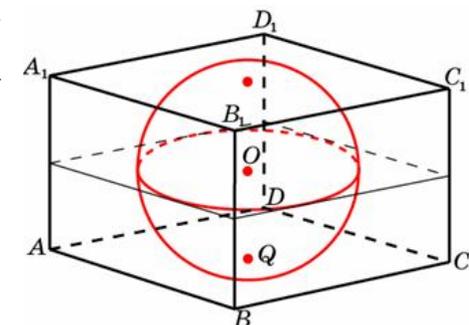
Ответ:

В8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ:

В9 Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, описанного около сферы, равна 96. Найдите радиус сферы.



Ответ:

В10 При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 15$ м. При прокладке путей между рельсами оставили зазор в 9 мм. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина меняется по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ)$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}(\text{C}^\circ)^{-1}$ – коэффициент теплового расширения, t° – температура (в градусах Цельсия). При какой наименьшей температуре между рельсами исчезнет зазор? (Ответ выразите в градусах Цельсия).

Ответ:

В11 Найдите наименьшее значение функции $y = 2x^2 - 6x + 2\ln x + 12$ на отрезке $\left[\frac{6}{7}; \frac{8}{7}\right]$.

Ответ:

В12 Из А в В одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 11 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 66 км/ч, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста, если известно, что она больше 42 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:

При выполнении заданий С1 – С4 необходимо записать решение.

С1 Решите систему
$$\begin{cases} 25^{\lg x - 1} + 5^{\lg x - 1} - 2 = 0, \\ \sqrt{-2\sin x} - 4y = 5\sqrt[4]{2}. \end{cases}$$

С2 В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB , равной $8\sqrt{2}$. Высота призмы равна 6. Найдите угол между прямыми AC_1 и CB_1 .

С3 Решите неравенство
$$\frac{1}{6x^2 - 5x} \geq \frac{1}{\sqrt{6x^2 - 5x + 1} - 1}.$$

С4 Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана в окружность с центром O . Найдите высоту трапеции, если её средняя линия равна 3 и $\sin \angle AOB = \frac{3}{5}$.

Ответы к заданиям с кратким ответом

| № задания | Ответ |
|------------------|--------------|
| В1 | 4 |
| В2 | 12000 |
| В3 | -24 |
| В4 | 0,8 |
| В5 | 2100 |
| В6 | 15 |

| № задания | Ответ |
|------------------|--------------|
| В7 | 847 |
| В8 | 0,25 |
| В9 | 2 |
| В10 | 6000 |
| В11 | -1 |
| В12 | 12 |

Ответы к заданиям с кратким ответом

| № задания | Ответ |
|------------------|--------------|
| В1 | 12 |
| В2 | -21 |
| В3 | 15 |
| В4 | 15 |
| В5 | 6900 |
| В6 | 14 |

| № задания | Ответ |
|------------------|--------------|
| В7 | 2 |
| В8 | -1 |
| В9 | 2 |
| В10 | 50 |
| В11 | 8 |
| В12 | 44 |

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите систему $\begin{cases} 25^{tgx} + 5^{tgx+1} - 50 = 0, \\ \sqrt{2\cos x} + 2y = 3\sqrt[4]{2}. \end{cases}$

Решение:
 Решим первое уравнение. Пусть $z = 5^{tgx}$. Тогда $z^2 + 5z - 50 = 0$. Корни $z = -10; z = 5$.
 Уравнение $5^{tgx} = -10$ не имеет решений.
 Из уравнения $5^{tgx} = 5$ находим: $tgx = 1$.
 Из второго уравнения следует, что $\cos x \geq 0$, значит $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$.

Поэтому $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Тогда $\sqrt{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} + 2y = 3\sqrt[4]{2}$;

$2y = 2\sqrt[4]{2}$;
 $y = \sqrt[4]{2}$.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \sqrt[4]{2}\right), k \in Z$.

| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже. | 0 |
| Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за того, что в решение включена посторонняя серия. | 1 |
| Обоснованно получен правильный ответ. | 2 |

C2 Сторона основания правильной треугольной призмы $ABC A_1 B_1 C_1$ равна 8. Высота этой призмы равна 6. Найти угол между прямыми $C A_1$ и AB_1 .

Решение:

Рассмотрим призму в основании которой лежит ромб $ABCD$.

Эта призма является прямым параллелепипедом. Поэтому $B_1 D \parallel A_1 C$. Значит, искомый угол $AB_1 D$.

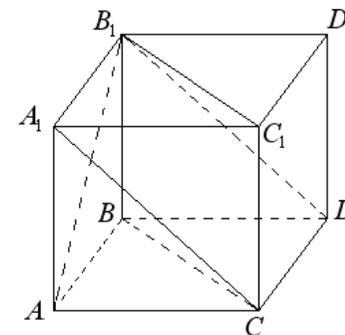
Из прямоугольного треугольника $AA_1 B_1$ находим: $AB_1 = 10$. Аналогично, $B_1 D = 10$. В равнобедренном треугольнике $AB_1 D$ сторона AD равна $8\sqrt{3}$.

Значит, $\angle AB_1 D = 2\arcsin \frac{AD}{2 \cdot AB} = 2\arcsin \frac{2\sqrt{3}}{5}$.

Комментарий. Для нахождения угла можно было воспользоваться теоремой косинусов:

$AD^2 = AB_1^2 + B_1 D^2 - 2AB_1 \cdot B_1 D \cdot \cos AB_1 D$;
 $64 \cdot 3 = 100 + 100 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos AB_1 D$;
 $\cos AB_1 D = 0,04$;
 $\angle AB_1 D = \arccos 0,04$.

Ответ: $2\arcsin \frac{2\sqrt{3}}{5}$ или $\arccos 0,04$.



| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже. | 0 |
| Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено. | 1 |
| Обоснованно получен правильный ответ. | 2 |

С3 Решите неравенство $\log_{6x^2-5x+1} 2 > \log_{\sqrt{6x^2-5x+1}} 2$.

Сделаем замену переменной: пусть $a = 6x^2 - 5x + 1$. Неравенство принимает вид

$$\frac{1}{\log_2 a} > \frac{1}{\log_2 \sqrt{a}}; \frac{1}{\log_2 a} > \frac{2}{\log_2 a}; \log_2 a < 0.$$

Составим систему $\begin{cases} 6x^2 - 5x + 1 < 1, \\ 6x^2 - 5x + 1 > 0; \end{cases} \begin{cases} x(6x - 5) < 0, \\ (2x - 1)(3x - 1) > 0. \end{cases}$

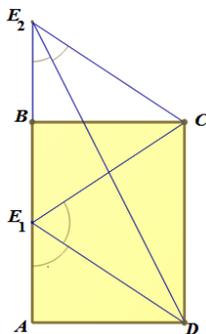
Решение системы: $0 < x < \frac{1}{3}$ или $\frac{1}{2} < x < \frac{5}{6}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже. | 0 |
| Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки. | 1 |
| Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки. | 2 |
| Обоснованно получен правильный ответ. | 3 |

С4 В прямоугольнике $ABCD$, $AB = 2 BC = \sqrt{3}$. Точка E на прямой AB выбрана так, что $\angle AED = \angle DEC$. Найдите AE .

Сделаем рисунок. По свойству параллельных прямых $\angle AED = \angle EDC$. Следовательно, треугольник DEC равнобедренный, и $EC = CD = 2$. Получаем, что треугольник EBC – прямоугольный с гипотенузой $EC = 2$ и катетом $BC = \sqrt{3}$. По теореме Пифагора $BE = 1$. Точка E может лежать как по одну, так и по другую сторону от точки B .

1. Если E лежит между A и B (точка E_1 на рисунке), то $AE = 1$.
 2. Если B лежит между A и E (точка E_2 на рисунке), то $AE = 3$.
- Ответ: 1 и 3.



| Содержание критерия | Баллы |
|---|-------|
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже. | 0 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки. | 1 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины. | 2 |
| Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ. | 3 |

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите систему $\begin{cases} 25^{tgx-1} + 5^{tgx-1} - 2 = 0, \\ \sqrt{-2\sin x} - 4y = 5\sqrt[4]{2}. \end{cases}$

Решим первое уравнение. Пусть $z = 5^{tgx-1}$. Тогда $z^2 + z - 2 = 0$. Корни $z = 1; z = -2$.

Уравнение $5^{tgx-1} = -2$ не имеет решений.

Из уравнения $5^{tgx-1} = 1$ находим: $tgx = 1$.

Из второго уравнения следует, что $\sin x \leq 0$, значит $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$.

Поэтому $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Тогда $\sqrt{-2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} - 4y = 5\sqrt[4]{2};$

$4y = -4\sqrt[4]{2}.$

$y = -\sqrt[4]{2}.$

Ответ: $\left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi k, -\sqrt[4]{2}\right), k \in Z.$

| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже. | 0 |
| Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за того, что в решение включена посторонняя серия. | 1 |
| Обоснованно получен правильный ответ. | 2 |

C2 В основании прямой призмы $ABC A_1 B_1 C_1$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB , равной $8\sqrt{2}$. Высота призмы равна 6. Найдите угол между прямыми AC_1 и CB_1 .

Достроим призму до прямоугольного параллелепипеда с основанием $ABCD$ и верхним основанием $A_1 B_1 C_1 D_1$.

$AD_1 \parallel CB_1$, поэтому искомый угол $C_1 A D_1$.

Из прямоугольного треугольника ACB находим: $AC = 8$. Значит, AD тоже равно 8.

Из прямоугольных треугольников ACC_1 и ADD_1 получаем: $AC_1 = AD_1 = 10$, а диагональ $C_1 D_1$ квадрата $A_1 B_1 C_1 D_1$ равна $8\sqrt{2}$.

Из равнобедренного треугольника $C_1 A D_1$ получаем:

$\angle C_1 A D_1 = 2\arcsin \frac{CD_1}{2AC_1} = 2\arcsin \frac{2\sqrt{2}}{5}.$

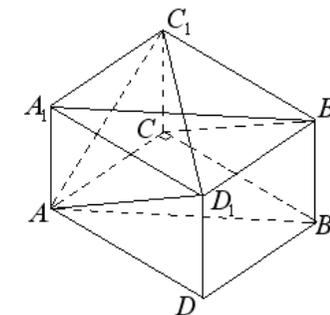
Комментарий. Для нахождения угла можно воспользоваться теоремой косинусов:

$C_1 D_1^2 = AC_1^2 + AD_1^2 - 2AC_1 \cdot AD_1 \cdot \cos C_1 A D_1;$

$128 = 100 + 100 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos C_1 A D_1;$

$\cos C_1 A D_1 = \frac{9}{25} = 0,36.$

Ответ: $2\arcsin \frac{2\sqrt{2}}{5}$ или $\arccos 0,36.$



| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже. | 0 |
| Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено. | 1 |
| Обоснованно получен правильный ответ. | 2 |

С3 Решите неравенство $\frac{1}{6x^2 - 5x} \geq \frac{1}{\sqrt{6x^2 - 5x + 1} - 1}$.

Решение:

Сделаем замену переменных. Пусть $a = \sqrt{6x^2 - 5x + 1}$. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2 - 1} \geq \frac{1}{a - 1}, \\ a \geq 0. \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы: $\frac{a}{a^2 - 1} \leq 0$, откуда, учитывая, что $a \geq 0$, получаем: $0 \leq a < 1$.

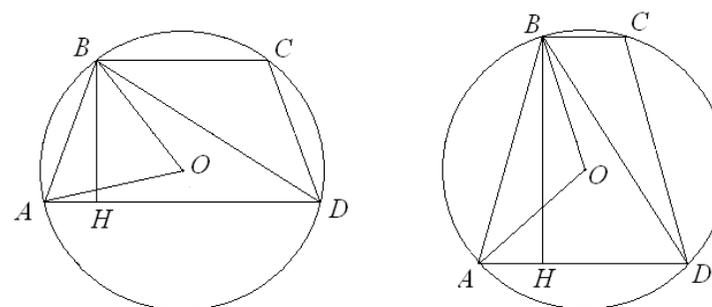
Следовательно, $\begin{cases} 6x^2 - 5x + 1 < 1, \\ 6x^2 - 5x + 1 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x(6x - 5) < 0, \\ (2x - 1)(3x - 1) \geq 0. \end{cases}$

Решение системы: $0 < x \leq \frac{1}{3}$ или $\frac{1}{2} \leq x < \frac{5}{6}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже. | 0 |
| Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки. | 1 |
| Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки. | 2 |
| Обоснованно получен правильный ответ. | 3 |

С4 Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана в окружность с центром O . Найдите высоту трапеции, если её средняя линия равна 3 и $\sin \angle AOB = \frac{3}{5}$.

Сделаем рисунки для двух случаев: когда $\alpha = \angle AOB$ – острый угол и когда α – угол тупой.



Проведем высоту BH и диагональ BD . Отрезок HD равен средней линии. Из прямоугольного треугольника BHD найдем высоту: $BH = HD \cdot \sin \angle BDA = 3 \sin \frac{\alpha}{2}$.

Последнее равенство верно, поскольку вписанный угол BDA в два раза меньше центрального угла AOB . Воспользуемся формулой тангенса половинного угла:

$$BH = 3 \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \cos \frac{\alpha}{2}}$$

1. Если $\alpha < 90^\circ$, то $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5}$, и $BH = 3 \cdot \frac{\frac{3}{5}}{1 + \frac{4}{5}} = 1$.

2. Если $\alpha > 90^\circ$, то $\cos \frac{\alpha}{2} = -\frac{4}{5}$, то $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, и $BH = 3 \cdot \frac{\frac{3}{5}}{1 - \frac{4}{5}} = 9$.

Ответ: 9 или 1.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|-------|
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже. | 0 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки. | 1 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины. | 2 |
| Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ. | 3 |