

Фамилия _____ Имя _____

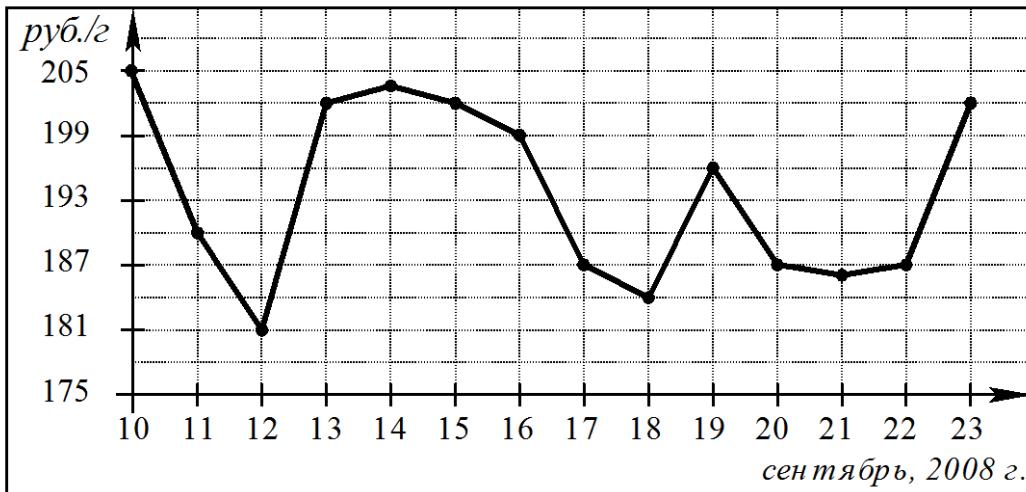
Школа _____ Класс _____

Часть 1**Ответом на задания В1–В12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.**

- B1** Пачка стирального порошка стоит 60 рублей. Какое наибольшее число пачек можно купить на 300 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 25%?

Ответ: _____

- B2** На рисунке показано изменение цен на палладий в период с 10 по 23 сентября 2008 года (в рублях за грамм).



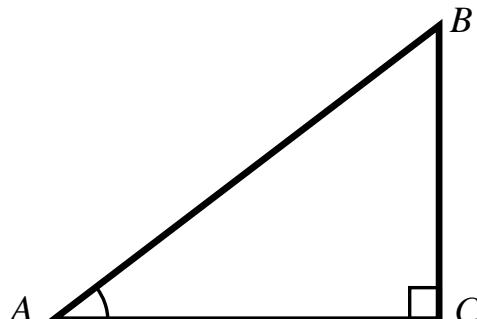
Определите по графику разность наибольшей и наименьшей цены в период с 15 по 21 сентября 2008 года. Ответ дайте в рублях за грамм палладия.

Ответ: _____

- B3** Найдите корень уравнения $\log_3(5 - x) = 2$.

Ответ: _____

- B4** В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 8$, $\cos A = 0,8$. Найдите длину стороны BC .

Ответ: _____

B5

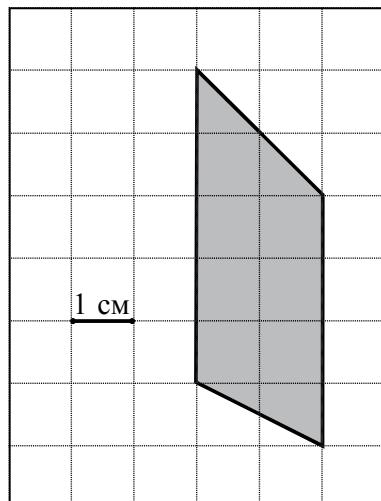
Для гостиницы требуется заказать 60 одинаковых штор в одной из трех фирм. На каждую штору уходит 2,5 м портьерной ткани. В таблице приведены цены на ткань, а также на пошив штор. Сколько рублей нужно заплатить за самый дешевый заказ с учетом пошива штор?

| Фирма | Стоимость портьерной ткани (рублей за 1 м) | Пошив (рублей за одну штору) | Дополнительные условия |
|-------|--|------------------------------|--|
| А | 370 | 55 | |
| Б | 380 | 40 | |
| В | 390 | 50 | Пошив бесплатный, если сумма заказа превышает 50000 руб. |

Ответ: _____

B6

Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____

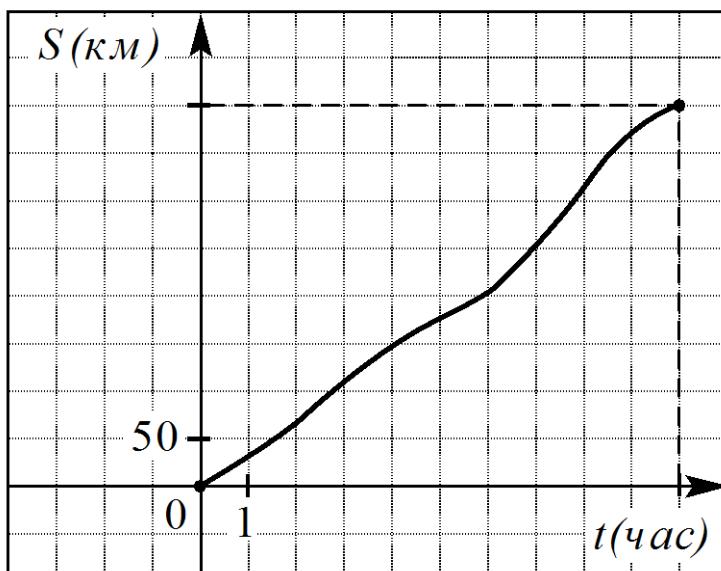
B7

Вычислите значение выражения $\log_{\sqrt{3}} 1,5 + \log_{\sqrt{3}} 2$.

Ответ: _____

B8

На рисунке изображен график движения междугороднего автобуса. На оси абсцисс откладывается время в часах, а на оси ординат – пройденный путь в км.



По графику определите среднюю скорость автобуса на всем пути. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: _____

B9

Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда высотой 30 см. Если в него налить 30 л воды, то до верхнего края останется 5 см. Сколько литров воды нужно, чтобы наполнить пустой аквариум доверху?

Ответ: _____

B10

При температуре 0°C железнодорожный рельс имеет длину $l_0 = 15\text{ м}$. При укладке железнодорожного полотна между двумя рельсами оставили зазор 6,3 мм. При нагреве происходит тепловое расширение металла, и длина рельса меняется по закону $l(t^{\circ}) = l_0(1 + \alpha \cdot t^{\circ})$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (\text{ }^{\circ}\text{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой минимальной температуре между рельсами исчезнет зазор? (Ответ выразите в градусах Цельсия.)

Ответ: _____

B11 Найдите корень уравнения $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$.

Ответ: _____

B12 Два велосипедиста одновременно отправляются в 90-километровый пробег. Скорость первого на 3 км/ч выше, чем скорость второго, поэтому первый велосипедист прибывает к финишу на 1,5 ч раньше, чем второй. Найдите скорость второго велосипедиста. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите систему

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = 1, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1. \end{cases}$$

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью AA_1C и прямой A_1B , если $AA_1 = 3$, $AB = 4$, $BC = 4$.

C3 Решите неравенство $\log_2(x^2 - 4) - 3\log_2 \frac{x+2}{x-2} > 2$.

C4 В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D так, что $BD:DC = 1:2$. Медиана CE пересекает отрезок AD в точке F . Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника AEF .

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых график функции

$$f(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3| - a$$

пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

C6 Найдите все пары натуральных чисел m и n , являющиеся решениями уравнения $2^m - 3^n = 1$.

| B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 |
|-----------|-----------|-----------|------------|------------|------------|
| 6 | 18 | -4 | 6 | 58500 | 9 |
| B7 | B8 | B9 | B10 | B11 | B12 |
| 2 | 40 | 36 | 35 | 2 | 12 |

C1 Решите систему

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = 1, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1. \end{cases}$$

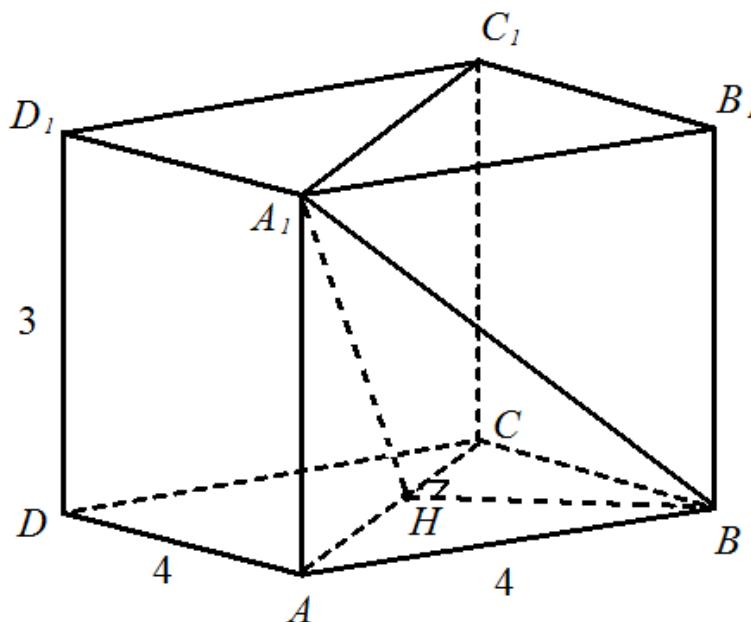
Из второго уравнения находим: $\sin^2 x - \sin^2 y = 0$. Учитывая, что $\sin x - \sin y = 1$, получаем систему:

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = 1, \\ \sin x + \sin y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2\sin x = 1, \\ 2\sin y = -1. \end{cases}$$

Ответ: $((-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi; (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi)$, $n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$.

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью AA_1C и прямой A_1B , если $AA_1 = 3$, $AB = 4$, $BC = 4$.

Из точки B проведем перпендикуляр BH к AC . A_1H – проекция A_1B на плоскость AA_1C . Значит, нужно найти угол BA_1H .



В прямоугольном треугольнике ABC находим: $BH = 2\sqrt{2}$.

В прямоугольном треугольнике A_1AB находим: $A_1B = 5$.

В прямоугольном треугольнике A_1HB находим: $\sin A_1 = \frac{BH}{A_1B} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

Ответ: $\arcsin \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

C3

Решите неравенство $\log_2(x^2 - 4) - 3\log_2 \frac{x+2}{x-2} > 2$.

Из неравенства следует, что либо $x > 2$, либо $x < -2$.

Если $x > 2$, то неравенство принимает вид $\log_2(x+2) - 2\log_2(x-2) < -1$;

$$\log_2 2(x+2) < \log_2(x-2)^2;$$

$$2x + 4 < (x-2)^2;$$

$$x^2 - 6x > 0;$$

$$x(x-6) > 0.$$

Учитывая, что $x > 2$, получаем: $x > 6$.

Если $x < -2$, то неравенство принимает вид $\log_2(-x-2) - 2\log_2(2-x) < -1$;

$$\log_2 2(-x-2) < \log_2(2-x)^2;$$

$$-2x - 4 < (2-x)^2;$$

$$x^2 - 2x + 8 > 0.$$

Полученное неравенство выполняется при всех x .

Ответ: $x < -2$ или $x > 6$.

C4

В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D так, что $BD:DC = 1:2$. Медиана CE пересекает отрезок AD в точке F . Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника AEF .

Возьмем точку K на AB так, что $DK \parallel EC$. Если $BK = x$, то $KE = 2x$ и $EA = EB = 3x$. Значит, $S_{AEF} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 S_{AED} = \frac{9}{25} \cdot \frac{5}{6} S_{ABD} = \frac{9}{25} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} S_{ABC} = \frac{1}{10} S_{ABC}$.

Ответ: 0,1.

C5

Найдите все значения a , при каждом из которых график функции

$$f(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3| - a$$

пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3|$.

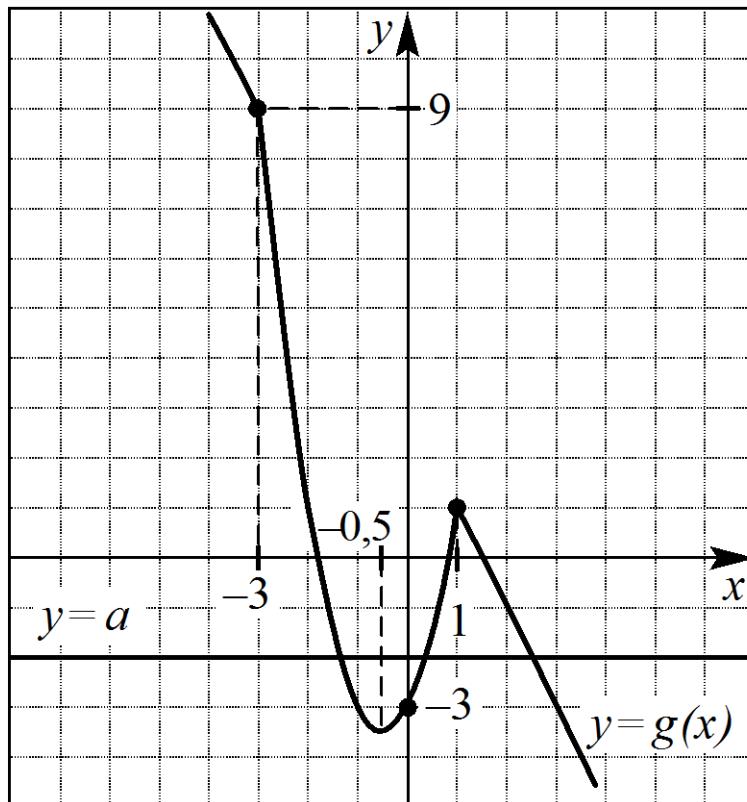


График функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в трех или более точках, если уравнение $g(x) = a$ имеет более двух различных корней.

Если $x \leq -3$ или $x \geq 1$, то $|x^2 + 2x - 3| = x^2 + 2x - 3$, и $g(x) = -2x + 3$.

Если $-3 < x < 1$, то $|x^2 + 2x - 3| = -x^2 - 2x + 3$, и $g(x) = 2x^2 + 2x - 3$.

График функции $g(x)$ состоит из двух лучей и дуги параболы. На рисунке видно, что уравнение $g(x) = a$ имеет более двух корней, только если $g(-\frac{1}{2}) < a < g(1)$.

$$g(-\frac{1}{2}) = -3,5; g(1) = 1.$$

Ответ: $-3,5 < a < 1$.

C6

Найдите все пары натуральных чисел m и n , являющиеся решениями уравнения $2^m - 3^n = 1$.

При любом k число $3^{2k} + 1$ дает остаток 2, а число $3^{2k-1} + 1$ – остаток 4 при делении на 8. Значит, $3^n + 1 = 2^m$, только если $m=1$ или $m=2$ (если $m \geq 3$, то 2^m делится на 8 без остатка).

Если $m=1$, то получаем уравнение $3^n = 1$, решением которого является не натуральное число 0.

Если $m=2$, то получаем уравнение $3^n = 3$, которое имеет натуральное решение $n=1$.

Ответ: $m=2, n=1$.