

Фамилия _____ Имя _____

Школа _____ Класс _____

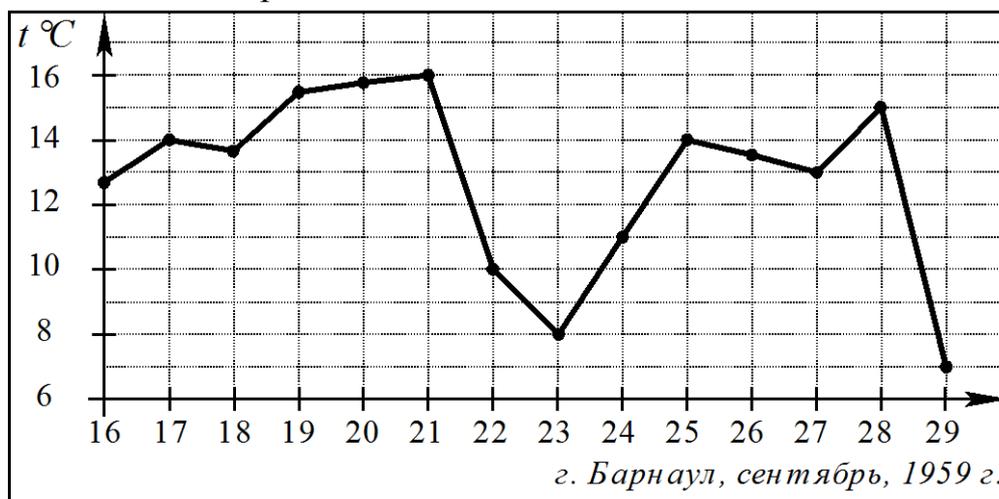
Часть 1

Ответом на задания В1–В12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

В1 Кружка стоит 40 рублей. Какое наибольшее число таких кружек можно будет купить на 600 рублей после повышения цены на 10%?

Ответ: _____

В2 На рисунке показано изменение средней дневной температуры в Барнауле во второй половине сентября 1959 г.



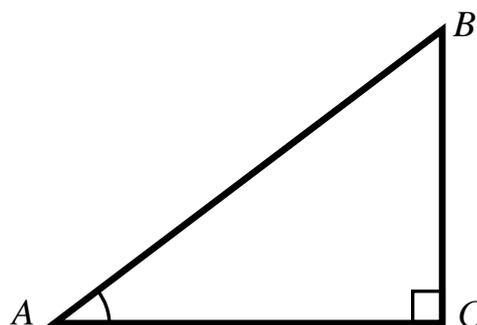
Определите по графику, сколько дней сентября средняя дневная температура находилась в пределах от 9 до 12 градусов Цельсия.

Ответ: _____

В3 Найдите корень уравнения $\sqrt{5-x} = 3$.

Ответ: _____

В4 В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 15$, $\sin A = 0,8$. Найдите длину стороны AC .



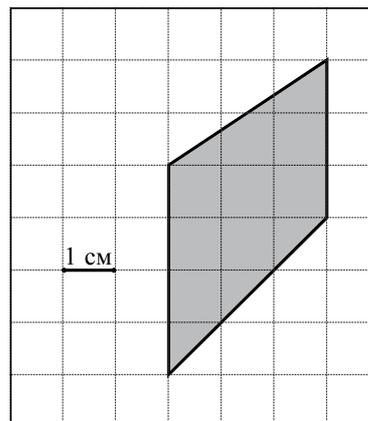
Ответ: _____

B5 Строительной фирме нужно приобрести 20 тонн песка у одного из трех поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую покупку с доставкой?

Поставщик	Стоимость (рублей за 1 тонну)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
А	650	2000	При заказе не менее 20 тонн скидка на доставку 50%
Б	710	2000	При заказе на сумму больше 10 000 руб. доставка бесплатно
В	610	2500	

Ответ: _____

B6 Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

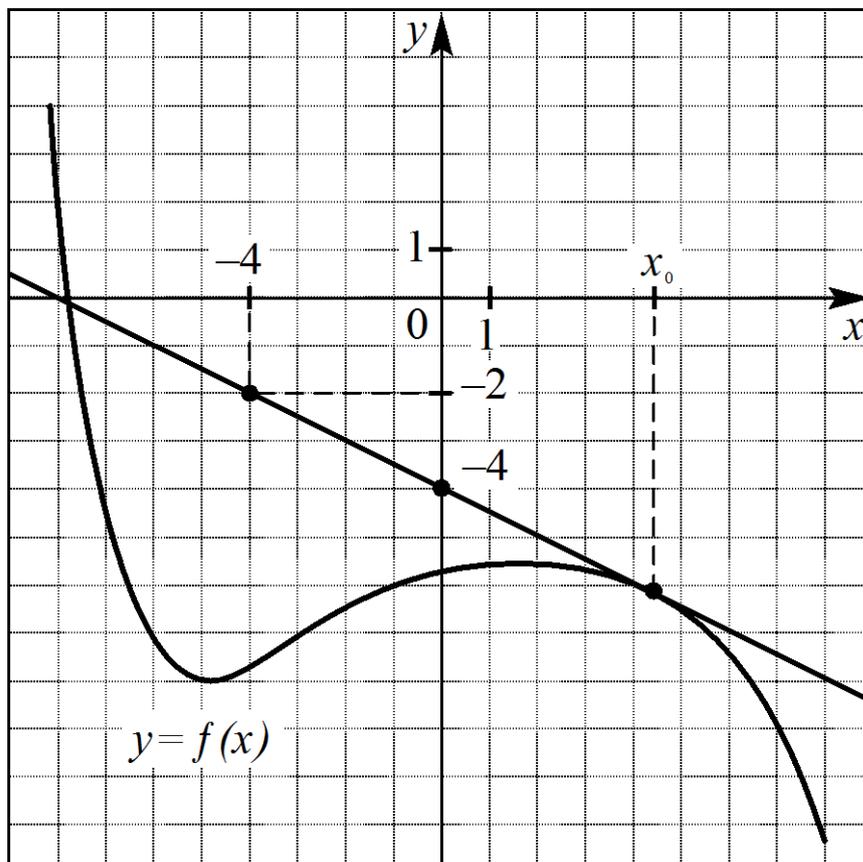


Ответ: _____

B7 Вычислите значение выражения $\frac{6 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6}}{\sqrt{6}}$.

Ответ: _____

- В8** На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведенная в точке x_0 . Пользуясь рисунком, найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____

- В9** Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда высотой 40 см. Чтобы наполнить его доверху, требуется 60 л воды. Сейчас в аквариуме от уровня воды до верхнего края 4 см. Сколько литров воды в аквариуме сейчас?

Ответ: _____

- В10** При температуре 0°C железнодорожный рельс имеет длину $l_0 = 12,5$ м. При укладке железнодорожного полотна между двумя рельсами оставили зазор 6 мм. При нагреве происходит тепловое расширение металла, и длина рельса меняется по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ)$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (\text{C}^\circ)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой минимальной температуре между рельсами исчезнет зазор? (Ответ выразите в градусах Цельсия.)

Ответ: _____

B11 Найдите наименьшее значение функции $y = 2\cos x - 2x - 5$ на отрезке $[-\pi; 0]$.

Ответ: _____

B12 Речной теплоход в 10:00 вышел из пункта А в пункт В, расположенный в 30 км от А. Простояв в пункте В 1 час, теплоход отправился обратно и вернулся в А в 15:00 того же дня. Определите (в км/ч) скорость течения реки, если собственная скорость теплохода равна 16 км/ч.

Ответ: _____

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите систему

$$\begin{cases} (2x^2 - 5x - 3)\sqrt{\cos y} = 0, \\ \sin y = x. \end{cases}$$

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между плоскостью $A_1 BC$ и прямой BC_1 , если $AA_1 = 8$, $AB = 6$, $BC = 15$.

C3 Решите уравнение $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 2$.

C4 В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и CE . Найдите длину отрезка DE , если $AC = 6$, $AE = 2$, $CD = 3$.

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых график функции

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 - |x^2 - 5x + 4| - a$$

пересекает ось абсцисс менее чем в трех различных точках.

C6 Найдите все пары натуральных чисел m и n , являющиеся решениями уравнения $3^n - 2^m = 1$.

B1	B2	B3	B4	B5	B6
13	2	-4	9	14000	10,5
B7	B8	B9	B10	B11	B12
1,5	-0,5	54	40	-3	4

C1 Решите систему

$$\begin{cases} (2x^2 - 5x - 3)\sqrt{\cos y} = 0, \\ \sin y = x. \end{cases}$$

Если $\cos y = 0$, то $y = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$, при этом из второго уравнения следует, что $x = (-1)^k$.

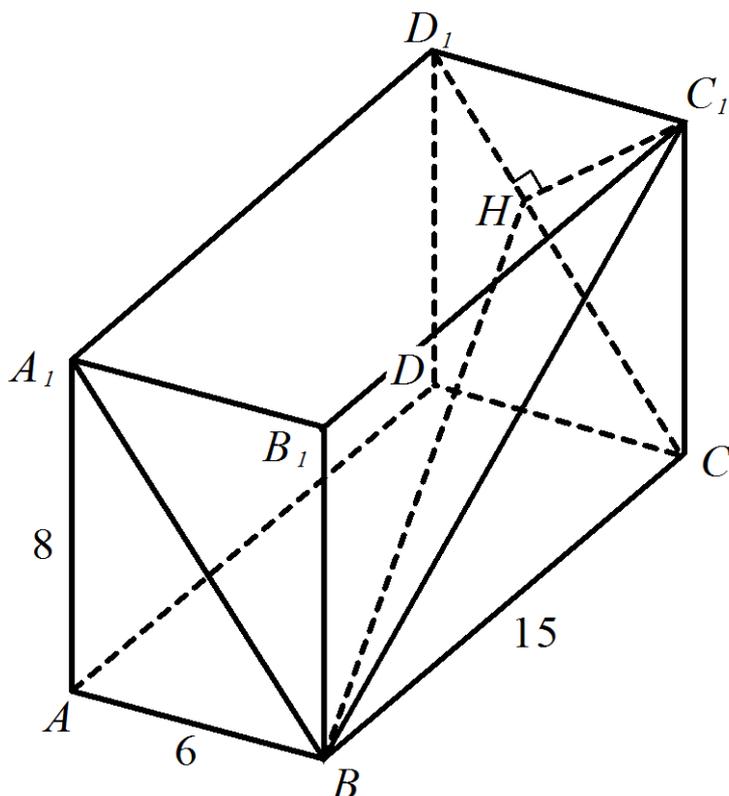
Если $\cos y > 0$, то из первого уравнения находим: $x = 3$ или $x = -\frac{1}{2}$.

При $x = 3$ второе уравнение не имеет решений, а при $x = -\frac{1}{2}$, учитывая условие $\cos y > 0$, получаем: $y = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$.

Ответ: $((-1)^k; \frac{\pi}{2} + \pi k), (-\frac{1}{2}; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k), k \in Z$.

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между плоскостью $A_1 BC$ и прямой BC_1 , если $AA_1 = 8, AB = 6, BC = 15$.

Сечение плоскостью $A_1 BC$ есть прямоугольник $A_1 BCD_1$.



Из точки C_1 проведем перпендикуляр C_1H к CD_1 . BH – проекция BC_1 на плоскость A_1BC . Значит, нужно найти угол C_1BH .

В прямоугольном треугольнике D_1C_1C находим: $C_1H = \frac{D_1C_1 \cdot C_1C}{D_1C} = \frac{24}{5}$.

В прямоугольном треугольнике BCC_1 находим: $BC_1 = 17$.

В прямоугольном треугольнике C_1HB находим: $\sin B = \frac{C_1H}{BC_1} = \frac{24}{85}$.

Ответ: $\arcsin \frac{24}{85}$.

C3

Решите уравнение $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2$.

Сделаем замену переменной: $y = \sqrt{x-1}$. Получаем:

$$\sqrt{y^2 + 2y + 1} - \sqrt{y^2 - 2y + 1} = 2; \quad |y+1| - |y-1| = 2.$$

Учитывая, что $y \geq 0$ и поэтому $y+1 > 0$ Преобразуем уравнение:
 $y+1 - |y-1| = 2; \quad |y-1| = y-1.$

Воспользуемся определением модуля. Получаем: $y-1 \geq 0;$
 $\sqrt{x-1} \geq 1; \quad x \geq 2.$

Ответ: $x \geq 2$.

C4

В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и CE . Найдите длину отрезка DE , если $AC = 6$, $AE = 2$, $CD = 3$.

Обозначим $BD = y$, $BE = z$. Тогда по свойству биссектрисы: $\frac{3+y}{6} = \frac{z}{2}$ и

$$\frac{z+2}{6} = \frac{y}{3}, \text{ откуда } \begin{cases} y+3=3z, \\ z+2=2y; \end{cases} \quad z=1,6; y=1,8,$$

$$AB = 3,6, BC = 4,8.$$

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{3,6^2 + 4,8^2 - 6^2}{2 \cdot 3,6 \cdot 4,8} = 0. \text{ Значит, } \angle B = 90^\circ.$$

$$\text{Тогда } ED^2 = y^2 + z^2 = 1,6^2 + 1,8^2 = 5,8.$$

Ответ: $\sqrt{5,8}$.

C5

Найдите все значения a , при каждом из которых график функции

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 - |x^2 - 5x + 4| - a$$

пересекает ось абсцисс менее чем в трех различных точках.

Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) = x^2 - 3x + 2 - |x^2 - 5x + 4|$.

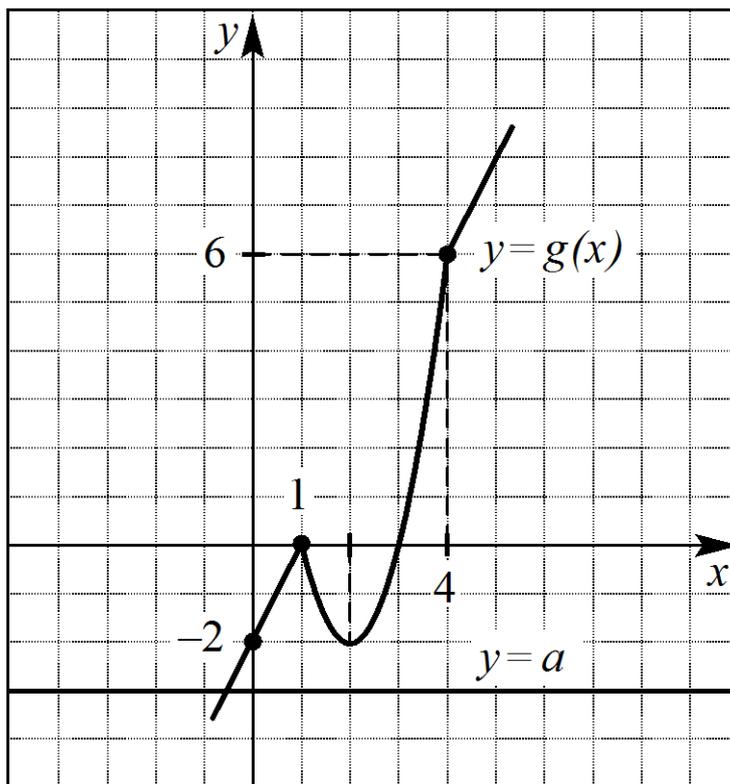


График функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в двух или менее точках, если уравнение $g(x) = a$ имеет менее трех различных корней.

Если $x \leq 1$ или $x \geq 4$, то $|x^2 - 5x + 4| = x^2 - 5x + 4$, и $g(x) = 2x - 2$.

Если $1 < x < 4$, то $|x^2 - 5x + 4| = -x^2 + 5x - 4$, и $g(x) = 2x^2 - 8x + 6$.

График функции $g(x)$ состоит из двух лучей и дуги параболы. На рисунке видно, что уравнение $g(x) = a$ имеет менее трех корней, только если $a \leq g(2)$ или $a \geq g(1)$.

$$g(2) = -2; g(1) = 0.$$

Ответ: $a \leq -2, a \geq 0$.

C6

Найдите все пары натуральных чисел m и n , являющиеся решениями уравнения $3^n - 2^m = 1$.

Пусть n – четное число $n = 2k$. Тогда $2^m = 3^{2k} - 1 = (3^k - 1)(3^k + 1)$. Правая часть – произведение двух последовательных четных чисел, каждое из которых является степенью числа 2. Значит, $3^k - 1 = 2$ и $3^k + 1 = 4$, откуда $k = 1$, и $n = 2$. При этом $2^m = 8$, следовательно, $m = 3$.

Пусть теперь n – нечетное число. Все нечетные степени тройки (3, 27, 243, ...) делятся на 4 с остатком 3. Значит, $3^n - 1$ делится на 4 с остатком 2. Из равенства $2^m = 3^n - 1$ получаем, что в этом случае $m = 1$ (если $m \geq 2$, то 2^m делится на 4 без остатка). При этом $3^n - 1 = 2$, откуда $n = 1$.

Ответ: $m = 3, n = 2$ или $m = n = 1$.