Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике дается 4 часа (240 мин.). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом (B1–B12) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1-C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удается выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у вас останется время.

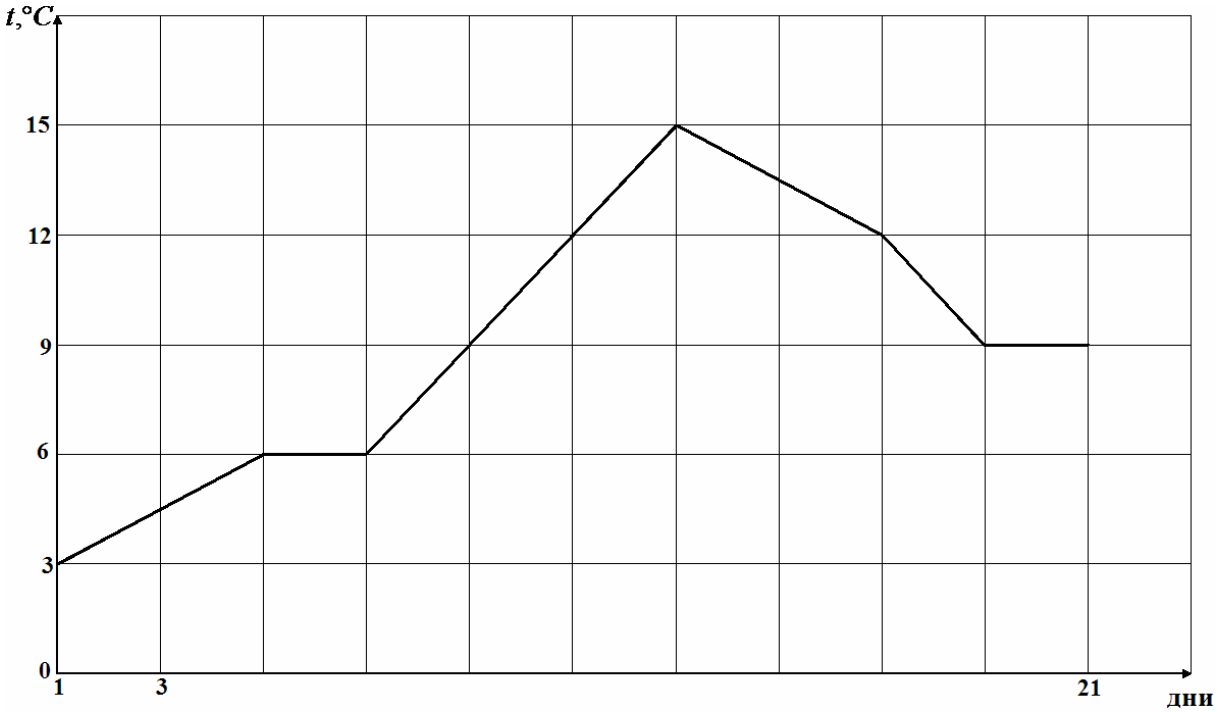
Желаем успеха!

Часть 1

Ответом на задания B1-B12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов №1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

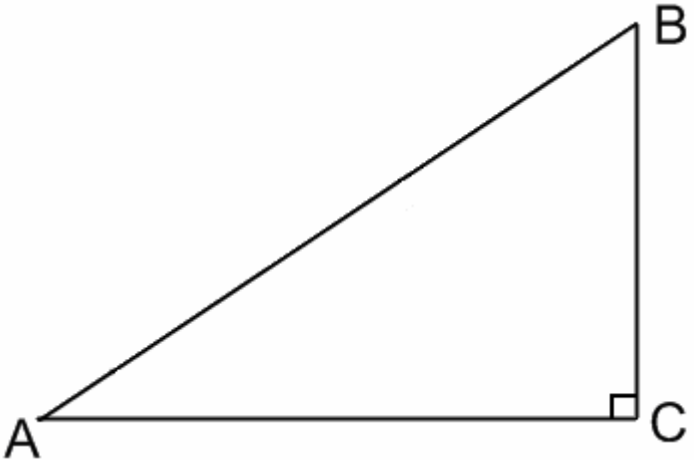
B1 Флакон шампуня стоит 120 рублей. Какое наибольшее число флаконов можно купить на 700 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 35%?

B2 Посев семян тыквы рекомендуется проводить в мае при дневной температуре воздуха не менее $+12°C$. На рисунке показан прогноз дневной температуры воздуха в первый и второй декадах мая. Определите, в течение скольких дней за этот период можно проводить посев тыквы.



B3 Найдите корень уравнения: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-18} = \frac{1}{27}$.

B4 В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\cos A = \frac{\sqrt{5}}{3}$ $BC = 6$. Найдите AB.

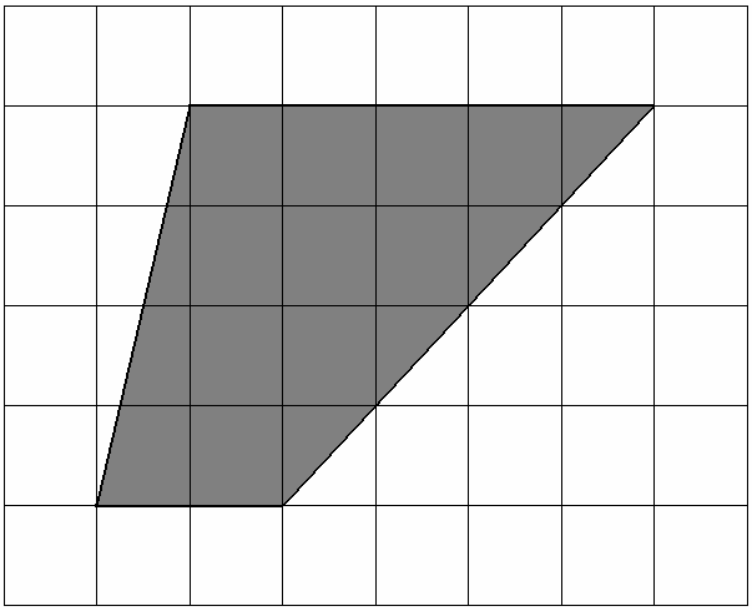


B5 Интернет-провайдер (компания, оказывающая услуги по подключению к сети интернет) предлагает три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
1. План «0»	Нет	2,5 р. за 1mb
2. План «700»	600 р. за 700mb трафика в месяц.	2 р. за 1 mb сверх 700mb
3. План «1000»	820 р. за 1000mb трафика в месяц.	1,5 р. за 1mb сверх 1000mb

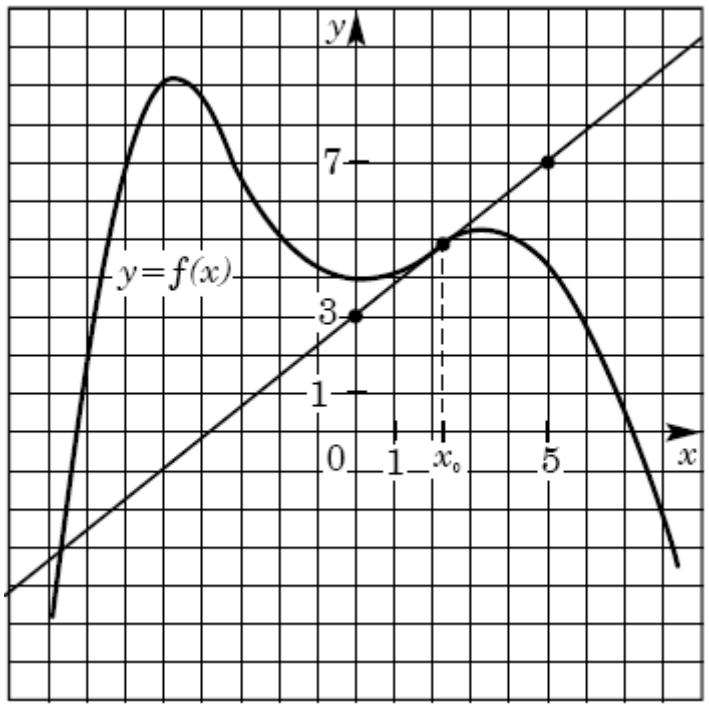
Пользователь планирует, что его трафик составит 800mb и, исходя из этого, выбирает наиболее дешевый тарифный план. Сколько рублей заплатит пользователь за месяц, если его трафик действительно будет равен 800mb.

B6 Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером 1см x 1см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

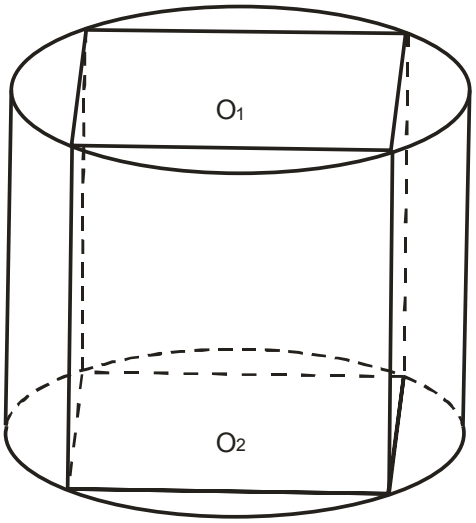


B7 Найдите значение выражения $\dfrac{\log_3 4}{\log_{81} 4}$.

B8 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательной к этому графику проведенная в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной этой функции в точке x_0.



B9 В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 3. Боковые ребра равны $\frac{4}{\pi}$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.



B10 Для определения эффективной температуры звезд используют закон Стефана-Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвертой степени температуры: $P = \sigma S T^4$, где $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ - числовой коэффициент, площадь измеряется в квадратных метрах, температура – в градусах Кельвина, а мощность – в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{81} \cdot 10^{10}$ м^2, а излучаемая ею мощность P не менее $0{,}57 \cdot 10^{19}$. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды.

B11 Найдите наименьшее значение функции $y = 4 + \frac{4\sqrt{3}\pi}{3} - 4\sqrt{3}x - 8\cos x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

B12 Первая труба пропускает на 1 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар, объемом 156 литров она заполняет на 2 минуты дольше, чем вторая труба заполняет резервуар объемом 143 литра?

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1-C6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите уравнение $\dfrac{3\cos^2 x - \sin x - 1}{\sqrt{\cos x}} = 0$.

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой A_1B и плоскостью AA_1C, если $AA_1 = 6$, $AB = 8$, $BC = 8$.

C3 Решите неравенство $4\sqrt{\dfrac{2^x - 1}{2^x}} + \sqrt{14} \le 14 \cdot \sqrt{\dfrac{2^{x-2}}{2^x - 1}}$.

C4 Угол между радиусом AO окружности, описанной около треугольника ABC и стороной AC равен $45°$. Найдите угол A треугольника ABC, если угол C равен $25°$.

C5 Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} y = e^{\ln x}, \\ y = a + 5x - x^2. \end{cases}$ имеет два решения.

C6 Найдите все пары натуральных чисел a и b, удовлетворяющие равенству

$a^b + 8 = \overline{ba}$ (в правой части стоит число, полученное дописыванием десятичной записи числа a после десятичной записи числа b).

Система оценивания 4 варианта контрольных измерительных материалов по МАТЕМАТИКЕ

Ответы к заданиям части 1

Каждое правильно выполненное задание части 1 оценивается 1 баллом. Задания части 1 считаются выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

№ задания	Ответ
B1	8
B2	7
B3	21
B4	9
B5	800
B6	14
B7	4
B8	0,8
B9	18
B10	30000
B11	0
B12	12

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
C1	$\arcsin\frac{2}{3}+2\pi n, n\in Z$
C2	$\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{5}$
C3	$(0;3]$
C4	$110°$ или $20°$
C5	$(-4;0)$

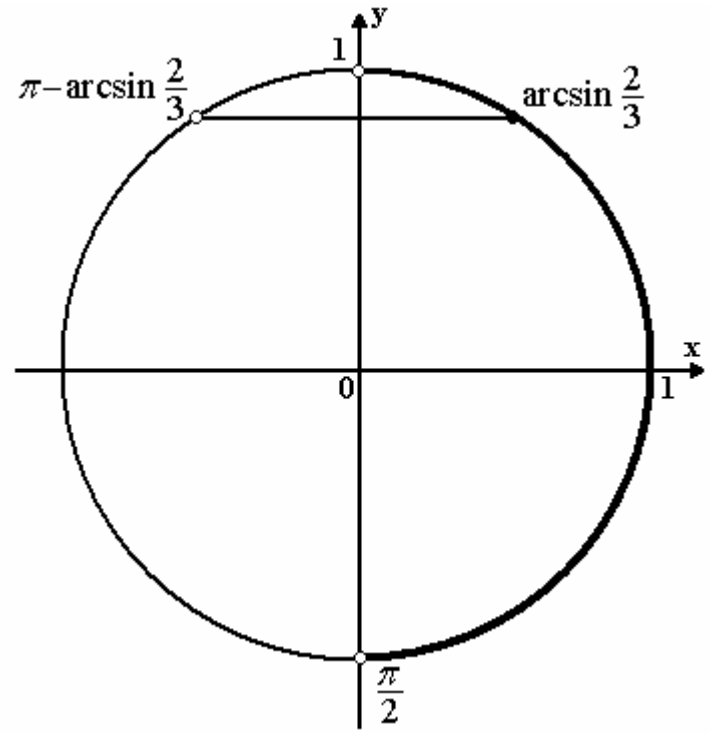
C6	$a = 4$; $b = 2$

Решения и критерии оценивания заданий части 2

C1 Решите уравнение $\dfrac{3\cos^2 x - \sin x - 1}{\sqrt{\cos x}} = 0$.

Решение.

1. Уравнение равносильно системе $\begin{cases} 3\cos^2 x - \sin x - 1 = 0, \\ \cos x > 0. \end{cases}$



2. Решим уравнение $3\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$. Заменяя $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$, получаем уравнение $3\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$. В полученном уравнении сделаем замену $\sin x = t$ и решим уравнение $3t^2 + t - 2 = 0$. Корни уравнения: $t_1 = -1$ и $t_2 = \dfrac{2}{3}$. Равенствам $\sin x = -1$ и $\sin x = \dfrac{2}{3}$ на тригонометрической окружности соответствуют три точки (см. рисунок). Одна из них, находящаяся в правой полуплоскости, удовлетворяет условию $\cos x > 0$.

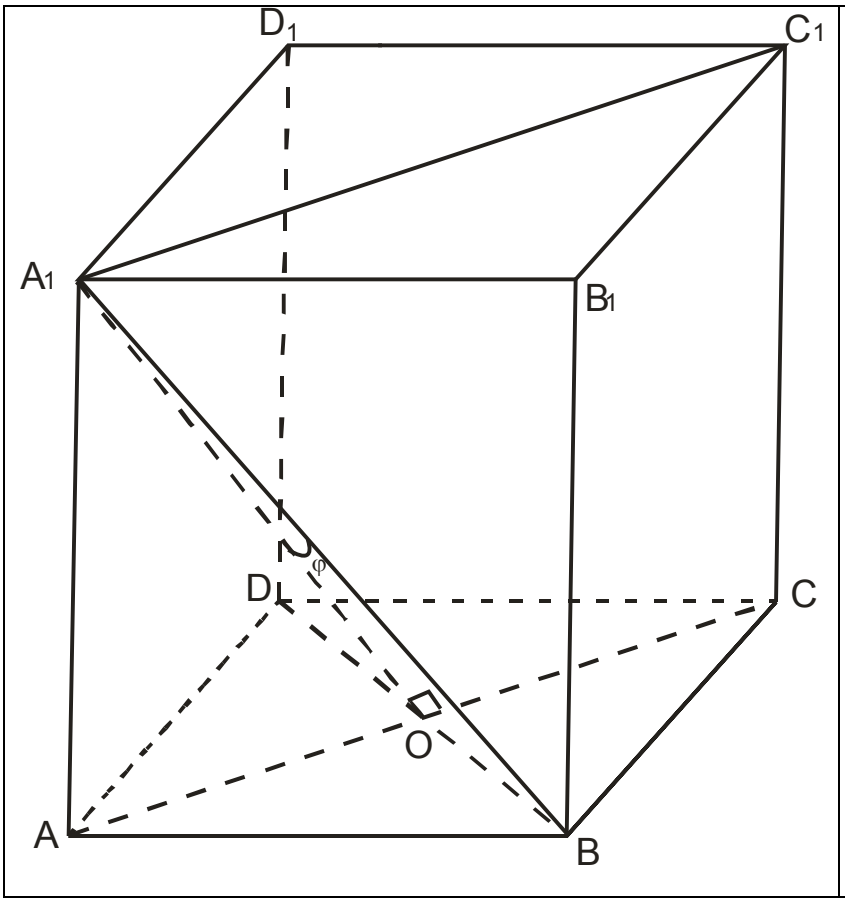
3. Получаем решение: $x = \arcsin\dfrac{2}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

Ответ: $x = \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С1.
2	В представленном решении обоснованно получен верный ответ.
1	Верно найдены нули числителя, т.е. решено тригонометрическое уравнение $3\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$, но или не произведен отбор корней, или допущена ошибка в отборе.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.
2	Максимальный балл.

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой A_1B и плоскостью AA_1C, если $AA_1 = 6$, $AB = 8$, $BC = 8$.

Решение.



1. Обозначим O - точку пересечения диагоналей AC и BD оснований прямоугольного параллелепипеда. Так как $AB = BC$, то $ABCD$ - квадрат. Значит, $BO \perp AC$.

2. Соединим точки A_1 и O. Отрезок A_1O является проекцией наклонной A_1B на плоскость AA_1C.

Значит, угол между прямой A_1B и плоскостью AA_1C равен углу BA_1O.

3. Из треугольника ABC находим $AC = 8\sqrt{2}$.

В квадрате $ABCD$ $AC = BD = 8\sqrt{2}$. $BO = \frac{1}{2}BD = 4\sqrt{2}$.

Из треугольника AA_1B находим $A_1B = 10$.

Из треугольника BOA_1 находим $\sin\varphi = \sin\angle BA_1O = \frac{2\sqrt{2}}{5}$. Искомый угол φ равен $\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{5}$.

Ответ: $\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{5}$.

Замечание: искомый угол можно записать, используя другие аркфункции: $\arccos\frac{\sqrt{23}}{5}$, $arctg\frac{\sqrt{46}}{23}$, $arcctg\frac{\sqrt{46}}{2}$.

Возможны другие решения. Например, решение задачи с использованием векторов или метода координат.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С2.
2	Получен и обоснован верный ответ.
1	Способ нахождения угла правильный, но получен неверный ответ или решение не закончено.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.
2	Максимальный балл

$\boxed{C3}$ Решите неравенство $4\sqrt{\dfrac{2^x-1}{2^x}}+\sqrt{14}\le 14\sqrt{\dfrac{2^{x-2}}{2^x-1}}$.

Решение.

1. Выполним замену переменной $t=\sqrt{\dfrac{2^x-1}{2^x}}=\sqrt{1-2^{-x}}$.

   Так как $x>0$, то $0<t<1$. Следовательно, получаем систему неравенств

$$\begin{cases}4t+\sqrt{14}\le\dfrac{1}{2}\cdot 14\cdot\dfrac{1}{t},\\ 0<t<1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4t^2+t\sqrt{14}-7\le 7,\\ 0<t<1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{\sqrt{14}}{2}\le t\le\dfrac{\sqrt{14}}{4},\\ 0<t<1;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0<t\le\frac{\sqrt{14}}{4}.$$

2. Возвращаясь к переменной x, получаем двойное неравенство:

$$0<\sqrt{1-2^{-x}}\le\frac{\sqrt{14}}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\ 1-2^{-x}\le\dfrac{7}{8};\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\ 2^{-x}\ge\dfrac{1}{8};\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\ 2^{-x}\ge 2^{-3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\ x\le 3;\end{cases}\Leftrightarrow 0<x\le 3.$$

Ответ: $(0;3]$.

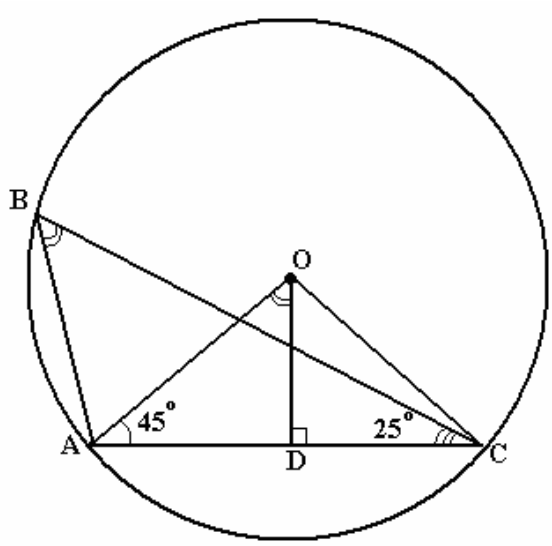
Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С3.
3	В представленном решении обосновано получен ответ.
2	Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом значений x.
1	Ответ неверен, но решение содержит переход от исходного неравенства к верной системе неравенств.

0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.
3	Максимальный балл.

C4 Угол между радиусом AO окружности, описанной около треугольника ABC и стороной AC равен $45°$. Найдите угол A треугольника ABC, если угол C равен $25°$.

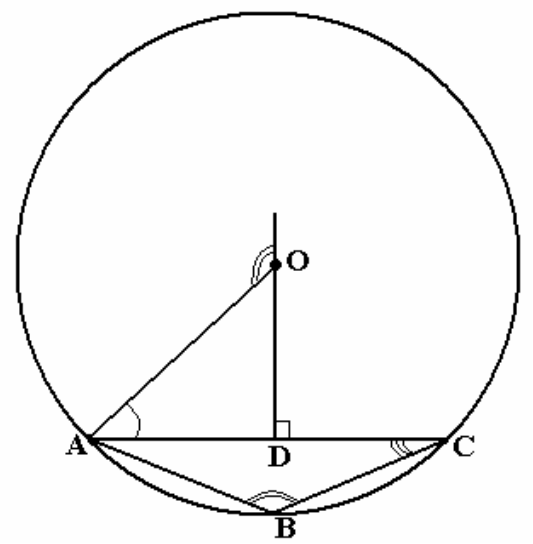
Решение.

Пусть точка D - середина стороны AC. Так как точка O - центр описанной окружности не может лежать на стороне AC (иначе $\angle OAC = 0°$), то возможны два случая:



1. Точки O и B лежат по одну сторону от прямой AC (рис.1). По теореме о вписанном угле $\angle B = \frac{1}{2} \cup AC$. Угол AOC является центральным, то $\angle AOC = \cup AC$. Поэтому $\angle B = \frac{1}{2} \angle AOC$. Треугольник AOC является равнобедренным.

OD - высота, медиана и биссектриса угла AOC. $\angle AOD = 90° - \angle OAD = 90° - 45° = 45°$. Угол B равен углу AOD, т.е. $\angle B = 45°$ (как углы при взаимно перпендикулярных сторонах). Значит, $\angle BAC = 180° - \angle B - \angle C = 180° - 45° - 25° = 110°$.



2. Точки O и B лежат по разные стороны от прямой AC (рис.2). По теореме о вписанном угле

$$\angle B = \frac{1}{2}\left(360° - \angle AOC\right) = 180 - \angle AOD =$$
$$= 180° - 45° = 135°.$$

Значит, $\angle BAC = 180° - \angle B - \angle C =$
$= 180° - 135° - 25° = 20°$

Ответ: $110°$ или $20°$.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С4.
3	Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и обоснованно получен верный ответ.
2	Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, в которой обоснованно получено правильное значение искомой величины.
1	Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неверное из-за арифметической ошибки.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.
3	Максимальный балл.

$\boxed{C5}$ Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} y = e^{\ln x}, \\ y = a + 5x - x^2; \end{cases}$ имеет два решения.

Решение.

1. Система имеет смысл при условии $x > 0$. Из первого уравнения системы следует, что $y = x$

   Подставим $y = x$ во второе уравнение заданной системы и получим: $x^2 - 4x - a = 0.$

2. Уравнение $x^2 - 4x - a = 0$ имеет два положительных решения, т.к. $x > 0$, если параметр a удовлетворяет следующим условиям:

   $$\begin{cases} D > 0, \\ f(0) > 0, \\ x_0 > 0, \end{cases}$$

   где D - дискриминант квадратного уравнения $x^2 - 4x - a = 0$, x_0 - абсцисса вершины параболы.

3. Введем функцию $f(x) = x^2 - 4x - a$. Графиком функции является парабола, ветви которой направлены вверх. $f(0) = -a$. Так как $f(0) > 0$, то $a < 0$.

   $x_0 = 2$, $2 > 0$ - верно.

4. Дискриминант квадратного уравнения $x^2 - 4x - a = 0$ равен $16 + 4a$. Так как $D > 0$, то $16 + 4a > 0$, т.е. $a > -4$.

5. Итак, получаем систему неравенств: $\begin{cases} a > -4, \\ 2 > 0, \\ a < 0; \end{cases} \Leftrightarrow -4 < a < 0.$

Ответ: $(-4;0)$.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С5.
4	В представленном решении обоснованно получен верный ответ.
3	Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки.
2	Верно получены два необходимых условия на значения параметра a, однако в результате решения либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна.
1	Получено только одно необходимое условие на значения a, например, $D>0$ или $f(0)>0$, или $x_0>0$.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.
4	Максимальный балл.

$\boxed{\text{C6}}$ Найдите все пары натуральных чисел a и b, удовлетворяющие равенству $a^b+8=\overline{ba}$ (в правой части стоит число, полученное дописыванием десятичной записи числа a после десятичной записи числа b).

Решение.

В случаях $a=1$ или $b=1$ имеем: $9=1^b+8=\overline{b1}$ или $a^1+8=\overline{1a}=10^k+a$ (где a - k-значное), что невозможно. Далее считаем $a>1$ и $b>1$. Пусть $a\le 9$. Тогда для выполнения равенства необходимо условие $b\le 9$, так как иначе, есть число b - k-значное ($k\ge 2$), имеем:

$$a^b\ge 2^{\left(10^{k-1}\right)}\ge 2^{10(k-1)}>10^{3(k-1)}=10^{k+(2k-3)}\ge 10^{k+1}>\overline{ba}.$$

Пусть $a \geq 10$. Тогда для выполнения равенства необходимы условия: $b = 2$ и $a \leq 31$, так как иначе, если b - k-значное, а a - $(m+1)$-значно $(m \geq 1)$, имеем:

Если $k > 1$, то

$$a^b \geq \left(10^m\right)^{10^{k-1}} \geq 10^{m(k+2)} = 10^{(m+m)+m\cdot k} \geq 10^{(m+1)+k} > \overline{ba};$$

Если $k = 1$, $b \geq 3$, то

$$\left(10^m\right)^3 = 10^{(m+m)+m} \geq 10^{(m+1)+k} > \overline{ba};$$

Если $k = 1$, $b = 2$, $m \geq 2$, то

$$\left(10^m\right)^2 = 10^{\left(m+\frac{m}{2}\right)+\frac{m}{2}} \geq 10^{(m+1)+k} > \overline{ba};$$

Если $k = 1$, $b = 2$, $m = 1$, $a \geq 32$, то

$$(32)^2 \geq 10^3 = 10^{(m+1)+k} > \overline{ba}.$$

Конечным перебором всех пар a и b, для которых:

либо $1 < a \leq 9$ и $1 < b \leq 9$,

либо $10 \leq a \leq 31$ и $b = 2$.

Получаем, что уравнению удовлетворяет всего одна пара $a = 4$, $b = 2$.

Ответ: $a = 4$, $b = 2$.

<u>Замечание:</u>

Перебор значений a и b может быть произведен с помощью дополнительных соображений (свойство делимости, оценок величин и т.п.).

Например:

Остаются две возможности: либо $1 < a \leq 9$ и $1 < b \leq 9$ либо $10 \leq a \leq 31$ и $b = 2$. В первом случае, если $a = 2$, имеем: $10b + 2 = 2^b + 8$.

При $b > 6$ правая часть – трехзначное число. Если $b \neq 2$, $b \neq 6$, то левая часть заканчивается на 2, а правая – нет. Но ни $b = 2$, ни $b = 6$ не подходят.

Если $a = 3$, имеем: $10^b + 3 = 3^b + 8$.

При $b > 4$ справа стоит число, состоящее более чем из двух цифр. Несложно проверить, что случай $b = 2$, $b = 3$, $b = 4$ не подходят.

Если $a = 4$, имеем: $10^b + 4 = 4^b + 8$.

При $b > 3$ справа стоит число, состоящее более чем из двух цифр. Несложно проверить, что случаи $b = 2$ подходит, а $b = 3$ не подходят.

При $a \geq 5$, если $b > 2$, справа стоит число, состоящее более чем из двух цифр. Значит, $b = 2$, но тогда $20 + a = a^2 + 8$, $a^2 - a - 12 = 0$, откуда $a = 4$ - уже разобранный случай. Во втором случае $200 + a = a^2 + 8$, $a^2 - a - 192 = 0$. Целых решений нет.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С6.
4	В представленном решении обоснованно получен верный ответ.
3	Ответ правилен, но недостаточно обоснован: правильно произведен перебор не более чем двухзначных оснований степени и не более чем однозначных ее показателей, но не объяснено, почему ограничен только перечисленными случаями.
2	Ответ содержит правильную и, возможно, одну неправильную пару. Произведен перебор не более чем однозначных ее показателей, но с арифметическими ошибками или пробелами.
1	Приведена правильная пара и проверено, что она обращает уравнение в верное числовое равенство.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.
4	Максимальный балл.