Диагностическая работа
по МАТЕМАТИКЕ

9 декабря 2010 года

11 класс

Вариант № 13 (без производной)

Район _____

Город (населенный пункт) _____

Школа _____

Класс _____

Фамилия _____

Имя _____

Отчество _____

© МИОО, 2010 г.

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике дается 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом (B1–B12) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1–C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и записать ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удается выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у вас останется время.

Желаем успеха!

© МИОО, 2010 г.

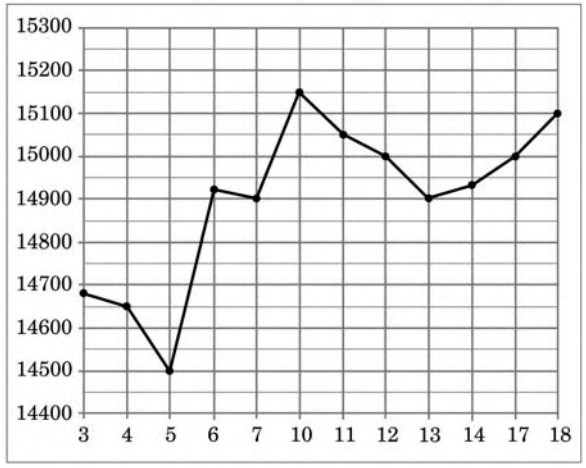
Часть 1

Ответом на задания B1 – B12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Павел Иванович купил американский автомобиль, спидометр которого показывает скорость в милях в час. Американская миля равна 1609 м. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 65 миль в час? Ответ округлите до целого числа.

Ответ:

B2 На рисунке жирными точками показана цена олова на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 3 по 18 сентября 2007 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны олова в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена олова на момент закрытия торгов была наименьшей за данный период.



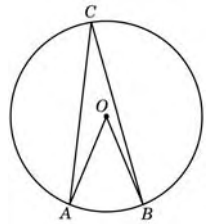
Ответ:

B3 Найдите корень уравнения $\log_2(6 - x) = 5$.

Ответ:

© МИОО, 2010 г.

B4 Вписанный угол ACB на $18°$ меньше центрального угла AOB, опирающегося на ту же дугу. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.



Ответ:

B5 В таблице указаны средние цены на некоторые основные продукты питания в трех городах России (по данным некоторого исследования).

Наименование продукта	Сортавала	Орел	Кемерово
Пшеничный хлеб (батон)	13	14	15
Молоко (1 литр)	26	23	25
Картофель (1 кг)	14	10	17
Сыр (1 кг)	230	205	255
Мясо (говядина) (1 кг)	280	270	300
Подсолнечное масло (1 литр)	38	44	50

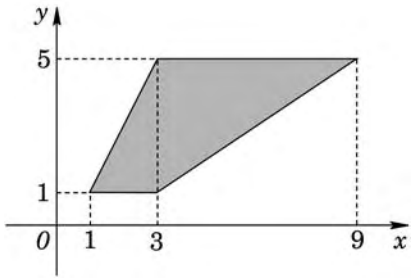
Определите, в каком из этих трех городов окажется самым дешевым следующий набор продуктов:
- 2 батона хлеба;
- 1 кг говядины
- 1 л подсолнечного масла

В ответ запишите полученную сумму в рублях.

Ответ:

© МИОО, 2010 г.

B6 Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке.

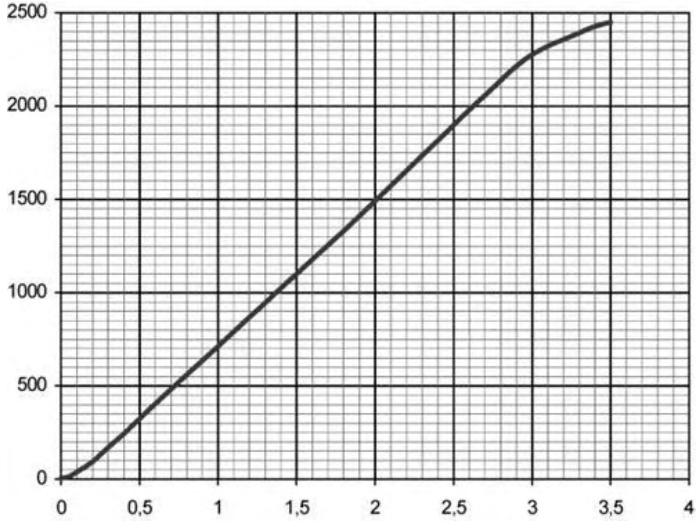


Ответ:

B7 Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{91}}{10}$ и $\alpha \in (\pi;\ 1,5\pi)$.

Ответ:

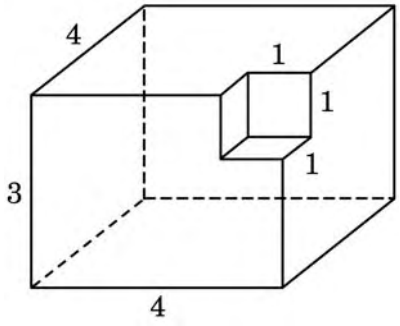
B8 На рисунке показана зависимость расстояния от времени при движении самолета по маршруту от начального пункта. На оси абсцисс откладывается время в часах, на оси ординат – пройденное расстояние. Найдите среднюю скорость движения самолета в течение двух первых часов полета. Ответ дайте в километрах в час.



Ответ:

© МИОО, 2010 г.

B9 Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ:

B10 Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$, где T_1 — температура нагревателя (в градусах Кельвина), T_2 — температура холодильника (в градусах Кельвина). При какой минимальной температуре нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет не меньше 60%, если температура холодильника $T_2 = 336$ К? Ответ выразите в градусах Кельвина.

Ответ:

B11 Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{-21 + 10x - x^2}$ на отрезке $[4;\ 6\ ]$.

Ответ:

B12 В 2008 году в городском квартале проживало 40000 человек. В 2009 году, в результате строительства новых домов, число жителей выросло на 1%, а в 2010 году – на 9% по сравнению с 2009 годом. Сколько человек стало проживать в квартале в 2010 году?

Ответ:

© МИОО, 2010 г.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1 – С6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

С1 Решите уравнение $(2\sin x - 1)(\sqrt{-\cos x} + 1) = 0$.

С2 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Длина ребра куба равна 1. Найдите расстояние от середины отрезка BC_1 до плоскости AB_1D_1.

С3 Решите неравенство

$$\log_3\left(x^2 + 7x + 10\right) + \log_{\frac{1}{3}}\frac{x+5}{9} + 1 \geq \log_3\left(3x^2 + 16x + 20\right)$$

С4 Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит точка C, а на другой – точки A и B, причем треугольник ABC – остроугольный равнобедренный и его боковая сторона равна 13. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

С5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y^2 + xy - 4x - 9y + 20 = 0, \\ y = ax + 1, \\ x > 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

С6 Каждое из чисел 2, 3, …, 7 умножают на каждое из чисел 13, 14, …, 21 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

© МИОО, 2010 г.

Диагностическая работа
по МАТЕМАТИКЕ

9 декабря 2010 года

11 класс

Вариант № 14 (без производной)

Район _____

Город (населенный пункт) _____

Школа _____

Класс _____

Фамилия _____

Имя _____

Отчество _____

© МИОО, 2010 г.

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике дается 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом (B1–B12) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1–C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и записать ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удается выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у вас останется время.

Желаем успеха!

© МИОО, 2010 г.

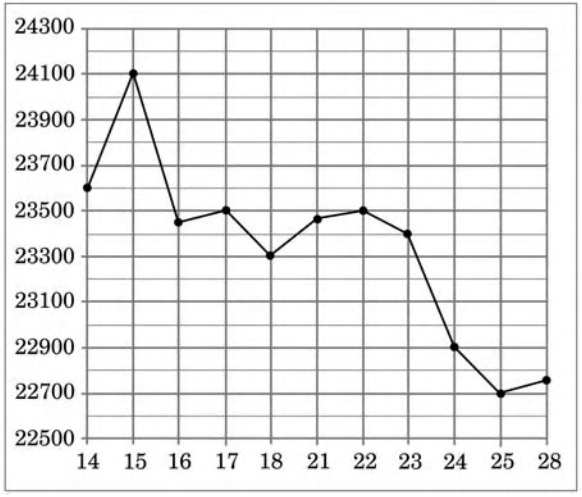
Часть 1

Ответом на задания B1 – B12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Павел Иванович купил американский автомобиль, спидометр которого показывает скорость в милях в час. Американская миля равна 1609 м. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 48 миль в час? Ответ округлите до целого числа.

Ответ:

B2 На рисунке жирными точками показана цена олова на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 14 по 28 июля 2008 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны олова в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена олова на момент закрытия торгов была наименьшей за данный период.



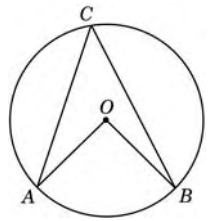
Ответ:

B3 Найдите корень уравнения $\log_2(6 - x) = 6$.

Ответ:

© МИОО, 2010 г.

B4 Вписанный угол ACB на $22°$ меньше центрального угла AOB, опирающегося на ту же дугу. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.



Ответ:

B5 В таблице указаны средние цены на некоторые основные продукты питания в трех городах России (по данным некоторого исследования).

Наименование продукта	Псков	Тамбов	Владивосток
Пшеничный хлеб (батон)	11	14	12
Молоко (1 литр)	26	23	25
Картофель (1 кг)	14	11	18
Сыр (1 кг)	235	220	250
Мясо (говядина) (1 кг)	280	240	300
Подсолнечное масло (1 литр)	62	54	58

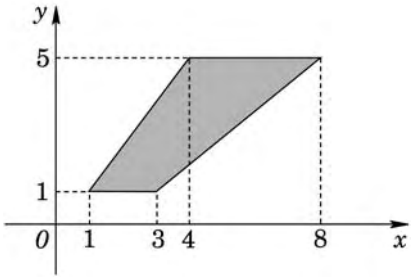
Определите, в каком из этих трех городов окажется самым дешевым следующий набор продуктов:

– 1 батон пшеничного хлеба;
– 2 л молока;
– 2 кг говядины.

В ответ запишите полученную сумму в рублях.

Ответ:

B6 Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке.



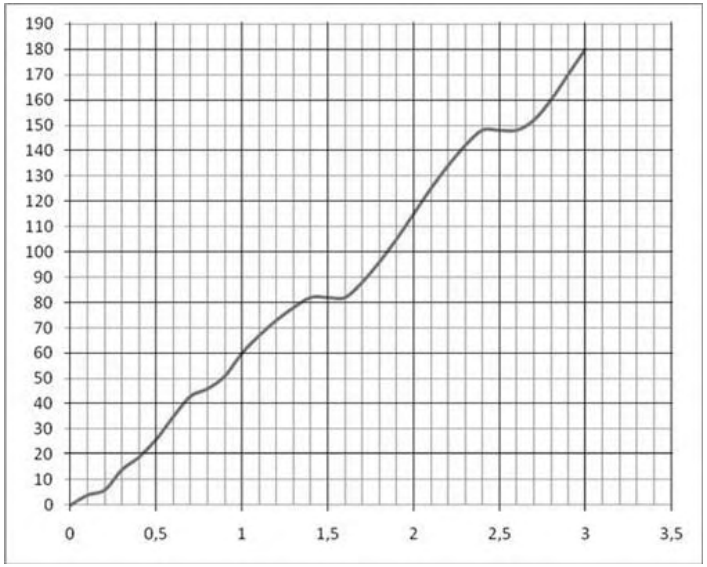
Ответ:

© МИОО, 2010 г.

B7 Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\alpha \in (1,5\pi;\ 2\pi)$.

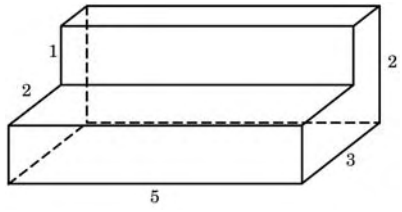
Ответ:

B8 На рисунке показана зависимость расстояния от времени при движении автомобиля по маршруту от начального пункта. На оси абсцисс откладывается время в часах, на оси ординат – пройденный путь в километрах. Найдите среднюю скорость автомобиля на этом маршруте. Ответ дайте в километрах в час.



Ответ:

B9 Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ:

© МИОО, 2010 г.

B10 Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$, где T_1 — температура нагревателя (в градусах Кельвина), T_2 — температура холодильника (в градусах Кельвина). При какой минимальной температуре нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет не меньше 30%, если температура холодильника $T_2 = 322$ К? Ответ выразите в градусах Кельвина.

Ответ:

B11 Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{-10 + 7x - x^2}$ на отрезке $[3;\ 5]$.

Ответ:

B12 В 2008 году в городском квартале проживало 30000 человек. В 2009 году, в результате строительства новых домов, число жителей выросло на 9%, а в 2010 году – на 8% по сравнению с 2009 годом. Сколько человек стало проживать в квартале в 2010 году?

Ответ:

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1 – C6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите уравнение $(2\cos x + 1)(\sqrt{-\sin x} - 1) = 0$.

C2 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Найдите угол между плоскостями AB_1D_1 и ACD_1.

C3 Решите неравенство

$$\log_2(x^2 + 4x) + \log_{0,5}\frac{x}{4} + 2 \geq \log_2(x^2 + 3x - 4).$$

© МИОО, 2010 г.

C4 Расстояние между параллельными прямыми равно 4. На одной из них лежит точка C, а на другой – точки A и B, причем треугольник ABC – остроугольный равнобедренный, и его боковая сторона равна 5. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y^2 + xy - 7x - 14y + 49 = 0, \\ y = ax + 1, \\ x \geq 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

C6 Найдите все тройки натуральных чисел k, m и n, удовлетворяющие уравнению $2 \cdot k! = m! - 2 \cdot n!$ $(1! = 1;\ 2! = 1 \cdot 2 = 2;\ n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n)$.

© МИОО, 2010 г.

Диагностическая работа
по МАТЕМАТИКЕ

9 декабря 2010 года

11 класс

Вариант № 15 (без производной)

Район _____

Город (населенный пункт) _____

Школа _____

Класс _____

Фамилия _____

Имя _____

Отчество _____

© МИОО, 2010 г.

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике дается 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом (B1–B12) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1–C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и записать ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удается выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у вас останется время.

Желаем успеха!

© МИОО, 2010 г.

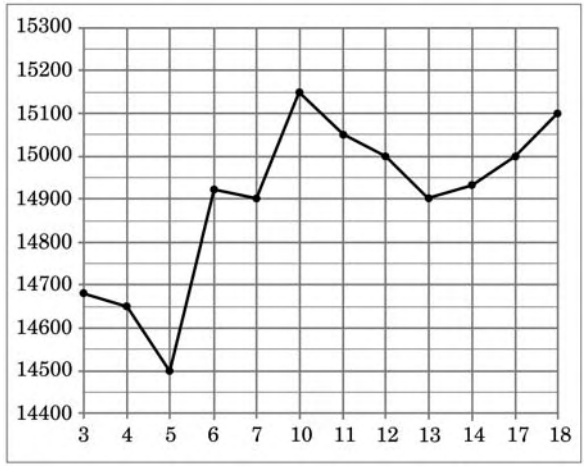
Часть 1

Ответом на задания B1 – B12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Павел Иванович купил американский автомобиль, спидометр которого показывает скорость в милях в час. Американская миля равна 1609 м. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 34 мили в час? Ответ округлите до целого числа.

Ответ:

B2 На рисунке жирными точками показана цена олова на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 3 по 18 сентября 2007 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны олова в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена олова на момент закрытия торгов была наибольшей за данный период.



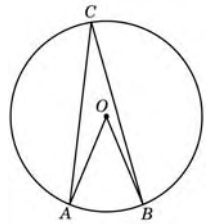
Ответ:

B3 Найдите корень уравнения $\log_3(6 - x) = 3$.

Ответ:

© МИОО, 2010 г.

B4 Найдите центральный угол AOB, если он на 20° больше, чем вписанный угол ACB, опирающийся на ту же дугу. Ответ дайте в градусах.



Ответ:

B5 В таблице указаны средние цены на некоторые основные продукты питания в трех городах России (по данным некоторого исследования).

Наименование продукта	Новгород	Курск	Екатеринбург
Пшеничный хлеб (батон)	13	10	16
Молоко (1 литр)	25	21	27
Картофель (1 кг)	9	13	16
Сыр (1 кг)	260	220	270
Мясо (говядина) (1 кг)	280	240	300
Подсолнечное масло (1 литр)	38	44	50

Определите, в каком из этих трех городов окажется самым дешевым следующий набор продуктов:

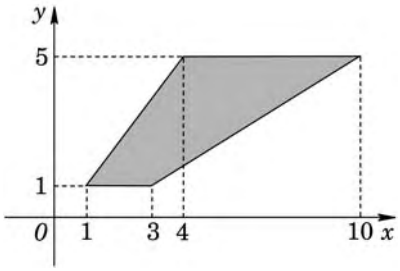
– 3 кг картофеля;
– 1,5 кг говядины;
– 1 л подсолнечного масла.

В ответ запишите полученную сумму в рублях.

Ответ:

© МИОО, 2010 г.

B6 Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке.



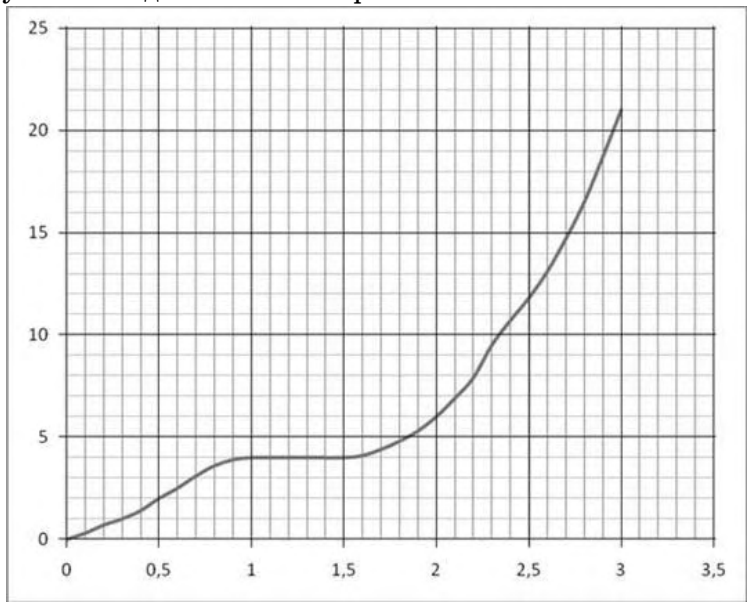
Ответ:

B7 Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ и $\alpha \in (1,5\pi;\ 2\pi)$.

Ответ:

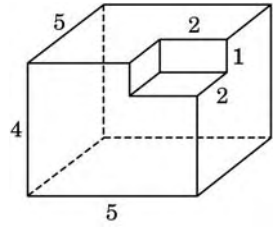
© МИОО, 2010 г.

B8 На рисунке показана зависимость расстояния от времени при движении теплохода по маршруту от начального пункта. На оси абсцисс откладывается время в часах, на оси ординат – пройденный путь в километрах. Найдите среднюю скорость теплохода на этом маршруте. Ответ дайте в километрах в час.



Ответ:

B9 Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ:

© МИОО, 2010 г.

B10 Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$, где T_1 — температура нагревателя (в градусах Кельвина), T_2 — температура холодильника (в градусах Кельвина). При какой минимальной температуре нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет не меньше 40%, если температура холодильника $T_2 = 330$ К? Ответ выразите в градусах Кельвина.

Ответ:

B11 Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{5 - 4x - x^2}$ на отрезке $[-4; 0]$.

Ответ:

B12 В 2008 году в городском квартале проживало 20000 человек. В 2009 году, в результате строительства новых домов, число жителей выросло на 4%, а в 2010 году – на 2% по сравнению с 2009 годом. Сколько человек стало проживать в квартале в 2010 году?

Ответ:

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1 – C6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите уравнение $(2\sin x - 1)(\sqrt{-\cos x} + 1) = 0$.

C2 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Длина ребра куба равна 1. Найдите расстояние от середины отрезка BC_1 до плоскости AB_1D_1.

C3 Решите неравенство

$$\log_3\left(x^2 + 7x + 10\right) + \log_{\frac{1}{3}} \frac{x+5}{9} + 1 \geq \log_3\left(3x^2 + 16x + 20\right)$$

© МИОО, 2010 г.

C4 Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит точка C, а на другой – точки A и B, причем треугольник ABC – остроугольный равнобедренный и его боковая сторона равна 13. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y^2 + xy - 4x - 9y + 20 = 0, \\ y = ax + 1, \\ x > 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

C6 Каждое из чисел 2, 3, …, 7 умножают на каждое из чисел 13, 14, …, 21 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

© МИОО, 2010 г.

Диагностическая работа
по МАТЕМАТИКЕ

9 декабря 2010 года

11 класс

Вариант № 16 (без производной)

Район _____

Город (населенный пункт) _____

Школа _____

Класс _____

Фамилия _____

Имя _____

Отчество _____

© МИОО, 2010 г.

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике дается 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом (B1–B12) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1–C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и записать ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удается выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у вас останется время.

Желаем успеха!

© МИОО, 2010 г.

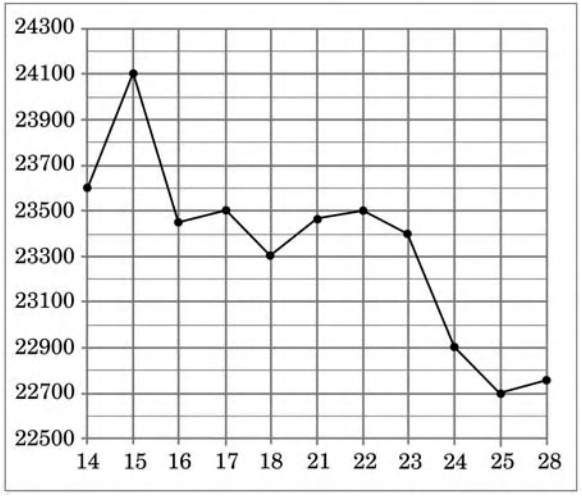
Часть 1

Ответом на задания B1 – B12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Павел Иванович купил американский автомобиль, спидометр которого показывает скорость в милях в час. Американская миля равна 1609 м. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 26 миль в час? Ответ округлите до целого числа.

Ответ:

B2 На рисунке жирными точками показана цена олова на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 14 по 28 июля 2008 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны олова в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена олова на момент закрытия торгов была наибольшей за данный период.



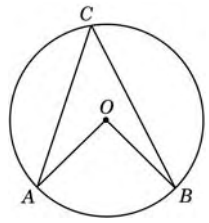
Ответ:

B3 Найдите корень уравнения $\log_2(8 - x) = 5$.

Ответ:

© МИОО, 2010 г.

B4 Найдите центральный угол AOB, если он на 46° больше, чем вписанный угол ACB, опирающийся на ту же дугу. Ответ дайте в градусах.



Ответ:

B5 В таблице указаны средние цены на некоторые основные продукты питания в трех городах России (по данным некоторого исследования).

Наименование продукта	Ярославль	Ростов-на-Дону	Тюмень
Пшеничный хлеб (батон)	15	12	13
Молоко (1 литр)	26	23	25
Картофель (1 кг)	9	13	16
Сыр (1 кг)	240	215	260
Мясо (говядина) (1 кг)	230	265	285
Подсолнечное масло (1 литр)	58	55	65

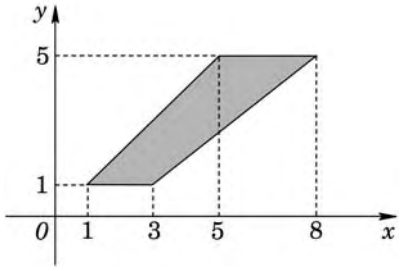
Определите, в каком из этих трех городов окажется самым дешевым следующий набор продуктов:

– 1 л молока;
– 4 кг картофеля;
– 2 кг сыра.

В ответ запишите полученную сумму в рублях.

Ответ:

B6 Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке.



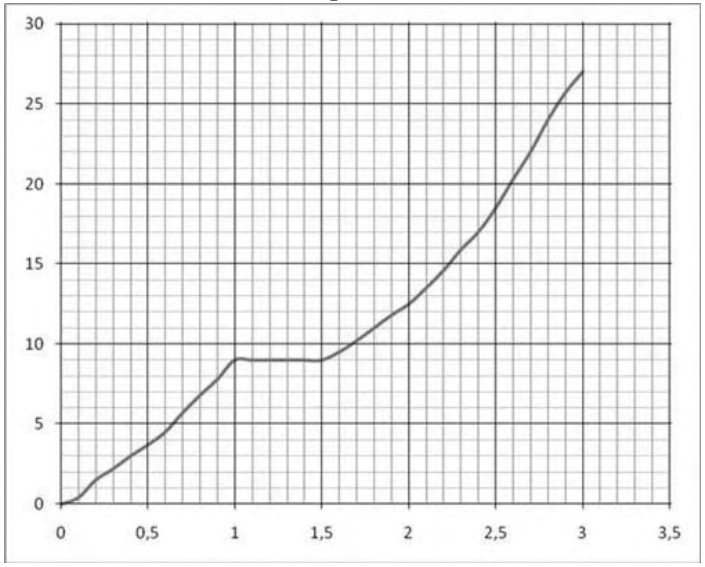
Ответ:

© МИОО, 2010 г.

B7 Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{\sqrt{19}}{10}$ и $\alpha \in (1,5\pi;\ 2\pi)$.

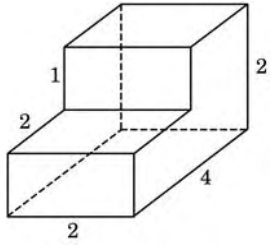
Ответ:

B8 На рисунке показана зависимость расстояния от времени при движении велосипедиста по маршруту от начального пункта. На оси абсцисс откладывается время в часах, на оси ординат – пройденный путь в километрах. Найдите среднюю скорость велосипедиста на маршруте. Ответ дайте в километрах в час.



Ответ:

B9 Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ:

© МИОО, 2010 г.

B10 Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$, где T_1 — температура нагревателя (в градусах Кельвина), T_2 — температура холодильника (в градусах Кельвина). При какой минимальной температуре нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет не меньше 70%, если температура холодильника $T_2 = 285$ К? Ответ выразите в градусах Кельвина.

Ответ:

B11 Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{-15 - 8x - x^2}$ на отрезке $[-5;\ -3]$.

Ответ:

B12 В 2008 году в городском квартале проживало 60000 человек. В 2009 году, в результате строительства новых домов, число жителей выросло на 5%, а в 2010 году – на 6% по сравнению с 2009 годом. Сколько человек стало проживать в квартале в 2010 году?

Ответ:

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1 – C6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите уравнение $(2\cos x + 1)(\sqrt{-\sin x} - 1) = 0$.

C2 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Найдите угол между плоскостями AB_1D_1 и ACD_1.

C3 Решите неравенство

$$\log_2(x^2 + 4x) + \log_{0,5}\frac{x}{4} + 2 \geq \log_2(x^2 + 3x - 4).$$

© МИОО, 2010 г.

C4 Расстояние между параллельными прямыми равно 4. На одной из них лежит точка C, а на другой – точки A и B, причем треугольник ABC – остроугольный равнобедренный, и его боковая сторона равна 5. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y^2 + xy - 7x - 14y + 49 = 0, \\ y = ax + 1, \\ x \geq 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

C6 Найдите все тройки натуральных чисел k, m и n, удовлетворяющие уравнению $2 \cdot k! = m! - 2 \cdot n!$ $(1! = 1;\ 2! = 1 \cdot 2 = 2;\ n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n)$.

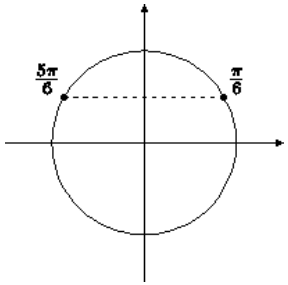
© МИОО, 2010 г.

Вар	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
1	206,8	26	-2	32	1280	35	-0,1	-0,25	54	37,5	0,5	50
2	345,8	6	9	128	1540	30	-0,2	-0,25	72	25	0,25	10
3	270,3	14	-3	10	1100	36	-0,4	-0,75	130	50	-0,25	30
4	171,6	26	5	56	1680	42	-0,4	-0,5	86	25	-0,5	60
5	206,8	26	4	32	1280	35	-0,1	11	54	37,5	-2	50
6	345,8	6	-1	13	1540	30	-0,2	60	72	25	-4	10
7	270,3	14	-5	10	1100	36	-0,4	14	130	50	-1	30
8	171,6	26	4	29	1680	42	-0,4	700	86	25	-2	60
9	105	5	13	36	342	16	-0,3	0,5	80	840	4	44036
10	77	25	15	125	540	12	-0,5	0,5	58	460	6	35316
11	55	10	10	56	443	16	-0,2	0,25	130	550	8	21216
12	42	15	4	128	505	10	-0,9	0,5	36	950	2	66780
13	105	5	-26	36	342	16	-0,3	750	80	840	2	44036
14	77	25	-58	44	540	12	-0,5	60	58	460	1,5	35316
15	55	10	-21	40	443	16	-0,2	7	130	550	3	21216
16	42	15	-24	92	505	10	-0,9	9	36	950	1	66780

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $(2\sin x - 1)(\sqrt{-\cos x} + 1) = 0$.

Решение:



Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x \le 0$.

Выражение $\sqrt{-\cos x} + 1$ положительно при всех допустимых x.

Значит, $2\sin x - 1 = 0$; $\sin x = \frac{1}{2}$; $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$.

Так как $\cos x \le 0$, числа $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$ не являются решениями уравнения.

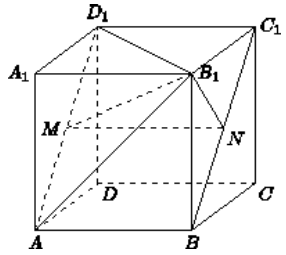
Ответ: $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Содержание критерия оценивания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Верно найдены все значения переменной x, при которой равен нулю множитель $2\sin x - 1$. Имеется указание на то, что второй множитель отличен от нуля, но отбор найденных значений либо не произведен, либо произведен неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

© МИОО, 2010 г.

C2 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Длина ребра куба равна 1. Найдите расстояние от середины отрезка BC_1 до плоскости AB_1D_1.

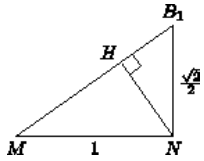
Решение:



M – середина AD_1, N – середина BC_1.

Проведем перпендикуляр NH из точки N к плоскости AB_1D_1, $NM \perp AD_1$, Значит $HM \perp AD_1$.

Поэтому точка H лежит на отрезке MB_1, перпендикулярном AD_1.



Искомый отрезок NH является высотой прямоугольного треугольника MNB_1 с прямым углом N. Поэтому

$$NH = \frac{NB_1 \cdot NM}{MB_1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Задача обоснованно сведена к планиметрической, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

© МИОО, 2010 г.

С3 Решите неравенство

$$\log_3\left(x^2+7x+10\right)+\log_{\frac{1}{3}}\frac{x+5}{9}+1\ge\log_3\left(3x^2+16x+20\right)$$

Решение:

Неравенство имеет смысл при

$$\begin{cases} x^2+7x+10>0, \\ x+5>0, \\ 3x^2+16x+20>0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x+2)(x+5)>0, \\ x+5>0, \\ (3x+10)(x+2)>0; \end{cases} \quad x>-2.$$

Для таких x получаем:

$$\log_3((x+2)(x+5))-\log_3\frac{x+5}{9}+1\ge\log_3((x+2)(3x+10));$$

$$\log_3(x+2)+\log_3(x+5)-\log_3(x+5)+3\ge\log_3(x+2)+\log_3(3x+10);$$

$$\log_3(3x+10)\le 3;\ 3x+10\le 27;\ x\le\frac{17}{3}.$$

Значит, $-2<x\le\frac{17}{3}$.

Ответ: $\left(-2;\frac{17}{3}\right]$.

Содержание критерия оценивания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Решение содержит обоснованный переход от исходного неравенства к простейшему логарифмическому неравенству, при решении которого допущены вычислительные неточности, в результате которых ответ может быть неверным.	2
Или верно найдены все значения переменной, при которых неравенство имеет смысл и произведен верный переход к неравенству относительно логарифмов с одинаковым основанием; Или без верного учета положительности выражений под знаками логарифмов получено простейшее логарифмическое неравенство, являющееся следствием исходного неравенства.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

© МИОО, 2010 г.

С4 Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит точка C, а на другой – точки A и B, причем треугольник ABC – остроугольный равнобедренный и его боковая сторона равна 13. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Решение:

Пусть r – искомый радиус, а точка H – основание высоты CH треугольника ABC.

1 случай. Точка C – вершина равнобедренного треугольника (см. рис.1). Тогда $AC=BC=13$, и CH – медиана треугольника ABC.

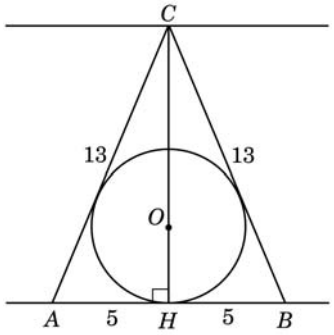


Рис.1

Из прямоугольного треугольника AHC находим:

$$AH=\sqrt{AC^2-CH^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5,\ AB=2AH=10.$$

Тогда, если p – полупериметр треугольника, то

$$r=\frac{S_{ABC}}{p}=\frac{AH\cdot CH}{\frac{1}{2}(AB+BC+CA)}=\frac{60}{18}=\frac{10}{3}.$$

2 случай. Вершина равнобедренного треугольника – одна из точек A или B. Пусть, для определенности, вершина в точке B. Проведем высоту CH. Если H находится на продолжении стороны AB, то треугольник ABC тупоугольный. Этот случай противоречит условию. Если H лежит на стороне AB (см. рис. 2), то из прямоугольного треугольника BHC находим:

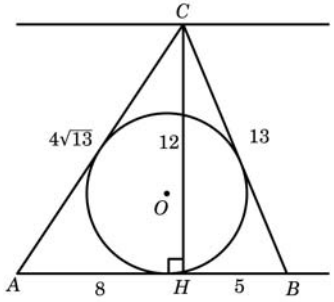


Рис.2

$$BH=\sqrt{BC^2-CH^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5,\ AH=13-5=8.$$

Из прямоугольного треугольника ACH находим:

$$AC=\sqrt{CH^2+AH^2}=\sqrt{12^2+8^2}=4\sqrt{13}.$$

Тогда

© МИОО, 2010 г.

$$r=\frac{S_{ABC}}{p}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot CH}{\frac{1}{2}(AB+BC+CA)}=\frac{13\cdot 6}{\frac{1}{2}(26+4\sqrt{13})}=\frac{13\cdot 6}{13+2\sqrt{13}}=\frac{26-4\sqrt{13}}{3}.$$

Ответ: $\frac{26-4\sqrt{13}}{3}$ или $\frac{10}{3}$.

Содержание критерия оценивания	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y^2+xy-4x-9y+20=0, \\ y=ax+1, \\ x>2 \end{cases}$$

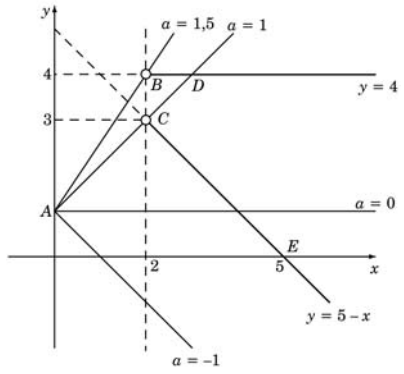
имеет единственное решение.

Решение:

© МИОО, 2010 г.

Преобразуем систему:

$$\begin{cases} (y-4)(x+y-5)=0, \\ y=ax+1, \\ x>2 \end{cases}$$



Уравнение $(y-4)(x+y-5)=0$ задает пару пересекающихся прямых $y=4$ и $y=5-x$. Система

$$\begin{cases} (y-4)(x+y-5)=0, \\ x>2 \end{cases}$$

задает части этих прямых, расположенные правее прямой $x=2$, т.е. лучи BD и CE без точек B и C (см. рис.). Уравнение $y=ax+1$ задает прямую m с угловым коэффициентом a, проходящую через точку $A(0;1)$. Следует найти все значения a, при каждом из которых прямая m имеет единственную общую точку с объединением лучей BD и CE.

а) Прямая AB задается уравнением $y=1,5x+1$. Поэтому при $a\geq 1,5$ прямая m не пересекает ни луч BD, ни луч CE.

б) Прямая AC задается уравнением $y=x+1$. Поэтому при $1\leq a<1,5$ прямая m пересекает луч BD, но не пересекает луч CE.

в) При $0<a<1$ прямая m пересекает и луч BD, и луч CE.

г) Наконец, при $-1<a\leq 0$ прямая m пересекает только луч CE, а при $a\leq -1$ она не пересекает ни луч BD, ни луч CE.

Ответ: $-1<a\leq 0$, $1\leq a<1,5$.

© МИОО, 2010 г.

Содержание критерия оценивания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Решение в целом верное. Обоснованно найдены оба промежутка значений параметра из ответа к задаче, при этом возможны неточности с (не)включением концов и(или) вычислительная погрешность	3
Обоснованно найден хотя бы один промежуток значений параметра из ответа к задаче, при этом возможны неточности с (не)включением концов и(или) вычислительная погрешность	2
Решение содержит: - или верное описание расположения двух лучей и прямой из условия задачи; - или верное получение квадратного уравнения с параметром a относительно одной из переменных	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Каждое из чисел 2, 3, …, 7 умножают на каждое из чисел 13, 14, …, 21 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение:

1. Если все произведения взяты со знаком плюс, то их сумма максимальна и равна

$$(2 + \ldots + 7)(13 + \ldots + 21) = \left(\frac{2+7}{2} \cdot 6\right) \cdot \left(\frac{13+21}{2} \cdot 9\right) = 27 \cdot 153 = 4131.$$

2. Так как сумма оказалась нечетной, то число нечетных слагаемых в ней – нечетно, причем это свойство всей суммы не меняется при смене знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из получающихся сумм будет нечетной, а значит, не будет равна 0.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при такой расстановке знаков у произведений, которая получится при раскрытии следующих скобок:

$$(-2 + 3 - 4 + 5 + 6 - 7)(-13 - 14 - 15 - 16 + 17 - 18 + 19 + 20 + 21) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Ответ: 1 и 4131.

© МИОО, 2010 г.

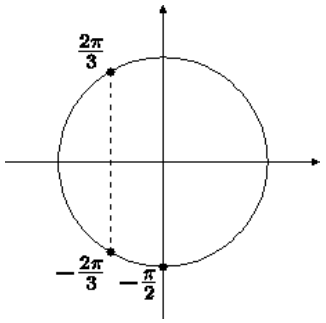
Содержание критерия оценивания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован (например, не доказано, что либо сумма отлична от 0, либо что она может быть равна 1)	3
Верно найдено наибольшее значение суммы и доказано, что сумма всегда отлична от 0	2
Верно найдено только наибольшее значение суммы или только доказано, что сумма всегда отлична от 0	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

© МИОО, 2010 г.

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $(2\cos x + 1)(\sqrt{-\sin x} - 1) = 0$.

Решение:



Левая часть уравнения имеет смысл при $\sin x \le 0$.

Если $\sqrt{-\sin x} - 1 = 0$, то $\sin x = -1$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Если $\sqrt{-\sin x} - 1 \ne 0$, то $2\cos x + 1 = 0$; $\cos x = -\frac{1}{2}$;

$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Так как $\sin x \le 0$, числа $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$ не являются решениями уравнения.

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

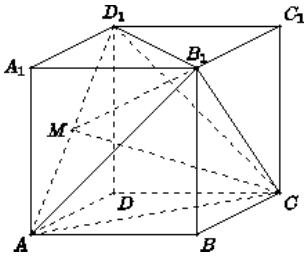
Содержание критерия оценивания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Верно найдены все значения переменной x, при которых равен нулю множитель $2\cos x + 1$ или множитель $\sqrt{-\sin x} - 1$, но отбор найденных значений либо не произведен, либо произведен неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

© МИОО, 2010 г.

C2 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Найдите угол между плоскостями AB_1D_1 и ACD_1.

Решение:



Пусть M – середина AD_1, и пусть ребро куба равно 1.

Поскольку треугольники AB_1D_1 и ACD_1 правильные, $B_1M \perp AD_1$ и $CM \perp AD_1$, то есть угол CMB_1 – линейный угол искомого двугранного угла.

Найдем стороны треугольника CMB_1:

$$B_1C = \sqrt{2},\ CM = MB_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Применяя к этому треугольнику теорему косинусов, находим:

$$\cos\angle CMB_1 = \frac{MB_1^2 + CM^2 - B_1C^2}{2MB_1\cdot CM} = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\arccos\frac{1}{3}$.

Содержание критерия оценивания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Задача обоснованно сведена к планиметрической, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

© МИОО, 2010 г.

C3 Решите неравенство

$$\log_2(x^2+4x)+\log_{0,5}\frac{x}{4}+2\ge\log_2(x^2+3x-4).$$

Решение:

Неравенство имеет смысл при

$$\begin{cases} x^2+4x>0,\\ x>0,\\ x^2+3x-4>0; \end{cases} \quad \begin{cases} x(x+4)>0,\\ x>0,\\ (x-1)(x+4)>0; \end{cases} \quad x>1.$$

Для таких x получаем:

$$\log_2(x(x+4))-\log_2\frac{x}{4}+2\ge\log_2((x-1)(x+4));$$

$$\log_2 x+\log_2(x+4)-\log_2 x+4\ge\log_2(x-1)+\log_2(x+4);$$

$$\log_2(x-1)\le 4;\ x-1\le 16;\ x\le 17.$$

Значит, $1<x\le 17$.

Ответ: (1; 17].

Содержание критерия оценивания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Решение содержит обоснованный переход от исходного неравенства к простейшему логарифмическому неравенству, при решении которого допущены вычислительные неточности, в результате которых ответ может быть неверным.	2
Или верно найдены все значения переменной, при которых неравенство имеет смысл и произведен верный переход к неравенству относительно логарифмов с одинаковым основанием; Или без верного учета положительности выражений под знаками логарифмов получено простейшее логарифмическое неравенство, являющееся следствием исходного неравенства.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

© МИОО, 2010 г.

C4 Расстояние между параллельными прямыми равно 4. На одной из них лежит точка C, а на другой – точки A и B, причем треугольник ABC – остроугольный равнобедренный, и его боковая сторона равна 5. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Решение:

Пусть r – искомый радиус, а точка H – основание высоты CH треугольника ABC.

1 случай. Точка C – вершина равнобедренного треугольника (см. рис.1). Тогда $AC=BC=5$, и CH – медиана треугольника ABC. Из прямоугольного треугольника AHC находим:

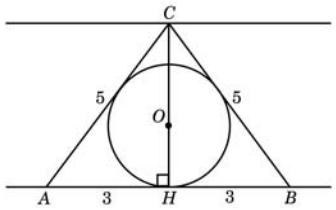


Рис.1

$$AH=\sqrt{AC^2-CH^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3,\ AB=2AH=6.$$

Тогда, если p – полупериметр треугольника, то

$$r=\frac{S_{ABC}}{p}=\frac{AH\cdot CH}{\frac{1}{2}(AB+BC+CA)}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}.$$

2 случай. Вершина равнобедренного треугольника – одна из точек A или B. Пусть, для определенности, вершина в точке B. Проведем высоту CH. Если H находится на продолжении стороны AB, то треугольник ABC тупоугольный. Этот случай противоречит условию. Если H лежит на стороне AB (см. рис. 2), то из прямоугольного треугольника BHC находим:

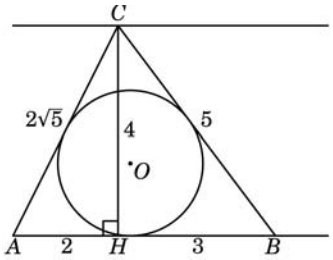


Рис.2

$$BH=\sqrt{BC^2-CH^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3,\ AH=5-3=2.$$

Из прямоугольного треугольника ACH находим:

$$AC=\sqrt{CH^2+AH^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}.$$

Тогда

$$r=\frac{S_{ABC}}{p}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot CH}{\frac{1}{2}(AB+BC+CA)}=\frac{5\cdot 2}{\frac{1}{2}(10+2\sqrt{5})}=\frac{5-\sqrt{5}}{2}.$$

© МИОО, 2010 г.

Ответ: $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ или $\frac{3}{2}$.

Содержание критерия оценивания	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y^2+xy-7x-14y+49=0, \\ y=ax+1, \\ x\geq 3 \end{cases}$$

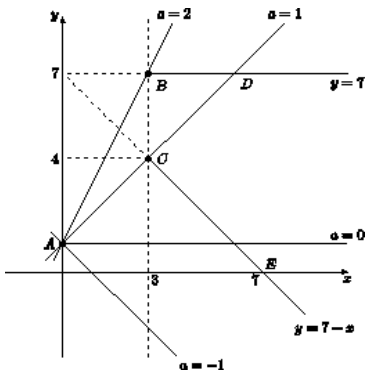
имеет единственное решение.

Решение:

Преобразуем систему:

$$\begin{cases} (y-7)(x+y-7)=0, \\ y=ax+1, \\ x\geq 3. \end{cases}$$

Уравнение $(y-7)(x+y-7)=0$ задает пару пересекающихся прямых $y=7$, $y=7-x$.



Система

$$\begin{cases} (y-7)(x+y-7)=0, \\ x\geq 3 \end{cases}$$

задает части этих прямых, расположенные в полуплоскости $x\geq 3$, т.е. лучи BD и CE, включая точки B и C (см. рис.). Уравнение $y=ax+1$ задает прямую m с угловым коэффициентом a, проходящую через точку $A(0;1)$.

Следует найти все значения a, при каждом из которых прямая m имеет единственную общую точку с объединением лучей BD и CE.

а) Прямая AB задается уравнением $y=2x+1$. Поэтому при $a>2$ прямая m не пересекает ни луч BD, ни луч CE, а при $a=2$ есть только одна точка пересечения – точка B.

б) Прямая AC задается уравнением $y=x+1$. Поэтому при $1<a<2$ прямая m пересекает луч BD, но не пересекает луч CE, т.е. условие задачи выполнено. При $a=1$ есть две точки пересечения: C и D.

в) При $0<a<1$ прямая m пересекает и луч BD, и луч CE.

г) При $-1<a\leq 0$ прямая m не пересекает луч BD, но пересекает луч CE, а при $a\leq -1$ прямая m не пересекает ни луч BD, ни луч CE.

Ответ: $-1<a\leq 0,\ 1<a\leq 2$.

Содержание критерия оценивания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Решение в целом верное. Обоснованно найдены оба промежутка значений параметра из ответа к задаче, при этом возможны неточности с (не)включением концов и(или) вычислительная погрешность	3
Обоснованно найден хотя бы один промежуток значений параметра из ответа к задаче, при этом возможны неточности с (не)включением концов и(или) вычислительная погрешность.	2
Решение содержит: – или верное описание расположения двух лучей и прямой из условия задачи; – или верное получение квадратного уравнения с параметром а относительно одной из переменных	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

© МИОО, 2010 г.

© МИОО, 2010 г.

С6 Найдите все тройки натуральных чисел k, m и n, удовлетворяющие уравнению $2 \cdot k! = m! - 2 \cdot n!$ $(1! = 1;\ 2! = 1 \cdot 2 = 2;\ n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n)$.

Решение:

1. Так как $m! = 2 \cdot k! + 2 \cdot n!$, верны неравенства $n < m$ и $k < m$.

2. Пусть $k \le n$. Тогда $4 \cdot n! \ge 2 \cdot k! + 2 \cdot n! = m! \ge (n+1) \cdot n!$, откуда $4 \ge n + 1$, и $k \le n \le 3$.

3. Пусть $k > n$. Тогда $4 \cdot k! \ge 2 \cdot k! + 2 \cdot n! = m! \ge (k+1) \cdot k!$, откуда $4 \ge k + 1$, и $n < k \le 3$.

4. Далее конечным перебором значений $1 \le n \le 3$, $1 \le k \le 3$ находим все решения.

Ответ: $k = 1, n = 2, m = 3$; $k = n = 3, m = 4$; $k = 2, n = 1, m = 3$.

Содержание критерия оценивания	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	4
Ответ правилен, и конечность перебора обоснована. Однако при переборе допущены арифметические ошибки или пробелы	3
Ответ правилен и получен конечным перебором. Однако конечность перебора не обоснована	2
Приведен хотя бы один из правильных наборов и проверено, что при подстановке в уравнение получается верное числовое равенство	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

© МИОО, 2010 г.