Пробный единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Вариант № 3901

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике дается 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом (B1–B12) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1–C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удается выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у вас останется время.

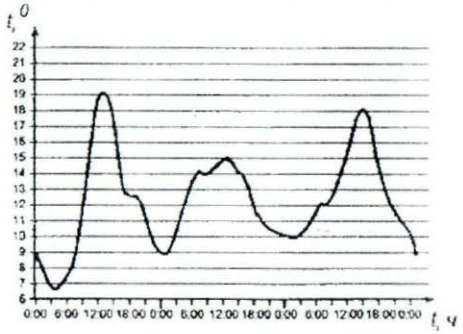
Желаем успеха!

Часть 1

Ответом на задания B1–B12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1 На карте, масштаб которой 1:600000, расстояние между Харьковом и Изюмом равно 18 см. Найдите это расстояние в километрах на местности?

B2 На графике показано изменение температуры воздуха в течение трех суток, начиная со вторника, 0:00. Определите, до какой наибольшей температуры прогрелся воздух в среду.



B3 Найдите корень уравнения: $5^{x-4} = 125$

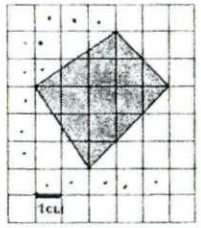
B4 В треугольнике ABC угол C равен 90^0, AC=3 см, $\cos A = 0.6$. Найдите BC.

B5 Клиент хочет арендовать автомобиль на сутки для поездки протяженностью 500 км. В таблице приведены характеристики трех автомобилей и стоимость их аренды. Помимо аренды клиент обязан оплатить топливо для автомобиля на всю поездку. Какую сумму в рублях заплатит клиент за аренду и топливо, если выберет самый дешевый вариант?

Цена дизельного топлива – 19 рублей за литр, бензина – 22 рубля за литр, газа – 14 рублей за литр.

Автомобиль	Топливо	Расход топлива (л. на 100 км)	Арендная плата (руб. за 1 сутки)
А	Дизельное	7	3700
Б	Бензин	10	3200
В	Газ	14	3200

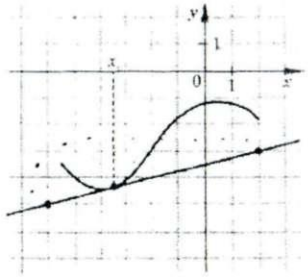
B6 Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



B7 Найдите значение выражения:

$$\log_5 600+\log_5 \frac{1}{24}$$

B8 На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



B9 Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота, которого равны 1. Найдите объем параллелепипеда.

B10 Мотоциклист, едущий по городу со скоростью $v_0 = 60$ км/ч, выезжает из него, и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a=10$ км/ч^2. Расстояние от мотоциклиста до города определяется выражением $S=v_0t+\frac{at^2}{2}$. Найдите наибольшее время, в течении которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее, чем 140 км от города.

B11 Укажите наибольшее значение функции

$$y=6\sin(x+\frac{\pi}{6}),\ \text{если}\ x\in\left[\frac{2\pi}{3};\frac{7\pi}{6}\right]$$

B12 Из трех труб, открытых одновременно, бассейн наполняется за 3 ч 45 мин. Одна первая труба наполняет бассейн в 2,6 раза быстрее, чем вторая труба, а та наполняет бассейн на 3 ч медленнее, чем третья. За сколько часов наполняет бассейн третья труба?

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите уравнение

$$\log_{25-9x^2}(625-81x^4)=2+\frac{1}{\log_3(25-9x^2)}$$

C2 В четырехугольнике $ABCD$ длина стороны $AB=12$, синус угла BAC равен 0,32, синус угла ABD равен 0,48. Сумма углов BAD и BCD равна 180^0. Найдите длину стороны BC.

C3 Решите неравенство

$$\left((-x+1)^{-1}-(-x+4)^{-1}\right)^2 \le \frac{|x^2+6x|}{(x^2-5x+4)^2}$$

C4 В пирамиде $FABC$ грани ABF и ABC перпендикулярны, $FB:FA = 8:5$. Тангенс угла между прямой BC и плоскостью ABF равен 5. Точка M выбрана на ребре BC так, что $BM:MC = 3:5$. Точка T лежит на прямой AF и равноудалена от точек M и B. Центр сферы, описанной около пирамиды $FABC$, лежит на ребре AB, площадь этой сферы равна 256π. Найдите объем пирамиды $ABMT$.

C5 Найдите все значения параметра p, при каждом из которых уравнение $\sqrt{4-3x}=x+2p(2-p)$ имеет ровно p корней.

C6 Найдите все положительные значения a, при каждом из которых наименьшее из двух чисел $b=a^4(1-5a^{-2})-1$ и $c=a^{-3}(5a-a^{-1})-1$ больше -7.

Пробный единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Вариант № 3902

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике дается 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом (B1–B12) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1–C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удается выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у вас останется время.

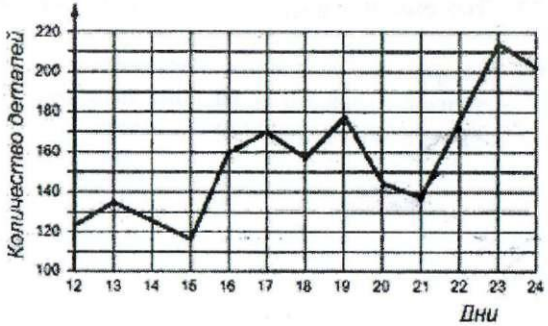
Желаем успеха!

Часть 1

Ответом на задания B1–B12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Хозяйка варит вишневое варенье, причем на 3 стакана вишни кладет 2 стакана сахарного песка. Сколько сахарного песка нужно положить на 12 стаканов вишни?

B2 На графике показано количество деталей, изготовленных на станке, в период с 12 по 24 сентября. Определите, сколько раз на станке изготовлялось от 140 до 180 деталей в день.



B3 Найдите корень уравнения: $2^{3-x}=16$.

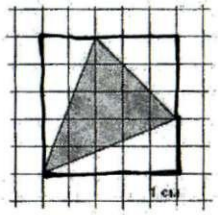
B4 В треугольнике ABC угол C равен 90^0, AC=4 см, $\sin B = 0{,}8$. Найдите BC.

B5 Клиент хочет арендовать автомобиль на сутки для поездки протяженностью 800 км. В таблице приведены характеристики трех автомобилей и стоимость их аренды. Помимо аренды клиент обязан оплатить топливо для автомобиля на всю поездку. Какую сумму в рублях заплатит клиент за аренду и топливо, если выберет самый дорогой вариант?

Цена дизельного топлива – 19 рублей за литр, бензина – 22 рубля за литр, газа – 14 рублей за литр.

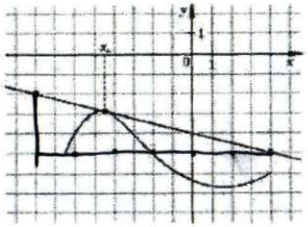
Автомобиль	Топливо	Расход топлива (л. На 100 км)	Арендная плата (руб. за 1 сутки)
А	Дизельное	7	3500
Б	Бензин	10	3300
В	Газ	14	3300

B6 Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



B7 Найдите значение выражения $\log_3 369 - \log_3 123$

B8 На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



B9 В прямоугольный параллелепипед вписан шар радиуса 1. Найдите объем параллелепипеда.

B10 Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота, на которой он находился, описывается формулой $h(t) = -4t^2+22t$, где h – высота в метрах, t – время в секундах, прошедшее со времени броска. Сколько секунд камень находился на высоте не менее 10 метров?

B11 Укажите наибольшее значение функции

$$y = 4\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right), \text{ если } x \in \left[\frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right]$$

B12 В течение года завод дважды увеличивал выпуск продукции на одно и то же число процентов. Найдите это число, если известно, что в январе завод ежемесячно выпускал 600 изделий, а в декабре того же года – 726 изделий.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Пробный единый государственный экзамен – 2011 Математика, 11 класс Вариант № 3902

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите уравнение

$$\log_{2-x^2}(4-x^4) = \frac{1}{\log_5(2-x^2)} + 4\log_{25} 5$$

C2 К окружности провели две касательные MA и MB (A и B – точки касания). Найдите длину хорды AB, если радиус окружности равен 20, а расстояние от точки M до хорды AB равно 9.

C3 Решите неравенство

$$\left((x+1)^{-1}-(x+6)^{-1}\right)^2 \le \frac{|x^2-10x|}{(x^2+7x+6)^2}$$

C4 Основанием пирамиды $FABC$ является треугольник ABC, в котором $AB=5$, $BC=12$ и $\angle ABC=90^0$. Ребро AF перпендикулярно ABC и равно $2\sqrt{14}$. Точки L и M расположены на ребрах FC и FB. При этом $\frac{CL}{FL}=\frac{FL}{FC}$, $FM\cdot MB=\frac{FB^2}{9}$, причем точка M расположена ближе к B, чем к F. Найдите объем пирамиды $AMLC$.

C5 Пусть A – множество тех значений параметра a, для которых выполнено условие $x_1^3+x_2^3 \le 27$, где x_1 и x_2 – действительные, различные корни уравнения $x^2-ax+3-a=0$. Найдите множество значений, которое при этих условиях принимает величина $x_1^2+x_2^2$.

C6 Найдите все положительные значения a, при каждом из которых наименьшее из двух чисел $b=a^4(1-5a^{-2})-1$ и $c=a^{-3}(5a-a^{-1})-1$ больше -7.

Ответы

	Вариант № 3901	Вариант № 3902
Часть 1		
B1	108	8
B2	15	6
B3	- 1	- 1
B4	4	3
B5	4180	5060
B6	12,5	10,5
B7	2	1
B8	0,25	- 0,25
B9	4	8
B10	2	4,5
B11	3	2
B12	15	10
Часть 2		
C1	$\pm\frac{5\sqrt{2}}{6}$	$\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$
C2	8	24
C3	$\left(-\infty;-3-3\sqrt{2}\right],-3,\left[-3+3\sqrt{2};4\right),(4;+\infty)$	$(-\infty;-6),\left(-6;5-5\sqrt{2}\right],5,\left[5+5\sqrt{2};+\infty\right)$
C4	64	$\frac{20\sqrt{14}}{3}$
C5	1	$(2;9]\cup(18;+\infty)$
C6	$\left(\frac{1}{\sqrt{6}};\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{3}+\infty\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{6}};\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{3}+\infty\right)$

Решение и критерии оценки выполнения заданий С1-С6

С1

Вариант № 3901

$$\log_{25-9x^2}(625-81x^4)=2+\frac{1}{\log_3(25-9x^2)}$$

Решение: применяем равносильные преобразования

$$\log_{25-9x^2}(625-81x^4)=2+\frac{1}{\log_3(25-9x^2)};$$

$$\log_{25-9x^2}(25-9x^2)+\log_{25-9x^2}(25+9x^2)=2+\frac{1}{\log_3(25-9x^2)};$$

$$\frac{\log_3(25+9x^2)-\log_3(25-9x^2)-1}{\log_3(25-9x^2)}=0;$$

$$\begin{cases}\log_3(25+9x^2)-\log_3(25-9x^2)-1=0,\\ \log_3(25-9x^2)\neq 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}25+9x^2=3(25-9x^2),\\ 25-9x^2\neq 1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2=\frac{25}{18},\\ x^2\neq\frac{25}{9};\end{cases}$$

$$x^2=\frac{25}{18}$$

$$x=-\frac{5\sqrt{2}}{6}\cup x=\frac{5\sqrt{2}}{6}$$

Ответ: $-\frac{5\sqrt{2}}{6};\frac{5\sqrt{2}}{6}.$

Примечание: вторая система в решении не содержит в явном виде условия: $25-9x^2>0$ т.к это неравенство при выполнении равенства: $25+9x^2=3(25-9x^2)$ выполняется автоматически.

Вариант № 3902

С1 Решите уравнение

$$\log_{2-x^2}(4-x^4)=\frac{1}{\log_5(2-x^2)}+4\log_{25}5$$

Решение: применяем равносильные преобразования

$$\log_{2-x^2}(4-x^4)=\frac{1}{\log_5(2-x^2)}+4\log_{25}5;$$

$$\log_{2-x^2}(2-x^2)+\log_{2-x^2}(2+x^2)=\frac{1}{\log_5(2-x^2)}+4\cdot\frac{1}{2};$$

$$\frac{\log_5(2+x^2)-\log_5(2-x^2)-1}{\log_5(2-x^2)}=0;$$

$$\begin{cases}\log_5(2+x^2)-\log_5(2-x^2)-1=0,\\ \log_5(2-x^2)\neq 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}2+x^2=5(2-x^2),\\ 2-x^2\neq 1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2=\frac{4}{3},\\ x^2\neq\frac{1}{2};\end{cases}$$

$$x^2=\frac{4}{3};$$

$$x=-\frac{2}{\sqrt{3}}\cup x=\frac{2}{\sqrt{3}};$$

Ответ: $-\frac{2}{\sqrt{3}};\frac{2}{\sqrt{3}}.$

Примечание: вторая система в решении не содержит в явном виде условия: $2-x^2>0$ т.к это неравенство при выполнении равенства: $2+x^2=5(2-x^2)$ выполняется автоматически.

Критерии оценки выполнения задания С1	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Получен ответ, отличный от правильного вследствие вычислительной ошибки или описки	1
Все случаи решения, не соответствующие указанным выше критериям выставления оценок в 1 и 2 балла.	0

С2

Вариант № 3901

В четырехугольнике ABCD длина стороны AB=12, синус угла BAC равен 0,32, синус угла ABD равен 0,48. Сумма углов BAD и BCD равна 180^0. Найдите длину стороны BC.

Решение:

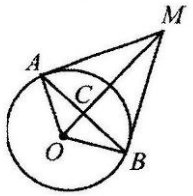
Так как сумма противоположных углов одинакова и равна 180^0, то четырехугольник ABCD можно вписать в окружность радиуса R.

Применяя теорему синусов для разных треугольников, вписанных в одну и ту же окружность, получим: $\frac{AB}{\sin\angle ADB}=\frac{BC}{\sin\angle BAC}=2R$, откуда $BC=\frac{12\cdot 0{,}32}{0{,}48}=8$.

Ответ: 8.

Вариант № 3902

К окружности провели две касательные MA и MB (A и B – точки касания). Найдите длину хорды AB, если радиус окружности равен 20, а расстояние от точки M до хорды AB равно 9.



Решение:

Отрезки касательных, проведенных к окружности из точки M, равны: AM=MB; отрезки AO и OB равны (радиусы), OM – общая сторона, значит, треугольники AOM и BOM равны. Они еще и прямоугольные по свойству касательной и радиуса окружности. Треугольники AMC и BMC аналогично равны, MC – медиана треугольника AMC, следовательно, MC ⊥ AB (т.е. MC – расстояние от точки M до хорды AB).

Рассмотрим подобные треугольники AOM и ACM - подобны по двум углам: $\angle ACM=\angle OFAM=90°$; $\angle AMO$ - общий; из подобия следует: $\frac{AM}{MO}=\frac{AC}{AO}=\frac{MC}{AM}$, отсюда $AM^2=MO\cdot MC(*)$.

Примем отрезок $OC=x$, тогда $MO=9+x$; $AM^2=(9+x)^2-400$ (из треугольника AOM).

Из (*) получим уравнение: $(9+x)^2-400=9(9+x)$. Откуда $x_1=16$, x_2 – не удовлетворяет условию задачи.

$AC=\sqrt{400-x^2}=12$. Из треугольника AOC найдем $AB=24$.

Ответ: 24

Критерии оценки выполнения задания С2	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Способ нахождения искомого расстояния верно, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C3
Вариант № 3901

Решите неравенство

$$\left((-x+1)^{-1}-(-x+4)^{-1}\right)^2 \le \frac{\left|x^2+6x\right|}{\left(x^2-5x+4\right)^2}.$$

Решение:

Преобразуем неравенство:

$$\frac{\left|x^2+6x\right|-9}{\left(x^2-5x+4\right)^2} \ge 0; \quad \begin{cases} x \ne 1, \\ x \ne 4, \\ \left|x^2+6x\right| \ge 9. \end{cases}$$

Решим неравенство $\left|x^2+6x\right| \ge 9$:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+6x-9 \ge 0, \\ x^2+6x+9 \le 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x \ge -3-3\sqrt{2}, \\ x \le -3+3\sqrt{2}, \\ x = -3. \end{array}\right.$$

Осталось исключить точки 1 и 4.
Ответ: $(-\infty;\ -3-3\sqrt{2}]$, -3, $[-3+3\sqrt{2};\ 4)$, $(4;\ +\infty)$.

Вариант № 3902

Решите неравенство

$$\left((x+1)^{-1}-(x+6)^{-1}\right)^2 \le \frac{\left|x^2-10x\right|}{\left(x^2+7x+6\right)^2}.$$

Решение:

Преобразуем неравенство:

$$\frac{\left|x^2-10x\right|-25}{\left(x^2+7x+6\right)^2} \ge 0; \quad \begin{cases} x \ne -6, \\ x \ne -1, \\ \left|x^2-10x\right| \ge 25. \end{cases}$$

Решим неравенство $\left|x^2-10x\right| \ge 25$:

$$\left[\begin{array}{l} x^2-10x-25 \ge 0, \\ x^2-10x+25 \le 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x \ge 5+5\sqrt{2}, \\ x \le 5-5\sqrt{2}, \\ x = 5. \end{array}\right.$$

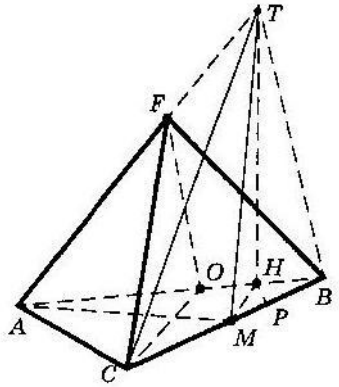
Осталось исключить точки -6 и -1.
Ответ: $(-\infty;\ -6)$, $(-6;\ 5-5\sqrt{2}]$, 5, $[5+5\sqrt{2};\ +\infty)$.

Критерии оценки выполнения задания С3	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом точек	2
Полученный ответ неверен, но решение содержит переход от исходного неравенства к верным рациональным неравенствам	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C4

Вариант № 3091

В пирамиде FABC грани ABF и ABC перпендикулярны, FB:FA = 8:5. Тангенс угла между прямой BC и плоскостью ABF равен 5. Точка M выбрана на ребре BC так, что BM:MC = 3:5. Точка T лежит на прямой AF и равноудалена от точек M и B. Центр сферы, описанной около пирамиды FABC, лежит на ребре AB, площадь этой сферы равна 256 . Найдите объем пирамиды ABMT.



Решение:

1) Пусть R – радиус сферы, описанной около пирамиды FABC. Тогда из условия имеем $4\pi R^2 = 256\pi$. Отсюда R= 8. пусть O – центр этой сферы, тогда OA = OB = OC = OF = R = 8, а так как O лежит на ребре AB, то O – середина отрезка AB и треугольники ABC и ABF – прямоугольные с общей гипотенузой AB.
2) По условию $T \in AF$ и TB = TM. Опустим из точки T в плоскости ABF перпендикуляр TH на прямую AB. Так как $ABF \perp ABC$, то $TH \perp ABC$, и, следовательно, отрезки HM и HB – проекции равных наклонных TM и TB. Значит, HM = MB и поэтому треугольник BHM – равнобедренный, а его высота HP является медианой, то есть MP=PB.
3) Плоскости ABF и ABC перпендикулярны, поэтому проекцией прямой BC на плоскость ABF является прямая AB. Отсюда угол меду прямой BC и плоскостью ABF равен углу B треугольника ABC, и по условию tgB=5. Значит, $\cos B = \frac{1}{\sqrt{26}}, \sin B = \frac{5}{\sqrt{26}}$.
4) Так как AB = 2R = 16, то $BC = AB\cos B = \frac{16}{\sqrt{26}}$, $AC = AB\sin B = \frac{80}{\sqrt{26}}$.

Так как $TH \perp ABC$, то TH – высота пирамиды ABMT. Объем V этой пирамиды найдем по формуле $V = \frac{1}{3}\cdot(TH \cdot S_{AMB})$, где S_{AMB} – площадь треугольника AMB. Отрезок AC – высота треугольника AMB. Отрезок AC – высота треугольника AMB, поэтому S_{AMB}=0,5AC×MB.

Так как BM:MC=3:5, то BM:BC=3:8. поэтому $BM = \frac{3BC}{8} = \frac{6}{\sqrt{26}}$.

Отсюда $S_{AMB} = \frac{120}{13}$. Так как BM:BC=3:8 и MP=PB, то можем написать BP=PM=3a, MC=10a. Отсюда $\frac{PC}{BC} = \frac{13a}{16a} = \frac{13}{16}$. Так как HP $||$ AC, то $\frac{AH}{AB} = \frac{PC}{BC} = \frac{13}{16}$ и отсюда $AH = \frac{13\cdot AB}{16} = 13$

В прямоугольном треугольнике AFB отношение $\frac{FB}{FA} = tgA = \frac{8}{5}$. Поэтому из прямоугольного треугольника ATH находим $TH = AH \cdot tg\alpha = \frac{104}{5}$.

Окончательно, $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{104}{5} \cdot \frac{120}{13} = 64.$

Ответ:64

Вариант № 3092

Основанием пирамиды *FABC* является треугольник *ABC*, в котором *AB*=5, *BC*=12 и $\angle ABC$=90^0. Ребро *AF* перпендикулярно *ABC* и равно $2\sqrt{14}$. Точки *L* и *M* расположены на ребрах *FC* и *FB*. При этом $\frac{CL}{FL} = \frac{FL}{FC}$, $FM \cdot MB = \frac{FB^2}{9}$, причем точка *M* расположена ближе к *B*, чем к *F*. Найдите объем пирамиды *AMLC*.

Решение:

В качестве плоскости основания мы рассмотрим плоскость *ACF*. Из условия $\frac{CL}{FL} = \frac{FL}{FC}$ следует, что $\frac{CL}{FC} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Это тот самый коэффициент, который показывает, какую часть от площади треугольника *ACF* занимает площадь основания *ACL*. Следовательно, площадь основания равна $\frac{13\sqrt{14}(3-\sqrt{5})}{2}$.

Найдем длину перпендикуляра, опущенного из вершины *M* на плоскость основания *ACF*. Рассмотрим в качестве второй базовой плоскости плоскость *ABF*, в которой проведем перпендикуляр MM_1 на сторону *AB*. Отрезок MM_1 параллелен AF и плоскости основания. Следовательно, точка M_1 удалена от плоскости основания на такое же расстояние, что и точка *M*. Из условия $FM \cdot MB = \frac{FB^2}{9}$ находим, что $AM_1 = \frac{5(3+\sqrt{5})}{6}$.

В качестве третьей плоскости рассмотрим плоскость *ABC* и в этой плоскости найдем длину перпендикуляра M_1M_2, опущенного из M_1 на *AC*. Это и есть искомая высота пирамиды *AMLC*. Легко посчитать, что $M_1M_2 = \frac{10(3+\sqrt{5})}{13}$.

Итак, $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{13\sqrt{14}(3-\sqrt{5})}{2} \cdot \frac{10(3+\sqrt{5})}{13} = \frac{20\sqrt{14}}{3}$.

Ответ: $\frac{20\sqrt{14}}{3}$

Критерии оценки выполнения задания С4	Баллы
Приведена верная последовательность всех шагов решения и получен правильный ответ	3
Обоснованы ключевые моменты решения. Допустимы одна описка или/и негрубая ошибка в вычислениях, не влияющая на правильность хода решения. В результате возможен неверный ответ	2

Ход решения правильный, но решение не завершено. Вычислены некоторые числовые характеристики пирамиды. Допустимы описки или/и ошибки в вычислениях	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

С5

Вариант № 3091

2008 стр 101

Найдите все значения параметра р, при каждом из которых уравнение $\sqrt{4-3x}=x+2p(2-p)$ имеет ровно р корней.

Решение:

После возведения в квадрат уравнение сводится к квадратному. Поэтому $p\in\{0;1;2\}$. Остается перебрать эти три случая. Если *p=0* или *p=2*, то получаем уравнение

$\sqrt{4-3x}=x;\ 4-3x=x^2;\ x^2+3x-4=0;\ x_1=1,\ x_2=-4$.

Корень *x = –4* посторонний, т.к. $x=\sqrt{4-3x}\ge 0$. Корень *x=1* легко проверятся подстановкой.

Итак, если р=0, то уравнение $\sqrt{4-3x}=x+2p(2-p)$ имеет 1=р+1 корень, а если р=2, то уравнение $\sqrt{4-3x}=x+2p(2-p)$ имеет 1=р–1 корень. Значит такие *p* не удовлетворяют условию задачи.

Если *p=1*, то получаем уравнение

$\sqrt{4-3x}=x+2;\ 4-3x=x^2+4x+4;\ x^2+7x=0;\ x_1=0,\ x_2=-7$.

Корень *x= –7* посторонний, т.к. $x+2=\sqrt{4-3x}\ge 0$. Корень *x=0* проверяется подстановкой.

В этом случае уравнение $\sqrt{4-3x}=x+2p(2-p)$ имеет *1=p* корней.

Ответ: 1

Вариант № 3092

Пусть *A* – множество тех значений параметра *a*, для которых выполнено условие $x_1^3+x_2^3\le 27$, где x_1 и x_2 – действительные, различные корни уравнения $x^2-ax+3-a=0$. Найдите множество значений, которое при этих условиях принимает величина $x_1^2+x_2^2$.

Решение.

Найдем те значения параметра *a*, для которых выполнены условия задачи.

Дискриминант квадратного трехчлена положителен. Тогда неравенство $a^2+4a-12>0$ дает нам первое условие $\left[\begin{array}{l} a<-6, \\ a>2 \end{array}\right.$.

Заметим, что теперь можно применить теорему Виета и, следовательно,

$x_1+x_2=a,\ x_1\cdot x_2=3-a$.

Так как $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2\cdot(x_1+x_2)$, то условие $x_1^3+x_2^3\le 27$ запишется в виде неравенства $a^3+3a^2-9a-27\le 0$, решением которого является множество $(-\infty;3]$. В итоге параметр *a* принимает значение на множестве $A=(-\infty;-6)\cup(2;3]$.

Рассмотрим теперь величину $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=a^2+2a-6$, где $a\in A$.

Квадратичная функция a^2+2a-6 на множестве $A=(-\infty;-6)\cup(2;3]$ принимает значения $(2;9]\cup(18;+\infty)$

Ответ: (2;9]∪(18;+∞)

Критерии оценки выполнения задания С5	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции)	3
При составлении или решений условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна	2
Ход решения правильный, но решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

С6

Вариант № 3091 и № 3902

Найдите все положительные значения а, при каждом из которых наименьшее из двух чисел и больше –7.

Решение:

1) Решим сначала неравенство $b > -7$.

$$a^4\left(1-5a^{-2}\right)-1>-7 \Leftrightarrow a^4\left(1-5a^{-2}\right)>-6 \Leftrightarrow a^4-5a^2+6>0 \Leftrightarrow \left(a^2-2\right)\left(a^2-3\right)>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2\in(-\infty;2)\cup(3;+\infty) \Leftrightarrow a^2\in(0;2)\cup(3;+\infty) \Leftrightarrow a\in\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{2};0\right)\cup\left(0;\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)$$

Итак, $a\in\left(0;\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)$.

2) Теперь решим неравенство с > –7.

$$a^{-3}\left(5a-a^{-1}\right)-1>-7 \Leftrightarrow a^{-3}\left(5a-a^{-1}\right)>-6 \Leftrightarrow a^{-4}-5a^{-2}-6<0 \Leftrightarrow \left(a^{-2}-6\right)\left(a^{-2}+1\right)<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^{-2}-6<0 \Leftrightarrow a^{-2}<6 \Leftrightarrow a^2>\frac{1}{6} \Leftrightarrow |a|>\frac{1}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow a\in\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{6}};+\infty\right).$$

Здесь важно, что $a^{-2}+1>0$ для всех a.

3) Задача равносильна нахождению всех положительных а, при которых верно равенство b>–7. Значит, следует найти все общие точки промежутка (0;+∞) и множеств, полученных в 1) и в 2).

Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{6}};\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{3}+\infty\right)$

Критерии оценки выполнения задания С6	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом точек	3
Обоснованы ключевые моменты решения. Допустимы одна описка или/и негрубая ошибка в вычислениях, не влияющая на правильность хода решения. В результате возможен неверный ответ	2
Ход решения правильный, но решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0