

**Диагностическая работа
по МАТЕМАТИКЕ**

20 октября 2010 года

11 класс

Вариант № 13 (без производной)

Математика. 11 класс. Вариант 13 (без производной)

2

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике дается 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом (В1–В12) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (С1–С6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и записать ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удается выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у вас останется время.

Желаем успеха!

Район _____

Город (населенный пункт) _____

Школа _____

Класс _____

Фамилия _____

Имя _____

Отчество _____

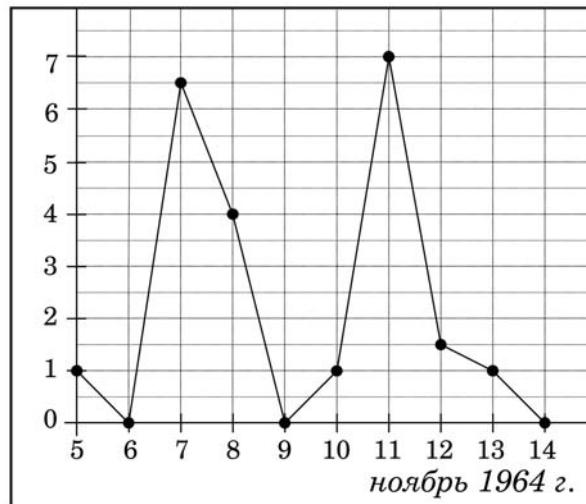
Часть 1

Ответом на задания B1 – B12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

- B1** Цена одной шоколадки в супермаркете 40 рублей, но в воскресенье действует специальное предложение: заплатив за 4 шоколадки, покупатель получает 5 таких шоколадок (одну бесплатно). Какое наибольшее количество шоколадок можно получить в воскресенье, имея 460 рублей?

Ответ:

- B2** На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Архангельске с 5 по 14 ноября 1964 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода выпадало более 3 миллиметров осадков.



Ответ:

- B3** Найдите корень уравнения $\sqrt{21 - 2x} = 5$.

Ответ:

- B4** В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 15$, $\cos B = \frac{3}{5}$. Найдите AC .

Ответ:

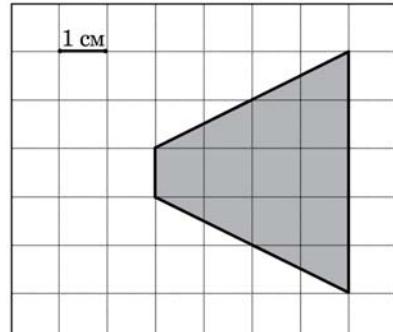
- B5** Интернет-провайдер (компания, оказывающая услуги по подключению к сети Интернет) предлагает три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
1. План «0»	Нет	4 рубля за 1 Мб
2. План «400»	850 рублей за 400 Мб трафика в месяц	3,5 рубля за 1 Мб сверх 400 Мб
3. План «700»	1100 рублей за 700 Мб трафика в месяц	3 рубля за 1 Мб сверх 700 Мб

Пользователь планирует, что его трафик составит 500 Мб, и, исходя из этого, выбирает наиболее дешевый тарифный план. Сколько рублей заплатит пользователь за месяц, если его трафик действительно будет равен 500 Мб?

Ответ:

- B6** Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

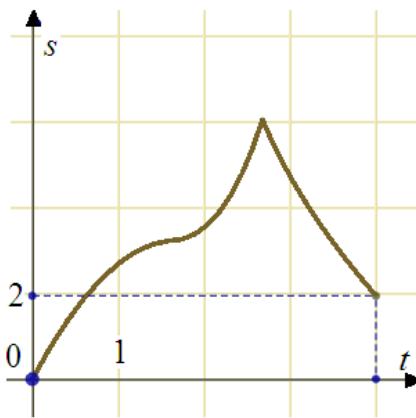


Ответ:

B7 Найдите значение выражения $96\log_{13}\sqrt[8]{13}$.

Ответ:

B8 Материальная точка движется от начального до конечного положения. На рисунке изображен график ее движения. На оси абсцисс откладывается время в секундах, на оси ординат – расстояние от начального положения точки (в метрах). Найдите среднюю скорость движения точки. Ответ дайте в метрах в секунду.



Ответ:

B9 Найдите боковое ребро правильной четырехугольной призмы, если сторона ее основания равна 3, а площадь поверхности равна 66.

Ответ:

B10 Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя вычисляется по формуле $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$. При каком значении температуры нагревателя T_1 (в градусах Кельвина) КПД этого двигателя равен 80%, если температура холодильника $T_2 = 280\text{ K}$?

Ответ:

B11 Найдите наименьшее значение функции $y = \log_2(x^2 - 2x + 5)$.

Ответ:

B12 Первая труба пропускает на 3 литра воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 208 литров она заполняет на 3 минуты медленнее, чем вторая труба?

Ответ:

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1 – С6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите уравнение $\frac{2\cos^2 x + 5\cos x - 3}{\sqrt{x - \frac{\pi}{3}}} = 0$.

C2 В правильной треугольной призме $ABC A_1B_1C_1$ известны ребра: $AB = 3\sqrt{3}$, $BB_1 = 6$. Точка M – середина ребра B_1C_1 , а точка T – середина A_1M . Найдите угол между плоскостью BCT и прямой AT .

C3 Решите неравенство $\frac{\log_{5^{x+8}} 14}{\log_{5^{x+8}}(x^2 - 25)} \geq \frac{\log_2(x^2 + 9x + 14)}{\log_2(x^2 - 25)}$.

C4 Две окружности, касающиесяся прямой в точках A и B , пересекаются в точках C и D , причем $AB = 8$, $CD = 15$. Найдите медиану CE треугольника ABC .

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x) = x^2 - 7|x-a| - 3x$ на отрезке $[-6; 6]$ принимается хотя бы на одном из концов этого отрезка.

C6 Найдите все пары натуральных чисел a и b , удовлетворяющие равенству $\overline{ab} = a^b + 23$ (в левой части равенства стоит число, получаемое приписыванием десятичной записи числа a перед десятичной записью числа b).

**Диагностическая работа
по МАТЕМАТИКЕ**

20 октября 2010 года

11 класс

Вариант № 14 (без производной)

Математика. 11 класс. Вариант 14 (без производной)

2

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике дается 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом (B1–B12) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1–C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и записать ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удается выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у вас останется время.

Желаем успеха!

Район _____

Город (населенный пункт) _____

Школа _____

Класс _____

Фамилия _____

Имя _____

Отчество _____

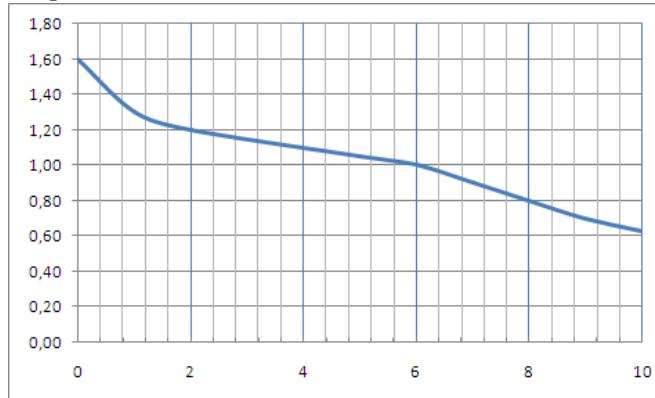
Часть 1

Ответом на задания B1 – B12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

- B1** Цена одной шоколадки в супермаркете 45 рублей, но в воскресенье действует специальное предложение: заплатив за 3 шоколадки, покупатель получает 4 таких шоколадки (одну бесплатно). Какое наибольшее количество шоколадок можно получить в воскресенье, имея 330 рублей?

Ответ:

- B2** На рисунке показан график разряда батарейки в карманным фонарике. На горизонтальной оси отмечается время работы фонарика в часах, на вертикальной оси – напряжение в вольтах. Определите по рисунку, какое напряжение будет давать батарейка через 2 часа работы фонарика. Ответ дайте в вольтах.



Ответ:

- B3** Найдите корень уравнения: $\sqrt{57 - x} = 2$.

Ответ:

B4

В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 21$, $\cos B = \frac{2\sqrt{10}}{7}$. Найдите AC .

Ответ:

B5

Мебельный салон заключает договоры с производителями мебели. В договорах указывается, какой процент от суммы, вырученной за продажу мебели, поступает в доход мебельного салона (см. табл.1).

Табл. 1

Фирма-производитель	Процент от выручки, поступающий в доход салона	Примечания
«Альфа»	7 %	Изделия ценой до 20 000 р.
«Альфа»	4 %	Изделия ценой выше 20 000 р.
«Бета»	5 %	Все изделия
«Омикрон»	6 %	Все изделия

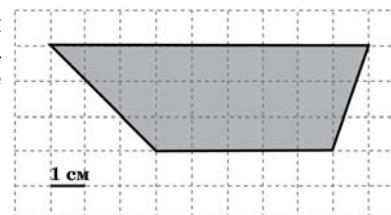
В прейскуранте (табл.2.) приведены цены на четыре комплекта кухонной мебели. Определите, продажа какого комплекта наиболее выгодна для салона. В ответе запишите сумму, которая поступит в доход салона от продажи этого комплекта.

Табл. 2

Фирма-производитель	Комплект кухонной мебели	Цена
«Альфа»	«Бенедикт»	14 000 р.
«Альфа»	«Боливия»	21 000 р.
«Бета»	«Бенефициар»	20 000 р.
«Омикрон»	«Берендей»	15 000 р.

Ответ:

- B6** На клетчатой бумаге с клетками размером $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ изображена трапеция (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.

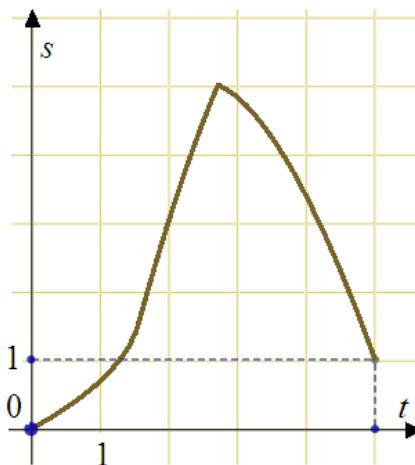


Ответ:

- B7** Найдите значение выражения $132 \log_{17} \sqrt[11]{17}$.

Ответ:

- B8** Материальная точка движется от начального до конечного положения. На рисунке изображен график ее движения. На оси абсцисс откладывается время в секундах, на оси ординат – расстояние от начального положения точки (в метрах). Найдите среднюю скорость движения точки. Ответ дайте в метрах в секунду.



Ответ:

- B9** Найдите боковое ребро правильной четырехугольной призмы, если сторона ее основания равна 5, а площадь поверхности равна 190.

Ответ:

- B10** Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя вычисляется по формуле $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$. При каком значении температуры нагревателя T_1 (в градусах Кельвина) КПД этого двигателя равен 55 %, если температура холодильника $T_2 = 297 \text{ K}$?

Ответ:

- B11** Найдите наибольшее значение функции $y = \log_3(8 - 2x - x^2)$.

Ответ:

- B12** Первую треть трассы автомобиль ехал со скоростью 45 км/ч, вторую треть со скоростью 90 км/ч, а последнюю со скоростью 70 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1 – С6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

- C1** Решите уравнение $\frac{4\cos^2 x - 8\sin x - 7}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = 0$.

- C2** Дан куб $ABCD A_1B_1C_1D_1$ с ребром $8\sqrt{6}$. Найдите расстояние от середины ребра B_1C_1 до прямой MT , где точки M и T – середины ребер CD и A_1B_1 соответственно.

- C3** Решите неравенство $\frac{\log_2^{x+15}}{\log_2^{x+6}(x^2 - 16)} \geq \frac{\log_3(x^2 + 8x + 15)}{\log_3(x^2 - 16)}$.

C4 В треугольнике ABC проведены медиана AM и высота AH . Известно, что $\frac{MH}{BH} = \frac{3}{2}$, а площадь треугольника AMH равна 24. Найдите площадь треугольника ABC .

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x) = x^2 - 7|x-a| - x$ на отрезке $[-6; 7]$ принимается хотя бы на одном из концов этого отрезка.

C6 Наибольшее целое число, не превосходящее $\frac{2x+17}{10}$, равно $\frac{3x+41}{3}$. Найдите все такие действительные значения x .

**Диагностическая работа
по МАТЕМАТИКЕ**

20 октября 2010 года

11 класс

Вариант № 15 (без производной)

Математика. 11 класс. Вариант 15 (без производной)

2

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике дается 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом (B1–B12) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1–C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и записать ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удается выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у вас останется время.

Желаем успеха!

Район _____

Город (населенный пункт) _____

Школа _____

Класс _____

Фамилия _____

Имя _____

Отчество _____

Часть 1

Ответом на задания B1 – B12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

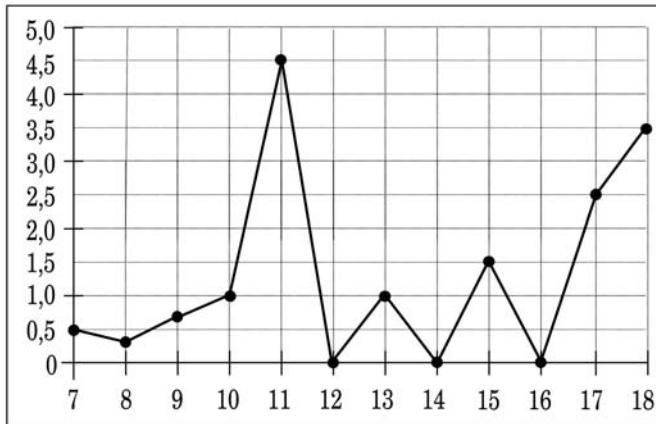
B1

Цена одной шоколадки в супермаркете 50 рублей, но в воскресенье действует специальное предложение: заплатив за 3 шоколадки, покупатель получает 4 таких шоколадки (одну бесплатно). Какое наибольшее количество шоколадок можно получить в воскресенье, имея 300 рублей?

Ответ:

B2

На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Элисте с 7 по 18 декабря 2001 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода выпадало от 2 до 4 миллиметров осадков.



Ответ:

B3

Найдите корень уравнения: $\sqrt{57 + x} = 2$.

Ответ:

B4

В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 9$, $\cos B = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Найдите AC .

Ответ:

B5

Интернет-провайдер (компания, оказывающая услуги по подключению к сети Интернет) предлагает три тарифных плана.

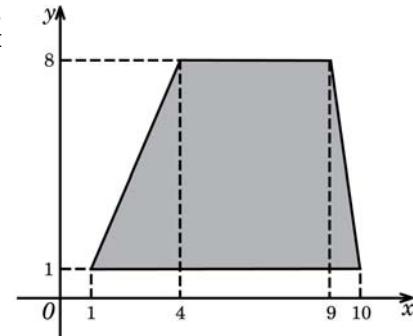
Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
1. План «0»	Нет	1,2 рубля за 1 Мб
2. План «300»	309 рублей за 300 Мб трафика в месяц	1,1 рубля за 1 Мб сверх 300 Мб
3. План «600»	528 рублей за 600 Мб трафика в месяц	0,7 рубля за 1 Мб сверх 600 Мб

Пользователь планирует, что его трафик составит 500 Мб и исходя из этого выбирает наиболее дешевый тарифный план. Сколько рублей заплатит пользователь за месяц, если его трафик действительно будет равен 500 Мб?

Ответ:

B6

Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты $(1;1)$, $(10;1)$, $(9;8)$, $(4;8)$.



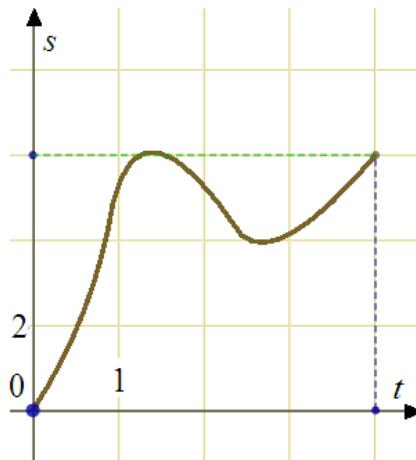
Ответ:

B7

Найдите значение выражения: $10\sin 30^\circ \cdot \cos 120^\circ$.

Ответ:

- B8** Материальная точка движется от начального до конечного положения. На рисунке изображен график ее движения. На оси абсцисс откладывается время в секундах, на оси ординат – расстояние от начального положения точки (в метрах). Найдите среднюю скорость движения точки. Ответ дайте в метрах в секунду.



Ответ:

- B9** Найдите боковое ребро правильной четырехугольной призмы, если сторона ее основания равна 20, а площадь поверхности равна 1200.

Ответ:

- B10** Расстояние от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h м над землей, выраженное в километрах, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. На какой высоте следует располагаться наблюдателю, чтобы он видел горизонт на расстоянии 14,4 километров? Ответ выразите в метрах.

Ответ:

- B11** Найдите наименьшее значение функции $y = 5^{x^2 - 4x + 3}$.

Ответ:

- B12** Первую треть трассы автомобиль ехал со скоростью 80 км/ч, вторую третью со скоростью 30 км/ч, а последнюю со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1 – С6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1

Решите систему уравнений $\begin{cases} \left(\frac{36}{25}\right)^{\operatorname{tg} x} + \left(\frac{6}{5}\right)^{\operatorname{tg} x} - 2 = 0, \\ \sqrt{15y} - 5\cos x = 0. \end{cases}$

C2

- В правильной треугольной призме $ABC A_1B_1C_1$ известны ребра: $AB = 4\sqrt{3}$, $BB_1 = 9$. Точка M – середина ребра B_1C_1 , а точка T – середина A_1M . Найдите угол между плоскостью BCT и прямой AT .

C3

Решите неравенство $\frac{\log_{2x+9}(\log_{0,5}(x^2 + 4x))}{\log_{2x+9}(x^2 + 8x + 17)} \geq 0$.

C4

- Две окружности, касающиеся прямой в точках A и B , пересекаются в точках C и D , причем $AB = 12$, $CD = 5$. Найдите медиану CE треугольника ABC .

C5

- Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $|x^2 - 4x| - x^2 + 4x - 8 < \sqrt{a^2 + 2a - 3} - a - (x-1)^2 + 2x$ имеет от одного до трех целых решений.

C6

- Наибольшее целое число, не превосходящее число x , равно $\frac{x^2 + 6}{7}$.

Найдите все такие действительные значения x .

**Диагностическая работа
по МАТЕМАТИКЕ**

20 октября 2010 года

11 класс

Вариант № 16 (без производной)

Математика. 11 класс. Вариант 16 (без производной)

2

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике дается 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом (B1–B12) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1–C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и записать ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удается выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у вас останется время.

Желаем успеха!

Район _____

Город (населенный пункт) _____

Школа _____

Класс _____

Фамилия _____

Имя _____

Отчество _____

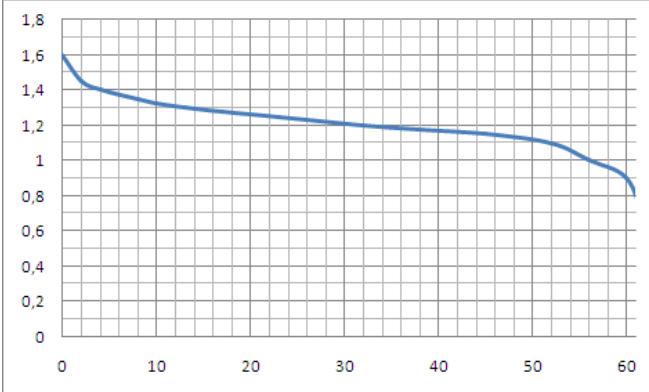
Часть 1

Ответом на задания B1 – B12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

B1 На счету мобильного телефона было 93 рубля, а после разговора осталось 48 рублей. Сколько минут длился разговор? Одна минута разговора стоит 2 рубля 50 копеек.

Ответ:

B2 На рисунке показан график разряда батарейки в карманным фонарике. На горизонтальной оси отмечается время работы фонарика в часах, на вертикальной оси – напряжение в вольтах. Определите по рисунку, какое напряжение будет давать батарейка через 4 часа работы фонарика. Ответ дайте в вольтах.



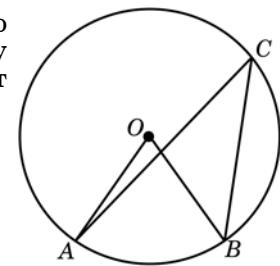
Ответ:

B3 Найдите корень уравнения $\sqrt{46 - 6x} = 4$.

Ответ:

B4

Центральный угол на 36° больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите вписанный угол. Ответ дайте в градусах.



Ответ:

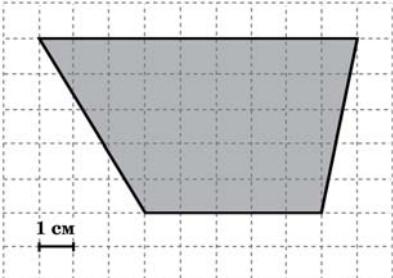
B5 Интернет-провайдер (компания, оказывающая услуги по подключению к сети Интернет) предлагает три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
1. План «0»	Нет	1,9 рубля за 1 Мб
2. План «600»	636 рублей за 600 Мб трафика в месяц	1,1 рубля за 1 Мб сверх 600 Мб
3. План «900»	738 рублей за 900 Мб трафика в месяц	0,8 рубля за 1 Мб сверх 900 Мб

Пользователь планирует, что его трафик составит 700 Мб, и, исходя из этого, выбирает наиболее дешевый тарифный план. Сколько рублей заплатит пользователь за месяц, если его трафик действительно будет равен 700 Мб?

Ответ:

B6 На клетчатой бумаге с клетками размером $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ изображена трапеция (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.

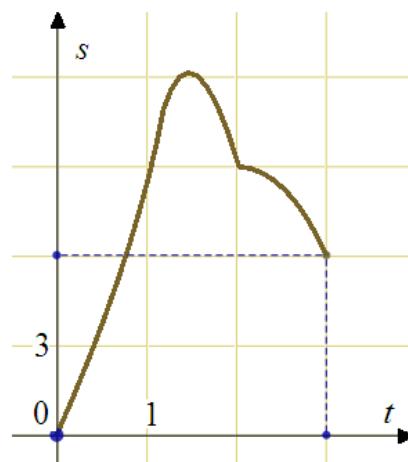


Ответ:

B7 Найдите значение выражения: $12\sin 150^\circ \cdot \cos 120^\circ$.

Ответ:

B8 Материальная точка движется от начального до конечного положения. На рисунке изображен график ее движения. На оси абсцисс откладывается время в секундах, на оси ординат – расстояние от начального положения точки (в метрах). Найдите среднюю скорость движения точки. Ответ дайте в метрах в секунду.



Ответ:

B9 Найдите боковое ребро правильной четырехугольной призмы, если сторона ее основания равна 6, а площадь поверхности равна 264.

Ответ:

B10 Для обогрева помещения, температура в котором равна $T_{\text{п}} = 25^\circ\text{C}$, через радиатор отопления пропускают горячую воду температурой $T_{\text{в}} = 57^\circ\text{C}$. Расход проходящей через трубу воды $m = 0,3 \text{ кг/с}$. Проходя по трубе расстояние $x (\text{м})$, вода охлаждается до температуры $T (\text{°C})$, причем $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{в}} - T_{\text{п}}}{T - T_{\text{п}}}$ (м), где $c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{°C}}$ – теплоемкость воды, $\gamma = 63 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{°C}}$ – коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1,4$ – постоянная. До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы 56 м?

Ответ:

B11 Найдите наибольшее значение функции $y = 2^{1-2x-x^2}$.

Ответ:

B12 Первая труба пропускает на 8 литров воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 209 литров она заполняет на 8 минут медленнее, чем вторая труба?

Ответ:

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1 – С6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите уравнение $\frac{4\sin^2 x - 8\cos x - 7}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}} = 0$.

C2 В правильной треугольной призме $ABC A_1B_1C_1$ известны ребра: $AB = 5\sqrt{3}$, $BB_1 = 6$. Точка M – середина ребра B_1C_1 , а точка T – середина A_1M . Найдите угол между плоскостью BCT и прямой AT .

C3 Решите неравенство $\frac{\log_{11-2x}(\log_{0,5}(x^2 - 6x + 5))}{\log_{11-2x}(x^2 - 10x + 26)} \geq 0$.

C4

В треугольнике KLM проведены биссектриса KP и высота KN . Известно, что $\frac{KM}{KL} = \frac{1}{2}$, $\frac{PH}{MH} = \frac{3}{2}$, а площадь тругольника KHP равна 30. Найдите площадь треугольника KLM .

C5

Найдите все значения a , при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x) = x^2 - 9|x-a| - 5x$ на отрезке $[-8; 9]$ принимается хотя бы на одном из концов этого отрезка.

C6

Найдите все пары натуральных чисел a и b , удовлетворяющие равенству $\overline{ab} = a^b + 18$ (в левой части равенства стоит число, получаемое приписыванием десятичной записи числа a перед десятичной записью числа b).

Bap	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
1	29	31,90	22	0,5	264000	7,5	2	-4	4	100	6	20
2	66	1,2	7	0,2	1580	13	-2	0,25	7	20	3	15
3	22	1,1	4	0,96	184700	13,5	-1,5	4	5	17,5	-10	70
4	25	44	-4	71	168000	22,5	0,1	-0,25	8	11250	18	70
5	29	3190	19	0,5	264000	7,5	36	1,6	49	100	3	20
6	66	1,2	-2	0,2	1580	13	-2	4	36	20	2	15
7	22	1,1	4	0,96	184700	13,5	112	1,5	16	17,5	2	70
8	25	44	-4	71	168000	22,5	0,1	1,8	121	11250	9	70
9	13	3	-2	12	1100	12	1,5	0,2	49	1400	4	13
10	9	1,2	53	9	1000	21	-0,5	0,5	36	660	-2	63
11	8	2	-53	3	528	49	-2,5	0,5	16	16,2	12	48
12	18	1,4	5	36	738	35	-3	0,5	121	9,8	3	11
13	13	3	-2	12	1100	12	12	2,5	4	1400	2	13
14	9	1,2	53	9	1000	21	12	1,8	7	660	2	63
15	8	2	-53	3	528	49	-2,5	2,5	5	16,2	0,2	48
16	18	1,4	5	36	738	35	-3	6	8	33	4	11

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом**C1**

Решите уравнение $\frac{2\cos^2 x + 5\cos x - 3}{\sqrt{x - \frac{\pi}{3}}} = 0$.

Решение.

Из уравнения $2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0$ находим: $\cos x = \frac{1}{2}$ или $\cos x = -3$.

Второе уравнение не имеет решений, а из первого получаем, что $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Из условия $x - \frac{\pi}{3} > 0$ следует, что $x > \frac{\pi}{3}$.

Поэтому $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $k = 1, 2, 3, \dots$

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k = 1, 2, 3, \dots$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получен ответ, но решение неверно только из-за того, что не учтены ограничения на знак выражения $x - \frac{\pi}{3}$.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2

В правильной треугольной призме $ABC A_1 B_1 C_1$ известны ребра: $AB = 3\sqrt{3}$, $BB_1 = 6$. Точка M – середина ребра $B_1 C_1$, а точка T – середина $A_1 M$. Найдите угол между плоскостью BCT и прямой AT .

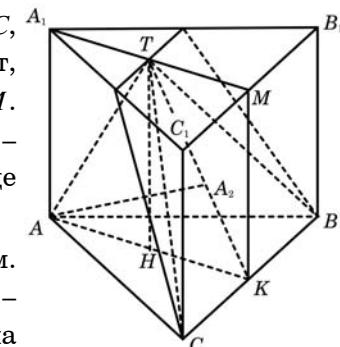
Решение.

Плоскость BCT проходит через прямую BC , перпендикулярную плоскости AA_1M . Значит, $AA_1M \perp BCT$. Отрезок AT лежит в плоскости AA_1M . Следовательно, проекция точки A на плоскость BCT – точка A_2 – лежит в плоскости AA_1M на прямой TK , где K – середина BC . Значит, угол ATK – искомый.

Треугольники AA_1T и KMT равны по двум катетам. Следовательно, $AT = TK$, и треугольник ATK – равнобедренный. Его основание AK – медиана равностороннего треугольника ABC : $AK = \frac{9}{2}$, а высота

TH совпадает с высотой призмы. Поэтому $\tg \angle ATH = \frac{AH}{TH} = \frac{9}{4 \cdot 6} < 1$. Значит, искомый угол в два раза больше: $\angle ATK = 2 \arctg \frac{3}{8}$.

Ответ: $2 \arctg \frac{3}{8}$



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C3

$$\text{Решите неравенство } \frac{\log_{5^{x+8}} 14}{\log_{5^{x+8}}(x^2 - 25)} \geq \frac{\log_2(x^2 + 9x + 14)}{\log_2(x^2 - 25)}.$$

Решение.

Решение ищем на множестве:

$$\begin{cases} x \neq -8, \\ x^2 - 25 > 0, \\ x^2 - 25 \neq 1, \\ x^2 + 9x + 14 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -8) \cup (-8; -7) \cup (5; \sqrt{26}) \cup (\sqrt{26}; +\infty).$$

Перепишем неравенство: $\log_{x^2 - 25}(x^2 + 9x + 14) \leq \log_{x^2 - 25} 14$.

Далее рассматриваем два случая:

$$1. \begin{cases} 0 < x^2 - 25 < 1, \\ x^2 + 9x + 14 \geq 14 \end{cases} \Leftrightarrow 5 < x < \sqrt{26}.$$

$$2. \begin{cases} x^2 - 25 > 1, \\ x^2 + 9x + 14 \leq 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 26, \\ -9 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Значит, $x \in [-9; -\sqrt{26}]$.С учетом ограничений на x получаем:

$$x \in [-9; -8) \cup (-8; -7) \cup (5; \sqrt{26}).$$

Ответ: $[-9; -8) \cup (-8; -7) \cup (5; \sqrt{26})$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом точек.	2
Полученный ответ неверен, но решение содержит переход от исходного неравенства к верным рациональным неравенствам.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C4

Две окружности, касающиеся прямой в точках A и B , пересекаются в точках C и D , причем $AB = 8$, $CD = 15$. Найдите медиану CE треугольника ABC .

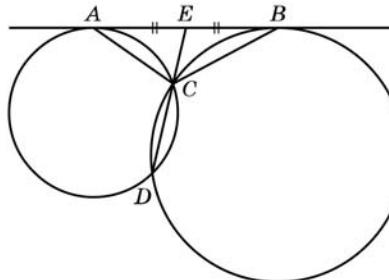
Решение.Пусть F – точка пересечения прямой CD с отрезком AB . По теореме о касательной и секущей $AF^2 = FC \cdot FD = FB^2$.Значит, $AF = FB = 4$, и F совпадает с E .Возможны два случая взаимного расположения точек C , D и E :

Рис. 1

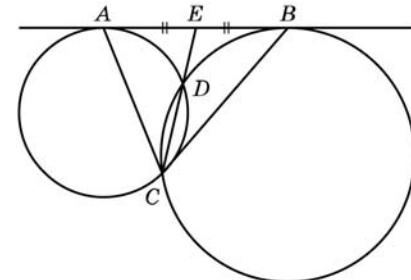


Рис. 2

1. $EC < ED$ (рис. 1).
2. $EC > ED$ (рис. 2).

Пусть x – длина меньшего из отрезков EC и ED , тогда, используя теорему о секущей и касательной, получаем: $4^2 = x(x + 15)$ или $x^2 + 15x - 16 = 0$.

$$\text{Значит, } x = \frac{-15 + 17}{2}.$$

Поэтому $CE = x$ или $CE = x + 15$.**Ответ:** 16 или 1.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x) = x^2 - 7|x-a| - 3x$ на отрезке $[-6; 6]$ принимается хотя бы на одном из концов этого отрезка.

Решение.

1. Функция f имеет вид:

- при $x \geq a$: $f(x) = x^2 - 7(x-a) - 3x = x^2 - 10x + 7a$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 5$;
- при $x \leq a$: $f(x) = x^2 + 7(x-a) - 3x = x^2 + 4x - 7a$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = -2$.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках:

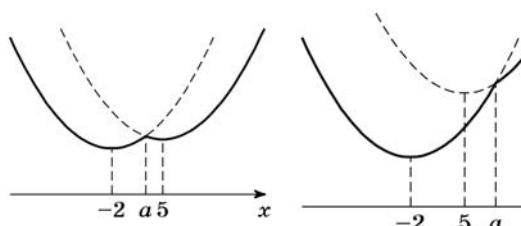


Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

2. Ни одна из квадратичных функций, указанных в пунктах a и b , не имеет точек максимума. Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(a; f(a))$.

3. Наибольшее значение функции f принимается на одном из концов отрезка $[-6; 6]$ (или на обоих) тогда и только тогда, когда точка $x=a$ расположена вне интервала $(-2; 5)$ или же внутри, но не дальше от одной из точек $x=-2; x=5$, чем соответствующий конец отрезка.

$$\text{То есть } \begin{cases} a+2 \leq -2 + 6 \\ 5-a \leq 6-5 \\ a \leq -2 \\ a \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 2 \\ a \geq 4. \end{cases}$$

Ответ: $a \leq 2; a \geq 4$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки.	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решений условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна.	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C6 Найдите все пары натуральных чисел a и b , удовлетворяющие равенству $\overline{ab} = a^b + 23$ (в левой части равенства стоит число, получаемое приписыванием десятичной записи числа a перед десятичной записью числа b).

Решение.

В случаях $a = 1$ или $b = 1$ имеем: $24 = 1^b + 23 = \overline{1b}$ или $a^1 + 23 = \overline{a1} = 10a + 1$, что невозможно. Далее считаем $a > 1$ и $b > 1$.

Пусть $a \leq 9$. Тогда для выполнения равенства необходимо условие $b \leq 9$, так как иначе, если число b k -значное ($k \geq 2$), имеем:

$$a^b \geq 2^{(10^{k-1})} \geq 2^{10(k-1)} > 10^{3(k-1)} = 10^{k+(2k-3)} \geq 10^{k+1} > \overline{ab}.$$

Пусть $a \geq 10$. Тогда для выполнения равенства необходимы условия $b = 2$ и $a \leq 31$, так как иначе, если b k -значное, а a $(m+1)$ -значно ($m \geq 1$), имеем:

$$\text{если } k > 1, \text{ то } a^b \geq (10^m)^{10^{k-1}} \geq 10^{m \cdot (k+2)} = 10^{(m+m)+m \cdot k} \geq 10^{(m+1)+k} > \overline{ab};$$

$$\text{если } k = 1, b \geq 3, \text{ то } a^b \geq (10^m)^3 = 10^{(m+m)+m} \geq 10^{(m+1)+k} > \overline{ab};$$

$$\text{если } k = 1, b = 2, m \geq 2, \text{ то } a^b \geq (10^m)^2 = 10^{(m+m/2)+m/2} \geq 10^{(m+1)+k} > \overline{ab};$$

$$\text{если } k = 1, b = 2, m = 1, a \geq 32, \text{ то } a^b \geq (32)^2 \geq 10^3 = 10^{(m+1)+k} > \overline{ab}.$$

Конечным перебором всех пар a и b , для которых

$$\text{либо } 1 < a \leq 9 \text{ и } 1 < b \leq 9,$$

$$\text{либо } 10 \leq a \leq 31 \text{ и } b = 2,$$

получаем, что уравнению удовлетворяют две пары $a = 3, b = 2$; $a = 7, b = 2$.

Ответ: $a = 3, b = 2$; $a = 7, b = 2$.

Замечание

Перебор значений a и b может быть произведен с помощью дополнительных соображений (свойств делимости, оценок величин и т.п.). Например:

Остается две возможности: либо $1 < a \leq 9$ и $1 < b \leq 9$, либо $10 \leq a \leq 31$ и $b = 2$.

В первом случае, если $a = 2$, имеем: $20 + b = 2^b + 23$, но $23 > 20$, а $2^b > b$.

Если $a = 3$, имеем: $30 + b = 3^b + 23$.

При $b > 3$ справа стоит число, состоящее более чем из двух цифр. Несложно проверить, что случай $b = 2$ подходит, а $b = 3$ нет.

Если $a = 4$, имеем: $40 + b = 4^b + 23$.

При $b > 3$ справа стоит число, состоящее более чем из двух цифр. Несложно проверить, что случаи $b = 2$ и $b = 3$ не подходят.

При $a \geq 5$, если $b > 2$, справа стоит число, состоящее более чем из двух цифр.

Значит, имеем уравнение $10a + 2 = a^2 + 23$; $a^2 - 10a + 21 = 0$, откуда получаем: $a = 3$ и $a = 7$.

Во втором случае имеем уравнение $10a + 2 = a^2 + 23$, решения которого меньше 10.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован: правильно произведен перебор не более чем двузначных оснований степени и не более чем однозначных ее показателей, но не объяснено, почему ограничен только перечисленными случаями.	3
Ответ содержит правильную и, возможно, одну неправильную пару. Произведен перебор не более чем однозначных ее показателей, но с арифметическими ошибками или пробелами.	2
Приведена правильная пара и проверено, что она обращает уравнение в верное числовое равенство.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом**C1**

Решите уравнение $\frac{4\cos^2 x - 8\sin x - 7}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = 0$.

Решение.

Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 4\cos^2 x - 8\sin x - 7 = 0 \\ \operatorname{tg} x > 0 \end{cases}$$

Уравнение системы приводится к виду $4\sin^2 x + 8\sin x + 3 = 0$, откуда $\sin x = -\frac{1}{2}$ или $\sin x = -\frac{3}{2}$. Уравнение $\sin x = -\frac{3}{2}$ не имеет решений. Учитывая, что $\operatorname{tg} x > 0$, изуравнения $\sin x = -\frac{1}{2}$ получаем: $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.**Ответ:** $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

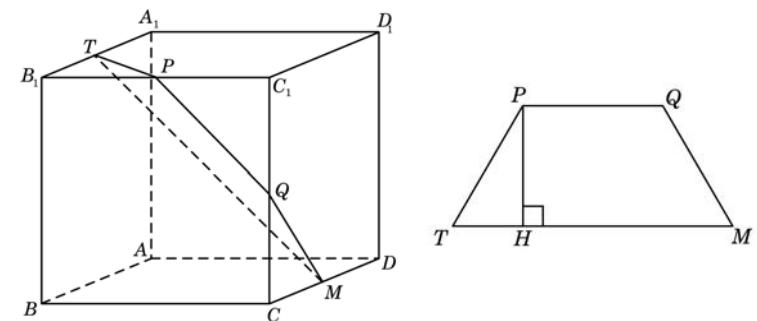
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получен ответ, но решение неверно только из-за того, что не учтены ограничения на знак или величину выражения $\cos x$ ($\sin x$).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром $8\sqrt{6}$. Найдите расстояние от середины ребра B_1C_1 до прямой MT , где точки M и T – середины ребер CD и A_1B_1 соответственно.

Решение.

Пусть P – середина ребра B_1C_1 , а Q – середина ребра CC_1 . Заметим, что $PQMT$ – трапеция, так как $MT \parallel B_1C \parallel PQ$. Значит, искомое расстояние – это высота трапеции $PQMT$.



Далее видим, что

$$TQ = QP = PM = \frac{1}{2}B_1C = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}BC = \frac{8\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{3}, MT = 16\sqrt{3}.$$

$$\text{Высота трапеции } PQMT \text{ равна } 8\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12.$$

Ответ: 12.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого расстояния верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C3

Решите неравенство $\frac{\log_{2^{x+6}} 15}{\log_{2^{x+6}}(x^2 - 16)} \geq \frac{\log_3(x^2 + 8x + 15)}{\log_3(x^2 - 16)}$.

Решение.

Решение ищем на множестве

$$\begin{cases} x \neq 6 \\ x^2 - 16 > 0 \\ x^2 - 16 \neq 1 \\ x^2 + 8x + 15 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty, -6) \cup (-6, -5) \cup (4, \sqrt{17}) \cup (\sqrt{17}, +\infty).$$

Перепишем неравенство $\log_{x^2 - 16} 15 \geq \log_{x^2 - 16}(x^2 + 8x + 15)$.

Далее рассматриваем два случая:

$$1. \begin{cases} 0 < x^2 - 16 < 1, \\ 15 \leq x^2 + 8x + 15 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < x < \sqrt{17}$$

$$2. \begin{cases} x^2 - 16 > 1, \\ 15 \geq x^2 + 8x + 15 \end{cases} \Leftrightarrow -8 < x < -\sqrt{17}$$

С учетом ограничений на x получаем:

$$x \in (-8, -6) \cup (-6, -\sqrt{17}) \cup (4, \sqrt{17})$$

Ответ: $(-8, -6), (-6, -\sqrt{17}), (4, \sqrt{17})$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом точек.	2
Полученный ответ неверен, но решение содержит переход от исходного неравенства к верным рациональным неравенствам.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C4

В треугольнике ABC проведены медиана AM и высота AH . Известно, что $\frac{MH}{BH} = \frac{3}{2}$, а площадь треугольника AMH равна 24. Найдите площадь треугольника ABC .

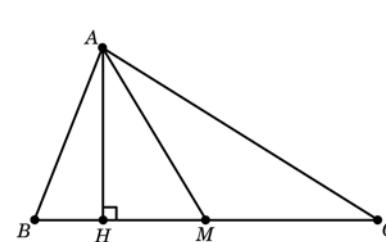
Решение.Поскольку $MH > BH$, точка H не может лежать на продолжении отрезка BM за точку M .

Рис. 1

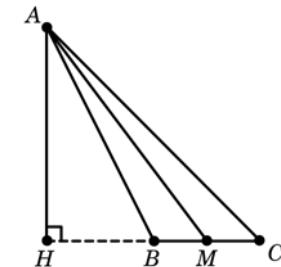


Рис. 2

Рассмотрим случай, когда точка H лежит на отрезке BM (рис.1). Тогда

$$S_{\triangle AMB} = \frac{BM}{MH} \cdot S_{\triangle AMH} = \frac{5}{3} \cdot 24 = 40.$$

Следовательно, $S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle AMB} = 80$.Если же точка H лежит на продолжении отрезка BM за точку B (рис.2), то $\frac{BM}{BH} = \frac{1}{2}$, поэтому

$$S_{\triangle AMB} = \frac{BM}{MH} \cdot S_{\triangle AMH} = \frac{1}{3} \cdot 2 = 48.$$

Следовательно, $S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle AMB} = 16$.**Ответ:** 16 или 80.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x) = x^2 - 7|x-a| - x$ на отрезке $[-6; 7]$ принимается хотя бы на одном из концов этого отрезка.

Решение.

1. Функция f имеет вид:

- при $x \geq a$: $f(x) = x^2 - 7(x-a) - x = x^2 - 8x + 7a$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 4$;
- при $x \leq a$: $f(x) = x^2 + 7(x-a) - x = x^2 + 6x - 7a$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = -3$.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках:

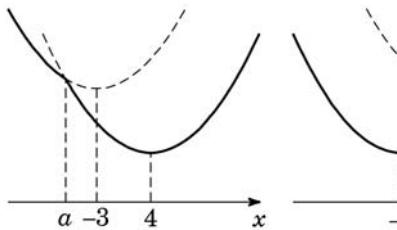


Рис. 1

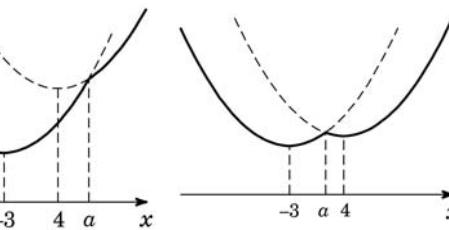


Рис. 2

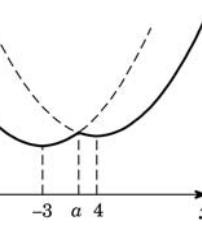


Рис. 3

2. Ни одна из квадратичных функций, указанных в пунктах a и b , не имеет точек максимума. Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(a; f(a))$.

3. Наибольшее значение функции f принимается на одном из концов отрезка $[-6; 7]$ (или на обоих) тогда и только тогда, когда точка $x = a$ расположена вне интервала $(-3; 4)$ или же внутри, но не дальше от одной из точек $x = -3; x = 4$, чем соответствующий конец отрезка.

$$\text{То есть} \quad \begin{cases} a+3 \leq -3+6, \\ 4-a \leq 7-4, \\ a \leq -3, \\ a \geq 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 0, \\ a \geq 1. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки.	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решений условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна.	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C6 Наибольшее целое число, не превосходящее $\frac{2x+17}{10}$, равно $\frac{3x+41}{3}$.

Найдите все такие действительные значения x .

Решение.

Положим $\frac{3x+41}{3} = n$, $n \in \mathbb{Z}$. Отсюда $\frac{2x+17}{10} = \frac{6n-31}{30}$. Поскольку число n есть наибольшее целое, не превосходящее числа $\frac{6n-31}{30}$, то имеем систему

$$\begin{cases} \frac{6n-31}{30} < n+1, \\ \frac{6n-31}{30} \geq n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n > -\frac{61}{24} = -2\frac{13}{24}, \\ n \leq -\frac{31}{24} = -1\frac{7}{24}. \end{cases} \Leftrightarrow n = -2.$$

Следовательно, $\frac{3x+41}{3} = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{47}{3}$.

Ответ: $-\frac{47}{3}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован (например, отсутствует одна из оценок).	3
Ответ неправильный за счет вычислительной ошибки.	2
Дано верное значение и показано, что оно удовлетворяет условию.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом**C1**

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{36}{25}\right)^{\operatorname{tg} x} + \left(\frac{6}{5}\right)^{\operatorname{tg} x} - 2 = 0, \\ \sqrt{15y} - 5\cos x = 0. \end{cases}$$

Решение.

Система равносильна системе

$$\begin{cases} \left(\frac{36}{25}\right)^{\operatorname{tg} x} + \left(\frac{6}{5}\right)^{\operatorname{tg} x} - 2 = 0 \\ \sqrt{15y} - 5\cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{6}{5}\right)^{\operatorname{tg} x} + \left(\frac{6}{5}\right)^{\operatorname{tg} x} - 2 = 0 \\ 15y = 25\cos^2 x \\ \cos x \geq 0 \end{cases}$$

Из системы получаем $\left(\frac{6}{5}\right)^{\operatorname{tg} x} = 1$ или $\left(\frac{6}{5}\right)^{\operatorname{tg} x} = -2$. Уравнение $\left(\frac{6}{5}\right)^{\operatorname{tg} x} = -2$ не имеет решений. Уравнение $\left(\frac{6}{5}\right)^{\operatorname{tg} x} = 1$ равносильно уравнению $\operatorname{tg} x = 0$. Учитывая $\cos x \geq 0$, получаем: $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Откуда $y = \frac{5}{3}$.

Ответ: $\left(2\pi n, \frac{5}{3}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получен ответ, но решение неверно только из-за того, что не учтены ограничения на знак или величину выражения $\cos x$ ($\sin x$).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2

В правильной треугольной призме $ABC A_1 B_1 C_1$ известны ребра: $AB = 4\sqrt{3}$, $BB_1 = 9$. Точка M – середина ребра $B_1 C_1$, а точка T – середина $A_1 M$. Найдите угол между плоскостью BCT и прямой AT .

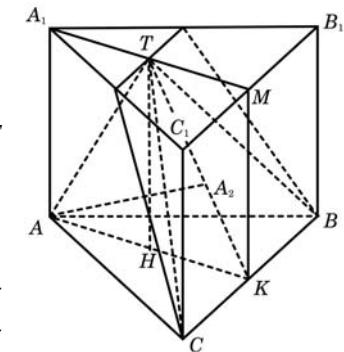
Решение.

Плоскость BCT проходит через прямую BC , перпендикулярную плоскости AA_1M . Значит, $AA_1 \perp BCT$. Отрезок AT лежит в плоскости AA_1M . Следовательно, проекция точки A на плоскость BCT – точка A_2 – лежит в плоскости AA_1M на прямой TK , где K – середина BC . Значит, угол ATK – искомый. Треугольники AA_1T и KMT равны по двум катетам. Следовательно, $AT = TK$, и треугольник ATK – равнобедренный. Его основание AK – медиана равностороннего треугольника ABC :

$$AK = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6, \text{ а высота } TH \text{ совпадает с высотой призмы.}$$

$$\text{Поэтому } \operatorname{tg} \angle ATH = \frac{AH}{TH} = \frac{6}{2 \cdot 9} = \frac{1}{3} < 1.$$

$$\text{Значит, искомый угол в два раза больше: } ATK = 2\arctg \frac{1}{3}.$$

Ответ: $2\arctg \frac{1}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C3

Решите неравенство $\frac{\log_{2x+9}(\log_{0,5}(x^2 + 4x))}{\log_{2x+9}(x^2 + 8x + 17)} \geq 0$.

Решение.

Поскольку $x^2 + 8x + 17 = (x + 4)^2 + 1 \geq 1$ рассмотрим два случая:

$$1. \begin{cases} 0 < 2x + 9 < 1 \\ \log_{0,5}(x^2 + 4x) \geq 1 \\ \log_{2x+9}(x^2 + 8x + 17) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{9}{2} < x < -4 \\ 0 < x^2 + 4x \leq \frac{1}{2} \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{9}{2} < x < -4 \\ x < -4, x > 0 \\ -2 - \frac{3}{\sqrt{2}} \leq x \leq -2 + \frac{3}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Откуда $-2 - \frac{3}{\sqrt{2}} \leq x < -4$.

$$2. \begin{cases} 2x + 9 > 1 \\ \log_{0,5}(x^2 + 4x) \geq 1 \\ \log_{2x+9}(x^2 + 8x + 17) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -4 \\ 0 < x^2 + 4x \leq \frac{1}{2} \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -4 \\ x < -4, x > 0 \\ -2 - \frac{3}{\sqrt{2}} \leq x \leq -2 + \frac{3}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Откуда $0 < x \leq -2 + \frac{3}{\sqrt{2}}$

Ответ: $\left[-2 - \frac{3}{\sqrt{2}}, -4\right] \cup \left(0, -2 + \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом точек.	2
Полученный ответ неверен, но решение содержит переход от исходного неравенства к верным рациональным неравенствам.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C4

Две окружности, касающиеся прямой в точках A и B , пересекаются в точках C и D , причем $AB = 12$, $CD = 5$. Найдите медиану CE треугольника ABC .

Решение.

Пусть F – точка пересечения прямой CD с отрезком AB . По теореме о касательной и секущей $AF^2 = FC \cdot FD = FB^2$. Значит, $AF = FB = \frac{AB}{2} = 6$, и F совпадает с E .

Возможны два случая взаимного расположения точек C , D и E :

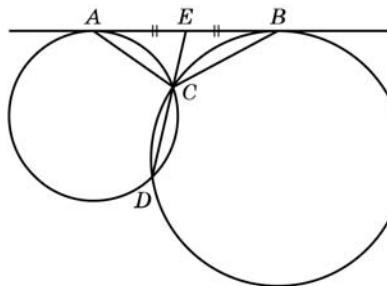


Рис. 1

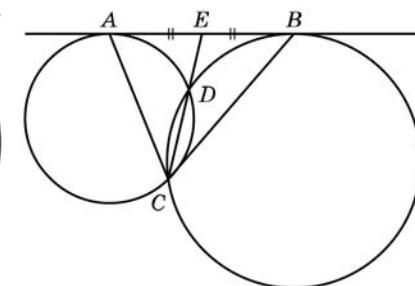


Рис. 2

1. $EC < ED$ (рис. 1).

2. $EC > ED$ (рис. 2).

Пусть x – длина меньшего из отрезков CE и ED , тогда, используя теорему о секущей и касательной, получаем: $6^2 = x(x + 5)$ или $x^2 + 5x - 36 = 0$.

Значит, $x = \frac{-5 \pm 13}{2}$, поскольку $x > 0$, то $x = 4$.

Поэтому $CE = x = 4$ или $CE = x + 5 = 9$.

Ответ: 4 или 9

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C5 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\|x^2 - 4x\| - x^2 + 4x - 8 < \sqrt{a^2 + 2a - 3} - a - (x-1)^2 + 2x$ имеет от одного до трех целых решений.

Решение.

Сделаем замену $x^2 - 4x = y$. Тогда $y \geq -4$, при этом, если x – целое, то y – также целое число.

Неравенство примет вид $\|y\| - y - 8 + y < \sqrt{a^2 + 2a - 3} - a - 1$.

Построим график функции $f(y) = \|y\| - y - 8 + y$ при $y \geq -4$, находим, что эта функция монотонно возрастает. Следовательно, если y_0 является решением неравенства при некотором a , то все $y < y_0$ также являются решениями.

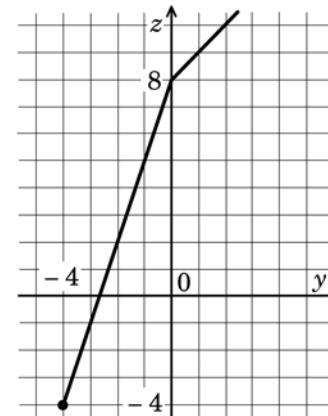
Значит, если есть решение $y_0 \geq 0$, то целые числа -4 и -3 также будут решениями, и тогда будет, по крайней мере, пять решений данного неравенства: $x = 0, 1, 2, 3, 4$.

Следовательно, $-4 \leq y < 0$, и, стало быть, $-4 \leq f(y) < 8$.

Значит, должно выполняться двойное неравенство

$-4 < \sqrt{a^2 + 2a - 3} - a - 1 \leq 8$, откуда

$$\begin{cases} a - 3 < \sqrt{a^2 + 2a - 3}, \\ \sqrt{a^2 + 2a - 3} \leq a + 9. \end{cases}$$



Решение первого неравенства: $\begin{cases} a < 3, \\ a^2 + 2a - 3 \geq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a^2 - 6a + 9 < a^2 + 2a - 3, \\ a \geq 3 \end{cases}$

откуда $a \leq -3$ или $1 \leq a < 3$.

Решение второго неравенства: $\begin{cases} a^2 + 2a - 3 \leq a^2 + 18a + 81, \\ a + 9 \geq 0, \end{cases}$ откуда $a \geq -\frac{21}{4}$.

Решение системы: $-\frac{21}{4} \leq a \leq -3$ или $a \geq 1$.

Ответ: $[-\frac{21}{4}, -3], [1, +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки.	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решений условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна.	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C6 Наибольшее целое число, не превосходящее число x , равно $\frac{x^2 + 6}{7}$.

Найдите все такие действительные значения x .

Решение.

По условию $x \geq \frac{x^2 + 6}{7} \geq \frac{6}{7} > 0$. Поэтому если обозначить $\frac{x^2 + 6}{7} = b$, то $x = \sqrt{7b - 6}$.

Тогда число b – целое и должно удовлетворять системе

$$\begin{cases} b \leq \sqrt{7b - 6}, \\ b > \sqrt{7b - 6} - 1, \text{ откуда} \\ b \geq \frac{6}{7} \end{cases} \quad \begin{cases} b^2 - 7b + 6 \leq 0, \\ b^2 - 5b + 7 > 0, \\ b \geq \frac{6}{7} \end{cases}$$

Второе неравенство верно при всех b , а из первого неравенства находим:
 $1 \leq b \leq 6$.

Следовательно, $x = \sqrt{7 \cdot 1 - 6} = 1$, $x = \sqrt{8}$, $x = \sqrt{15}$, $x = \sqrt{22}$, $x = \sqrt{29}$ и $x = 6$.

Ответ: $1, \sqrt{8}, \sqrt{15}, \sqrt{22}, \sqrt{29}, 6$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован (например, отсутствует одна из оценок).	3
Ответ неправильный за счет вычислительной ошибки.	2
Дано верное значение и показано, что оно удовлетворяет условию.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом**C1**

Решите уравнение $\frac{4\sin^2 x - 8\cos x - 7}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}} = 0$.

Решение.

Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 4\sin^2 x - 8\cos x - 7 = 0 \\ \operatorname{ctg} x > 0 \end{cases}$$

Уравнение системы приводится к виду $4\sin^2 x - 8\cos x - 7 = 0$, откуда $\cos x = \frac{2 - \sqrt{11}}{2}$ или $\cos x = \frac{2 + \sqrt{11}}{2}$. Уравнение $\cos x = \frac{2 + \sqrt{11}}{2}$ не имеет решений. Учитывая, что $\operatorname{ctg} x > 0$, из уравнения $\cos x = \frac{2 - \sqrt{11}}{2}$ получаем:

$$x = -\arccos\left(\frac{2 - \sqrt{11}}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $-\arccos\left(\frac{2 - \sqrt{11}}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получен ответ, но решение неверно только из-за того, что не учтены ограничения на знак или величину выражения $\cos x$ ($\sin x$).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2

В правильной треугольной призме $ABC A_1 B_1 C_1$ известны ребра: $AB = 5\sqrt{3}$, $BB_1 = 6$. Точка M – середина ребра $B_1 C_1$, а точка T – середина $A_1 M$. Найдите угол между плоскостью BCT и прямой AT .

Решение.

Плоскость BCT проходит через прямую BC , перпендикулярную плоскости AA_1M . Значит, $AA_1 \perp BCT$. Отрезок AT лежит в плоскости AA_1M . Следовательно, проекция точки A на плоскость BCT – точка A_2 – лежит в плоскости AA_1M на прямой TK , где K – середина BC . Значит, угол ATK – искомый. Треугольники AA_1T и KMT равны по двум катетам. Следовательно, $AT = TK$, и треугольник ATK – равнобедренный. Его основание AK – медиана равностороннего треугольника ABC :

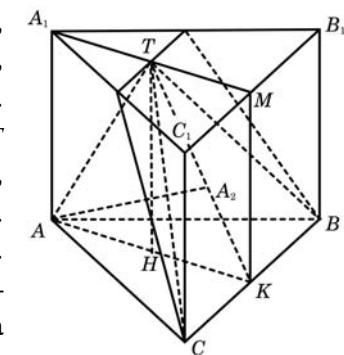
$$AK = 5\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15}{2}, \text{ а высота } TH \text{ совпадает с высотой призмы.}$$

$$\text{Поэтому } \operatorname{tg} \angle ATH = \frac{AH}{TH} = \frac{15}{4 \cdot 6} = \frac{5}{8} < 1.$$

Значит, искомый угол в два раза больше: $ATK = 2\arctg \frac{5}{8}$.

Ответ: $2\arctg \frac{5}{8}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0



C3

Решите неравенство $\frac{\log_{11-2x}(\log_{0,5}(x^2 - 6x + 5))}{\log_{11-2x}(x^2 - 10x + 26)} \geq 0$.

Решение.

Поскольку $x^2 - 10x + 26 = (x - 5)^2 + 1 \geq 1$ рассмотрим два случая:

$$1. \begin{cases} 0 < 11 - 2x < 1 \\ \log_{0,5}(x^2 - 6x + 5) \geq 1 \\ \log_{2x+9}(x^2 - 10x + 26) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 < x < \frac{11}{2} \\ 0 < x^2 - 6x + 5 \leq \frac{1}{2} \\ x \neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 < x < \frac{11}{2} \\ x < 1, x > 5 \\ 3 - \frac{3}{\sqrt{2}} \leq x \leq 3 + \frac{3}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Откуда $5 < x \leq 3 + \frac{3}{\sqrt{2}}$.

$$2. \begin{cases} 11 - 2x > 1 \\ \log_{0,5}(x^2 - 6x + 5) \geq 1 \\ \log_{2x+9}(x^2 - 10x + 26) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5 \\ 0 < x^2 - 6x + 5 \leq \frac{1}{2} \\ x \neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x < 1, x > 5 \\ 3 - \frac{3}{\sqrt{2}} \leq x \leq 3 + \frac{3}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Откуда $3 - \frac{3}{\sqrt{2}} \leq x < 1$

Ответ: $\left[3 - \frac{3}{\sqrt{2}}, 1\right), \left(5, 3 + \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом точек.	2
Полученный ответ неверен, но решение содержит переход от исходного неравенства к верным рациональным неравенствам.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C4

В треугольнике KLM проведены биссектриса KP и высота KH . Известно, что $\frac{KM}{KL} = \frac{1}{2}$, $\frac{PH}{MH} = \frac{3}{2}$, а площадь тругольника KHP равна 30. Найдите площадь треугольника KLM .

Решение.

По свойству биссектрисы треугольника $\frac{MP}{LP} = \frac{KM}{KL} = \frac{1}{2}$. Поскольку $PH > MH$, точка H не может лежать на продолжении отрезка MP за точку P .

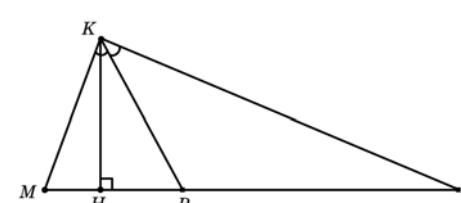


Рис. 1

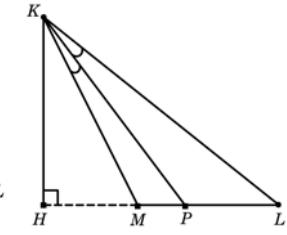


Рис. 2

Рассмотрим случай, когда точка H лежит на отрезке MP (рис.1). Тогда

$$S_{\triangle MKP} = \frac{MP}{PH} \cdot S_{\triangle KHP} = \frac{5}{3} \cdot 30 = 50.$$

Следовательно,

$$S_{\triangle MKP} = \frac{ML}{MP} \cdot S_{\triangle MKP} = 3 \cdot 50 = 150.$$

Если же точка H лежит на продолжении отрезка MP за точку M (рис.2), то $\frac{MP}{PH} = \frac{1}{3}$, поэтому

$$S_{\triangle KMP} = \frac{MP}{PH} \cdot S_{\triangle KHP} = \frac{1}{3} \cdot 30 = 10.$$

Следовательно,

$$S_{\triangle KLM} = \frac{ML}{MP} \cdot S_{\triangle KMP} = 3 \cdot 10 = 30.$$

Ответ: 30 или 150.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x) = x^2 - 9|x-a| - 5x$ на отрезке $[-8; 9]$ принимается хотя бы на одном из концов этого отрезка.

Решение.

1. Функция f имеет вид:

- a) при $x \geq a$: $f(x) = x^2 - 14x + 9a$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 7$;
- б) при $x \leq a$: $f(x) = x^2 + 4x - 9a$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = -3$.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках:

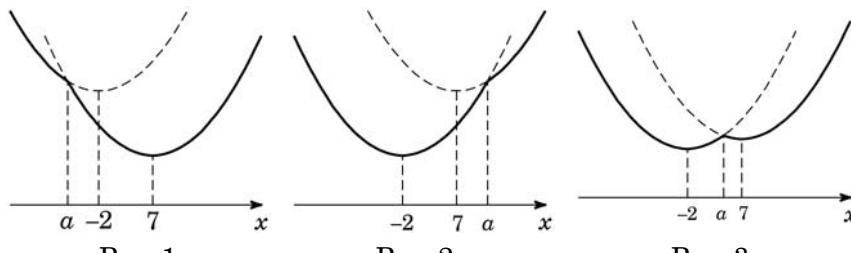


Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

2. Ни одна из квадратичных функций, указанных в пунктах a и b , не имеет точек максимума. Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(a; f(a))$.

3. Наибольшее значение функции f принимается на одном из концов отрезка $[-8; 9]$ (или на обоих) тогда и только тогда, когда точка $x = a$ расположена вне интервала $(-2; 7)$ или же внутри, но не дальше от одной из точек $x = -2; x = 7$, чем соответствующий конец отрезка.

То есть $\begin{cases} a+2 \leq -2+8, \\ 7-a \leq 9-7, \\ a \leq -2, \\ a \geq 7, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 4, \\ a \leq 2, \\ a \geq 7. \end{cases}$

Ответ: $(-\infty, 4], [5, +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки.	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решений условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна.	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C6 Найдите все пары натуральных чисел a и b , удовлетворяющие равенству $\overline{ab} = a^b + 18$ (в левой части равенства стоит число, получаемое приписыванием десятичной записи числа a перед десятичной записью числа b).

Решение.

В случае $a = 1$ имеем: $10^k + b = 1^b + 18 = 19$, откуда $b = 9$.

В случае $b = 1$ имеем: $10a + 1 = a^1 + 18$, откуда $9a = 17$, что невозможно для целого a .

Далее считаем, что $a > 1$ и $b > 1$

Пусть $a \leq 9$. Тогда для выполнения равенства необходимо условие $b \leq 9$, так как иначе, если число b k -значное ($k \geq 2$), имеем:

$$a^b \geq 2^{(10^{k-1})} \geq 2^{10(k-1)} > 10^{3(k-1)} = 10^{k+(2k-3)} \geq 10^{k+1} > \overline{ab}.$$

Пусть $a \geq 10$. Тогда для выполнения равенства необходимы условия $b = 2$ и $a \leq 31$, так как иначе, если b k -значное, а a $(m+1)$ -значно ($m \geq 1$), имеем:

$$\text{если } k > 1, \text{ то } a^b \geq (10^m)^{10^{k-1}} \geq 10^{m \cdot (k+2)} = 10^{(m+m)+m \cdot k} \geq 10^{(m+1)+k} > \overline{ab};$$

$$\text{если } k = 1, b \geq 3, \text{ то } a^b \geq (10^m)^3 = 10^{(m+m)+m} \geq 10^{(m+1)+k} > \overline{ab};$$

если $k = 1$, $b = 2$, $m \geq 2$, то $a^b \geq (10^m)^2 = 10^{(m+m/2)+m/2} \geq 10^{(m+1)+k} > \overline{ab}$;

если $k = 1$, $b = 2$, $m = 1$, $a \geq 32$, то $a^b \geq (32)^2 \geq 10^3 = 10^{(m+1)+k} > \overline{ab}$.

Если $10 \leq a \leq 31$ и $b = 2$ приходим к уравнению $10a + 2 = a^2 + 18$, откуда $a^2 - 10a + 16 = 0$. Оба корня $a = 2$ или $a = 8$ меньше 10.

Конечным перебором всех пар a и b , для которых $1 < a \leq 9$ и $1 < b \leq 9$ получаем, что уравнению удовлетворяют еще две пары $a = 2$, $b = 2$ и $a = 8$, $b = 2$.

Ответ: $a = 2$, $b = 2$; $a = 8$, $b = 2$; $a = 1$, $b = 9$.

Замечание

Перебор значений a и b может быть произведен с помощью дополнительных соображений (четности, свойств делимости, оценок и т.п.). Например:

1. Если $a = 2$, получаем: $20 + b = 2^b + 18$, откуда $2^b - b = 2$ и, значит, $b = 2$.
2. Если $a = 3$, имеем: $30 + b = 3^b + 18$, откуда $3^b - b = 12$, значит b нечетное, но для $b \geq 3$ $3^b - b \geq 24$.
3. Если $a = 4$, имеем: $40 + b = 4^b + 18$.

При $b > 3$ справа стоит число, состоящее более чем из двух цифр. Несложно проверить, что случаи $b = 2$ и $b = 3$ не однодут.

4. При $a \geq 5$, если $b > 2$ в уравнении $10a + b = a^b + 18$ справа стоит число, состоящее более чем из двух цифр. Значит, $b = 2$. Приходим к уже известному уравнению $a^2 - 10a + 16 = 0$, корни которого $a = 2$ или $a = 8$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован: правильно произведен перебор не более чем двузначных оснований степени и не более чем однозначных ее показателей, но не объяснено, почему ограничен только перечисленными случаями.	3
Ответ содержит правильную и, возможно, одну неправильную пару. Произведен перебор не более чем однозначных ее показателей, но с арифметическими ошибками или пробелами.	2
Приведена правильная пара и проверено, что она обращает уравнение в верное числовое равенство.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0