Диагностическая работа №3
по МАТЕМАТИКЕ

3 марта 2011 года

11 класс

Вариант № 1

Район _____

Город (населенный пункт) _____

Школа _____

Класс _____

Фамилия _____

Имя _____

Отчество _____

© МИОО, 2011 г.

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике дается 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом (B1–B12) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1–C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и записать ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удается выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у вас останется время.

Желаем успеха!

© МИОО, 2011 г.

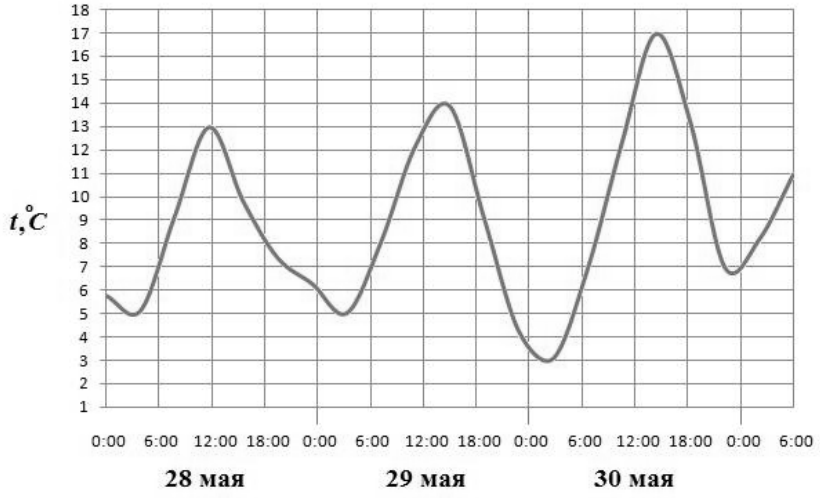
Часть 1

Ответом на задания B1–B12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Выпускники 11 "А" покупают букеты цветов для последнего звонка: из 7 роз каждому учителю и из 11 роз классному руководителю и директору. Они собираются подарить букеты 20 учителям (включая директора и классного руководителя), розы покупаются по цене 25 рублей за штуку. Сколько рублей стоят все розы?

Ответ:

B2 На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наибольшую температуру воздуха 28 мая. Ответ дайте в градусах Цельсия.



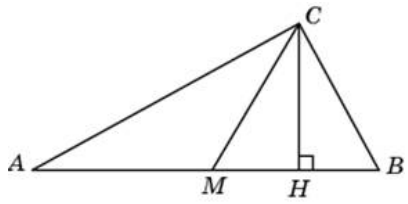
Ответ:

B3 Найдите корень уравнения $\log_3(5x + 1) = 4$.

Ответ:

© МИОО, 2011 г.

B4 Острые углы прямоугольного треугольника равны 24° и 66°. Найдите угол между высотой и медианой, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



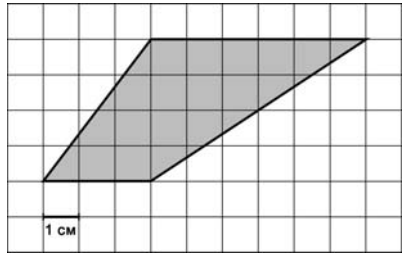
Ответ:

B5 Строительной фирме нужно приобрести 40 кубометров строительного бруса у одного из трех поставщиков. Какова наименьшая стоимость такой покупки с доставкой (в рублях)? Цены и условия доставки приведены в таблице.

Поставщик	**Цена бруса (руб. за 1 м^3)**	**Стоимость доставки**	**Дополнительные условия**
А	4200	10500	
Б	4500	8500	При заказе на сумму больше 150000 руб. доставка бесплатно
В	4300	8500	При заказе на сумму больше 200000 руб. доставка бесплатно

Ответ:

B6 На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.



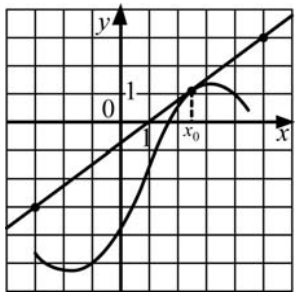
Ответ:

© МИОО, 2011 г.

B7 Найдите значение выражения $2 + 3\text{tg}^2\alpha \cos^2\alpha$, если $\sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ответ:

B8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

B9 Диагональ куба равна 11. Найдите площадь его поверхности.

Ответ:

B10 Расстояние от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h километров над землей, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{2Rh}$, где $R = 6400$ (км) – радиус Земли. С какой высоты горизонт виден на расстоянии 48 километров? Ответ выразите в километрах.

Ответ:

B11 Найдите точку минимума функции $y = \frac{x^2 + 16}{x}$.

Ответ:

© МИОО, 2011 г.

B12 Смешали 8 литров 15-процентного водного раствора некоторого вещества с 12 литрами 40-процентного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Ответ:

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите уравнение $\frac{(\sin x - 1)(2\cos + 1)}{\sqrt{\text{tg}x}} = 0.$

C2 Длина ребра правильного тетраэдра $ABCD$ равна 1. Найдите угол между прямыми DM и CL, где M – середина ребра BC, L – середина ребра AB.

C3 Решите неравенство $\frac{\log_2(2x) \cdot \log_{0,5x}2}{\log_{0,125x}8} \le 1.$

C4 Площадь трапеции $ABCD$ равна 90, а одно из оснований тропеции вдвое больше другого. Диагонали пересекаются в точке O; отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N соответственно. Найдите площадь четырехугольника $OMPN$.

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} |x + 2y + 1| \le 11, \\ (x - a)^2 + (y - 2a)^2 = 2 + a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

C6 Решите в натуральных числах уравнение

$$n^{k+1} - n! = 5(30k + 11).$$

(Для натурального n символом $n!$ обозначается произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$).

© МИОО, 2011 г.

Диагностическая работа №3
по МАТЕМАТИКЕ

3 марта 2011 года

11 класс

Вариант № 2

Район _____

Город (населенный пункт) _____

Школа _____

Класс _____

Фамилия _____

Имя _____

Отчество _____

© МИОО, 2011 г.

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике дается 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом (B1–B12) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1–C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и записать ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удается выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у вас останется время.

Желаем успеха!

© МИОО, 2011 г.

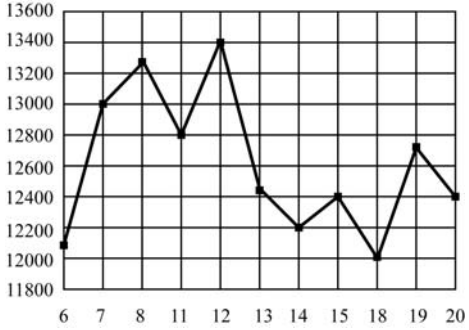
Часть 1

Ответом на задания B1–B12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

B1 На счету Таниного мобильного телефона было 93 рубля, а после разговора с Русланом осталось 48 рублей. Сколько минут длился разговор с Русланом, если одна минута разговора стоит 2 рубля 50 копеек?

Ответ:

B2 На рисунке жирными точками показана цена никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 6 по 20 мая 2009 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – цена тонны никеля в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода цена никеля на момент закрытия торгов была от 12600 до 13200 долларов США за тонну.



Ответ:

B3 Найдите корень уравнения $\log_2(3x + 11) = 5$.

Ответ:

B4 В параллелограмме $ABCD$ высота, опущенная на сторону AB, равна 20, $AD = 25$. Найдите синус угла B.

Ответ:

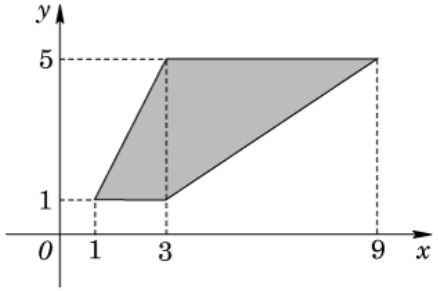
© МИОО, 2011 г.

B5 Для транспортировки 40 тонн груза на 1000 км можно воспользоваться услугами одной из трех фирм-перевозчиков. Стоимость перевозки и грузоподъемность автомобилей для каждого перевозчика указана в таблице. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую перевозку?

Фирма-перевозчик	**Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 100 км)**	**Грузоподъемность автомобилей (тонн)**
А	3200	3,5
Б	4100	5
В	9500	12

Ответ:

B6 Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке.



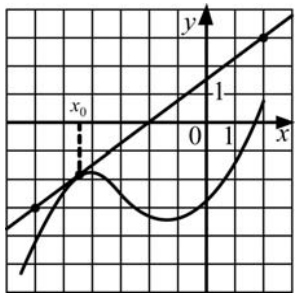
Ответ:

B7 Найдите значение выражения $12\sin^2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{5}$.

Ответ:

© МИОО, 2011 г.

B8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

B9 Диагональ куба равна 9. Найдите площадь его поверхности.

Ответ:

B10 По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах, равна $I = \frac{\varepsilon}{R + r}$, где ε — ЭДС источника (в Вольтах), $r = 2$ (Ом) — его внутреннее сопротивление, R — сопротивление цепи (в Омах). При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять не более 50% от силы тока короткого замыкания $I_{кз} = \frac{\varepsilon}{r}$? (Ответ выразите в Омах.)

Ответ:

B11 Найдите наименьшее значение функции $y = (x-2)^2(x+4) + 3$ на отрезке $[1;\ 3]$.

Ответ:

© МИОО, 2011 г.

B12 Расстояние между городами А и В равно 580 км. Из города А в город В выехал первый автомобиль, а через два часа после этого навстречу ему из города В выехал со скоростью 70 км/ч второй автомобиль. Найдите скорость первого автомобиля, если автомобили встретились на расстоянии 300 км от города А. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите уравнение $(\cos x - 1)(\operatorname{tg} x + \sqrt{3})\sqrt{\cos x} = 0$.

C2 Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1. Найдите расстояние от вершины B до плоскости ACD_1.

C3 Решите неравенство $\frac{\log_2(8x) \cdot \log_{0,125x} 2}{\log_{0,5x} 16} \le \frac{1}{4}$.

C4 Площадь трапеции $ABCD$ равна 72, а одно из оснований трапеции вдвое больше другого. Диагонали пересекаются в точке O; отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N соответственно. Найдите площадь четырехугольника $OMPN$.

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} |3x - y + 2| \le 12, \\ (x - 3a)^2 + (y + a)^2 = 3a + 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

C6 Решите в натуральных числах уравнение

$$n^{k+1} - n! = 7(420k + 1).$$

(Для натурального n символом $n!$ обозначается произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$).

© МИОО, 2011 г.

Диагностическая работа №3
по МАТЕМАТИКЕ

3 марта 2011 года

11 класс

Вариант № 3

Район _____

Город (населенный пункт) _____

Школа _____

Класс _____

Фамилия _____

Имя _____

Отчество _____

© МИОО, 2011 г.

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике дается 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом (B1–B12) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1–C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и записать ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удается выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у вас останется время.

Желаем успеха!

© МИОО, 2011 г.

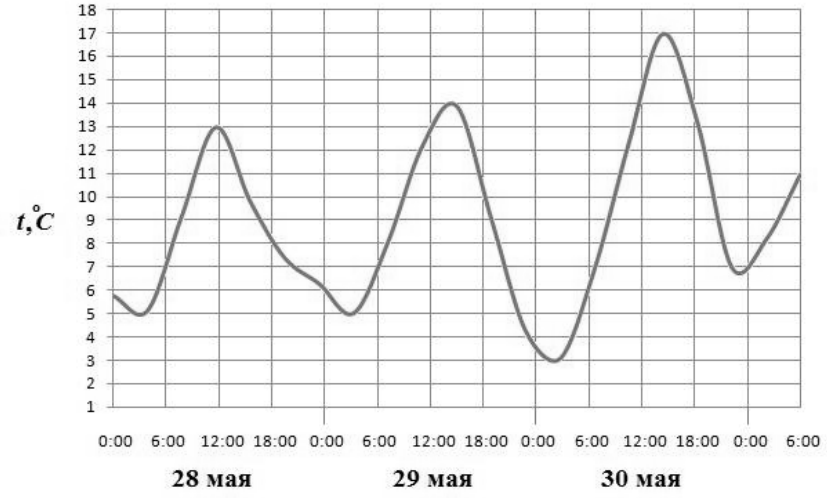
Часть 1

Ответом на задания B1–B12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Выпускники 11 "А" покупают букеты цветов для последнего звонка: из 3 роз каждому учителю и из 11 роз классному руководителю и директору. Они собираются подарить букеты 19 учителям (включая директора и классного руководителя), розы покупаются по цене 35 рублей за штуку. Сколько рублей стоят все розы?

Ответ:

B2 На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали – значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей температурой воздуха 30 мая. Ответ дайте в градусах Цельсия.



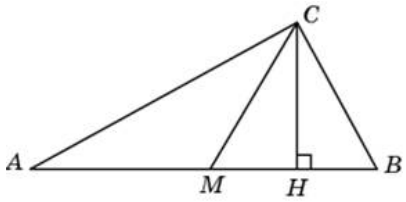
Ответ:

B3 Найдите корень уравнения $\frac{1}{\sqrt{2x+3}} = \frac{1}{5}$.

Ответ:

© МИОО, 2011 г.

B4 Острые углы прямоугольного треугольника равны 53° и 37°. Найдите угол между высотой и медианой, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



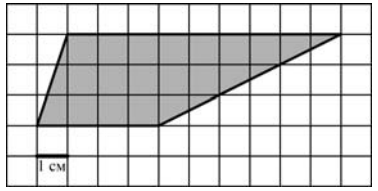
Ответ:

B5 Строительной фирме нужно приобрести 60 кубометров строительного бруса у одного из трех поставщиков. Какова наименьшая стоимость такой покупки с доставкой (в рублях)? Цены и условия доставки приведены в таблице.

Поставщик	Цена бруса (руб. за 1 м^3)	Стоимость доставки	Дополнительные условия
А	3700	10200	
Б	4200	8200	При заказе на сумму больше 150000 руб. доставка бесплатно
В	3800	8200	При заказе на сумму больше 200000 руб. доставка бесплатно

Ответ:

B6 На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.



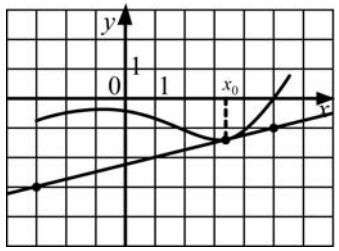
Ответ:

© МИОО, 2011 г.

B7 Найдите значение выражения $3 + 5\text{ctg}^2\alpha \sin^2\alpha$, если $\cos\alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}$.

Ответ:

B8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

B9 Диагональ куба равна 13. Найдите площадь его поверхности.

Ответ:

B10 Расстояние от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h километров над землей, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{2Rh}$, где $R = 6400$ (км) – радиус Земли. С какой высоты горизонт виден на расстоянии 112 километров? Ответ выразите в километрах.

Ответ:

B11 Найдите точку минимума функции $y = \frac{x^2 + 25}{x}$.

Ответ:

© МИОО, 2011 г.

B12 Смешали 3 литра 40-процентного водного раствора некоторого вещества с 12 литрами 35-процентного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Ответ:

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите уравнение $\frac{(\sin x - 1)(2\cos + 1)}{\sqrt{\text{tg}x}} = 0.$

C2 Длина ребра правильного тетраэдра $ABCD$ равна 1. Найдите угол между прямыми DM и CL, где M – середина ребра BC, L – середина ребра AB.

C3 Решите неравенство $\frac{\log_2(2x) \cdot \log_{0,5x}2}{\log_{0,125x}8} \le 1.$

C4 Площадь трапеции $ABCD$ равна 90, а одно из оснований тропеции вдвое больше другого. Диагонали пересекаются в точке O; отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N соответственно. Найдите площадь четырехугольника $OMPN$.

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} |x + 2y + 1| \le 11, \\ (x - a)^2 + (y - 2a)^2 = 2 + a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

C6 Решите в натуральных числах уравнение

$$n^{k+1} - n! = 5(30k + 11).$$

(Для натурального n символом $n!$ обозначается произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$).

© МИОО, 2011 г.

Диагностическая работа №3
по МАТЕМАТИКЕ

3 марта 2011 года

11 класс

Вариант № 4

Район _____

Город (населенный пункт) _____

Школа _____

Класс _____

Фамилия _____

Имя _____

Отчество _____

© МИОО, 2011 г.

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике дается 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом (B1–B12) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1–C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и записать ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удается выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у вас останется время.

Желаем успеха!

© МИОО, 2011 г.

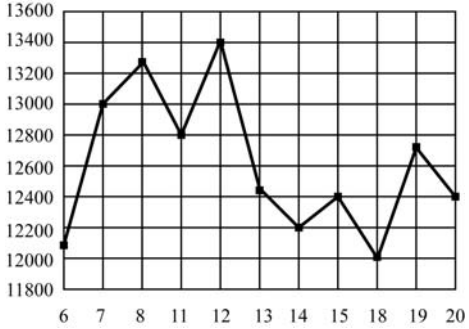
Часть 1

Ответом на задания B1–B12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

B1 На счету Таниного мобильного телефона было 65 рублей, а после разговора с Русланом осталось 29 рублей. Сколько минут длился разговор с Русланом, если одна минута разговора стоит 1 рубль 50 копеек?

Ответ:

B2 На рисунке жирными точками показана цена никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 6 по 20 мая 2009 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – цена тонны никеля в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена никеля на момент закрытия торгов была наибольшей за данный период.



Ответ:

B3 Найдите корень уравнения $\frac{1}{\sqrt{3x+4}} = \frac{1}{5}$.

Ответ:

B4 В параллелограмме $ABCD$ высота, опущенная на сторону AB, равна 14, $AD = 28$. Найдите синус угла B.

Ответ:

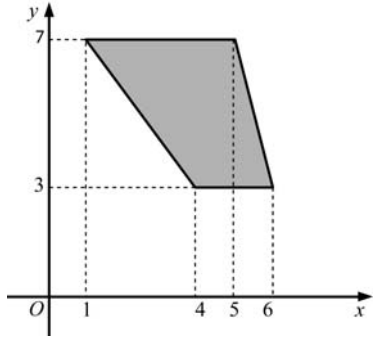
© МИОО, 2011 г.

B5 Для транспортировки 5 тонн груза на 350 км можно воспользоваться услугами одной из трех фирм-перевозчиков. Стоимость перевозки и грузоподъемность автомобилей для каждого перевозчика указана в таблице. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую перевозку?

Фирма-перевозчик	**Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 10 км)**	**Грузоподъемность автомобилей (тонн)**
А	80	1,6
Б	110	2,2
В	140	2,8

Ответ:

B6 Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке.



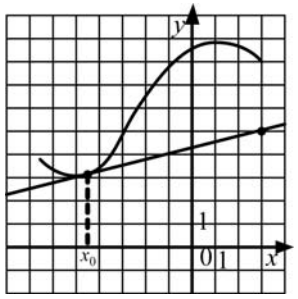
Ответ:

B7 Найдите значение выражения $16\cos^2\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{7}$.

Ответ:

© МИОО, 2011 г.

B8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

B9 Диагональ куба равна 7. Найдите площадь его поверхности.

Ответ:

B10 По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах, равна $I = \frac{\varepsilon}{R + r}$, где ε — ЭДС источника (в Вольтах), $r = 2$ (Ом) — его внутреннее сопротивление, R — сопротивление цепи (в Омах). При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять не более 5% от силы тока короткого замыкания $I_{кз} = \frac{\varepsilon}{r}$? (Ответ выразите в Омах.)

Ответ:

B11 Найдите точку минимума функции $y = \frac{x^2 + 9}{x}$.

Ответ:

© МИОО, 2011 г.

B12 Расстояние между городами А и В равно 390 км. Из города А в город В выехал первый автомобиль, а через три часа после этого навстречу ему из города В выехал со скоростью 70 км/ч второй автомобиль. Найдите скорость первого автомобиля, если автомобили встретились на расстоянии 250 км от города А. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите уравнение $(\cos x - 1)(\operatorname{tg} x + \sqrt{3})\sqrt{\cos x} = 0$.

C2 Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1. Найдите расстояние от вершины B до плоскости ACD_1.

C3 Решите неравенство $\frac{\log_2(8x) \cdot \log_{0,125x} 2}{\log_{0,5x} 16} \le \frac{1}{4}$.

C4 Площадь трапеции $ABCD$ равна 72, а одно из оснований трапеции вдвое больше другого. Диагонали пересекаются в точке O; отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N соответственно. Найдите площадь четырехугольника $OMPN$.

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} |3x - y + 2| \le 12, \\ (x - 3a)^2 + (y + a)^2 = 3a + 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

C6 Решите в натуральных числах уравнение

$$n^{k+1} - n! = 7(420k + 1).$$

(Для натурального n символом $n!$ обозначается произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$).

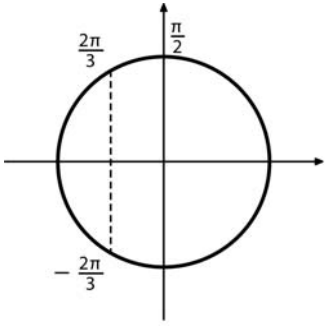
© МИОО, 2011 г.

Вар	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
1	3700	13	16	42	178500	18	4	0,75	242	0,18	4	30
2	18	3	7	0,8	328000	16	10	0,75	162	2	3	50
3	2555	14	11	16	228000	19,5	6	0,25	338	0,98	5	36
4	24	12	7	0,5	9800	12	14	0,25	98	38	3	50
5	147,6	16	5	53	2,25	6	12	0,75	128	0,08	-2	10
6	29,8	3	2	40	250	6	-12	0,75	288	48	3	300
7	46,8	7	-1	84	1,75	13,5	-9	0,25	200	0,5	0,1	11
8	82,5	9	2	102	280	7	18	0,25	392	18	0,5	150

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $\dfrac{(\sin x - 1)(2\cos x + 1)}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = 0.$

Решение:



Левая часть уравнения имеет смысл при $\operatorname{tg} x > 0$.

Приравняем числитель к нулю:

$$(\sin x - 1)(2\cos x + 1) = 0,$$

откуда $\sin x = 1$ или $\cos x = -\dfrac{1}{2}$.

1 случай: $\sin x = 1$. Тогда $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$.

2 случай: $\cos x = -\dfrac{1}{2}$. Тогда $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Учитывая условие $\cos x \neq 0$, получаем, что числа $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$ не являются решениями данного уравнения.

Учитывая условие $\operatorname{tg} x > 0$, получаем, что числа $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$ не являются решениями данного уравнения.

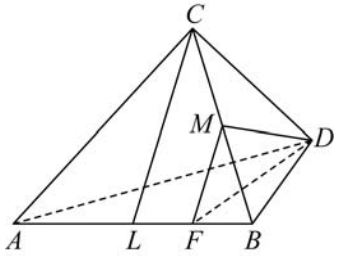
Ответ: $-\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z.$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Верно найдены все значения переменной x, при которых равен нулю числитель левой части исходного уравнения. Отбор найденных значений либо не произведен, либо произведен неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

© МИОО, 2011 г.

C2 Длина ребра правильного тетраэдра $ABCD$ равна 1. Найдите угол между прямыми DM и CL, где M – середина ребра BC, L – середина ребра AB.

Решение:



Пусть прямая MF, параллельная прямой CL, пересекает прямую AB в точке F. Тогда искомый угол между прямыми DM и CL равен углу DMF. Обозначим $\angle DMF$ буквой α.

MF – средняя линия треугольника BCL, поэтому

$$MF = \frac{1}{2}CL = \frac{\sqrt{3}}{4},\ BF = \frac{1}{2}BL = \frac{1}{4}.$$

Выразим квадрат отрезка DF по теореме косинусов в двух треугольниках DMF и BDF.

$$DF^2 = DM^2 + FM^2 - 2DM \cdot FM\cos\alpha = BD^2 + BF^2 - 2BD \cdot BF\cos 60^\circ.$$

Поскольку $DM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $BD = 1$, подставляя числовые данные, получим:

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{16} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\cos\alpha = 1 + \frac{1}{16} - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2};\ \cos\alpha = \frac{1}{6}.$$

Ответ: $\arccos\dfrac{1}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Задача обоснованно сведена к планиметрической, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

© МИОО, 2011 г.

C3 Решите неравенство $\dfrac{\log_2(2x)\cdot\log_{0,5x}2}{\log_{0,125x}8}\le 1$.

Решение: Левая часть неравенства имеет смысл при $x>0$, $0,5x\ne 1$ и $0,125x\ne 1$, то есть при $x>0$, $x\ne 2$ и $x\ne 8$.
При этих условиях получаем:

$$\frac{\log_2(2x)\cdot\dfrac{1}{\log_2(0,5x)}}{\dfrac{3}{\log_2(0,125x)}}\le 1;\ \frac{\left(\log_2 2+\log_2 x\right)\left(\log_2 0,125+\log_2 x\right)}{\log_2 0,5+\log_2 x}\le 3;$$

$$\frac{\left(\log_2 x+1\right)\left(\log_2 x-3\right)}{\log_2 x-1}\le 3.$$

Сделаем замену: $y=\log_2 x$. Тогда $\dfrac{(y+1)(y-3)}{y-1}\le 3;\ \dfrac{y(y-5)}{y-1}\le 0.$

Получаем: $y\le 0$ или $1<y\le 5$. Следовательно, $0<x\le 1$ или $2<x\le 32$. Осталось исключить точку 8.

Ответ: (0; 1]; (2; 8); (8; 32].

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным количеством значений переменной, при которых определены обе части исходного неравенства	2
Верно произведены преобразования, приводящие к неравенству-следствию, дробно-рациональному относительно $\log_2 x$. Возможно, что условия существования левой части данного неравенства не найдены или найдены неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

© МИОО, 2011 г.

C4 Площадь трапеции $ABCD$ равна 90, а одно из оснований тропеции вдвое больше другого. Диагонали пересекаются в точке O; отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N соответственно. Найдите площадь четырехугольника $OMPN$.

Решение:

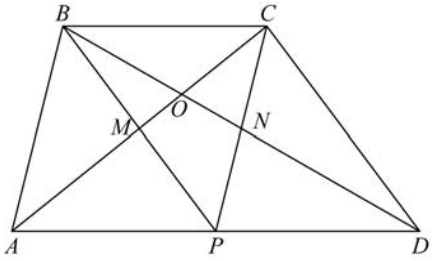


Рис. 1

Пусть h – высота трапеции, а основания равны a и $2a$. Тогда

$S_{ABCD}=\dfrac{a+2a}{2}h=\dfrac{3}{2}ah=90$, откуда $ah=60$.

Пусть $AD=2a$, $BC=a$ (рис. 1). Четырехугольники $ABCP$ и $BCDP$ – параллелограммы, поэтому M и N – середины BP и CP соответственно, значит, CM и BN – медианы треугольника BPC. Следовательно,

$$S_{OMPN}=\frac{1}{3}S_{\triangle BPC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}ah=\frac{1}{6}\cdot 60=10.$$

Пусть теперь $BC=2a$; $AD=a$ (рис. 2). Положим, $AM=3t$. Треугольник AOD подобен треугольнику COB с коэффициентом 2, а треугольник AMP – треугольнику CMB с коэффициентом $\dfrac{AP}{BC}=\dfrac{1}{4}$.
Тогда

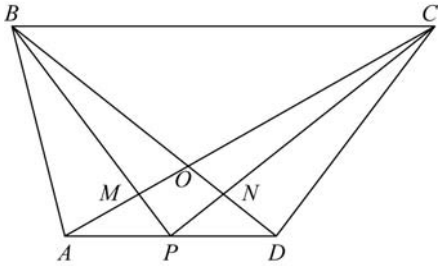


Рис. 2

$MC=4AM=12t,\quad AC=AM+MC=3t+12t=15t,$

$AO=\dfrac{1}{3}AC=5t,\quad \dfrac{AM}{AO}=\dfrac{3t}{5t}=\dfrac{3}{5}.$

Аналогично, $\dfrac{DN}{DO}=\dfrac{3}{5}$.

Высота треугольника AOD, проведенная из вершины O, равна $\dfrac{1}{3}h$, значит,

© МИОО, 2011 г.

$$S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{3}h = \frac{1}{6}ah = \frac{1}{6} \cdot 60 = 10,$$

$$S_{\triangle DNP} = S_{\triangle AMP} = \frac{AM}{AO} \cdot \frac{AP}{AD} S_{\triangle AOD} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 = 3.$$

Следовательно,

$$S_{OMPN} = S_{\triangle AOD} - S_{\triangle DNP} - S_{\triangle AMP} = 10 - 3 - 3 = 4.$$

Ответ: 10 или 4.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

© МИОО, 2011 г.

С5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

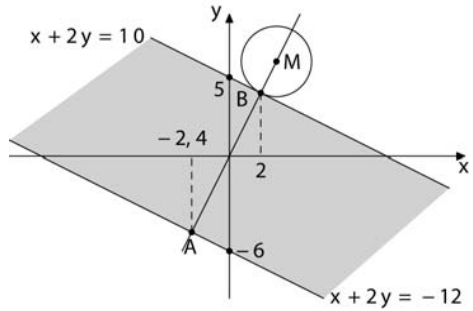
$$\begin{cases} |x + 2y + 1| \le 11, \\ (x - a)^2 + (y - 2a)^2 = 2 + a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение:

Преобразуем систему:

$$\begin{cases} -12 \le x + 2y \le 10, \\ (x - a)^2 + (y - 2a)^2 = 2 + a. \end{cases}$$



Неравенство

$$-12 \le x + 2y \le 10$$

задаёт на плоскости полосу, граница которой – пара параллельных прямых:

$$x + 2y = 10 \quad \text{и} \quad x + 2y = -12.$$

Если $a < -2$, то система не имеет решений, поскольку правая часть уравнения становится отрицательной.

Если $a = -2$, то уравнение принимает вид

$$(x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 0$$

и задает единственную точку $(-2; -4)$, координаты которой удовлетворяют неравенству

$$|-2 - 8 + 1| = 9 < 11.$$

Следовательно, при $a = -2$ система имеет единственное решение.

Рассмотрим случай $a > -2$. Тогда уравнение

$$(x - a)^2 + (y - 2a)^2 = 2 + a$$

определяет окружность радиусом $r = \sqrt{2 + a}$. Центр $M(a; 2a)$ окружности лежит на прямой $y=2x$, которая перпендикулярна граничным прямым полосы и пересекает их в точках A $(-2{,}4; -4{,}8)$ и B $(2; 4)$. Система имеет единственное решение, если только окружность внешним образом касается полосы в точке A или в точке B. Если точка касания A, то $a < -2{,}4$, что невозможно.

Окружность касается полосы в точке B, только если $a>2$ и $MB=r$. Получаем:

© МИОО, 2011 г.

$$(a-2)^2+(2a-4)^2=2+a;\quad 5a^2-21a+18=0.$$

Корни: $a=3$, $a=1{,}2$. Условию $a>2$ удовлетворяет только корень $a=3$.

Ответ: –2, 3.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Решение в целом верное, но допущена вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу	3
Обоснованно найдено значение 3, однако в ответ включены посторонние значения, полученные в других случаях касания окружности и полосы, либо не рассмотрен случай $a=-2$ (либо рассмотрен, но значение –2 не признано подходящим значением параметра)	2
Решение содержит - или верное описание взаимного расположения окружности и полосы; - или верный переход к уравнениям относительно a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

© МИОО, 2011 г.

С6 Решите в натуральных числах уравнение

$$n^{k+1}-n!=5(30k+11).$$

(Для натурального n символом $n!$ обозначается произведение $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$).

Решение:

Очевидно, $5(30k+11)$ делится на n. Случай $n=1$ не подходит, а простых делителей, меньших, чем 5, число $5(30k+11)$ не имеет. Следовательно, $n\geq 5$. Тогда $n!$ делится на 5 и поэтому в равенстве

$$n^{k+1}=n!+5(30k+11)$$

правая часть делится на 5, поэтому левая часть тоже делится на 5. Значит, n делится на 5. Предположим, что $n=5m$, где $m>1$. Тогда после деления на 5 данное уравнение принимает вид

$$5^k m^{k+1}-4!\cdot 6\cdot 7\cdot \ldots \cdot 5m=30k+11.$$

Левая часть делится на 5, а правая не делится. Противоречие. Осталось рассмотреть случай $n=5$.

Уравнение принимает вид

$$5^{k+1}-5!=5\left(30k+11\right),$$

откуда

$$5^{k-1}=6k+7.$$

Очевидно, $k=1$ и $k=2$ не удовлетворяют полученному равенству, а при $k=3$ обе части равны 25.

Остается доказать, что б***о***льших подходящих значений k нет.

Рассмотрим последовательность $a_k=5^{k-1}-6k-7$ и разность $a_{k+1}-a_k$:

$$a_{k+1}-a_k=5^k-6(k+1)-7-5^{k-1}+6k+7=5^{k-1}\cdot 4-6.$$

При $k\geq 2$ эта разность положительна, следовательно, последовательность возрастает. Значит, если $k>3$, то $a_k>a_3=0$, а поэтому $5^{k-1}>6k+7$.

Ответ: $n=5$, $k=3$.

© МИОО, 2011 г.

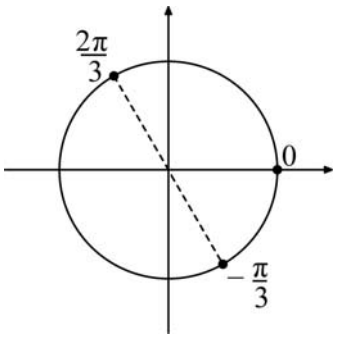
Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получены верные значения n и k	4
Обоснованно найдено верное значение n; подбором найдено k, однако доказательство отсутствия б***о***льших значений k отсутствует или содержит ошибку	3
Обоснованно найдено верное значение n, однако значение k не найдено, найдено неверно или ответ содержит лишние значения k	2
Имеется верный ответ, найденный подбором или с помощью неполных рассуждений. Обоснование единственности n отсутствует, приведено неполностью или содержит ошибку	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

© МИОО, 2011 г.

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $(\cos x - 1)(\operatorname{tg} x + \sqrt{3})\sqrt{\cos x} = 0$.

Решение:



Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x > 0$.
Поэтому множитель $\sqrt{\cos x}$ положителен.
1 случай: $\cos x - 1 = 0$. Тогда $x = 2\pi k,\ k \in Z$.
2 случай: $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$. Тогда $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$.
Учитывая условие $\cos x > 0$, получаем, что числа

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$$

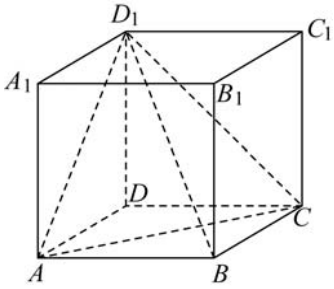
не являются решениями данного уравнения.
Ответ: $2\pi k,\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Верно найдены все значения переменной x, при которых равно нулю выражение $(\cos x - 1)(\operatorname{tg} x + \sqrt{3})$, но отбор найденных значений либо не произведен, либо произведен неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

© МИОО, 2011 г.

C2 Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1. Найдите расстояние от вершины B до плоскости ACD_1.

Решение:



Искомое расстояние от вершины B до плоскости ACD_1 равно высоте пирамиды $BACD_1$, опущенной на плоскость грани ACD_1.
Обозначим это расстояние d и вычислим объём V пирамиды $BACD_1$ двумя способами:

$$V = \frac{1}{3} \cdot d \cdot S_{ACD_1};\quad V = \frac{1}{3} \cdot DD_1 \cdot S_{ABC}.$$

Отсюда $d = DD_1 \cdot \frac{S_{ABC}}{S_{ACD_1}}$.

Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1, поэтому

$$DD_1 = 1,\ S_{ABC} = \frac{1}{2},\ AC = CD_1 = D_1A = \sqrt{2}$$

и поэтому $S_{ACD_1} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Отсюда $d = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Способ нахождения искомого расстояния верен, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

© МИОО, 2011 г.

C3 Решите неравенство $\dfrac{\log_2(8x)\cdot\log_{0,125x}2}{\log_{0,5x}16}\le\dfrac{1}{4}$.

Решение: Левая часть неравенства имеет смысл при $x>0$, $0,5x\ne1$ и $0,125x\ne1$,то есть при $x>0$, $x\ne2$ и $x\ne8$.
При этих условиях получаем:

$$\frac{\log_2(8x)\cdot\dfrac{1}{\log_2(0,125x)}}{\dfrac{4}{\log_2(0,5x)}}\le\frac14;\ \frac{\left(\log_28+\log_2x\right)\left(\log_20,5+\log_2x\right)}{\log_20,125+\log_2x}\le1;$$

$$\frac{\left(\log_2x+3\right)\left(\log_2x-1\right)}{\log_2x-3}\le1.$$

Сделаем замену $t=\log_2x$. Тогда $\dfrac{(t+3)(t-1)}{t-3}\le1$; $\dfrac{t\cdot(t+1)}{t-3}\le0$.

Значит, $t\le-1$ или $0\le t<3$, следовательно, $0<x\le0,5$ или $1\le x<8$. Осталось исключить точку 2.

Ответ: $(0;\ 0,5]$; $[1;\ 2)$; $(2;\ 8)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным количеством значений переменной, при которых определены обе части исходного неравенства	2
Верно произведены преобразования, приводящие к неравенству-следствию, дробно-рациональному относительно $\log_2x$. Возможно, что условия существования левой части данного неравенства не найдены или найдены неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

© МИОО, 2011 г.

C4 Площадь трапеции $ABCD$ равна 72, а одно из оснований трапеции вдвое больше другого. Диагонали пересекаются в точке O; отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N соответственно. Найдите площадь четырехугольника $OMPN$.

Решение:

Пусть h – высота трапеции, а основания равны a и $2a$. Тогда

$S_{ABCD}=\dfrac{a+2a}{2}h=\dfrac{3}{2}ah=72$, откуда $ah=48$.

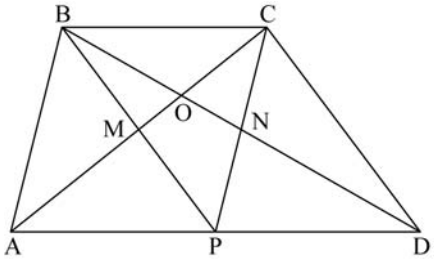


Рис. 1

Пусть $BC=a$; $AD=2a$ (рис.1). Четырехугольники $ABCP$ и $BCDP$ – параллелограммы, поэтому M и N – середины BP и CP соответственно, значит, CM и BN – медианы треугольника BPC. Следовательно,

$$S_{OMPN}=\frac13S_{\triangle BPC}=\frac13\cdot\frac12ah=\frac16\cdot48=8.$$

Пусть теперь $BC=2a$; $AD=a$ (рис.2). Положим, $AM=3t$. Треугольник AOD подобен треугольнику COB с коэффициентом 2, а треугольник AMP – треугольнику CMB с коэффициентом $\dfrac{AP}{BC}=\dfrac14$.

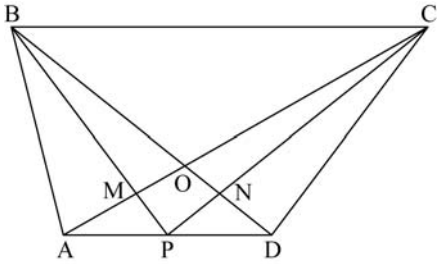


Рис. 2

Тогда

$MC=4AM=12t$, $\quad AC=AM+MC=3t+12t=15t$,

$AO=\dfrac13AC=5t$, $\quad\dfrac{AM}{AO}=\dfrac{3t}{5t}=\dfrac35$.

Аналогично, $\dfrac{DN}{DO}=\dfrac35$.

Высота треугольника AOD, проведенная из вершины O, равна $\dfrac13h$, значит,

© МИОО, 2011 г.

$$S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{3}h = \frac{1}{6}ah = \frac{1}{6} \cdot 48 = 8,$$

$$S_{\triangle DNP} = S_{\triangle AMP} = \frac{AM}{AO} \cdot \frac{AP}{AD} S_{\triangle AOD} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 = 2,4.$$

Следовательно,

$$S_{OMPN} = S_{\triangle AOD} - S_{\triangle DNP} - S_{\triangle AMP} = 8 - 2,4 - 2,4 = 3,2.$$

Ответ: 8 или 3,2.

Содержание критерия	**Баллы**
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

© МИОО, 2011 г.

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

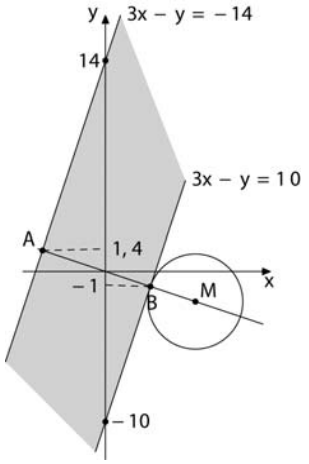
$$\begin{cases} |3x - y + 2| \le 12, \\ (x - 3a)^2 + (y + a)^2 = 3a + 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение:

Преобразуем систему:

$$\begin{cases} -14 \le 3x - y \le 10, \\ (x - 3a)^2 + (y + a)^2 = 3a + 4. \end{cases}$$



Неравенство $-14 \le 3x - y \le 10$ задаёт на плоскости полосу, граница которой – пара параллельных прямых:

$$3x - y = -14 \text{ и } 3x - y = 10.$$

Если $a < -\frac{4}{3}$, то система не имеет решений, поскольку правая часть уравнения становится отрицательной.

Если $a = -\frac{4}{3}$, то уравнение принимает вид

$$(x + 4)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = 0$$

и задает единственную точку $\left(-4; \frac{4}{3}\right)$, координаты которой удовлетворяют неравенству:

$$\left|-12 - \frac{4}{3} + 2\right| = \frac{34}{3} < 12.$$

Следовательно, при $a = -\frac{4}{3}$ система имеет единственное решение.

Рассмотрим случай $a > -\frac{4}{3}$. Тогда уравнение

$$(x - 3a)^2 + (y + a)^2 = 3a + 4$$

© МИОО, 2011 г.

определяет окружность радиусом $r=\sqrt{3a+4}$. Центр $M(3a;\ -a)$ окружности лежит на прямой $y=-\frac{1}{3}x$, которая перпендикулярна граничным прямым полосы и пересекает их в точках $A(-4{,}2;\ 1{,}4)$ и $B(3;\ -1)$. Система имеет единственное решение, если только окружность касается полосы в точке A или в точке B. Если точка касания A, то $-a>1,4$, что невозможно, поскольку $a>-\frac{4}{3}$.

Окружность касается полосы в точке B, только если $a>1$ и $MB=r$. Получаем:

$$(3-3a)^2+(-1+a)^2=3a+4;\quad 10a^2-23a+6=0.$$

Корни: $a=2,\quad a=0,3$. Условию $a>1$ удовлетворяет только корень $a=2$.

Ответ: $-\frac{4}{3},\ 2$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ	4
Решение в целом верное, но допущена вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу	3
Обоснованно найдено значение 2, однако в ответ включены посторонние значения, полученные в других случаях касания окружности и полосы, либо не рассмотрен случай $a=-\frac{4}{3}$ (либо рассмотрен, но соответствующее значение не признано подходящим значением параметра)	2
Решение содержит - или верное описание взаимного расположения окружности и полосы; - или верный переход к уравнениям относительно a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

© МИОО, 2011 г.

C6 Решите в натуральных числах уравнение

$$n^{k+1}-n!=7(420k+1).$$

(Для натурального n символом $n!$ обозначается произведение $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$).

Решение:

Очевидно, $7(420k+1)$ делится на n. Случай $n=1$ решений не дает. Простых делителей меньших, чем 7, число $7(420k+1)$ не имеет. Следовательно, $n\geq 7$. Тогда $n!$ делится на 7 и поэтому в равенстве

$$n^{k+1}=n!+7(420k+1)$$

правая часть делится на 7, тогда левая часть тоже делится на 7. Значит, n делится на 7.

Предположим, что $n=7m$, где $m>1$. Тогда после деления на 7 данное уравнение принимает вид

$$7^k m^{k+1}-6!\cdot 8\cdot 9\cdot \ldots \cdot 7m=420k+1.$$

Левая часть делится на 7, а правая не делится. Противоречие. Осталось рассмотреть случай $n=7$.

Уравнение принимает вид $7^{k+1}-7!=7\left(420k+1\right)$, откуда

$$7^{k-1}=60k+103.$$

Очевидно, $k=1$, $k=2$ и $k=3$ не удовлетворяют полученному равенству, а при $k=4$ обе части равны 343. Остается доказать, что б**о**льших подходящих значений k нет. Рассмотрим последовательность $a_k=7^{k-1}-60k-103$ и разность $a_{k+1}-a_k$:

$$a_{k+1}-a_k=7^k-60(k+1)-103-7^{k-1}+60k+103=7^{k-1}\cdot 6-60.$$

При $k\geq 3$ эта разность положительна, следовательно, последовательность возрастает. Значит, если $k>4$, то $a_k>a_4=0$, а поэтому $7^{k-1}>60k+103$.

Ответ: $n=7,\ k=4$.

© МИОО, 2011 г.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получены верные значения n и k	4
Обоснованно найдено верное значение n; подбором найдено k, однако доказательство отсутствия б**о**льших значений k отсутствует или содержит ошибку	3
Обоснованно найдено верное значение n, однако значение k не найдено, найдено неверно или ответ содержит лишние значения k	2
Имеется верный ответ, найденный подбором или с помощью неполных рассуждений. Обоснование единственности n отсутствует, приведено неполностью или содержит ошибку	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

© МИОО, 2011 г.