

Тренировочная работа № 5  
по МАТЕМАТИКЕ

11 класс

Вариант № 1

Район \_\_\_\_\_

Город (населенный пункт) \_\_\_\_\_

Школа \_\_\_\_\_

Класс \_\_\_\_\_

Фамилия \_\_\_\_\_

Имя \_\_\_\_\_

Отчество \_\_\_\_\_

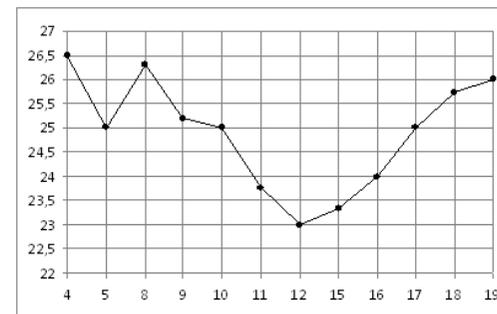
Часть 1

Ответом на задания В1 – В12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

- В1** Аня купила месячный проездной билет на автобус. За месяц она сделала 45 поездок. Сколько рублей она сэкономила, если проездной билет стоит 800 рублей, а разовая поездка стоит 22 рубля?

Ответ:

- В2** На рисунке жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 4 по 19 апреля 2002 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьшую цену нефти на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за баррель).



Ответ:

- В3** Найдите корень уравнения:  $\frac{3}{x+4} = 3$ .

Ответ:

- В4** В треугольнике  $ABC$   $AB = BC$ ,  $AC = 10$ , высота  $CH$  равна 5. Найдите синус угла  $ACB$ .

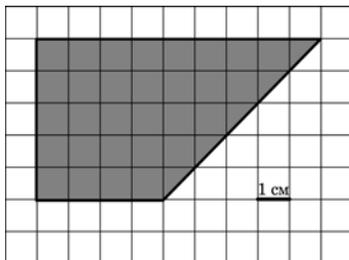
Ответ:

**В5** Для перевозки 3 т груза на 250 км можно воспользоваться услугами одной из трех транспортных компаний. Каждая компания предлагает один вид автомобилей. Сколько рублей будет стоить наиболее дешевый вариант перевозки?

Компания-перевозчик	Стоимость перевозки груза одним автомобилем (руб. за 10 км)	Грузоподъемность автомобилей (т)
А	110	2,2
Б	130	2,6
В	170	3,4

Ответ:

**В6** На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.

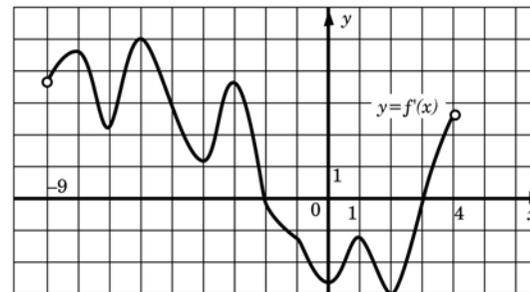


Ответ:

**В7** Найдите значение выражения  $80 \log_3 \sqrt[5]{3}$ .

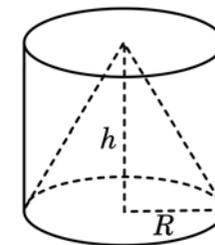
Ответ:

**В8** На рисунке изображен график производной функции  $y = f'(x)$ , определенной на интервале  $(-9; 4)$ . Найдите количество точек экстремума функции  $f(x)$ .



Ответ:

**В9** Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 40.



Ответ:

**В10** Некоторая компания продает свою продукцию по цене  $p = 400$  руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют  $v = 200$  руб., постоянные расходы предприятия  $f = 500000$  руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле  $\pi(q) = q(p - v) - f$ . Определите наименьший месячный объем производства  $q$  (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет не меньше 300000 руб.

Ответ:

**В11** Найдите наибольшее значение функции  $y = 16 \lg x - 16x + 4\pi - 13$  на отрезке  $[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$ .

Ответ:

- В12** Первая труба пропускает на 1 литр воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объемом 575 литров она заполняет на 2 минуты быстрее, чем первая труба заполняет резервуар объемом 600 литров?

Ответ:

### Часть 2

*Для записи решений и ответов на задания С1 – С4 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.*

- С1** Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} 3^y + 2\cos x = 0, \\ 2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0. \end{cases}$$

- С2** В правильной треугольной призме  $ABC A_1 B_1 C_1$  высота равна 2, сторона основания равна 1. Найдите расстояние от точки  $B_1$  до прямой  $AC_1$ .

- С3** Решите неравенство 
$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4\log_8^2 x}}{\log_8 x} < 2.$$

- С4** Расстояния от общей хорды двух пересекающихся окружностей до их центров относятся как 2 : 5. Общая хорда имеет длину  $2\sqrt{3}$ , а радиус одной из окружностей в два раза больше радиуса другой окружности. Найдите расстояние между центрами окружностей.

Тренировочная работа № 5  
по МАТЕМАТИКЕ

11 класс

Вариант № 2

Район \_\_\_\_\_

Город (населенный пункт) \_\_\_\_\_

Школа \_\_\_\_\_

Класс \_\_\_\_\_

Фамилия \_\_\_\_\_

Имя \_\_\_\_\_

Отчество \_\_\_\_\_

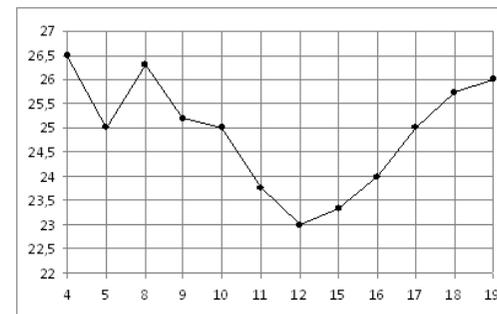
Часть 1

Ответом на задания В1 – В12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

**В1** Аня купила месячный проездной билет на автобус. За месяц она сделала 45 поездок. Сколько рублей она сэкономила, если проездной билет стоит 760 рублей, а разовая поездка стоит 25 рублей?

Ответ: \_\_\_\_\_

**В2** На рисунке жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 4 по 19 апреля 2002 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшую цену нефти на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за баррель).



Ответ: \_\_\_\_\_

**В3** Найдите корень уравнения:  $\frac{54}{x+6} = 3$ .

Ответ: \_\_\_\_\_

**В4** В треугольнике  $ABC$   $AB = BC$ ,  $AC = 20$ , высота  $CH$  равна 4. Найдите синус угла  $ACB$ .

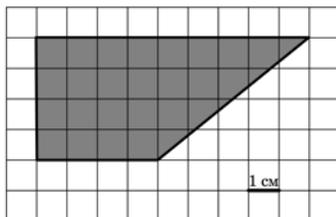
Ответ: \_\_\_\_\_

**В5** Для перевозки 3 т груза на 350 км можно воспользоваться услугами одной из трех транспортных компаний. Каждая компания предлагает один вид автомобилей. Сколько рублей будет стоить наиболее дешевый вариант перевозки?

Компания-перевозчик	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. за 10 км)	Грузоподъемность автомобилей (т)
А	100	2
Б	120	2,4
В	170	3,4

Ответ:

**В6** На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.

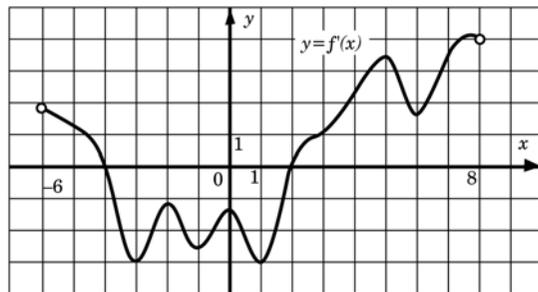


Ответ:

**В7** Найдите значение выражения  $75 \log_7 \sqrt[3]{7}$ .

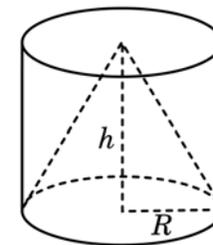
Ответ:

**В8** На рисунке изображен график производной функции  $y = f'(x)$ , определенной на интервале  $(-6; 8)$ . Найдите количество точек экстремума функции  $f(x)$ .



Ответ:

**В9** Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 26.



Ответ:

**В10** Некоторая компания продает свою продукцию по цене  $p = 600$  руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют  $v = 300$  руб., постоянные расходы предприятия  $f = 700000$  руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле  $\pi(q) = q(p - v) - f$ . Определите наименьший месячный объем производства  $q$  (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет не меньше 500000 руб.

Ответ:

**В11** Найдите наименьшее значение функции  $y = 32 \operatorname{tg} x - 32x - 8\pi - 10$  на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ .

Ответ:

**В12** Первая труба пропускает на 5 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объемом 704 литра она заполняет на 10 минут быстрее, чем первая труба заполняет резервуар объемом 864 литра?

Ответ:

**Часть 2**

*Для записи решений и ответов на задания C1 – C4 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.*

**C1**

Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} 3^x + 2\sin y = 0, \\ 4\cos^2 y - 4\cos y - 3 = 0. \end{cases}$$

**C2**

В правильной треугольной призме  $ABC A_1 B_1 C_1$  высота равна 1, а ребро основания равно 2. Найдите расстояние от точки  $A_1$  до прямой  $BC_1$ .

**C3**

Решите неравенство  $\frac{1 - \sqrt{1 - 8\log_2^2 x}}{2\log_2 x} < 1$ .

**C4**

Две окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Через точку  $A$  проведены диаметры  $AC$  и  $AD$  этих окружностей. Найдите расстояние между центрами окружностей, если  $BC = 7$ ,  $BD = 3$ .

**Ответы к заданиям с кратким ответом**

<b>№ задания</b>	<b>Ответ</b>
B1	190
B2	23
B3	-3
B4	0,5
B5	4250
B6	32,5

<b>№ задания</b>	<b>Ответ</b>
B7	16
B8	2
B9	120
B10	4000
B11	3
B12	25

**Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом**

**C1** Решите систему уравнений  $\begin{cases} 3^y + 2\cos x = 0, \\ 2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0. \end{cases}$

**Решение:**

Из второго уравнения находим:  $\sin x = -\frac{1}{2}$  или  $\sin x = 2$ .

Уравнение  $\sin x = 2$  не имеет решений, а из уравнения  $\sin x = -\frac{1}{2}$  получаем:

$$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \text{ или } x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$$

Из первого уравнения следует, что  $\cos x < 0$ . Значит,  $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ .

Второе уравнение принимает вид  $3^y - \sqrt{3} = 0$ , откуда  $y = \frac{1}{2}$ .

**Ответ:**  $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z, y = \frac{1}{2}$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Первое уравнение системы решено верно, но решение системы содержит ошибку.	1
Все случаи, не удовлетворяющие критериям, описанным выше.	0

**C2** В правильной треугольной призме  $ABC A_1 B_1 C_1$  высота равна 2, сторона основания равна 1. Найдите расстояние от точки  $B_1$  до прямой  $AC_1$ .

**Решение:**

Искомое расстояние равно высоте  $B_1 H$  треугольника  $AB_1 C_1$ .

Треугольник равнобедренный, поскольку  $B_1 A = AC_1 = \sqrt{5}$ .

Дополнительно проведем высоту и медиану  $AM$ . Найдем ее

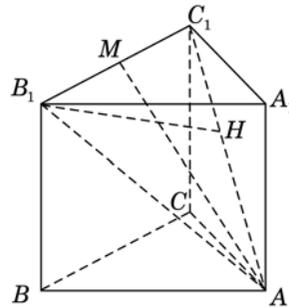
$$\text{длину: } AM = \sqrt{B_1 A^2 - B_1 M^2} = \sqrt{5 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{19}}{2}.$$

Площадь треугольника  $B_1 AC$  равна  $\frac{1}{2} B_1 C_1 \cdot AM = \frac{1}{2} AC_1 \cdot B_1 H$ ,

откуда получаем уравнение  $\frac{\sqrt{19}}{2} = \sqrt{5} \cdot B_1 H$ . Следовательно,

$$B_1 H = \frac{\sqrt{19}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{95}}{10}.$$

**Ответ:**  $\frac{\sqrt{95}}{10}$ .



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого расстояния верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

**C3** Решите неравенство  $\frac{1 - \sqrt{1 - 4\log_8^2 x}}{\log_8 x} < 2$ .

**Решение:**

После замены  $t = \log_8 x$ , получаем  $\frac{1 - \sqrt{1 - 4t^2} - 2t}{t} < 0$ .

Значит,  $\begin{cases} 1 - \sqrt{1 - 4t^2} - 2t > 0, \\ t < 0 \end{cases}$  или  $\begin{cases} 1 - \sqrt{1 - 4t^2} - 2t < 0, \\ t > 0, \end{cases}$  откуда получаем:

$$\begin{cases} 1 - 4t^2 < 4t^2 - 4t + 1, \\ 4t^2 \leq 1, \\ t < 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 1 - 4t^2 > 4t^2 - 4t + 1, \\ 4t^2 \leq 1, \\ t > 0. \end{cases}$$

Поэтому  $-\frac{1}{2} \leq t < 0$  или  $0 < t < \frac{1}{2}$ , то есть  $\frac{1}{\sqrt{8}} \leq x < 1$  или  $1 < x < \sqrt{8}$ .

**Ответ:**  $\left[\frac{\sqrt{2}}{4}; 1\right), (1; \sqrt{8})$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

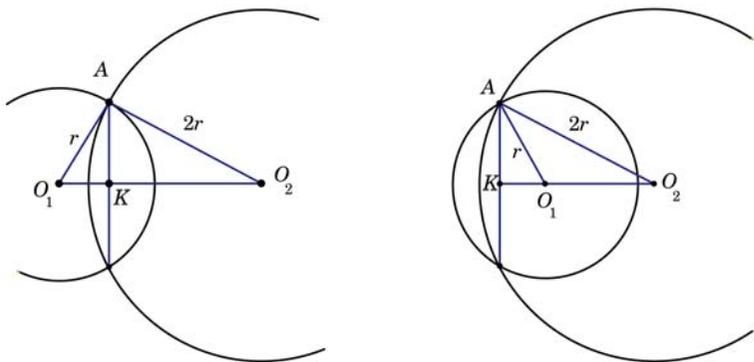
**C4** Расстояния от общей хорды двух пересекающихся окружностей до их центров относятся как 2 : 5. Общая хорда имеет длину  $2\sqrt{3}$ , а радиус одной из окружностей в два раза больше радиуса другой окружности. Найдите расстояние между центрами окружностей.

**Решение:**

Обозначим центры окружностей  $O_1$  и  $O_2$ , один из концов общей хорды  $A$ , а точку пересечения общей хорды и прямой  $O_1 O_2$  обозначим  $K$ .

Треугольники  $O_1KA$  и  $O_2KA$  прямоугольные с общим катетом  $AK$ , равным  $\sqrt{3}$ . Обозначим радиусы окружностей  $r$  и  $2r$ . Поскольку числитель в левой части меньше знаменателя, равенство  $\frac{\sqrt{r^2 - 3}}{\sqrt{4r^2 - 3}} = \frac{5}{2}$  невозможно. Тогда  $\frac{\sqrt{r^2 - 3}}{\sqrt{4r^2 - 3}} = \frac{2}{5}$ .

Из этого уравнения находим:  $r^2 = 7$ . Тогда  $KO_1 = \sqrt{7 - 3} = 2$  и, значит,  $KO_2 = 5$ .



В зависимости от взаимного расположения окружностей (см. рисунки)  $O_1O_2 = 2 + 5 = 7$  или  $O_1O_2 = 5 - 2 = 3$ .

**Ответ:** 7 или 3.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, но решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному значению.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

**Ответы к заданиям с кратким ответом**

<b>№ задания</b>	<b>Ответ</b>
B1	365
B2	26,5
B3	12
B4	0,2
B5	5950
B6	26

<b>№ задания</b>	<b>Ответ</b>
B7	15
B8	2
B9	78
B10	4000
B11	-42
B12	32

**Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом**

**C1**

Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} 3^x + 2\sin y = 0, \\ 4\cos^2 y - 4\cos y - 3 = 0. \end{cases}$$

**Решение:**

Из второго уравнения находим:  $\cos y = -\frac{1}{2}$  или  $\cos y = \frac{3}{2}$ .

Уравнение  $\cos y = \frac{3}{2}$  не имеет решений.

Из первого уравнения следует, что  $\sin y < 0$ .

Из уравнения  $\cos y = -\frac{1}{2}$  находим, что  $y = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$  или  $y = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$ . Условию

$\sin y < 0$  удовлетворяет только  $y = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ .

Следовательно,  $\sin y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ , откуда  $3^x - \sqrt{3} = 0$  и, значит,  $x = \frac{1}{2}$ .

**Ответ:**  $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Первое уравнение системы решено верно, но решение системы содержит ошибку.	1
Все случаи, не удовлетворяющие критериям, описанным выше.	0

**C2**

В правильной треугольной призме  $ABC A_1 B_1 C_1$  высота равна 1, а ребро основания равно 2. Найдите расстояние от точки  $A_1$  до прямой  $BC_1$ .

**Решение:**

Искомое расстояние равно высоте  $A_1 H$  треугольника  $A_1 B C_1$ .

Треугольник равнобедренный, поскольку  $A_1 B = B C_1 = \sqrt{5}$ .

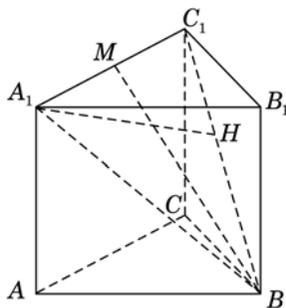
Дополнительно проведем высоту и медиану  $B M$ . Найдём её длину:  $B M = \sqrt{A_1 B^2 - A_1 M^2} = \sqrt{5 - 1} = 2$ .

Площадь треугольника  $A_1 B C$  равна  $\frac{1}{2} A_1 C_1 \cdot B M = \frac{1}{2} B C_1 \cdot A_1 H$ ,

откуда получаем уравнение  $2 = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot A_1 H$ . Следовательно,

$$A_1 H = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

**Ответ:**  $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ .



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого расстояния верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

**C3**

Решите неравенство 
$$\frac{1 - \sqrt{1 - 8\log_2^2 x}}{2\log_2 x} < 1.$$

**Решение:**

После замены  $t = 2\log_2 x$ , получаем

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 2t^2} - t}{t} < 0.$$

Получаем: 
$$\begin{cases} 1 - \sqrt{1 - 2t^2} - t > 0, \\ t < 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 1 - \sqrt{1 - 2t^2} - t < 0, \\ t > 0, \end{cases}$$

откуда 
$$\begin{cases} 1 - 2t^2 < t^2 - 2t + 1, \\ 2t^2 \leq 1, \\ t < 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 1 - 2t^2 > t^2 - 2t + 1, \\ 2t^2 \leq 1, \\ t > 0. \end{cases}$$

Поэтому  $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq t < 0$  или  $0 < t < \frac{2}{3}$ , откуда  $2^{-\frac{\sqrt{2}}{4}} \leq x < 1$  или  $1 < x < 2^{\frac{1}{3}}$ .

**Ответ:**  $\left[ 2^{-\frac{\sqrt{2}}{4}}; 1 \right) \cup \left( 1; 2^{\frac{1}{3}} \right)$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

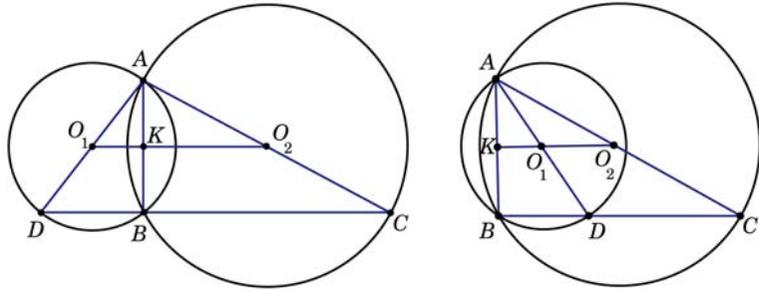
**C4**

Две окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Через точку  $A$  проведены диаметры  $AC$  и  $AD$  этих окружностей. Найдите расстояние между центрами окружностей, если  $BC = 7, BD = 3$ .

**Решение:**

Пусть центры окружностей  $O_1$  и  $O_2$ . Очевидно,  $O_1 O_2$  – средняя линия треугольника  $ADC$ . Проведем отрезок  $AB$ . Углы  $ABC$  и  $ABD$  – вписанные, и каждый из них опирается на диаметр соответствующей окружности. Следовательно,  $\angle ABC = \angle ABD = 90^\circ$ . Таким образом, точки  $C, B$  и  $D$  лежат на одной прямой.

Возможны два случая: точки  $C$  и  $D$  лежат по разные стороны от точки  $B$  (рисунок 1) или по одну сторону от точки  $B$  (рисунок 2).



В первом случае  $O_1O_2 = \frac{1}{2}CD = \frac{7+3}{2} = 5$ . Во втором случае  $O_1O_2 = \frac{1}{2}CD = \frac{7-3}{2} = 2$ .

**Ответ:** 5 или 2.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, но решение содержит арифметическую ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0