

Тренировочная работа № 6
по МАТЕМАТИКЕ

11 класс

Вариант № 1

Район _____

Город (населенный пункт) _____

Школа _____

Класс _____

Фамилия _____

Имя _____

Отчество _____

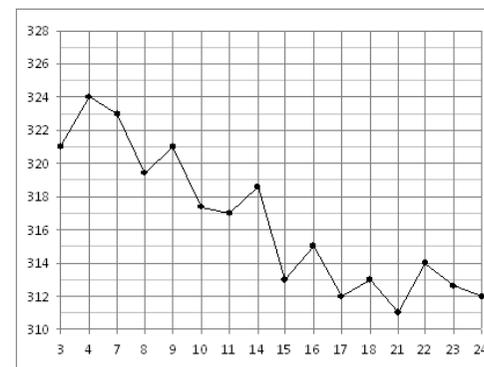
Часть 1

Ответом на задания В1 – В12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

В1 Больному прописано лекарство в таблетках, которое нужно пить по 0,5 г 3 раза в день в течение 16 дней. В одной упаковке 10 таблеток по 0,25 г в таблетке. Какое наименьшее число упаковок нужно купить, чтобы хватило на весь курс лечения?

Ответ:

В2 На рисунке жирными точками показана цена золота на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 3 по 24 октября 2002 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена унции золота в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьшую цену золота на момент закрытия торгов в период с 4 по 16 октября (в долларах США за унцию).



Ответ:

В3 Найдите решение уравнения $\left(\frac{1}{5}\right)^{x+7} = 125^x$.

Ответ:

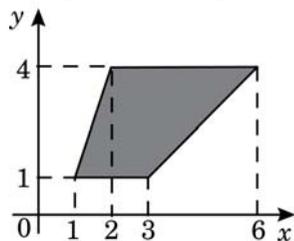
В4 В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 20$, AH — высота, $BH = 14$. Найдите $\cos A$.

Ответ:

В5 Для того, чтобы связать свитер, хозяйке нужно 800 граммов шерсти синего цвета. Можно купить синюю пряжу по цене 60 руб. за 100 г, а можно купить неокрашенную пряжу по цене 50 руб. за 100 г и покрасить ее. Один пакетик краски стоит 50 руб. и рассчитан на окраску 400 г неокрашенной пряжи. Какой вариант покупки дешевле? В ответ напишите, сколько рублей будет стоить эта покупка.

Ответ:

В6 Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке.

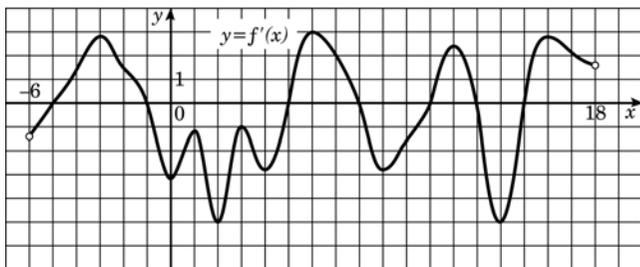


Ответ:

В7 Найдите значение выражения: $\log_3 72 - 3\log_3 2$.

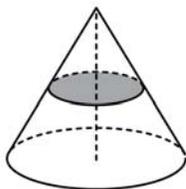
Ответ:

В8 На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6; 18)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-4; 17]$.



Ответ:

В9 Объем конуса равен 160. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.



Ответ:

В10 Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур определяется выражением $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 350$ К, $a = -15$ К/мин², $b = 180$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 650 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор. Ответ выразите в минутах.

Ответ:

В11 Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(7x) - 7x + 7$ на отрезке $[\frac{1}{14}, \frac{5}{14}]$.

Ответ:

В12 На изготовление 39 деталей первый рабочий затрачивает на 10 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 104 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 5 деталей больше, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

Ответ:

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1 – С4 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

С1 Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 = 8\sin y + 1, \\ x + 1 = 2\sin y. \end{cases}$

С2 В тетраэдре $ABCD$, все ребра которого равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой, проходящей через точку B и середину E ребра CD .

С3 Решите неравенство $\frac{\lg(3x + 2\sqrt{x} - 1)}{\lg(5x + 3\sqrt{x} - 2)^5} \geq \frac{\log_{32} 11}{\log_2 11}$.

С4 Радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 13, $\cos \angle BAC = -\frac{5}{13}$, высота, проведенная к стороне BC , равна 5. Найдите длину той хорды AM описанной окружности, которая делится пополам стороной BC .

Тренировочная работа № 6
по МАТЕМАТИКЕ

11 класс

Вариант № 2

Район _____

Город (населенный пункт) _____

Школа _____

Класс _____

Фамилия _____

Имя _____

Отчество _____

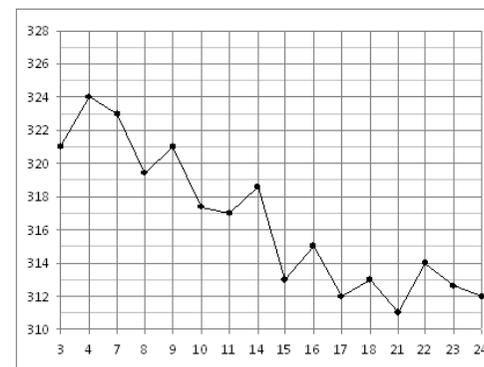
Часть 1

Ответом на задания В1 – В12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

В1 Больному прописано лекарство, которое нужно пить по 0,5 г 2 раза в день в течение 9 дней. В одной упаковке 8 таблеток лекарства по 0,5 г. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс лечения?

Ответ: _____

В2 На рисунке жирными точками показана цена золота на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 3 по 24 октября 2002 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена унции золота в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшую цену золота на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за унцию).



Ответ: _____

В3 Найдите решение уравнения: $\left(\frac{1}{6}\right)^{x-7} = 216^x$.

Ответ: _____

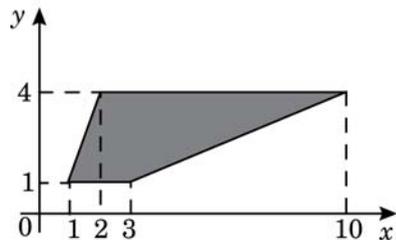
В4 В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 14$, AH — высота, $BH = 7$. Найдите $\cos A$.

Ответ: _____

В5 Для того, чтобы связать свитер хозяйке нужно 600 граммов шерсти синего цвета. Можно купить синюю пряжу по цене 70 руб. за 100 г, а можно купить белую пряжу по цене 60 руб. за 100 г и окрасить ее. Один пакетик краски стоит 50 руб. и рассчитан на окраску 300 г белой пряжи. Какой вариант покупки дешевле? В ответ напишите, сколько рублей будет стоить эта покупка.

Ответ: _____

В6 Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке.

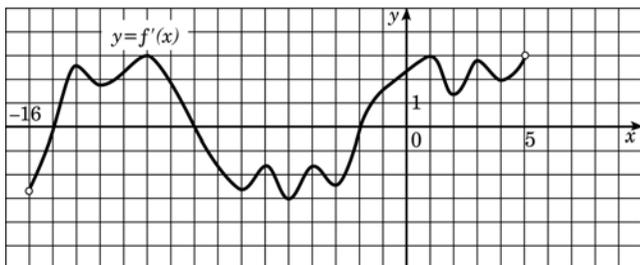


Ответ:

В7 Найдите значение выражения: $\log_2 36 - 2\log_2 3$.

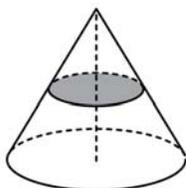
Ответ:

В8 На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-16; 5)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-14; 2]$.



Ответ:

В9 Объем конуса равен 48. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.



Ответ:

В10 Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур определяется выражением $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 450$ К, $a = -30$ К/мин², $b = 180$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 600 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор. Ответ выразите в минутах.

Ответ:

В11 Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(11x) - 11x + 2$ на отрезке $[\frac{1}{22}, \frac{5}{22}]$.

Ответ:

В12 На изготовление 72 деталей первый рабочий затрачивает на 6 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 108 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 3 детали больше, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

Ответ:

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1 – C4 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите систему уравнений $\begin{cases} y^2 = 4\cos x + 1, \\ y + 1 = 2\cos x. \end{cases}$

C2 В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, сторона основания равна 1, а боковое ребро равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите расстояние от точки C до прямой SA .

C3 Решите неравенство $\frac{\log_{11}(3x + 2\sqrt{x+1} + 2)}{\log_{11}(5x + 3\sqrt{x+1} + 3)^3} \geq \frac{\log_{27} 11}{\log_3 11}$.

C4 Центр O окружности радиуса 4 принадлежит биссектрисе угла величиной 60° . Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся данной окружности, если известно, что расстояние от точки O до вершины угла равно 10.

Ответы к заданиям с кратким ответом

№ задания	Ответ
B1	10
B2	313
B3	-1,75
B4	0,7
B5	480
B6	9

№ задания	Ответ
B7	2
B8	6
B9	20
B10	2
B11	6
B12	8

Ответы к заданиям с кратким ответом

№ задания	Ответ
B1	3
B2	324
B3	1,75
B4	0,5
B5	420
B6	15

№ задания	Ответ
B7	2
B8	2
B9	6
B10	1
B11	1
B12	9

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 = 8\sin y + 1, \\ x + 1 = 2\sin y. \end{cases}$

Решение.

Исключим $\sin y$. Получим: $x^2 = 4(x + 1) + 1$; $x^2 - 4x - 5 = 0$. Корни: -1 ; 5 .

Если $x = -1$, из второго уравнения следует: $\sin y = 0$, откуда $y = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Если $x = 5$, из второго уравнения следует: $\sin y = 3$. Решений нет.

Ответ: $(-1, \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Тригонометрическое уравнение решено верно, однако, решение системы содержит ошибку, возможно, повлиявшую на ответ.	1
Все случаи, не удовлетворяющие критериям, описанным выше.	0

C2 В тетраэдре $ABCD$, все ребра которого равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой, проходящей через точку B и середину E ребра CD .

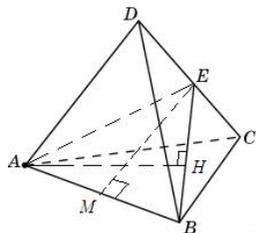
Решение.

Рассмотрим равнобедренный треугольник AEB и его высоты AH и EM .

Составим равенство $AH \cdot BE = EM \cdot AB$.

$AE = EB = \frac{\sqrt{3}}{2}$, поэтому $EM = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Тогда $AH = \frac{EM \cdot AB}{BE} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.



Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого расстояния верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C3 Решите неравенство $\frac{\lg(3x + 2\sqrt{x} - 1)}{\lg(5x + 3\sqrt{x} - 2)^5} \geq \frac{\log_3 11}{\log_2 11}$.

Решение.

Сделаем замену $\sqrt{x} = y$ и упростим левую и правую части: $\frac{\lg(3y^2 + 2y - 1)}{\lg(5y^2 + 3y - 2)} \geq 1$.

Учитывая, что $y \geq 0$, получаем:

$$1 < 5y^2 + 3y - 2 \leq 3y^2 + 2y - 1 \text{ или } \begin{cases} 5y^2 + 3y - 2 < 1, \\ 5y^2 + 3y - 2 \geq 3y^2 + 2y - 1, \\ 3y^2 + 2y - 1 > 0. \end{cases}$$

Первый случай: $\begin{cases} 5y^2 + 3y - 3 > 0, \\ 2y^2 + y - 1 \leq 0; \end{cases} \begin{cases} y > \frac{\sqrt{69} - 3}{10}, \\ 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ - нет решений.

Второй случай: $\begin{cases} 5y^2 + 3y - 3 < 0, \\ 3y^2 + 2y - 1 > 0, \\ 2y^2 + y - 1 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} 0 \leq y < \frac{\sqrt{69} - 3}{10}, \\ y > \frac{1}{3}, \\ y \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$ откуда $\frac{1}{2} \leq y < \frac{\sqrt{69} - 3}{10}$.

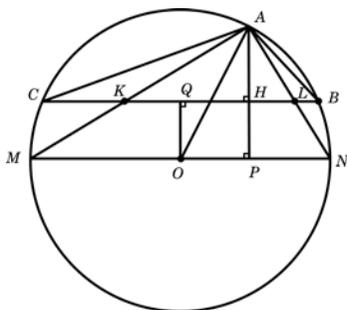
Тогда $\frac{1}{4} \leq x < \frac{39 - 3\sqrt{69}}{50}$.

Ответ: $\left[0,25; \frac{39 - 3\sqrt{69}}{50}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С4 Радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 13, $\cos \angle BAC = -\frac{5}{13}$, высота, проведенная к стороне BC , равна 5. Найдите длину той хорды AM описанной окружности, которая делится пополам стороной BC .

Решение.



Пусть K – середина искомой хорды AM . Через точку M проведем хорду MN , параллельную стороне BC . Тогда точка L пересечения отрезков AN и BC – середина AN , значит задача имеет два решения. Кроме того, высота AP треугольника AMN вдвое больше высоты AH треугольника ABC , значит $AP = 10$ и $PH = 5$.

Пусть $R = 13$ – радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

По теореме синусов $BC = 2R \sin \angle BAC = 26 \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = 26 \cdot \frac{12}{13} = 24$.

Пусть O – центр окружности, описанной около треугольника ABC , Q – середина BC . Из прямоугольного треугольника OQB находим, что $OQ = \sqrt{OB^2 - BQ^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$, а т.к. расстояние между параллельными хордами BC и MN также равно 5, то точка O лежит на отрезке MN . Следовательно, MN – диаметр окружности.

Из прямоугольного треугольника AOP находим, что $OP = \sqrt{13^2 - 10^2} = \sqrt{69}$. Следовательно, $AN = \sqrt{AP^2 + PN^2} = \sqrt{100 + 169 - 2 \cdot 13 \cdot \sqrt{69} + 69} = \sqrt{26(13 - \sqrt{69})}$.

Аналогично находим, что $AM = \sqrt{26(13 + \sqrt{69})}$.

Ответ: $\sqrt{26(13 \pm \sqrt{69})}$ или $\sqrt{299} \pm \sqrt{39}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации. Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу.	2
Рассмотрены не все возможные геометрические конфигурации, но хотя бы для одной из них получен обоснованный верный ответ.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите систему уравнений $\begin{cases} y^2 = 4\cos x + 1, \\ y + 1 = 2\cos x. \end{cases}$

Решение.

Исключим $\cos x$ из системы. Получим: $y^2 = 2(y + 1) + 1$; $y^2 - 2y - 3 = 0$. Корни: -1 и 3 .

Если $y = -1$, из второго уравнения получаем: $\cos x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Если $y = 3$, из второго уравнения получаем: $\cos x = 2$. Нет решений.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, y = -1$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Тригонометрическое уравнение решено верно, однако, решение системы содержит ошибку, возможно, повлиявшую на ответ.	1
Все случаи, не удовлетворяющие критериям, описанным выше.	0

C2 В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, сторона основания равна 1, а боковое ребро равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите расстояние от точки C до прямой SA .

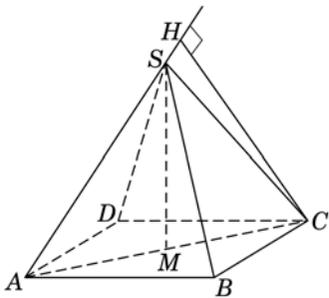
Решение.

Рассмотрим треугольник ASC и его высоты CH и SM .

Составим равенство

$$CH \cdot AS = SM \cdot AC. \quad AC = \sqrt{2}; \quad AM = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{поэтому } SM = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Тогда } CH = \frac{SM \cdot AC}{AS} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$



Ответ: $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого расстояния верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C3 Решите неравенство $\frac{\log_{11}(3x + 2\sqrt{x+1} + 2)}{\log_{11}(5x + 3\sqrt{x+1} + 3)^3} \geq \frac{\log_{27} 11}{\log_3 11}$.

Решение.

Сделаем замену $\sqrt{x+1} = y$ и упростим левую и правую части: $\frac{\log_{11}(3y^2 + 2y - 1)}{\log_{11}(5y^2 + 3y - 2)} \geq 1$.

Учитывая, что $y \geq 0$, получаем:

$$1 < 5y^2 + 3y - 2 \leq 3y^2 + 2y - 1 \text{ или } \begin{cases} 0 < 5y^2 + 3y - 2 < 1, \\ 5y^2 + 3y - 2 \geq 3y^2 + 2y - 1, \\ 3y^2 + 2y - 1 > 0. \end{cases}$$

Первый случай: $\begin{cases} 5y^2 + 3y - 3 > 0, \\ 2y^2 + y - 1 \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y > \frac{\sqrt{69} - 3}{10}, \\ 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \end{cases} \text{ - нет решений.}$

Второй случай: $\begin{cases} 5y^2 + 3y - 3 < 0, \\ 3y^2 + 2y - 1 > 0, \\ 2y^2 + y - 1 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq y < \frac{\sqrt{69} - 3}{10}, \\ y > \frac{1}{3}, \\ y \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$

откуда $\frac{1}{2} \leq y < \frac{\sqrt{69} - 3}{10}$.

Тогда $\frac{1}{4} \leq x + 1 < \frac{39 - 3\sqrt{69}}{50}$, откуда $-\frac{3}{4} \leq x < \frac{-11 - 3\sqrt{69}}{50}$.

Ответ: $\left[-0,75; \frac{-11 - 3\sqrt{69}}{50}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С4 Центр O окружности радиуса 4 принадлежит биссектрисе угла величиной 60° . Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся данной окружности, если известно, что расстояние от точки O до вершины угла равно 10.

Решение.

Пусть Q – центр искомой окружности радиуса x , B – точка касания одной из сторон данного угла с вершиной A .

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе угла, поэтому $\angle BAQ = 30^\circ$. Из прямоугольного треугольника BAQ находим, что $AQ = 2QB = 2x$.

Рассмотрим случай внешнего касания окружностей. Если точка Q лежит между A и O (рис.1), то $AO = AQ + QO$, или $10 = 2x + (x + 4)$, откуда находим, что $x = 2$.

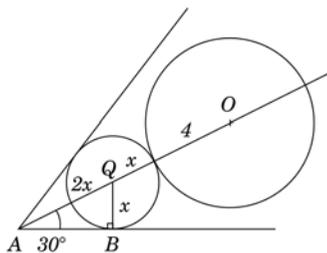


Рис. 1

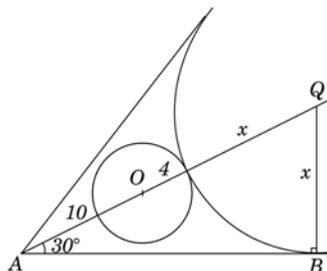


Рис. 2

Если точка O лежит между A и Q (рис.2), то $AQ = AO + OQ$, или $2x = 10 + (4 + x)$, откуда $x = 14$.

Рассмотрим случай внутреннего касания окружностей. Если точка Q лежит между A и O (рис.3), то $AO = AQ + QO$, или $10 = 2x + (x - 4)$, откуда находим, что $x = \frac{14}{3}$.

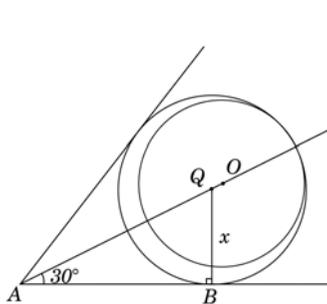


Рис. 3

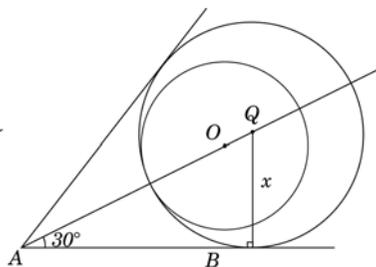


Рис. 4

Если точка O лежит между A и Q (рис.4), то $AQ = AO + OQ$, или $2x = 10 + (x - 4)$, откуда $x = 6$.

Ответ: 2; 14; $\frac{14}{3}$; 6.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации. Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу.	2
Рассмотрены не все возможные геометрические конфигурации, но хотя бы для одной из них получен обоснованный верный ответ.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0