

Фамилия _____ Имя _____
 Школа _____ Класс _____

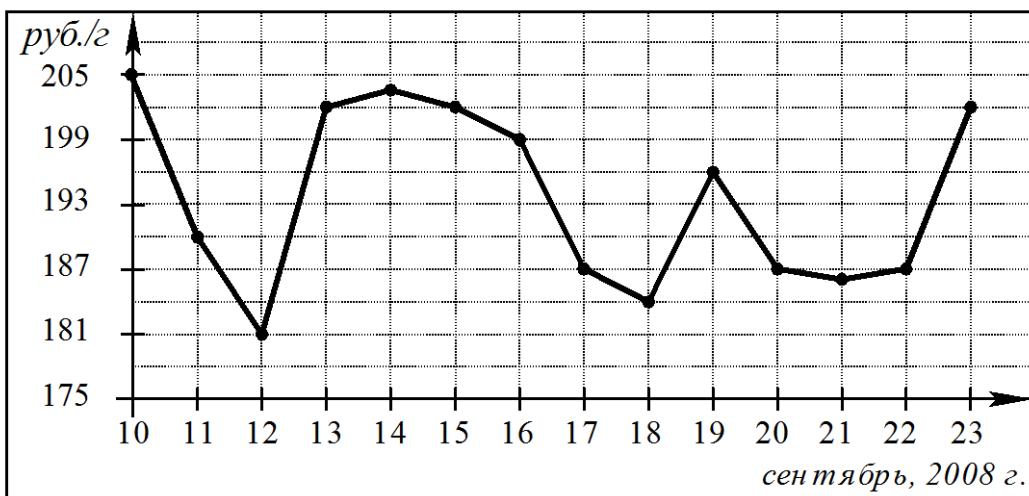
Часть 1

Ответом на задания В1–В12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

- В1** Летом килограмм клубники стоит 90 рублей. Мама купила 1 кг 500 г клубники. Какую сдачу она должна получить с 1000 рублей?

Ответ: _____

- В2** На рисунке показано изменение цен на палладий в период с 10 по 23 сентября 2008 года в рублях за грамм.



Определите по графику, сколько дней из данного периода цена превышала 193 рублей за грамм.

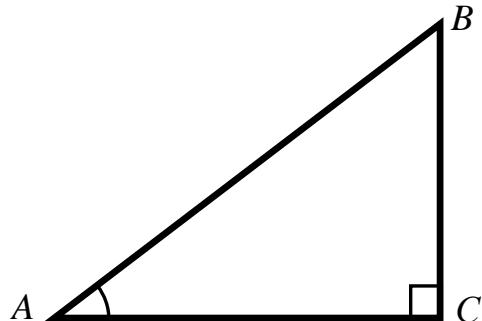
Ответ: _____

- В3** Найдите корень уравнения $\sqrt{2x-3} = 4$.

Ответ: _____

- В4** В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 24$, $\cos A = \frac{12}{13}$. Найдите длину стороны BC .

Ответ: _____



B5

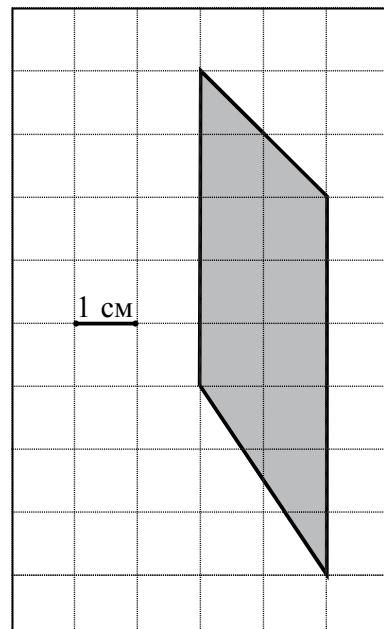
Строительной фирме нужно приобрести 1470 м^2 гипсокартона у одного из трех поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую покупку с доставкой?

Поставщик	Стоимость гипсокартона (руб. за 1 м^2)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
A	83	4500	При заказе на сумму больше 150000 руб. доставка бесплатно
Б	80	4700	При заказе на сумму больше 100000 руб. доставка бесплатно
В	78	5000	

Ответ: _____

B6

Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____

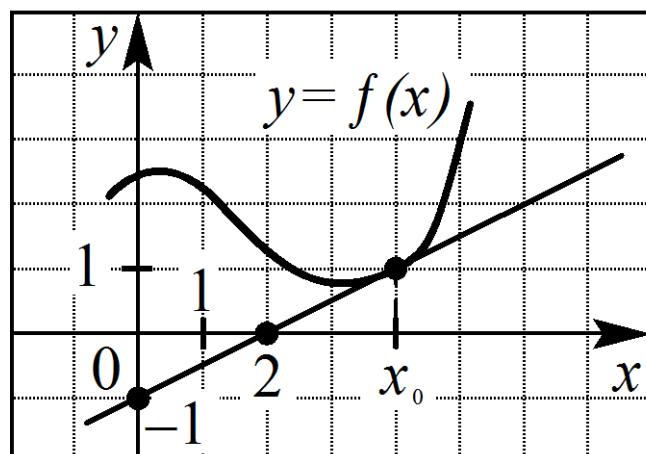
B7

Найдите значение выражения $\cos \frac{\pi}{3} + \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4}$.

Ответ: _____

- B8** На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведенная в точке x_0 . Пользуясь рисунком, найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

Ответ: _____



- B9** Закрытый сосуд в виде прямоугольного параллелепипеда с ребрами 45, 50 и 60 см стоит на горизонтальной поверхности таким образом, что наибольшая грань является дном. В сосуд налили воду до уровня 30 см. На каком уровне окажется вода, если сосуд поставить на наименьшую грань? Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ: _____

- B10** Квартирная электросеть защищена предохранителем, который плавится, если сила проходящего через него тока превышает 16 А. Номинальное напряжение в сети $U = 220$ В. Сила тока определяется по формуле $I = \frac{W}{U}$, где W – суммарная мощность всех включенных электроприборов (в ваттах). Определите наибольшую суммарную мощность, при которой сила тока не превысит допустимое значение. Ответ дайте в ваттах.

Ответ: _____

- B11** Найдите наибольшее значение функции

$$y = 4\sqrt{3} \sin x - 2\sqrt{3}x + \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$$

на отрезке $[0; \pi]$.

Ответ: _____

- B12** Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми 60 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. Известно, что скорость велосипедиста на 60 км/ч ниже, чем скорость автомобилиста. Определите скорость автомобилиста, если известно, что он прибыл в пункт B на 3 часа 12 минут раньше, чем велосипедист. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите систему

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = 1, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1. \end{cases}$$

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью A_1BC и прямой BC_1 , если $AA_1 = 8$, $AB = 6$, $BC = 15$.

C3 Решите уравнение $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}} = 4$.

C4 В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и CE . Найдите длину отрезка DE , если $AC = 6$, $AE = 2$, $CD = 3$.

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых график функции

$$f(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3| - a$$

пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

C6 Найдите все пары натуральных чисел m и n , являющиеся решениями уравнения $3^n - 2^m = 1$.

B1	B2	B3	B4	B5	B6
865	7	9,5	10	117600	11
B7	B8	B9	B10	B11	B12
1,5	0,5	40	3520	6	75

C1

Решите систему

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = 1, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим: $\sin^2 x - \sin^2 y = 0$. Учитывая, что $\sin x - \sin y = 1$, получаем систему:

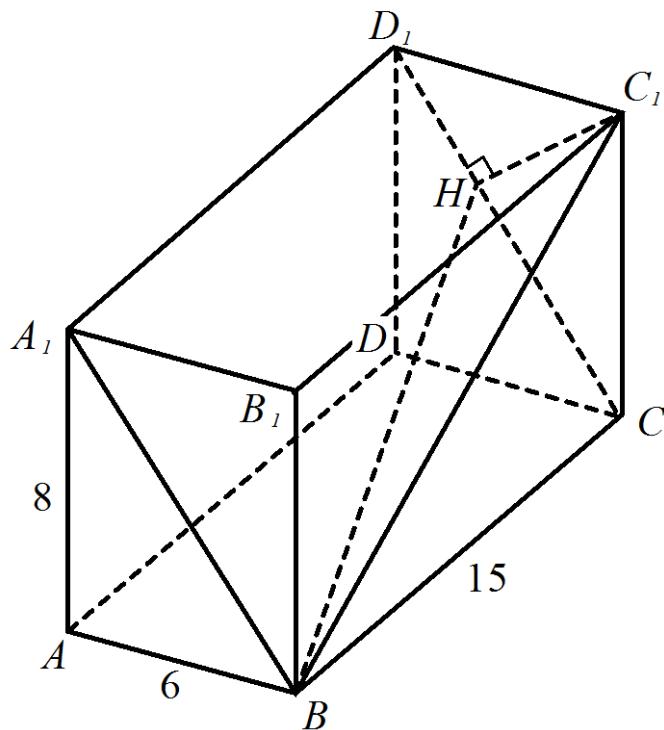
$$\begin{cases} \sin x - \sin y = 1, & \begin{cases} 2\sin x = 1, \\ 2\sin y = -1. \end{cases} \\ \sin x + \sin y = 0; & \end{cases}$$

Ответ: $((-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi; (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi)$, $n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$.

C2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью A_1BC и прямой BC_1 , если $AA_1 = 8$, $AB = 6$, $BC = 15$.

Сечение плоскостью A_1BC есть прямоугольник A_1BCD_1 .



Из точки C_1 проведем перпендикуляр C_1H к CD_1 . BH – проекция BC_1 на плоскость A_1BC . Значит, нужно найти угол C_1BH .

В прямоугольном треугольнике D_1C_1C находим: $C_1H = \frac{D_1C_1 \cdot C_1C}{D_1C} = \frac{24}{5}$.

В прямоугольном треугольнике BCC_1 находим: $BC_1 = 17$.

В прямоугольном треугольнике C_1HB находим: $\sin B = \frac{C_1H}{BC_1} = \frac{24}{85}$.

Ответ: $\arcsin \frac{24}{85}$.

C3

Решите уравнение $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}} = 4$.

Сделаем замену переменной: $y = \sqrt{x-4}$.

Получаем: $\sqrt{y^2 + 4y + 4} + \sqrt{y^2 - 4y + 4} = 4$; $|y+2| + |y-2| = 4$.

Учитывая, что $y \geq 0$ и поэтому $y+4 > 0$, получаем:

$$y+2 + |y-2| = 4; |y-2| = 2-y.$$

Воспользуемся определением модуля.

Получаем: $y-2 \leq 0$; $0 \leq \sqrt{x-4} \leq 2$; $4 \leq x \leq 8$.

Ответ: $x \in [4;8]$.

C4

В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и CE . Найдите длину отрезка DE , если $AC=6$, $AE=2$, $CD=3$.

Обозначим $BD=y$, $BE=z$. Тогда по свойству биссектрисы: $\frac{3+y}{6} = \frac{z}{2}$ и $\frac{z+2}{6} = \frac{y}{3}$, откуда $\begin{cases} y+3=3z, \\ z+2=2y; \end{cases} z=1,6; y=1,8$,

$$AB=3,6, BC=4,8.$$

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{3,6^2 + 4,8^2 - 6^2}{2 \cdot 3,6 \cdot 4,8} = 0. \text{ Значит, } \angle B = 90^\circ.$$

Тогда $ED^2 = y^2 + z^2 = 1,6^2 + 1,8^2 = 5,8$.

Ответ: $\sqrt{5,8}$.

C5

Найдите все значения a , при каждом из которых график функции

$$f(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3| - a$$

пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3|$.

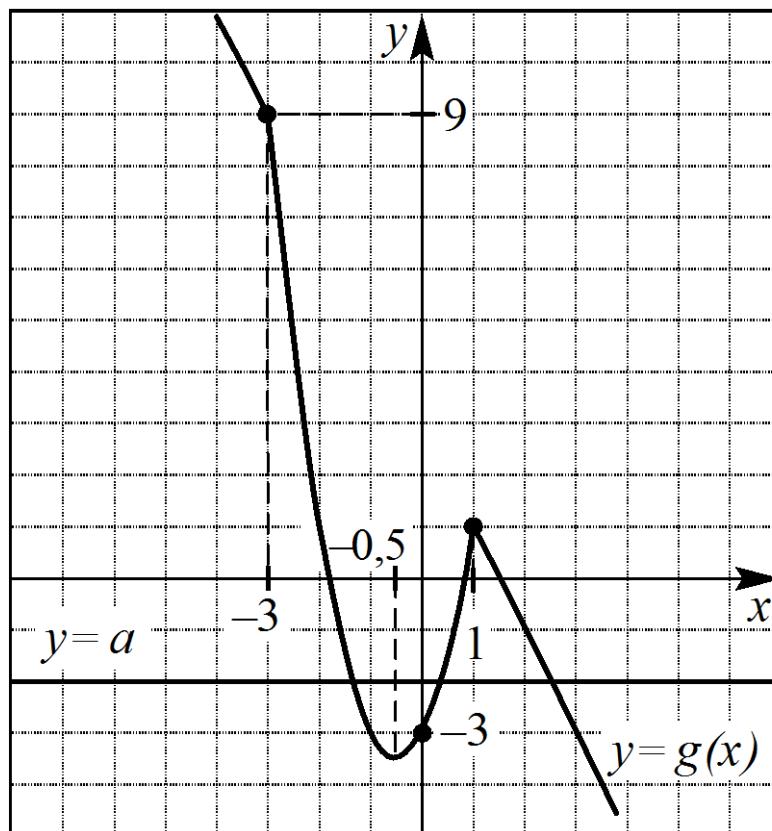


График функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в трех или более точках, если уравнение $g(x) = a$ имеет более двух различных корней.

Если $x \leq -3$ или $x \geq 1$, то $|x^2 + 2x - 3| = x^2 + 2x - 3$, и $g(x) = -2x + 3$.

Если $-3 < x < 1$, то $|x^2 + 2x - 3| = -x^2 - 2x + 3$, и $g(x) = 2x^2 + 2x - 3$.

График функции $g(x)$ состоит из двух лучей и дуги параболы. На рисунке видно, что уравнение $g(x) = a$ имеет более двух корней, только если

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) < a < g(1).$$

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = -3,5; g(1) = 1.$$

Ответ: $-3,5 < a < 1$.

C6

Найдите все пары натуральных чисел m и n , являющиеся решениями уравнения $3^n - 2^m = 1$.

Пусть n – четное число $n = 2k$. Тогда $2^m = 3^{2k} - 1 = (3^k - 1)(3^k + 1)$. Правая часть – произведение двух последовательных четных чисел, каждое из которых является степенью числа 2. Значит, $3^k - 1 = 2$ и $3^k + 1 = 4$, откуда $k = 1$, и $n = 2$. При этом $2^m = 8$, следовательно, $m = 3$.

Пусть теперь n – нечетное число. Все нечетные степени тройки ($3, 27, 243, \dots$) делятся на 4 с остатком 3. Значит, $3^n - 1$ делится на 4 с остатком 2. Из равенства $2^m = 3^n - 1$ получаем, что в этом случае $m = 1$ (если $m \geq 2$, то 2^m делится на 4 без остатка). При этом $3^n - 1 = 2$, откуда $n = 1$.

Ответ: $m = 3, n = 2$ или $m = n = 1$.