

**Диагностическая работа
по МАТЕМАТИКЕ**

20 октября 2010 года

11 класс

Вариант № 5 (без производной)

Район _____

Город (населенный пункт) _____

Школа _____

Класс _____

Фамилия _____

Имя _____

Отчество _____

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике дается 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом (В1–В12) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (С1–С6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и записать ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удается выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у вас останется время.

Желаем успеха!

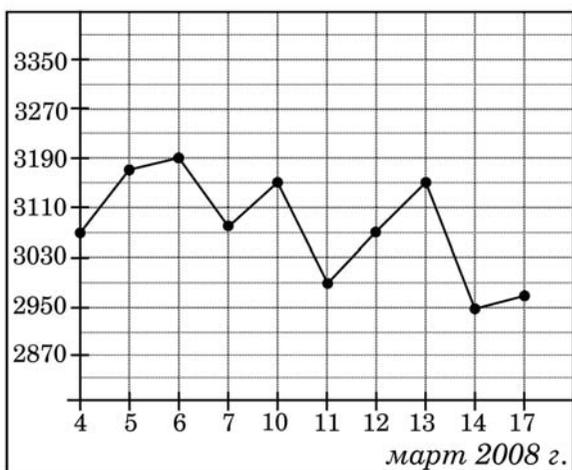
Часть 1

Ответом на задания В1 – В12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

В1 Тетрадь стоит 30 рублей. Какое наибольшее число таких тетрадей можно будет купить на 750 рублей после понижения цены на 15%?

Ответ:

В2 На рисунке жирными точками показана цена алюминия на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 4 по 17 марта 2008 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – цена тонны алюминия в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшую цену алюминия на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за тонну).



Ответ:

В3 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-17} = \frac{1}{16}$.

Ответ:

В4 В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 44$, $AC = 22\sqrt{3}$. Найдите $\sin A$.

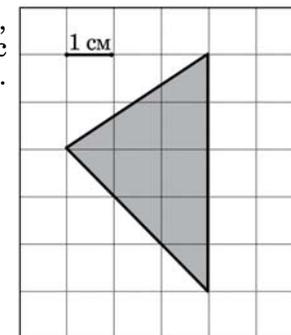
Ответ:

В5 Строительной фирме нужно приобрести 60 кубометров строительного бруса. У неё есть три поставщика. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую покупку с доставкой? Цены и условия доставки приведены в таблице.

Поставщик	Цена бруса (рублей за 1 м^3)	Стоимость доставки (рублей)	Дополнительные условия
А	4300	10200	
Б	4500	8200	При заказе на сумму больше 150 000 рублей доставка бесплатно
В	4400	8200	При заказе на сумму больше 200 000 рублей доставка бесплатно

Ответ:

В6 Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

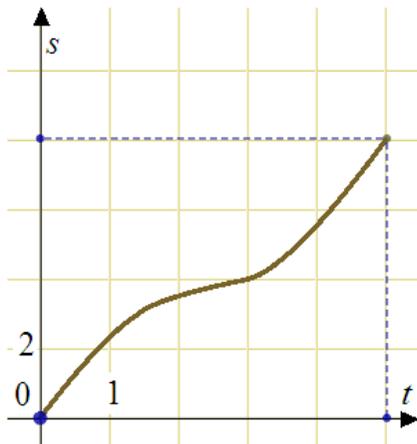


Ответ:

В7 Найдите значение выражения $3^{2 + \log_3 4}$.

Ответ:

B8 Материальная точка движется от начального до конечного положения. На рисунке изображен график ее движения. На оси абсцисс откладывается время в секундах, на оси ординат – расстояние от начального положения точки (в метрах). Найдите среднюю скорость движения точки. Ответ дайте в метрах в секунду.



Ответ:

B9 Во сколько раз увеличится площадь поверхности пирамиды, если все ее ребра увеличить в 7 раз?

Ответ:

B10 В боковой стенке цилиндрического бака вблизи дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём меняется по закону $H(t) = 5 - 0,1t + \frac{1}{2000}t^2$, где t – время в минутах, H – высота в метрах. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ приведите в минутах.

Ответ:

B11 Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{5 - 4x - x^2}$.

Ответ:

B12 Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми 60 км, одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. Известно, что за час мотоциклист проезжает на 40 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт B на 2 часа позже мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1 – C6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите систему уравнений $\begin{cases} y + \sin x = 0, \\ (4\sqrt{\sin x} - 1)(2y + 3) = 0. \end{cases}$

C2 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны ребра: $AB = 5\sqrt{3}$, $SC = 13$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины ребер AS и BC .

C3 Решите неравенство $\log_2\left((7^{-x^2} - 5)(7^{-x^2+4} - 1)\right) + \log_2\frac{7^{-x^2} - 5}{7^{-x^2+4} - 1} > \log_2(7^{3-x^2} - 4)^2$.

C4 В треугольнике ABC $AB = 10$, $BC = 5$, $CA = 6$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD : DC = 1 : 2$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB , касаются стороны AD в точках E и F . Найдите длину отрезка EF .

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых функция $f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 6x$ имеет хотя бы одну точку максимума.

C6 Перед каждым из чисел 2, 3, ..., 6 и 10, 11, ..., 20 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 55 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

**Диагностическая работа
по МАТЕМАТИКЕ**

20 октября 2010 года

11 класс

Вариант № 6 (без производной)

Район _____

Город (населенный пункт) _____

Школа _____

Класс _____

Фамилия _____

Имя _____

Отчество _____

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике дается 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом (В1–В12) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (С1–С6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и записать ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удается выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у вас останется время.

Желаем успеха!

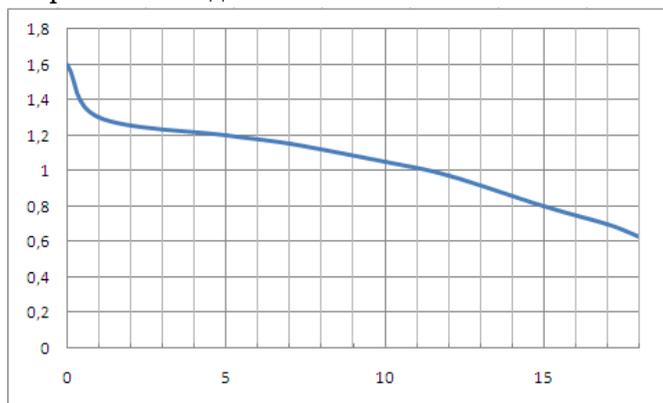
Часть 1

Ответом на задания В1 – В12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

В1 Тетрадь стоит 10 рублей. Какое наибольшее число таких тетрадей можно будет купить на 500 рублей после понижения цены на 25%?

Ответ:

В2 На рисунке показан график разряда батарейки в карманном фонарике. На горизонтальной оси отмечается время работы фонарика в часах, на вертикальной оси – напряжение в вольтах. Определите по рисунку, какое напряжение будет давать батарейка через 5 часов работы фонарика. Ответ дайте в вольтах.



Ответ:

В3 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+5} = \frac{1}{27}$.

Ответ:

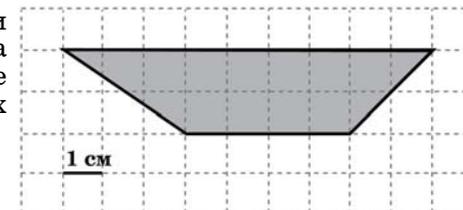
В4 В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 25$, $AC = 10\sqrt{6}$. Найдите $\sin A$.

Ответ:

В5 В банке «А» курс покупки швейцарского франка 26,70 руб. за 1 франк. Клиент У. обменял в банке «В» 2 200 франков на сумму 68860 р. Клиент Ф. обменял в банке «С» 3 100 франков, получив 97960 р. Определите, в каком из банков франк стоит дороже всего. В ответ запишите, сколько рублей в этом банке можно получить за 50 франков. Считайте, что комиссионный сбор при обмене валюты отсутствует.

Ответ:

В6 На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см \times 1 см изображена трапеция (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.

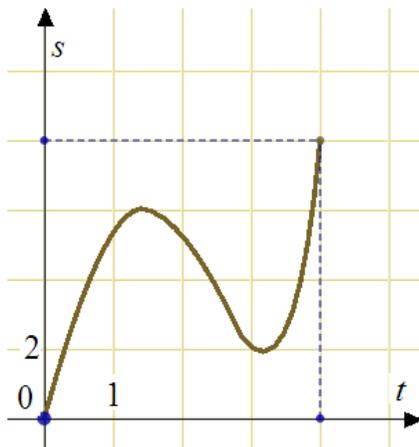


Ответ:

В7 Найдите $7\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{5}}{7}$ и $\alpha \in (1, 5\pi; 2\pi)$.

Ответ:

- В8** Материальная точка движется от начального до конечного положения. На рисунке изображен график ее движения. На оси абсцисс откладывается время в секундах, на оси ординат – расстояние от начального положения точки (в метрах). Найдите среднюю скорость движения точки. Ответ дайте в метрах в секунду.



Ответ:

- В9** Во сколько раз увеличится площадь поверхности пирамиды, если все ее ребра увеличить в 6 раз?

Ответ:

- В10** В боковой стенке цилиндрического бака вблизи дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём меняется по закону $H(t) = 4 - 0,4t + \frac{1}{100}t^2$, где t – время в минутах, H – высота в метрах. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ приведите в минутах.

Ответ:

- В11** Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 - 6x + 13}$.

Ответ:

- В12** Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми 30 км, одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. Известно, что за час мотоциклист проезжает на 35 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт B на 1 час 24 минуты позже мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания $C1 - C6$ используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1

Решите систему уравнений
$$\begin{cases} y - \sin x = 0, \\ (3\sqrt{\sin x} - 1)(y - 5) = 0. \end{cases}$$

C2

Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром $\sqrt{6}$. Найдите расстояние от середины ребра $A_1 B_1$ до прямой MT , где точки M и T – середины ребер AD и CD соответственно.

C3

Решите неравенство

$$\log_7 \left((3^{-x^2} - 4)(3^{-x^2+16} - 1) \right) + \log_7 \frac{3^{-x^2} - 4}{3^{-x^2+16} - 1} > \log_7 (3^{3-x^2} - 3)^2.$$

C4

Окружность S радиуса 12 вписана в прямоугольную трапецию с основаниями 28 и 21. Найдите радиус окружности, которая касается основания, большей боковой стороны и окружности S .

C5

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $||x^2 - 2x - 3| - x^2 + 2x - 5| \leq \frac{1}{3}(\log_2^2 a - \log_4 a) - x^2 + 2x + 1$ имеет единственное целое решение.

C6

Наибольшее целое число, не превосходящее $\frac{2x+17}{10}$, равно $\frac{3x+41}{3}$. Найдите все такие действительные значения x .

**Диагностическая работа
по МАТЕМАТИКЕ**

20 октября 2010 года

11 класс

Вариант № 7 (без производной)

Район _____

Город (населенный пункт) _____

Школа _____

Класс _____

Фамилия _____

Имя _____

Отчество _____

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике дается 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом (В1–В12) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (С1–С6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и записать ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удается выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у вас останется время.

Желаем успеха!

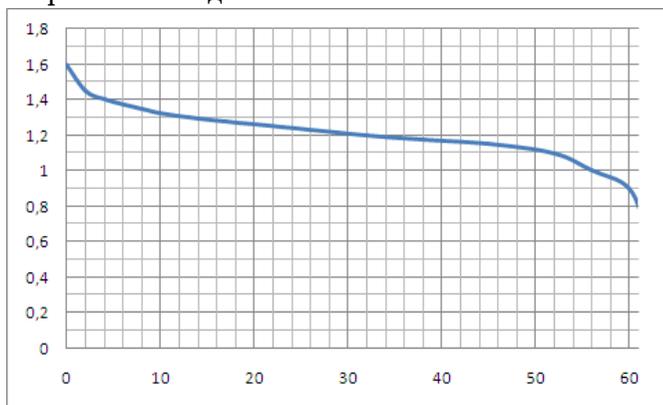
Часть 1

Ответом на задания В1 – В12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

- В1** Тетрадь стоит 50 рублей. Какое наибольшее число таких тетрадей можно будет купить на 850 рублей после понижения цены на 25%?

Ответ:

- В2** На рисунке показан график разряда батарейки в карманном фонарике. На горизонтальной оси отмечается время работы фонарика в часах, на вертикальной оси – напряжение в вольтах. Определите по рисунку, какое напряжение будет давать батарейка через 50 часов работы фонарика. Ответ дайте в вольтах.



Ответ:

- В3** Найдите корень уравнения: $\sqrt{57 - 2x} = 7$.

Ответ:

- В4** В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 25$, $AC = 7$. Найдите $\sin A$.

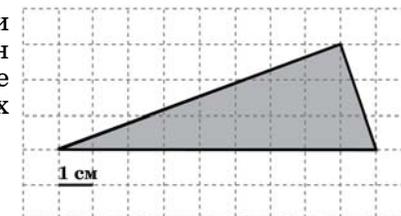
Ответ:

- В5** Строительной фирме нужно приобрести 50 кубометров строительного бруса. У неё есть три поставщика. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую покупку с доставкой? Цены и условия доставки приведены в таблице.

Поставщик	Цена бруса (рублей за 1 м^3)	Стоимость доставки (рублей)	Дополнительные условия
А	3500	9700	
Б	3800	7700	При заказе на сумму больше 150 000 рублей доставка бесплатно
В	3600	7700	При заказе на сумму больше 200 000 рублей доставка бесплатно

Ответ:

- В6** На клетчатой бумаге с клетками размером $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ изображен треугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

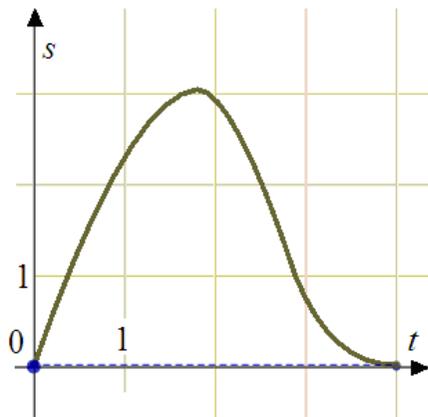


Ответ:

- В7** Найдите значение выражения $2^4 + \log_2 7$.

Ответ:

- В8** Материальная точка движется от начального до конечного положения. На рисунке изображен график ее движения. На оси абсцисс откладывается время в секундах, на оси ординат – расстояние от начального положения точки (в метрах). Найдите среднюю скорость движения точки. Ответ дайте в метрах в секунду.



Ответ:

- В9** Во сколько раз увеличится площадь поверхности пирамиды, если все ее ребра увеличить в 4 раза?

Ответ:

- В10** В боковой стенке цилиндрического бака вблизи дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём меняется по закону $H(t) = 6,25 - \frac{5}{7}t + \frac{1}{49}t^2$, где t – время в минутах, H – высота в метрах. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ приведите в минутах.

Ответ:

- В11** Найдите наименьшее значение функции $y = \log_3(x^2 - 6x + 10) + 2$.

Ответ:

- В12** Первые 120 км автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, следующие 100 км со скоростью 70 км/ч, а затем 90 км со скоростью 90 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1 – С6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

С1

Решите систему уравнений
$$\begin{cases} y + \sin x = 0, \\ (2\sqrt{\sin x} - 1)(3y - 2) = 0. \end{cases}$$

С2

Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром $2\sqrt{2}$. Найдите расстояние от середины ребра $B_1 C_1$ до прямой MT , где точки M и T – середины ребер AD и $A_1 B_1$ соответственно.

С3

Решите неравенство
$$\frac{\log_{2x-1}(\log_2(x^2 - 2x))}{\log_{2x-1}(x^2 + 6x + 10)} \leq 0.$$

С4

Окружность S радиуса 24 вписана в равнобедренную трапецию с основаниями 36 и 64. Найдите радиус окружности, которая касается основания, боковой стороны и окружности S .

С5

Найдите все значения a , при каждом из которых функция $f(x) = x^2 - 2 \left| x - a^2 \right| - 4x$ имеет хотя бы одну точку максимума.

С6

Наибольшее целое число, не превосходящее число x , равно $\frac{x^2 + 6}{7}$. Найдите все такие действительные значения x .

**Диагностическая работа
по МАТЕМАТИКЕ**

20 октября 2010 года

11 класс

Вариант № 8 (без производной)

Район _____

Город (населенный пункт) _____

Школа _____

Класс _____

Фамилия _____

Имя _____

Отчество _____

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике дается 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом (В1–В12) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (С1–С6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и записать ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удается выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у вас останется время.

Желаем успеха!

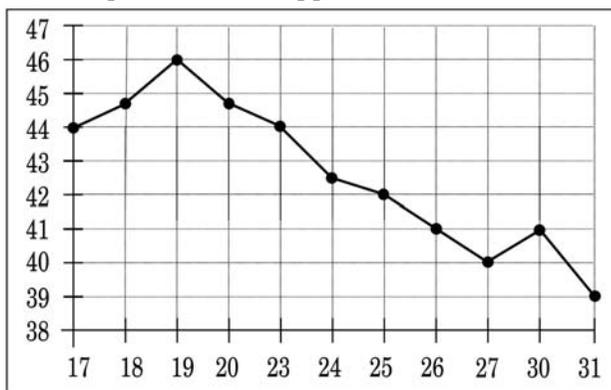
Часть 1

Ответом на задания В1 – В12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

- В1** Спидометр автомобиля показывает скорость в милях в час. Какую скорость (в милях в час) показывает спидометр, если автомобиль движется со скоростью 40 км в час? Считайте, что в одной миле 1,6 км.

Ответ:

- В2** На рисунке жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 17 по 31 августа 2004 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшую цену нефти на момент закрытия торгов в период с 23 по 31 августа (в долларах США за баррель).



Ответ:

- В3** Найдите корень уравнения: $\sqrt{2x + 57} = 7$.

Ответ:

- В4** В треугольнике ABC AD – биссектриса, угол C равен 105° , угол CAD равен 2° . Найдите угол B . Ответ дайте в градусах.

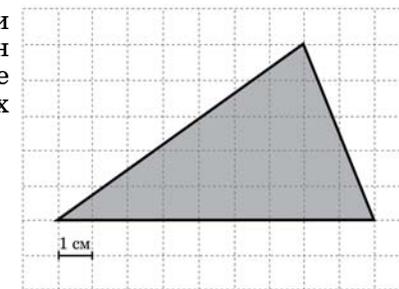
Ответ:

- В5** Строительной фирме нужно приобрести 40 кубометров строительного бруса. У неё есть три поставщика. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую покупку с доставкой? Цены и условия доставки приведены в таблице.

Поставщик	Цена бруса (рублей за 1 м^3)	Стоимость доставки (рублей)	Дополнительные условия
А	4000	10300	
Б	4200	8300	При заказе на сумму больше 150 000 рублей доставка бесплатно
В	4100	8300	При заказе на сумму больше 200 000 рублей доставка бесплатно

Ответ:

- В6** На клетчатой бумаге с клетками размером $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ изображен треугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

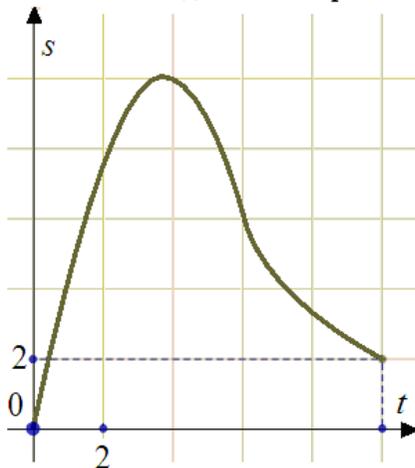


Ответ:

- В7** Найдите $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{11}}{10}$ и $0 < \alpha < 0,5\pi$.

Ответ:

- В8** Материальная точка движется от начального до конечного положения. На рисунке изображен график ее движения. На оси абсцисс откладывается время в секундах, на оси ординат – расстояние от начального положения точки (в метрах). Найдите среднюю скорость движения точки. Ответ дайте в метрах в секунду.



Ответ:

- В9** Во сколько раз увеличится площадь поверхности пирамиды, если все ее ребра увеличить в 11 раз?

Ответ:

- В10** Расстояние от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h м над землей, выраженное в километрах, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. На какой высоте следует располагаться наблюдателю, чтобы он видел горизонт на расстоянии 12 километров? Ответ выразите в метрах.

Ответ:

- В11** Найдите наибольшее значение функции $y = 3^{-7-6x-x^2}$.

Ответ:

- В12** Первые 200 км автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, следующие 100 км со скоростью 70 км/ч, а затем 150 км со скоростью 90 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1 – C6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите уравнение $\frac{2\sin^2 x - 5\sin x - 3}{\sqrt{x + \frac{\pi}{6}}} = 0$.

- C2** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны ребра: $AB = 21\sqrt{3}$, $SC = 29$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины ребер AS и BC .

- C3** Решите неравенство

$$\log_2 \left((5^{-x^2} - 3) (5^{-x^2+9} - 1) \right) + \log_2 \frac{5^{-x^2} - 3}{5^{-x^2+9} - 1} > \log_2 (5^{4-x^2} - 2)^2.$$

- C4** В треугольнике ABC $AB = 13$, $BC = 10$, $CA = 7$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD : DC = 1 : 4$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB , касаются стороны AD в точках E и F . Найдите длину отрезка EF .

- C5** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\left| |x^2 - 6x + 5| - x^2 + 6x - 13 \right| < 2^a - 4^a - (x-2)^2 + 2x - 4$ имеет единственное целое решение.

- C6** Перед каждым из чисел 5, 6, ..., 10 и 12, 13, ..., 16 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 30 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Bap	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
1	29	31,90	22	0,5	264000	7,5	2	-4	4	100	6	20
2	66	1,2	7	0,2	1580	13	-2	0,25	7	20	3	15
3	22	1,1	4	0,96	184700	13,5	-1,5	4	5	17,5	-10	70
4	25	44	-4	71	168000	22,5	0,1	-0,25	8	11250	18	70
5	29	3190	19	0,5	264000	7,5	36	1,6	49	100	3	20
6	66	1,2	-2	0,2	1580	13	-2	4	36	20	2	15
7	22	1,1	4	0,96	184700	13,5	112	1,5	16	17,5	2	70
8	25	44	-4	71	168000	22,5	0,1	1,8	121	11250	9	70
9	13	3	-2	12	1100	12	1,5	0,2	49	1400	4	13
10	9	1,2	53	9	1000	21	-0,5	0,5	36	660	-2	63
11	8	2	-53	3	528	49	-2,5	0,5	16	16,2	12	48
12	18	1,4	5	36	738	35	-3	0,5	121	9,8	3	11
13	13	3	-2	12	1100	12	12	2,5	4	1400	2	13
14	9	1,2	53	9	1000	21	12	1,8	7	660	2	63
15	8	2	-53	3	528	49	-2,5	2,5	5	16,2	0,2	48
16	18	1,4	5	36	738	35	-3	6	8	33	4	11

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите систему уравнений
$$\begin{cases} y + \sin x = 0, \\ (4\sqrt{\sin x} - 1)(2y + 3) = 0. \end{cases}$$

Решение.

Из второго уравнения получаем
$$\begin{cases} y = -\frac{3}{2}, & \text{или } \sin x = \frac{1}{16}. \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$$

Если $y = -\frac{3}{2}$, то из первого уравнения $\sin x = \frac{3}{2}$. Уравнение не имеет решений.

Если $\sin x = \frac{1}{16}$, то $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{16} + \pi n, n \in Z$, и из первого уравнения получаем: $y = -\frac{1}{16}$.

Ответ: $\left((-1)^n \arcsin \frac{1}{16} + \pi n; -\frac{1}{16} \right), n \in Z$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получен ответ, но решение неверно только из-за того, что не учтены ограничения на знак или величину выражения $\cos x$ ($\sin x$).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны ребра: $AB = 5\sqrt{3}, SC = 13$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины ребер AS и BC .

Решение.

Пусть M и N – середины ребер AS и BC соответственно. Прямая AS проектируется на плоскость основания в прямую AN . Поэтому проекция точки M – точка M_1 – лежит на отрезке AN . Значит, прямая AN является проекцией прямой MN , следовательно, угол MNM_1 – искомый.

$MM_1 \parallel SO$, где O – центр основания, значит, MM_1 – средняя линия треугольника ASO , а поэтому M_1 – середина AO .

Тогда $AM_1 = \frac{1}{3}AN = \frac{5}{2}$ и $M_1N = \frac{2}{3}AN = 5$.

Из прямоугольного треугольника AM_1M находим:

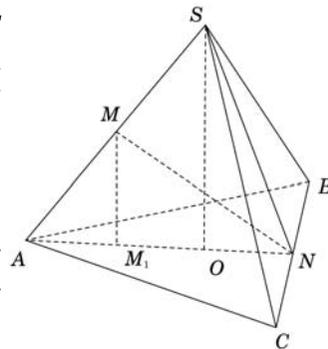
$$MM_1 = \sqrt{AM^2 - AM_1^2} = \sqrt{\frac{169}{4} - \frac{25}{4}} = 6.$$

Из прямоугольного треугольника MM_1N находим:

$$\operatorname{tg} \angle MNM_1 = \frac{MM_1}{M_1N} = \frac{6}{5}.$$

Значит, искомый угол равен $\operatorname{arctg} \frac{6}{5}$.

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{6}{5}$.



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С3 Решите неравенство

$$\log_2\left((7^{-x^2} - 5)(7^{-x^2+4} - 1)\right) + \log_2\frac{7^{-x^2} - 5}{7^{-x^2+4} - 1} > \log_2(7^{3-x^2} - 4)^2.$$

Решение.

Пусть $t = 7^{-x^2}$, $0 < t \leq 1$, тогда неравенство принимает вид:

$$\log_2((t-5)(7^4t-1)) + \log_2\frac{t-5}{7^4t-1} > \log_2(343t-4)^2.$$

$t-5 < 0$, поэтому $7^4t-1 < 0$, то есть $0 < t < \frac{1}{7^4}$.

$$\text{Получаем: } \begin{cases} \log_2(t-5)^2 > \log_2(343t-4)^2, \\ 0 < t < \frac{1}{7^4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |t-5| > |343t-4|, \\ 0 < t < \frac{1}{7^4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5-t > 4-343t, \\ 0 < t < \frac{1}{7^4} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < t < \frac{1}{7^4}.$$

$$\text{Тогда } 7^{-x^2} < 7^{-4} \Leftrightarrow x^2 > 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < -2. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом точек.	2
Полученный ответ неверен, но решение содержит переход от исходного неравенства к верным рациональным неравенствам.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С4 В треугольнике ABC $AB = 10$, $BC = 5$, $CA = 6$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD : DC = 1 : 2$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB , касаются стороны AD в точках E и F . Найдите длину отрезка EF .

Решение.

Пусть $AD = d$, $BD = x$, $DC = y$. Возможны два случая:

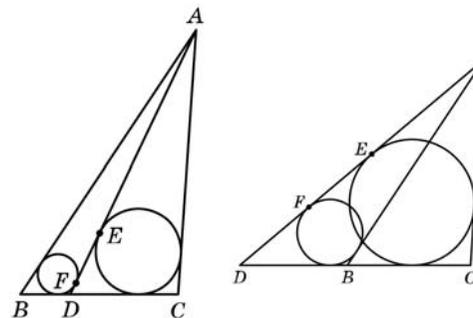


Рис. 1

Рис. 2

- Точка D лежит на отрезке BC (рис. 1). Тогда $x = \frac{5}{3}$, $y = \frac{10}{3}$, $DE = \frac{d+y-6}{2}$, $DF = \frac{d+x-10}{2}$. Значит, $EF = \frac{4+y-x}{2} = \frac{17}{6}$.
- Точка D лежит вне отрезка BC (рис. 2). Тогда $x = 5$, $y = x+5 = 10$, $DE = \frac{d+y-6}{2}$, $DF = \frac{d+x-10}{2}$. Значит, $EF = \frac{9}{2}$.

Ответ: $\frac{9}{2}$ или $\frac{17}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С5 Найдите все значения a , при каждом из которых функция $f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 6x$ имеет хотя бы одну точку максимума.

Решение.

1. Функция f имеет вид:

а) при $x \geq a^2$: $f(x) = x^2 - 8x + 2a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 4$;

б) при $x \leq a^2$: $f(x) = x^2 - 4x - 2a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 2$.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках:

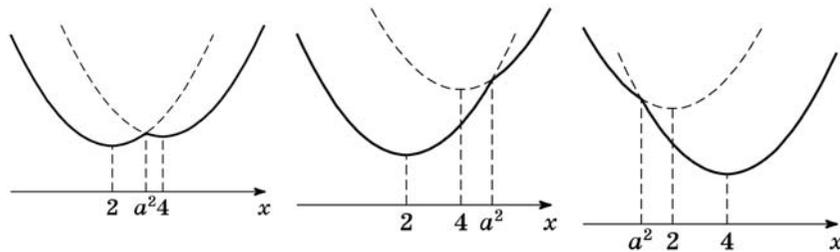


Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

2. Ни одна из квадратичных функций, описанных в пунктах а и б, не имеет точек максимума. Графики обеих функций проходят через точку $(a^2; f(a^2))$.

3. Единственной точкой максимума функции может быть точка $x = a^2$ (рис. 1), причем она действительно является таковой тогда и только тогда, когда $2 < a^2 < 4 \Leftrightarrow \sqrt{2} < |a| < 2$.

Ответ: $-2 < a < -\sqrt{2}; \sqrt{2} < a < 2$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки.	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решении условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна.	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр либо построен верный эскиз графика функции в целом.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С6 Перед каждым из чисел 2, 3, ..., 6 и 10, 11, ..., 20 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 55 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение.

1. Если все числа взяты со знаком плюс, то их сумма максимальна и равна

$$11(2 + \dots + 6) + 5(10 + \dots + 20) = 11\left(\frac{2+6}{2} \cdot 5\right) + 5\left(\frac{10+20}{2} \cdot 11\right) = 55 \cdot 19 = 1045.$$

2. Так как предыдущая сумма оказалась нечетной, то число нечетных слагаемых в ней – нечетно, причем это свойство всей суммы не меняется при смене знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из получающихся сумм будет нечетной, а значит, не будет равна 0.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при следующей расстановке знаков у чисел:

$$11(-2 + 3 - 4 + 5 - 6) + 5(10 + 11 - 12 - 13 + 14 + 15 - 16 - 17 + 18 + 19 - 20) = \\ = -11 \cdot 4 + 5 \cdot 9 = -44 + 45 = 1.$$

Ответ: 1 и 1045.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован (например, не доказано, что либо сумма отлична от 0, либо что она может быть равна 1).	3
Верно найдено наибольшее значение суммы и доказано, что она всегда отлична от 0.	2
Верно найдено только наибольшее значение суммы или только доказано, что она всегда отлична от 0.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите систему уравнений
$$\begin{cases} y - \sin x = 0, \\ (3\sqrt{\sin x} - 1)(y - 5) = 0. \end{cases}$$

Решение.

Из второго уравнения получаем
$$\begin{cases} y = 5 \\ \sin x \geq 0 \end{cases} \text{ или } \sin x = \frac{1}{9}.$$

Если $y = 5$, то из первого уравнения $\sin x = 5$. Уравнение не имеет решений.

Если $\sin x = \frac{1}{9}$, то $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{9} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, и из первого уравнения получаем:

$y = \frac{1}{9}.$

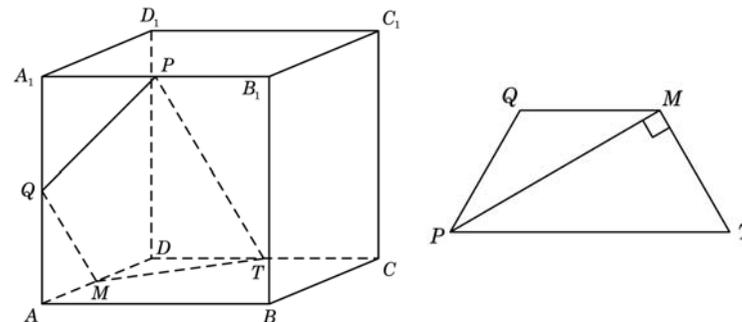
Ответ: $((-1)^n \arcsin \frac{1}{9} + \pi n, \frac{1}{9}), n \in \mathbb{Z}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получен ответ, но решение неверно только из-за того, что не учтены ограничения на знак или величину выражения $\cos x$ ($\sin x$).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2 Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром $\sqrt{6}$. Найдите расстояние от середины ребра $A_1 B_1$ до прямой MT , где точки M и T – середины ребер AD и CD соответственно.

Решение.

Пусть P – середина ребра $A_1 B_1$, а Q – середина ребра AA_1 . Заметим, что $PQMT$ – трапеция, так как $QM \parallel A_1 D \parallel PT$.



Далее видим, что

$TM = QM = PQ = \frac{1}{2} A_1 D = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} AD = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}}{2} = \sqrt{3}, PT = 2\sqrt{3}.$

Опустим высоту из точки P на прямую MT , основание высоты попадет в точку M , значит, искомое расстояние равно $PM = \frac{\sqrt{3}}{2} PT = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 2}{2} = 3.$

Ответ: 3.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С3 Решите неравенство

$$\log_7\left(\left(3^{-x^2} - 4\right)\left(3^{-x^2+16} - 1\right)\right) + \log_7\frac{3^{-x^2} - 4}{3^{-x^2+16} - 1} > \log_7\left(3^{3-x^2} - 3\right)^2.$$

Решение.

Пусть $y = 3^{-x^2}$. Тогда неравенство примет вид

$$\log_7\left((y-4)(3^{16}y-1)\right) + \log_7\frac{y-4}{3^{16}y-1} > \log_7(3^3y-3)^2.$$

Решение будем искать при условиях

$$\begin{cases} (y-4)(3^{16}y-1) > 0 \\ 3^3y-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow y \in (-\infty; 3^{-16}) \cup (4; +\infty)$$

При этих y неравенство равносильно неравенству

$$\log_7(y-4)^2 > \log_7(3^3y-3)^2 \Leftrightarrow (y-4)^2 > (3^3y-3)^2.$$

Последнее неравенство эквивалентно

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (y-4 - (3^3y-3))(y-4 + (3^3y-3)) > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left((1-3^3)y-1\right)\left((1+3^3)y-7\right) > 0 \Leftrightarrow y \in \left(-\frac{1}{26}; \frac{1}{4}\right). \end{aligned}$$

Учитывая ограничения, находим: $y \in \left(-\frac{1}{26}; 3^{-16}\right)$.

Тогда $-\frac{1}{26} < 3^{-x^2} < 3^{-16} \Leftrightarrow x^2 > 16 \Leftrightarrow |x| > 4$.

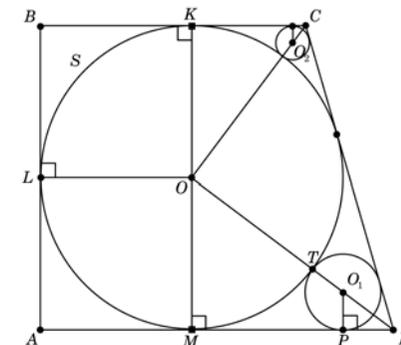
Ответ: $(-\infty; -4), (4; +\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом точек.	2
Полученный ответ неверен, но решение содержит переход от исходного неравенства к верным рациональным неравенствам.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С4 Окружность S радиуса 12 вписана в прямоугольную трапецию с основаниями 28 и 21. Найдите радиус окружности, которая касается основания, большей боковой стороны и окружности S .

Решение.

Пусть $ABCD$ – трапеция с боковыми сторонами $AB < CD$ и основаниями $AD = 28$ и $BC = 21$, причём $AB \perp AD$, а окружность S с центром O , вписанная в трапецию, касается сторон BC , AB и AD в точках K , L и M соответственно.



Четырёхугольник $BKOL$ – квадрат, поэтому $BK = OL = 12$. Тогда $CK = BC - BK = 21 - 12 = 9$. Аналогично, $DM = AD - AM = 28 - 12 = 16$. Из прямоугольных треугольников ODM и O_1CK находим, что

$$OD = \sqrt{OM^2 + DM^2} = \sqrt{144 + 256} = 20, \quad OC = \sqrt{OK^2 + CK^2} = \sqrt{144 + 81} = 15.$$

Рассмотрим случай, когда окружность радиуса r с центром O_1 вписана в угол ADC , касается окружности S в точке T , а стороны AD – в точке P . Линия центров касающихся окружностей проходит через точку их касания, поэтому

$$OO_1 = OT + TO_1 = 12 + r,$$

а т.к. точки D, O_1 и O лежат на одной прямой (биссектрисе угла CAD), то

$$DO_1 = OD - OO_1 = 20 - (12 + r) = 8 - r.$$

Треугольники O_1PD и OMD подобны, поэтому $\frac{O_1P}{OM} = \frac{O_1D}{OD}$, или $\frac{r}{12} = \frac{8-r}{20}$,

откуда находим, что $r = 3$.

Если же окружность радиуса r_1 с центром O_2 вписана в угол BCD и касается окружности S , то аналогично получим уравнение $\frac{r_1}{12} = \frac{3-r}{15}$, из которого

найдём, что $r_1 = \frac{4}{3}$.

Ответ: 3 или $\frac{4}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С5 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\left| |x^2 - 2x - 3| - x^2 + 2x - 5 \right| \leq \frac{1}{3}(\log_2^2 a - \log_4 a) - x^2 + 2x + 1$ имеет единственное целое решение.

Решение.

Сделаем замену $x^2 - 2x - 3 = y$. Тогда $y \geq -4$, при этом, если x – целое, то y – также целое число.

Неравенство примет вид

$$\left| |y| - y - 8 \right| + y < \frac{1}{3}(\log_2^2 a - \log_4 a) - 2.$$

Построим график функции $f(y) = \left| |y| - y - 8 \right| + y$ при $y \geq -4$, находим, что эта функция монотонно возрастает. Следовательно, если y_0 является решением неравенства при некотором a , то все $y < y_0$ также являются решениями.

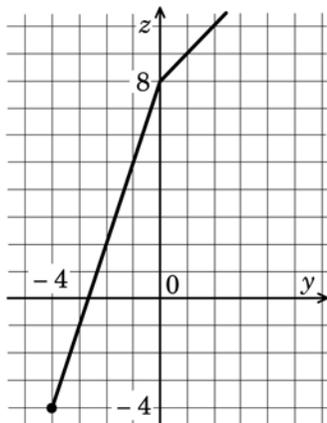
Значит, если есть решение $y_0 \geq -3$, то целые числа -4 и -3 также будут решениями, и тогда будет, по крайней мере, три решения данного неравенства: $x = 1, 2, 3$.

Следовательно, $-4 \leq y < -3$, и, стало быть, $-4 \leq f(y) < -1$.

Значит, должно выполняться двойное неравенство

$$-4 \leq \frac{1}{3}(\log_2^2 a - \log_4 a) - 2 < -1, \text{ откуда } \begin{cases} \log_2^2 a - \frac{1}{2}\log_2 a + 6 \geq 0, \\ \log_2^2 a - \frac{1}{2}\log_2 a - 3 < 0. \end{cases}$$

Первое неравенство выполняется при всех положительных a .



Решение второго неравенства: $\frac{1}{2\sqrt{2}} < a < 4$.

Ответ: $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, 4 \right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки.	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решении условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна.	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С6 Наибольшее целое число, не превосходящее $\frac{2x + 17}{10}$, равно $\frac{3x + 41}{3}$.

Найдите все такие действительные значения x .

Решение.

Положим $\frac{3x + 41}{3} = n, n \in \mathbb{Z}$. Отсюда $\frac{2x + 17}{10} = \frac{6n - 31}{30}$. Поскольку число n есть наибольшее целое, не превосходящее числа $\frac{6n - 31}{30}$, то имеем систему

$$\begin{cases} \frac{6n - 31}{30} < n + 1, \\ \frac{6n - 31}{30} \geq n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n > -\frac{61}{24} = -2\frac{13}{24}, \\ n \leq -\frac{31}{24} = -1\frac{7}{24}. \end{cases} \Leftrightarrow n = -2.$$

Следовательно, $\frac{3x + 41}{3} = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{47}{3}$.

Ответ: $-\frac{47}{3}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован (например, отсутствует одна из оценок).	3
Ответ неправильный за счет вычислительной ошибки.	2
Дано верное значение и показано, что оно удовлетворяет условию.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите систему уравнений
$$\begin{cases} y + \sin x = 0, \\ (2\sqrt{\sin x} - 1)(3y - 2) = 0. \end{cases}$$

Решение.

Из второго уравнения получаем
$$\begin{cases} y = \frac{3}{2} & \text{или} & \sin x = \frac{1}{4}. \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$$

Если $y = \frac{3}{2}$, то из первого уравнения $\sin x = \frac{3}{2}$. Уравнение не имеет решений.

Если $\sin x = \frac{1}{4}$, то $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и из первого уравнения получаем: $y = \frac{1}{4}$.

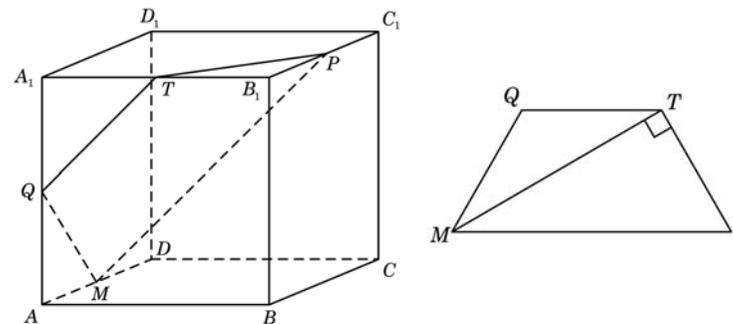
Ответ: $(-1)^n \arcsin \frac{1}{4} + \pi n, \frac{1}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получен ответ, но решение неверно только из-за того, что не учтены ограничения на знак или величину выражения $\cos x$ ($\sin x$).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2 Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром $2\sqrt{2}$. Найдите расстояние от середины ребра $B_1 C_1$ до прямой MT , где точки M и T – середины ребер AD и $A_1 B_1$ соответственно.

Решение.

Пусть P – середина ребра $B_1 C_1$, а Q – середина ребра AA_1 . Заметим, что $PMQT$ – трапеция, так как $QT \parallel B_1 A \parallel PM$.



Далее видим, что

$$TQ = QM = PT = \frac{1}{2} B_1 A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} AB = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 2, MP = 4.$$

Опустим высоту из точки P на прямую MT , основание высоты попадет в точку T , значит, искомое расстояние равно $PT = 2$.

Ответ: 2.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C3 Решите неравенство
$$\frac{\log_{2x-1}(\log_2(x^2 - 2x))}{\log_{2x-1}(x^2 + 6x + 10)} \leq 0.$$

Решение.

Поскольку $x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 + 1 \geq 1$ рассмотрим два случая:

$$1. \begin{cases} 0 < 2x - 1 < 1 \\ \log_2(x^2 - 2x) \geq 1 \\ \log_{2x-1}(x^2 + 6x + 10) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < x < 1 \\ x^2 - 2x \geq 2 \\ x \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < x < 1 \\ x \leq 1 - \sqrt{3}, x \geq 1 + \sqrt{3} \end{cases}.$$

Откуда $x \in \emptyset$.

$$2. \begin{cases} 2x - 1 > 1 \\ 0 < \log_2(x^2 - 2x) \leq 1 \\ \log_{2x-1}(x^2 + 6x + 10) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 1 < x^2 - 2x \leq 2 \\ x \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2} \\ x \leq 1 - \sqrt{3}, x \geq 1 + \sqrt{3} \end{cases}$$

Откуда $1 + \sqrt{2} < x \leq 1 + \sqrt{3}$

Ответ: $(1 + \sqrt{2}; 1 + \sqrt{3}]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом точек.	2
Полученный ответ неверен, но решение содержит переход от исходного неравенства к верным рациональным неравенствам.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С4 Окружность S радиуса 24 вписана в равнобедренную трапецию с основаниями 36 и 64. Найдите радиус окружности, которая касается основания, боковой стороны и окружности S .

Решение.

Пусть $ABCD$ – трапеция с боковыми сторонами AB и CD , а окружность S с центром O , вписанная в трапецию, касается оснований $BC = 36$ и $AD = 64$ в точках K и M соответственно.

Точки K и M – середины оснований, поэтому $CK = 18$ и $DM = 32$. Из прямоугольных треугольников ODM и OCK находим, что

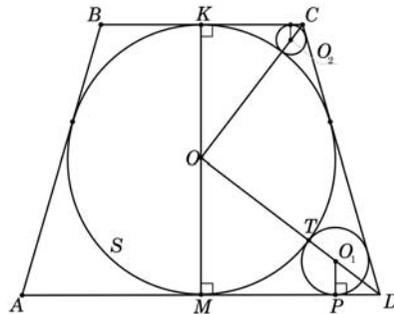
$$OD = \sqrt{OM^2 + DM^2} = \sqrt{24^2 + 32^2} = 8\sqrt{9 + 16} = 40,$$

$$OC = \sqrt{OK^2 + CK^2} = \sqrt{24^2 + 18^2} = 6\sqrt{16 + 9} = 30.$$

Рассмотрим случай, когда окружность радиуса r с центром O_1 вписана в угол ADC , касается окружности S в точке T , а стороны AD – в точке P . Линия центров касающихся окружностей проходит через точку их касания, поэтому

$$OO_1 = OT + TO_1 = 24 + r,$$

а т.к. точки D, O_1 и O лежат на одной прямой (биссектрисе угла CAD), то



$$DO_1 = OD - OO_1 = 40 - (24 + r) = 16 - r.$$

Треугольники O_1PD и OMD подобны, поэтому $\frac{O_1P}{OM} = \frac{O_1D}{OD}$, или $\frac{r}{24} = \frac{16-r}{40}$,

откуда находим, что $r = 6$.

Если же окружность радиуса r_1 с центром O_2 вписана в угол BCD и касается окружности S , то аналогично получим уравнение $\frac{r_1}{24} = \frac{6-r}{30}$, из которого

найдем, что $r_1 = \frac{8}{3}$.

Ответ: 6 или $\frac{8}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С5 Найдите все значения a , при каждом из которых функция $f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 4x$ имеет хотя бы одну точку максимума.

Решение.

1. Функция f имеет вид:

а) при $x \geq a^2$: $f(x) = x^2 - 6x + 2a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 3$;

б) при $x \leq a^2$: $f(x) = x^2 - 2x - 2a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 1$.

Все возможные виды графика функции показаны на рисунках:

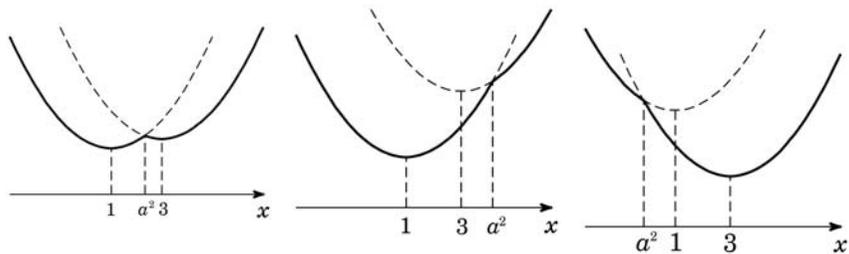


Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

2. Ни одна из квадратичных функций, описанных в пунктах a и b , не имеет точек максимума. Графики обеих функций проходят через точку $(a^2; f(a^2))$.

3. Единственной точкой максимума функции может быть точка $x = a^2$ (рис. 1), причем она действительно является таковой тогда и только тогда, когда $1 < a^2 < 3 \Leftrightarrow 1 < |a| < \sqrt{3}$.

Ответ: $(-\sqrt{3}; -1), (1; \sqrt{3})$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки.	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решений условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна.	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С6

Наибольшее целое число, не превосходящее число x , равно $\frac{x^2 + 6}{7}$.

Найдите все такие действительные значения x .

Решение.

По условию $x \geq \frac{x^2 + 6}{7} \geq \frac{6}{7} > 0$. Поэтому если обозначить $\frac{x^2 + 6}{7} = b$, то $x = \sqrt{7b - 6}$.

Тогда число b – целое и должно удовлетворять системе

$$\begin{cases} b \leq \sqrt{7b - 6}, \\ b > \sqrt{7b - 6} - 1, \\ b \geq \frac{6}{7} \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} b^2 - 7b + 6 \leq 0, \\ b^2 - 5b + 7 > 0, \\ b \geq \frac{6}{7} \end{cases}$$

Второе неравенство верно при всех b , а из первого неравенства находим: $1 \leq b \leq 6$.

Следовательно, $x = \sqrt{7 \cdot 1 - 6} = 1, x = \sqrt{8}, x = \sqrt{15}, x = \sqrt{22}, x = \sqrt{29}$ и $x = 6$.

Ответ: $1, \sqrt{8}, \sqrt{15}, \sqrt{22}, \sqrt{29}, 6$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован (например, отсутствует одна из оценок).	3
Ответ неправильный за счет вычислительной ошибки.	2
Дано верное значение и показано, что оно удовлетворяет условию.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $\frac{2\sin^2x - 5\sin x - 3}{\sqrt{x + \frac{\pi}{6}}} = 0$.

Решение.
Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2\sin^2x - 5\sin x - 3 = 0, \\ x > -\frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Из системы получаем $\sin x = -\frac{1}{2}$ или $\sin x = 3$. Уравнение $\sin x = 3$ не имеет решений. Учитывая, что $x > -\frac{\pi}{6}$, получаем: $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, n = 1, 2, 3, \dots$

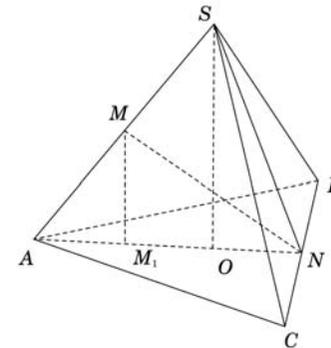
Ответ: $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, n = 1, 2, 3, \dots$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получен ответ, но решение неверно только из-за того, что не учтены ограничения на знак выражения $x + \frac{\pi}{6}$.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны ребра: $AB = 21\sqrt{3}, SC = 29$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины ребер AS и BC .

Решение.

Пусть M и N – середины ребер AS и BC соответственно. Прямая AS проектируется на плоскость основания в прямую AN . Поэтому проекция точки M – точка M_1 – лежит на отрезке AN . Значит, прямая AN является проекцией прямой MN , следовательно, угол MNM_1 – искомый. $MM_1 \parallel SO$, где O – центр основания, значит, MM_1 – средняя линия треугольника ASO , а поэтому M_1 – середина AO .



Тогда $AM_1 = \frac{1}{3}AN = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \frac{21}{2}$

и $M_1N = 2AM_1 = 21$.

Из прямоугольного треугольника AM_1M находим:

$$MM_1 = \sqrt{AM^2 - AM_1^2} = \sqrt{\left(\frac{29}{2}\right)^2 - \left(\frac{21}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{29}{2} - \frac{21}{2}\right)\left(\frac{29}{2} + \frac{21}{2}\right)} = \sqrt{4 \cdot 25} = 10.$$

Из прямоугольного треугольника MM_1N находим: $\text{tg} \angle MNM_1 = \frac{MM_1}{M_1N} = \frac{10}{21}$.

Значит, искомый угол равен $\text{arctg} \frac{10}{21}$.

Ответ: $\text{arctg} \frac{10}{21}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С3 Решите неравенство

$$\log_2\left((5^{-x^2}-3)(5^{-x^2+9}-1)\right) + \log_2\frac{5^{-x^2}-3}{5^{-x^2+9}-1} > \log_2(5^{4-x^2}-2)^2$$

Решение.

Пусть $y = 5^{-x^2}$. Тогда неравенство примет вид

$$\log_2((y-3)(5^9y-1)) + \log_2\frac{y-3}{5^9y-1} > \log_2(5^4y-2)^2$$

Решение будем искать при условиях

$$\begin{cases} (y-3)(5^9y-1) > 0, \\ 5^4y-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow y \in (-\infty, 5^{-9}) \cup (3, +\infty)$$

При этих y неравенство равносильно неравенству

$$\log_2(y-3)^2 > \log_2(5^4y-2)^2 \Leftrightarrow (y-3)^2 > (5^4y-2)^2$$

Последнее неравенство эквивалентно

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (y-3-(5^4y-2))(y-3+(5^4y-2)) > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow ((1-5^4)y-1)((1+5^4)y-5) > 0 \Leftrightarrow y \in \left(-\frac{1}{624}; \frac{5}{626}\right). \end{aligned}$$

Учитывая ограничения, находим: $y \in \left(-\frac{1}{624}; 5^{-9}\right)$.

Тогда $-\frac{1}{624} < 5^{-x^2} < 5^{-9} \Leftrightarrow x^2 > 9 \Leftrightarrow |x| > 3$

Ответ: $(-\infty; -3), (3; +\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом точек.	2
Полученный ответ неверен, но решение содержит переход от исходного неравенства к верным рациональным неравенствам.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С4 В треугольнике ABC $AB = 13$, $BC = 10$, $CA = 7$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD : DC = 1 : 4$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB , касаются стороны AD в точках E и F . Найдите длину отрезка EF .

Решение.

Пусть $AD = d$, $BD = x$, $DC = y$. Возможны два случая:

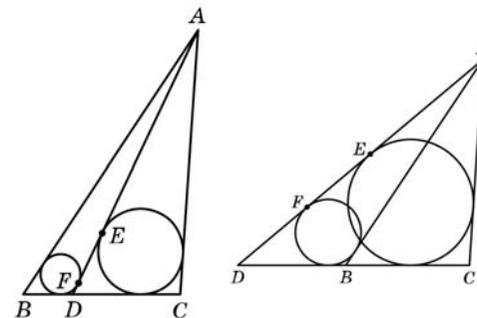


Рис. 1

Рис. 2

- Точка D лежит на отрезке BC (рис. 1). Тогда $x = 2, y = 8, DE = \frac{d+y-7}{2}, DF = \frac{d+x-13}{2}$. Значит, $EF = \frac{6+y-x}{2} = 6$.
- Точка D лежит вне отрезка BC (рис. 2). Тогда $x = \frac{10}{3}, y = \frac{40}{3}, DE = \frac{d+y-7}{2}, DF = \frac{d+x-13}{2}$. Значит, $EF = \frac{6+y-x}{2} = 8$.

Ответ: 6 или 8.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С5 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\left| |x^2 - 6x + 5| - x^2 + 6x - 13 \right| < 2^a - 4^a - (x - 2)^2 + 2x - 4$ имеет единственное целое решение.

Решение.

Сделаем замену $x^2 - 6x + 5 = y$. Тогда $y \geq -4$, при этом, если x – целое, то y – также целое число.

Неравенство примет вид $\|y| - y - 8| + y < -4^a + 2^a - 3$.

Построим график функции $f(y) = \|y| - y - 8| + y$ при $y \geq -4$, находим, что эта функция монотонно возрастает. Следовательно, если y_0 является решением неравенства при некотором a , то все $y < y_0$ также являются решениями.

Значит, если есть решение $y_0 \geq -3$, то целые числа -4 и -3 также будут решениями, и тогда будет, по крайней мере, три решения данного неравенства: $x = 1, 2, 3$.

Следовательно, $-4 \leq y < -3$, и, стало быть, $-4 < f(y) \leq -1$.

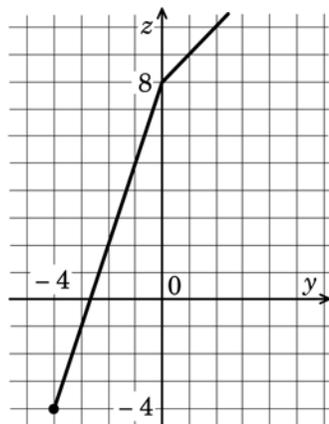
Значит, должно выполняться двойное неравенство

$$-4 < -4^a + 2^a - 3 \leq -1, \text{ откуда } \begin{cases} 4^a - 2^a - 1 < 0, \\ 4^a - 2^a + 2 \geq 0. \end{cases}$$

Решение первого неравенства: $a < \log_2 \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Второе неравенство выполняется при всех a .

Ответ: $(-\infty, \log_2 \frac{1 + \sqrt{5}}{2})$.



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки.	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решении условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна.	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С6 Перед каждым из чисел 5, 6, ..., 10 и 12, 13, ..., 16 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 30 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение.

1. Если все числа взяты со знаком плюс, то их сумма максимальна и равна

$$5(5 + \dots + 10) + 6(12 + \dots + 16) = 5\left(\frac{5 + 10}{2} \cdot 6\right) + 6\left(\frac{12 + 16}{2} \cdot 5\right) = 30 \cdot 21,5 = 645.$$

2. Так как предыдущая сумма оказалась нечетной, то число нечетных слагаемых в ней – нечетно, причем это свойство всей суммы не меняется при смене знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из получающихся сумм будет нечетной, а значит, не будет равна 0.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при следующей расстановке знаков у чисел:

$$\begin{aligned} &5(5 - 6 - 7 + 8 - 9 - 10) + 6(12 - 13 - 14 + 15 - 16) = \\ &= 5 \cdot (-19) + 6 \cdot 16 = -95 + 96 = 1. \end{aligned}$$

Ответ: 1 и 645.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован (например, не доказано, что либо сумма отлична от 0, либо что она может быть равна 1).	3
Верно найдено наибольшее значение суммы и доказано, что она всегда отлична от 0.	2
Верно найдено только наибольшее значение суммы или только доказано, что она всегда отлична от 0.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0