

Критерии оценивания заданий с развернутым ответом

C1 Решите уравнение $(4\cos^2 x - 4\cos x - 3) \cdot \log_{14}(-\sin x) = 0$.

Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $\sin x < 0$.

Если $\log_{14}(-\sin x) = 0$, то $\sin x = -1$, откуда $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Если $\log_{14}(-\sin x) \neq 0$, то $4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0$, откуда $\cos x = -\frac{3}{2}$ или $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Уравнение $\cos x = -\frac{3}{2}$ не имеет решений.

Учитывая, что $\sin x < 0$, из уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$ получаем:

$$x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

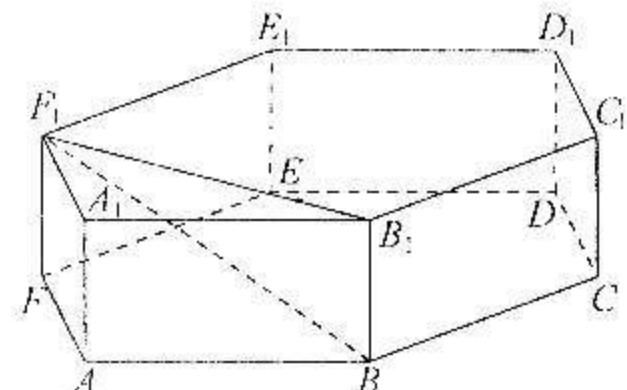
Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

| Содержание критерия | | Баллы |
|--|---|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | | 2 |
| Верно найдены все значения переменной x , при которых равен нулю первый сомножитель левой части исходного уравнения. Возможно отбор найденных значений или не произведён, или произведён неверно | 1 | |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 | |
| Максимальный балл | | 2 |

C2 В правильной шестигранной призме $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, стороны основания которой равны 4, а боковые рёбра равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой F_1E_1 .

Решение.

Так как $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильный шестигранник, то прямые B_1F_1 и F_1E_1 перпендикулярны, следовательно, прямые BF_1 и E_1E_1 перпендикулярны. Расстояние от точки B до прямой E_1E_1 равно длине отрезка BF_1 .



Из треугольника $A_1F_1B_1$ находим: $F_1B_1 = 4\sqrt{3}$.

Из прямоугольного треугольника BB_1F_1 находим: $BF_1 = 7$.

Ответ: 7.

| Содержание критерия | Баллы | |
|---|-------|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 | |
| Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено | 1 | |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 | |
| Максимальный балл | | 2 |

C3 Решите неравенство $\frac{2\log_6(x^2 + 5x)}{\log_6 x^2} \leq 1$.

Решение.

Решение будем искать при условиях:

$$\begin{cases} x^2 + 5x > 0, \\ x^2 > 0, \\ x^2 \neq 1, \end{cases}$$

откуда $x \in (-\infty, -5) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in (-\infty, -5) \cup (1; +\infty)$, тогда $x^2 > 1$, откуда $\log_6 x^2 > 0$, поэтому

$$\log_6(x^2 + 5x)^2 \leq \log_6 x^2; (x^2 + 5x)^2 \leq x^2; x^2((x+5)^2 - 1) \leq 0;$$

$$x^2(x+4)(x+6) \leq 0; -6 \leq x \leq -4, x=0,$$

откуда $x \in [-6, -5]$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in (0; 1)$, тогда $x^2 < 1$, откуда $\log_6 x^2 < 0$, поэтому

Треугольник AQD подобен треугольнику EQC с коэффициентом $\frac{AD}{CE} = \frac{2AM}{CE} = \frac{8}{3}$, значит, если QH — высота треугольника AQD , то $QH = \frac{8}{11}h = \frac{32}{11}$. Следовательно, $S_{AQD} = \frac{1}{2}AD \cdot QH = AM \cdot QH = \frac{128}{11}$.

Тот же результат для прямой, проходящей через вершину D .

Ответ: 10 или $\frac{128}{11}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|--|----------|
| Обоснованно получен верный ответ | 3 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины | 2 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение некомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 3 |

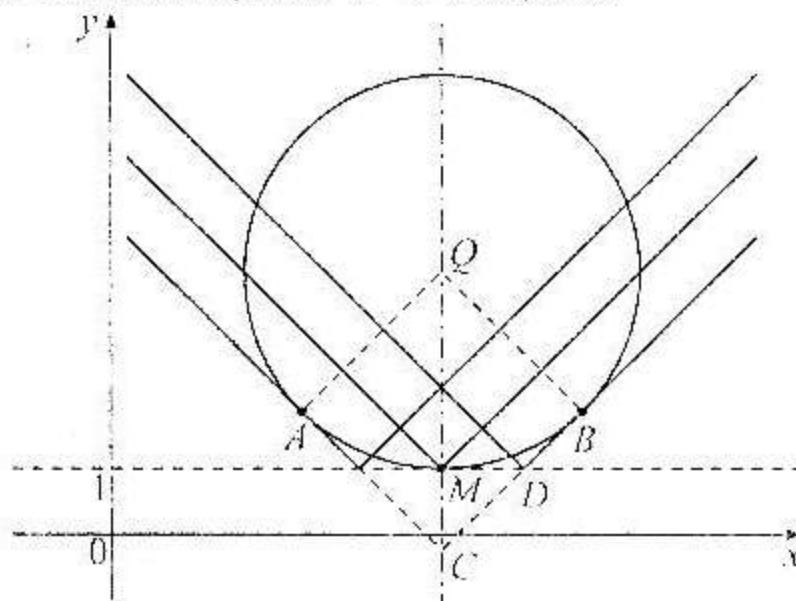
C5 Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-5)^2 + (y-4)^2 = 9, \\ y = |x-a| + 1 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение.

Первое уравнение системы задаёт окружность с центром в точке $(5; 4)$ радиуса 3. Второе уравнение — прямой угол с вершиной в точке $(a; 1)$ и симметричный относительно прямой $x=a$ (см. рис.).



Прямая $y=1$ является касательной к окружности.

Ровно три общие точки фигуры имеют в трёх случаях.

1. Вершина прямого угла лежит в точке касания окружности и прямой $y=1$ (в точке M), а его стороны пересекают окружность в двух точках. Это условие выполняется при $a=5$.

2. Одна из сторон прямого угла пересекает окружность в двух точках, а другая касается окружности (два случая).

Четырёхугольник $BQAC$ — квадрат (см. рис.), симметричный относительно прямой $x=5$, со стороной 3 и диагональю $3\sqrt{2}$.

$$MD = MC = QC = QM = 3\sqrt{2} - 3, \text{ тогда } a = 3\sqrt{2} - 3 + 5 = 2 + 3\sqrt{2}.$$

В силу симметрии получаем ещё одно значение параметра: $a = 5 - (3\sqrt{2} - 3) = 8 - 3\sqrt{2}$.

При $a < 8 - 3\sqrt{2}$ или $a > 2 + 3\sqrt{2}$ прямой угол имеет не более двух общих точек с окружностью.

При $8 - 3\sqrt{2} < a < 5$ или $5 < a < 2 + 3\sqrt{2}$ прямой угол имеет четыре общие точки с окружностью.

Ответ: $8 - 3\sqrt{2}; 5; 2 + 3\sqrt{2}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|----------|
| Обоснованно получен верный ответ | 4 |
| С помощью верного рассуждения получены три верных значения параметра, но решение недостаточно обосновано | 3 |
| С помощью верного рассуждения получены хотя бы два верных значения параметра | 2 |
| Задача сведена к исследованию: — или взаимного расположения окружности и угла; — или двух квадратных уравнений с параметром | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 4 |

C6

Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 12 раз больше, либо в 12 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 1652.

- Может ли последовательность состоять из двух членов?
- Может ли последовательность состоять из трёх членов?
- Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Решение.

а) Если последовательность состоит из двух членов, a и $12a$ (в произвольном порядке), то $a + 12a = 1652$. Уравнение $13a = 1652$ не имеет решений в натуральных числах. Поэтому последовательность не может состоять из двух членов.

б) Последовательность может состоять из трёх членов: 118, 1416, 118.

в(пример) Приведём пример последовательности из 255 членов:

$$1, \underbrace{12, 1}_{13}, \underbrace{12, 1}_{13}, \dots, \underbrace{12, 1}_{13}.$$

Сумма её членов равна $1 + 13 \cdot 127 = 1652$.

в(оценка) Допустим, что в последовательности более чем 255 членов. Разобъём первые 256 членов последовательности на 128 пар соседних членов: первый и второй, третий и четвёртый, пятый и шестой и т.д. Сумма двух членов в каждой паре делится на 13 и поэтому не меньше 13. Значит, сумма всех членов последовательности не меньше, чем $128 \cdot 13 = 1664 > 1652$.

Противоречие.

Ответ: а) нет, б) да, в) 255.

| Содержание критерия | Базы |
|---|------|
| Верно выполнены: а), б), в(пример), в(оценка) | 4 |
| Верно выполнены три пункта из четырёх: а), б), в(пример), в(оценка) | 3 |
| Верно выполнены два пункта из четырёх: а), б), в(пример), в(оценка) | 2 |
| Верно выполнен один пункт из четырёх: а), б), в(пример), в(оценка) | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критерии, перечисленных выше | 0 |
| <i>Максимальный балл</i> | |

Критерии оценивания заданий с развернутым ответом**C1**

Решите уравнение $(2\sin^2 x - 5\sin x + 2) \cdot \log_{12}(\cos x) = 0$.

Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x > 0$.

Если $\log_{12}(\cos x) = 0$, то $\cos x = 1$, откуда $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Если $\log_{12}(\cos x) \neq 0$, то $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$, откуда $\sin x = 2$ или $\sin x = \frac{1}{2}$.

Уравнение $\sin x = 2$ не имеет решений.

Учитывая, что $\cos x > 0$, из уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ получаем:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

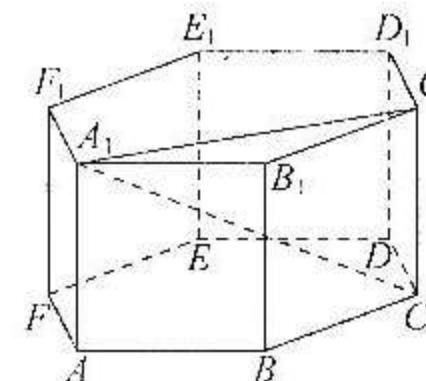
| Содержание критерия | Баллы |
|--|----------|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Верно найдены все значения переменной x , при которых равен нулю первый сомножитель левой части исходного уравнения. Возможно отбор найденных значений или не прописан, или прописан неверно | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 2 |

C2

В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки C до прямой A_1F_1 .

Решение.

Так как $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильный шестиугольник, то прямые F_1A_1 и A_1C_1 перпендикуляры, следовательно, прямые C_1A_1 и A_1F_1 перпендикуляры. Расстояние от точки C до прямой A_1F_1 равно длине отрезка CA_1 .



Из треугольника $A_1B_1C_1$ находим: $A_1C_1 = \sqrt{3}$.

Из прямоугольного треугольника A_1C_1C находим: $CA_1 = 2$.

Ответ: 2.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|----------|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 2 |

C3 Решите неравенство $\frac{2\log_2(x^2 - 2x)}{\log_4 x^2} \leq 1$.

Решение.

Решение будем искать при условиях:

$$\begin{cases} x^2 - 2x > 0, \\ x^2 > 0, \\ x^2 \neq 1, \end{cases}$$

откуда $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (2; +\infty)$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$, тогда $x^2 > 1$, откуда $\log_4 x^2 > 0$, поэтому

$$\log_4(x^2 - 2x)^2 \leq \log_4 x^2; (x^2 - 2x)^2 \leq x^2; x^2((x-2)^2 - 1) \leq 0;$$

$$x^2(x-1)(x-3) \leq 0; 1 \leq x \leq 3, x=0,$$

откуда $x \in (2; 3]$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in (-1; 0)$, тогда $x^2 < 1$, откуда $\log_4 x^2 < 0$, поэтому

Задача связана к исследованию:

- при взаимного расположения окружности и угла;
- при двух квадратных уравнений с параметром.

Решение не соответствует ни одному из критериям, перечисленных выше

Максимальный балл 4

C6 Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 10 раз больше, либо в 10 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 1860.

- Может ли последовательность состоять из двух членов?
- Может ли последовательность состоять из трёх членов?
- Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Решение.

а) Если последовательность состоит из двух членов, a и $10a$ (в произвольном порядке), то $a + 10a = 1860$. Уравнение $11a = 1860$ не имеет решений в натуральных числах. Поэтому последовательность не может состоять из двух членов.

б) Последовательность может состоять из трёх членов: 155, 1550, 155.

в(пример) Приведём пример последовательности из 339 членов:

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & \underbrace{10, 1,}_{3}, & \underbrace{10, 1,}_{3}, & \dots, & \underbrace{10, 1,}_{3}, & & \\ & \hline & & & & & 169 \end{array}$$

Сумма её членов равна $1 + 11 \cdot 169 = 1860$.

в(оценка) Допустим, что в последовательности более чем 339 членов. Разобъём первые 340 членов последовательности на 170 пар соседних членов: первый и второй, третий и четвёртый, пятый и шестой и т.д. Сумма двух членов в каждой паре делится на 11 и поэтому не меньше 11. Значит, сумма всех членов последовательности не меньше, чем $170 \cdot 11 = 1870 > 1860$.

Противоречие.

Ответ: а) нет, б) да, в) 339.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|-------|
| Верно выполнены а), б), в(пример), в(оценка) | 4 |
| Верно выполнены три пункта из четырёх: а), б), в(пример), в(оценка) | 3 |
| Верно выполнены два пункта из четырёх: а), б), в(пример), в(оценка) | 2 |
| Верно выполнен один пункт из четырёх: а), б), в(пример), в(оценка) | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критерии, перечисленных выше | 0 |
| <i>Максимальный балл</i> | 4 |

Треугольник AQD подобен треугольнику EQC с коэффициентом $\frac{AD}{CE} = \frac{25}{8}$, значит, если QH — высота треугольника AQD , то

$$QH = \frac{25}{33}h = \frac{250}{11}; S_{AQD} = \frac{1}{2}AD \cdot QH = \frac{6250}{11}.$$

$$\text{Следовательно, } \frac{S_{AQD}}{S} = \frac{625}{1122}.$$

Тот же результат для прямой, проходящей через вершину D .

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2} \text{ или } \frac{625}{1122}.$$

| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 3 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины | 2 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критерев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 3 |

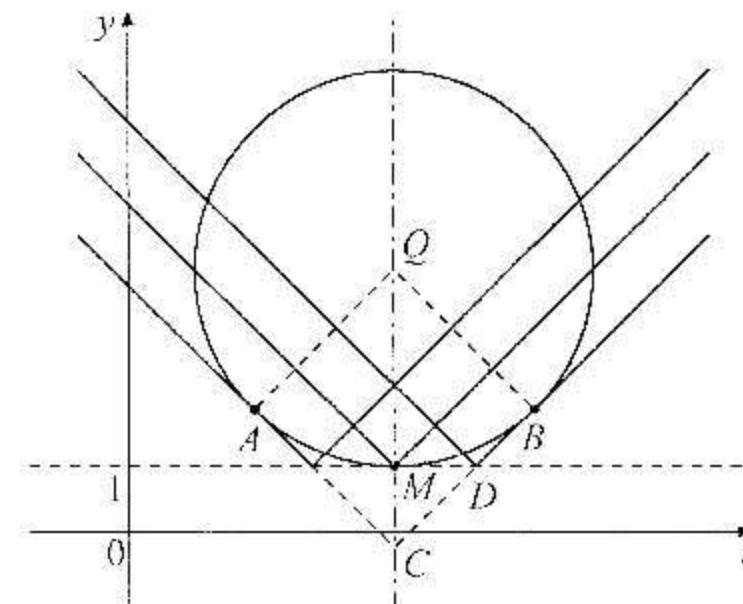
C5 Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-4)^2 = 9, \\ y = |x-a| + 1 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение.

Первое уравнение системы задаёт окружность с центром в точке $(4; 4)$ радиуса 3. Второе уравнение — прямой угол с вершиной в точке $(a; 1)$ и симметричен относительно прямой $x = a$ (см. рис.).



Прямая $y = 1$ является касательной к окружности.

Ровно три общие точки фигуры имеют в трёх случаях,

1. Вершина прямого угла лежит в точке касания окружности и прямой $y = 1$ (в точке M), а его стороны пересекают окружность в двух точках. Это условие выполняется при $a = 4$.

2. Одна из сторон прямого угла пересекает окружность в двух точках, а другая касается окружности (два случая).

Четырёхугольник $BQAC$ — квадрат (см. рис.), симметричный относительно прямой $x = 4$, со стороной 3 и диагональю $3\sqrt{2}$.

$$MD = MC = QC - QM = 3\sqrt{2} - 3, \text{ тогда } a = 3\sqrt{2} - 3 + 4 = 1 + 3\sqrt{2}.$$

В силу симметрии получаем ещё одно значение параметра: $a = 4 - (3\sqrt{2} - 3) = 7 - 3\sqrt{2}$.

При $a < 7 - 3\sqrt{2}$ или $a > 1 + 3\sqrt{2}$ прямой угол имеет не более двух общих точек с окружностью.

При $7 - 3\sqrt{2} < a < 4$ или $4 < a < 1 + 3\sqrt{2}$ прямой угол имеет четыре общие точки с окружностью.

Ответ: $7 - 3\sqrt{2}; 4; 1 + 3\sqrt{2}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 4 |
| С помощью верного рассуждения получены три верных значения параметра, но решение недостаточно обосновано | 3 |
| С помощью верного рассуждения получены хотя бы два верных значения параметра | 2 |

Критерии оценивания заданий с развернутым ответом

C1 Решите уравнение $(4\sin^2 x + 8\sin x - 5) \cdot \log_{16}(-\cos x) = 0$.

Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x < 0$.

Если $\log_{16}(-\cos x) = 0$, то $\cos x = -1$, откуда $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Если $\log_{16}(-\cos x) \neq 0$, то $4\sin^2 x + 8\sin x - 5 = 0$, откуда $\sin x = -\frac{5}{2}$ или $\sin x = \frac{1}{2}$.

Уравнение $\sin x = -\frac{5}{2}$ не имеет решений.

Учитывая, что $\cos x < 0$, из уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ получаем:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

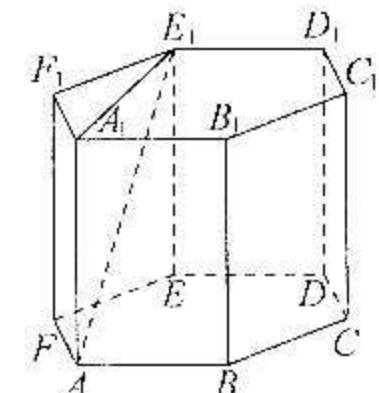
Ответ: $\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

| Содержание критерия | Базы |
|--|------|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Верно найдены все значения переменной x , при которых равен нулю первый сомножитель левой части исходного уравнения. Возможно отбор найденных значений или не произведён, или произведён неверно | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 2 |

C2 В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, стороны основания которой равны 5, а боковые рёбра равны 11, найдите расстояние от точки A до прямой E_1D_1 .

Решение.

Так как $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильный шестиугольник, то прямые A_1E_1 и E_1D_1 перпендикулярны, следовательно, прямые AE_1 и E_1D_1 перпендикулярны. Расстояние от точки A до прямой E_1D_1 равно длине отрезка AE_1 .



Из треугольника $A_1F_1E_1$ находим: $A_1E_1 = 5\sqrt{3}$.

Из прямоугольного треугольника AA_1E_1 находим: $AE_1 = 14$.

Ответ: 14.

| Содержание критерия | Базы |
|---|------|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 2 |

C3 Решите неравенство $\frac{2 \log_5(x^2 - 5x)}{\log_5 x^2} \leq 1$.

Решение.

Решение будем искать при условиях:

$$\begin{cases} x^2 - 5x > 0, \\ x^2 > 0, \\ x^2 \neq 1, \end{cases}$$

откуда $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (5; +\infty)$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$, тогда $x^2 > 1$, откуда $\log_5 x^2 > 0$, поэтому

$$\log_5(x^2 - 5x)^2 \leq \log_5 x^2; (x^2 - 5x)^2 \leq x^2; x^2((x-5)^2 - 1) \leq 0;$$

$$x^2(x-4)(x-6) \leq 0; 4 \leq x \leq 6, x=0,$$

откуда $x \in [5; 6]$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in (-1; 0)$, тогда $x^2 < 1$, откуда $\log_5 x^2 < 0$, поэтому

$$\log_5(x^2 - 5x)^2 \geq \log_5 x^2; (x^2 - 5x)^2 > x^2; x^2((x-5)^2 - 1) \geq 0;$$

$$x^2(x-4)(x-6) \geq 0; x \leq 4, x \geq 6.$$

откуда $x \in (-\infty; 0] \cup [5; 6]$.

Ответ: $(-\infty; 0] \cup [5; 6]$.

| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 3 |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного конечным количеством значений переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства | 2 |
| Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам или верно найдены все значения переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критерiev, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 3 |

С4

Окружность радиуса 6 вписана в равнобедренную трапецию, большее основание которой равно 18. Прямая, проходящая через центр окружности и вершину трапеции, отсекает от трапеции треугольник. Найдите отношение площади этого треугольника к площади трапеции.

Решение.

Пусть окружность радиуса R с центром O , вписанная в равнобедренную трапецию $ABCD$, касается боковой стороны AB в точке M , причём $R = 6$ и $AD = 18$.

AO и BO соответственно являются биссектрисами углов A и B трапеции $ABCD$, которые в сумме составляют 180° , поэтому треугольник APO — прямоугольный, тогда OM — высота, проведённая из вершины прямого угла AOB , поэтому

$$BM = \frac{OM^2}{AM} = \frac{R^2}{\frac{1}{2}AD} = \frac{36}{9} = 4; BC = 2BM = 8; AB = AM + BM = 13.$$

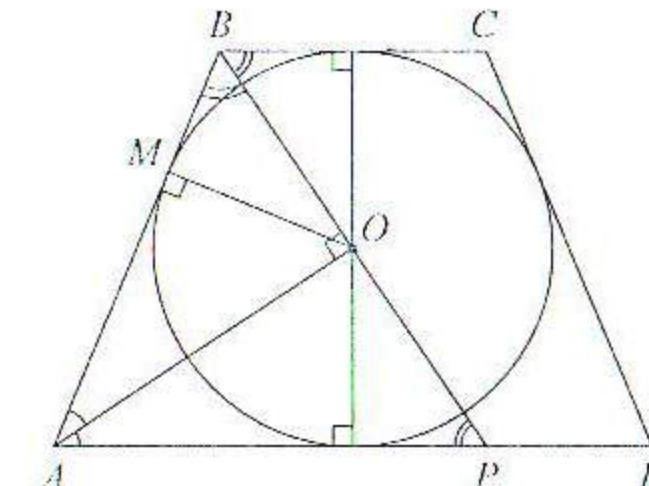


Рис. 1

Пусть прямая, о которой говорится в условии задачи, проходит через вершину B и пересекает основание AD трапеции в точке P (рис. 1). Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе угла, поэтому $\angle APB = \angle CBP = \angle ABP$, значит, треугольник ABP — равнобедренный, $AP = AB = 13$, поэтому $S_{ABP} = 2S_{OAB} = 2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot OM = 78$.

Пусть S — площадь трапеции, h — высота трапеции, тогда

$$h = 2R = 12; S = \frac{1}{2}(AD + BC)h = 156.$$

Следовательно, $\frac{S_{ABP}}{S} = \frac{1}{2}$.

Несколько трапеция равнобедренная, для прямой, проходящей через вершину C , получим тот же результат.

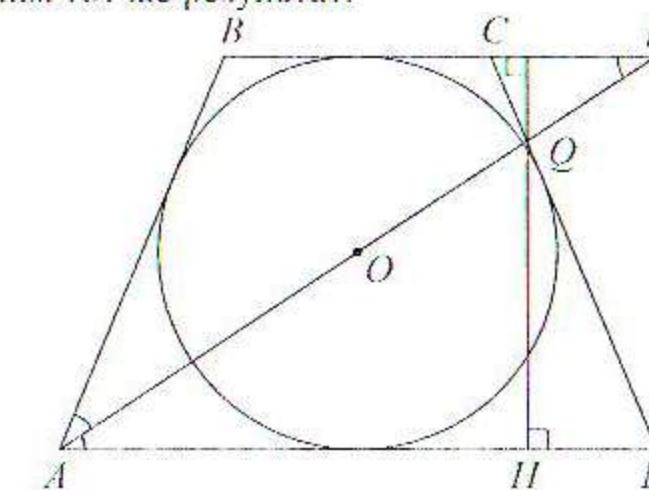


Рис. 2

Пусть теперь указанная прямая проходит через вершину A (рис. 2), пересекает боковую сторону CD в точке Q , а продолжение основания BC — в точке E . Треугольник ABE — равнобедренный ($\angle AEB = \angle DAE = \angle BAE$), поэтому $BE = AB = 13$; $CE = BE - BC = 5$.

Критерии оценивания заданий с развернутым ответом

C1 Решите уравнение $(4\sin^2 x + 8\sin x - 5) \cdot \log_{16}(-\cos x) = 0$.

Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x < 0$.

Если $\log_{16}(-\cos x) = 0$, то $\cos x = -1$, откуда $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Если $\log_{16}(-\cos x) \neq 0$, то $4\sin^2 x + 8\sin x - 5 = 0$, откуда $\sin x = -\frac{5}{2}$ или $\sin x = \frac{1}{2}$.

Уравнение $\sin x = -\frac{5}{2}$ не имеет решений.

Учитывая, что $\cos x < 0$, из уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ получаем:

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

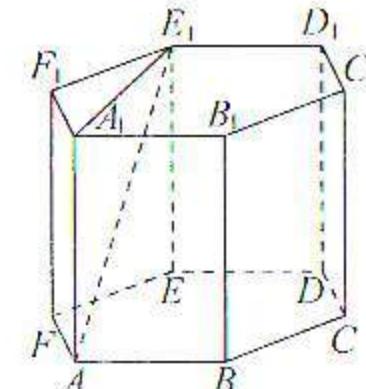
Ответ: $\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Верно найдены все значения переменной x , при которых равен нулю первый сомножитель левой части исходного уравнения. Возможно отбор найденных значений или не произведён, или произведён неверно | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 2 |

C2 В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, стороны основания которой равны 5, а боковые рёбра равны 11, найдите расстояние от точки A до прямой E_1D_1 .

Решение.

Так как $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильный шестиугольник, то прямые A_1E_1 и E_1D_1 перпендикулярны, следовательно, прямые AE_1 и E_1D_1 перпендикулярны. Расстояние от точки A до прямой E_1D_1 равно длине отрезка AE_1 .



Из треугольника $A_1F_1E_1$ находим: $A_1E_1 = 5\sqrt{3}$.

Из прямоугольного треугольника AA_1E_1 находим: $AE_1 = 14$.

Ответ: 14.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 2 |

C3 Решите неравенство $\frac{2 \log_5(x^2 - 5x)}{\log_5 x^2} \leq 1$.

Решение.

Решение будем искать при условиях:

$$\begin{cases} x^2 - 5x > 0, \\ x^2 > 0, \\ x^2 \neq 1, \end{cases}$$

откуда $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (5; +\infty)$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$, тогда $x^2 > 1$, откуда $\log_5 x^2 > 0$, поэтому

$$\log_5(x^2 - 5x)^2 \leq \log_5 x^2; (x^2 - 5x)^2 \leq x^2; x^2((x-5)^2 - 1) \leq 0;$$

$$x^2(x-4)(x-6) \leq 0; 4 \leq x \leq 6, x=0,$$

откуда $x \in (5; 6]$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in (-1; 0)$, тогда $x^2 < 1$, откуда $\log_5 x^2 < 0$, поэтому

Треугольник AQD подобен треугольнику EQC с коэффициентом $\frac{AD}{CE} = \frac{18}{5}$, значит, если QH — высота треугольника AQD , то

$$QH = \frac{18}{23}h = \frac{216}{23}; S_{AQD} = \frac{1}{2}AD \cdot QH = \frac{1944}{23}.$$

Следовательно, $\frac{S_{AQD}}{S} = \frac{162}{299}$.

Тот же результат для прямой, проходящей через вершину D .

Ответ: $\frac{1}{2}$ или $\frac{162}{299}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 3 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины | 2 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критерии, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 3 |

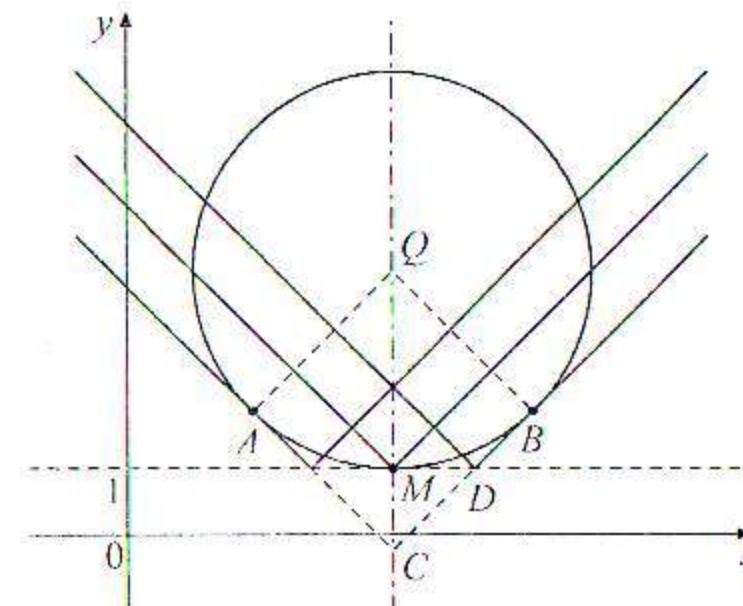
C5 Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-4)^2 = 9, \\ y = |x-a| + 1 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение.

Первое уравнение системы задаёт окружность с центром в точке $(4; 4)$ радиуса 3. Второе уравнение — прямой угол с вершиной в точке $(a; 1)$ и симметричен относительно прямой $x = a$ (см. рис.).



Прямая $y=1$ является касательной к окружности.

Ровно три общие точки фигуры имеют в трёх случаях:

1. Вершина прямого угла лежит в точке касания окружности и прямой $y=1$ (в точке M), а его стороны пересекают окружность в двух точках. Это условие выполняется при $a=4$.

2. Одна из сторон прямого угла пересекает окружность в двух точках, а другая касается окружности (два случая).

Четырёхугольник $BQAC$ — квадрат (см. рис.), симметричен относительно прямой $x=4$, стороны 3 и диагональю $3\sqrt{2}$.

$$MD = MC = QC - QM = 3\sqrt{2} - 3, \text{ тогда } a = 3\sqrt{2} - 3 + 4 = 1 + 3\sqrt{2}.$$

В силу симметрии получаем ещё одно значение параметра: $a = 4 - (3\sqrt{2} - 3) = 7 - 3\sqrt{2}$.

При $a < 7 - 3\sqrt{2}$ или $a > 1 + 3\sqrt{2}$ прямой угол имеет не более двух общих точек с окружностью.

При $7 - 3\sqrt{2} < a < 4$ или $4 < a < 1 + 3\sqrt{2}$ прямой угол имеет четыре общие точки с окружностью.

Ответ: $7 - 3\sqrt{2}; 4; 1 + 3\sqrt{2}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 4 |
| С помощью верного рассуждения получены три верных значения параметра, но решение недостаточно обосновано | 3 |
| С помощью верного рассуждения получены хотя бы два верных значения параметра | 2 |

| | |
|--------------------------------|--|
| Задача сведена к исследованию: | |
|--------------------------------|--|

- или взаимного расположения окружности и угла;
- или двух квадратных уравнений с параметром

1

| | |
|--|---|
| Решение не соответствует ни одному из критерии, перечисленных выше | 0 |
|--|---|

| | |
|--------------------------|---|
| <i>Максимальный балл</i> | 4 |
|--------------------------|---|

C6

Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 10 раз больше, либо в 10 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 1860.

- Может ли последовательность состоять из двух членов?
- Может ли последовательность состоять из трёх членов?
- Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Решение.

а) Если последовательность состоит из двух членов, a и $10a$ (в произвольном порядке), то $a + 10a = 1860$. Уравнение $11a = 1860$ не имеет решений в натуральных числах. Поэтому последовательность не может состоять из двух членов.

б) Последовательность может состоять из трёх членов: 155, 1550, 155.

в(пример) Приведём пример последовательности из 339 членов:

$$1, \underbrace{10, 1}_{2}, \underbrace{10, 1}_{2}, \dots, \underbrace{10, 1}_{2}, \overbrace{\quad\quad\quad}^{169}$$

Сумма её членов равна $1 + 11 \cdot 169 = 1860$.

в(оценка) Допустим, что в последовательности более чем 339 членов. Разобъём первые 340 членов последовательности на 170 пар соседних членов: первый и второй, третий и четвёртый, пятый и шестой и т.д. Сумма двух членов в каждой паре делится на 11 и поэтому не меньше 11. Значит, сумма всех членов последовательности не меньше, чем $170 \cdot 11 = 1870 > 1860$.

Противоречие.

Ответ: а) нет, б) да, в) 339.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|-------|
| Верно выполнены: а), б), в(пример), в(оценка) | 4 |
| Верно выполнены три пункта из четырёх: а), б), в(пример), в(оценка) | 3 |
| Верно выполнены два пункта из четырёх: а), б), в(пример), в(оценка) | 2 |
| Верно выполнен один пункт из четырёх: а), б), в(пример), в(оценка) | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| <i>Максимальный балл</i> | 4 |

Треугольник AQD подобен треугольнику EQC с коэффициентом $\frac{AD}{CE} = \frac{25}{8}$, значит, если QH — высота треугольника AQD , то

$$QH = \frac{25}{33}h = \frac{250}{11}; S_{AQD} = \frac{1}{2}AD \cdot QH = \frac{6250}{11}.$$

Следовательно, $\frac{S_{AQD}}{S} = \frac{625}{1122}$.

Тот же результат для прямой, проходящей через вершину D .

Ответ: $\frac{1}{2}$ или $\frac{625}{1122}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Обоснованию получен верный ответ | 3 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины | 2 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 3 |

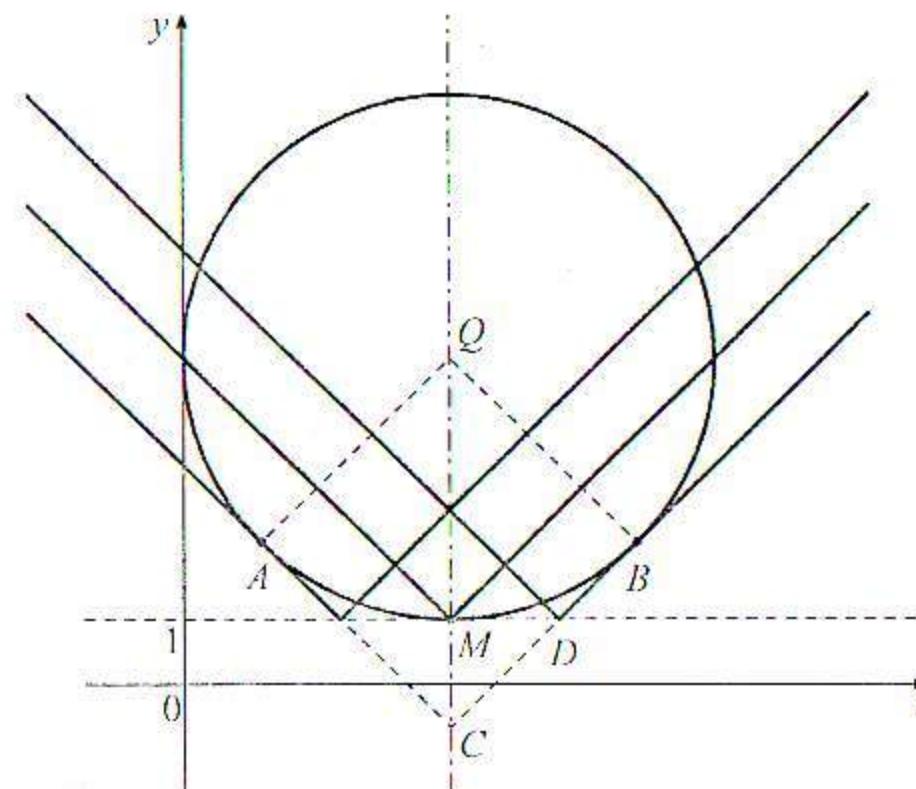
C5 Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-5)^2 = 16, \\ y = |x-a| + 1 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение.

Первое уравнение системы задаёт окружность с центром в точке $(4; 5)$ радиуса 4. Второе уравнение — прямой угол с вершиной в точке $(a; 1)$ и симметричен относительно прямой $x = a$ (см. рис.).



Прямая $y = 1$ является касательной к окружности.

Ровно три общие точки фигуры имеют в трёх случаях.

1. Вершина прямого угла лежит в точке касания окружности и прямой $y = 1$ (в точке M), а его стороны пересекают окружность в двух точках. Это условие выполняется при $a = 4$.

2. Одна из сторон прямого угла пересекает окружность в двух точках, а другая касается окружности (два случая).

Четырёхугольник $BQAC$ — квадрат (см. рис.), симметричен относительно прямой $x = 4$, со стороной 4 и диагональю $4\sqrt{2}$.

$$MD = MC = QC - QM = 4\sqrt{2} - 4, \text{ тогда } a - 4\sqrt{2} - 4 + 4 = 4\sqrt{2}.$$

В силу симметрии получаем ещё одно значение параметра: $a = 4 - (4\sqrt{2} - 4) = 8 - 4\sqrt{2}$.

При $a < 8 - 4\sqrt{2}$ или $a > 4\sqrt{2}$ прямой угол имеет не более двух общих точек с окружностью.

При $8 - 4\sqrt{2} < a < 4$ или $4 < a < 4\sqrt{2}$ прямой угол имеет четыре общие точки с окружностью.

Ответ: $8 - 4\sqrt{2}; 4; 4\sqrt{2}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 4 |
| С помощью верного рассуждения получены три верных значения параметра, но решение недостаточно обосновано | 3 |
| С помощью верного рассуждения получены хотя бы два верных значения параметра | 2 |

$$\log_2(x^2 + 2x) \geq \log_2 x^2; (x^2 + 2x)^2 \geq x^2; x^2((x+2)^2 - 1) \geq 0;$$

$$x^2(x+1)(x+3) \geq 0; x \leq -3, x \geq -1.$$

откуда $x \in (0; 1)$.

Ответ: $[-3; -2]; (0; 1)$.

| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 3 |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного конечным количеством значений переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства | 2 |
| Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам или верно найдены все значения переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 3 |

C4

Окружность вписана в равнобедренную трапецию, основания которой равны 18 и 50. Прямая, проходящая через центр окружности и вершину трапеции, отсекает от трапеции треугольник. Найдите отношение площади этого треугольника к площади трапеции.

Решение.

Пусть окружность радиуса R с центром O , вписанная в равнобедренную трапецию $ABCD$ с основаниями $BC = 18$ и $AD = 50$, касается боковой стороны AB в точке M , а оснований AD и BC — в точках N и L соответственно. Тогда

$$BM = BL = \frac{1}{2}BC = 9; AM = AN = \frac{1}{2}AD = 25; AB = AM + BM = 34.$$

$\angle AOB$ и $\angle BOA$ соответственно являются биссектрисами углов A и B трапеции $ABCD$, которые в сумме составляют 180° , поэтому треугольник AOB — прямоугольный, тогда OM — высота, проведённая из вершины прямого угла AOB , поэтому $R = OM = \sqrt{AM \cdot BM} = 15$.

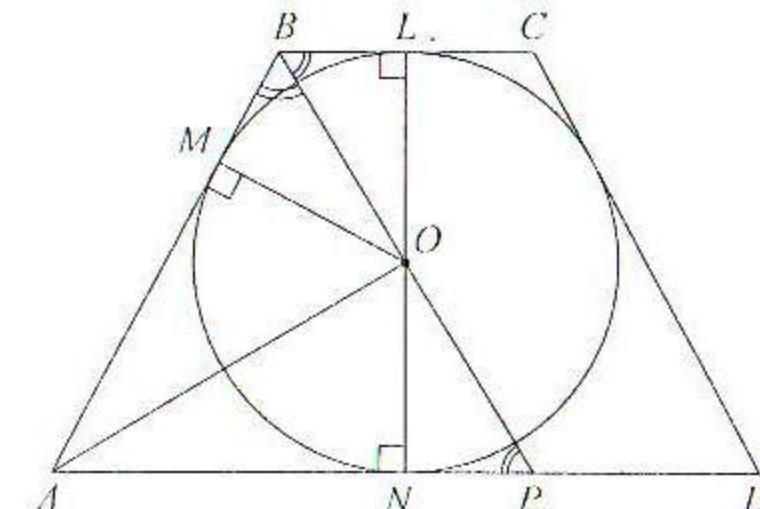


Рис. 1

Пусть прямая, о которой говорится в условии задачи, проходит через вершину B и пересекает основание AD трапеции в точке P (рис. 1). Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе угла, поэтому $\angle APB = \angle CBP = \angle ABP$, значит, треугольник ABP — равнобедренный, $AP = AB = 34$. Следовательно, $S_{ABP} = 2S_{OAB} = 2 \cdot \frac{1}{2}AB \cdot OM = 510$.

Пусть S — площадь трапеции $ABCD$, а h — её высота, тогда $h = 2R = 30$,

$$S = \frac{1}{2}(AD + BC)h = 1020.$$

Следовательно, $\frac{S_{ABP}}{S} = \frac{1}{2}$.

Поскольку трапеция равнобедренная, для прямой, проходящей через вершину C , получим тот же результат.

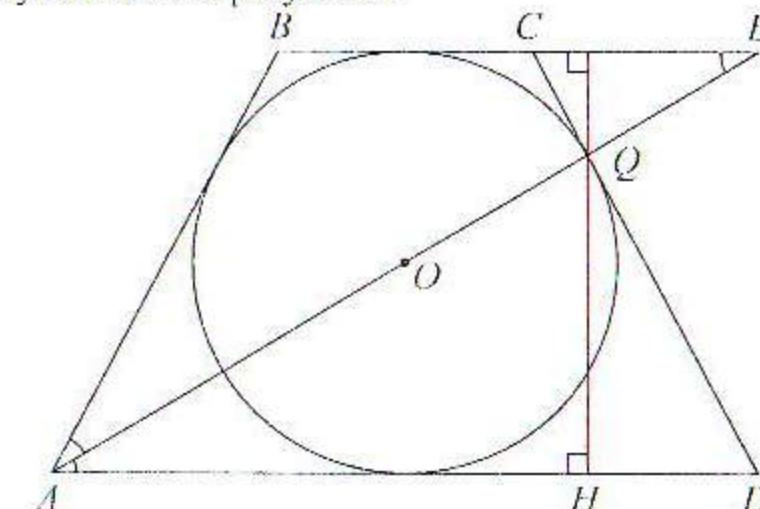


Рис. 2

Пусть теперь указанная прямая проходит через вершину A (рис. 2), пересекает боковую сторону CD в точке Q , а продолжение основания BC — в точке E . Треугольник ABE — равнобедренный ($\angle AEB = \angle DAE = \angle BAE$), поэтому $BE = AB = 34$; $CE = BE - BC = 16$.

Критерии оценивания заданий с развернутым ответом

С1

Решите уравнение $(4\cos^2 x - 4\cos x - 3) \cdot \log_{14}(-\sin x) = 0$.

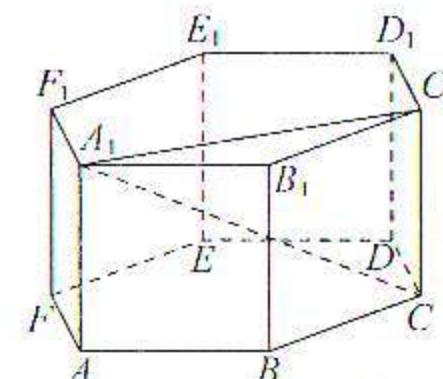
Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $\sin x < 0$.Если $\log_{14}(-\sin x) = 0$, то $\sin x = -1$, откуда $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.Если $\log_{14}(-\sin x) \neq 0$, то $4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0$, откуда $\cos x = \frac{3}{2}$ или $\cos x = -\frac{1}{2}$.Уравнение $\cos x = \frac{3}{2}$ не имеет решений.Учитывая, что $\sin x < 0$, из уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$ получаем:
 $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Верно найдены все значения переменной x , при которых равен нулю первый сомножитель левой части исходного уравнения. Возможно отбор найденных значений или не произведён, или произведён неверно | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 2 |

С2 В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки C до прямой A_1F_1 .

Решение.

Так как $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильный шестиугольник, то прямые F_1A_1 и A_1C_1 перпендикулярны, следовательно, прямые CA_1 и A_1F_1 перпендикулярны. Расстояние от точки C до прямой A_1F_1 равно длине отрезка CA_1 .Из треугольника $A_1B_1C_1$ находим: $A_1C_1 = \sqrt{3}$.Из прямоугольного треугольника CA_1C_1 находим: $CA_1 = 2$.

Ответ: 2.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 2 |

С3 Решите неравенство $\frac{2\log_2(x^2 + 2x)}{\log_2 x^2} \leq 1$.

Решение.

Решение будем искать при условиях:

$$\begin{cases} x^2 + 2x > 0, \\ x^2 > 0, \\ x^2 \neq 1, \end{cases}$$

откуда $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.Рассмотрим исходное неравенство при $x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$, тогда $x^2 > 1$, откуда $\log_2 x^2 > 0$, поэтому

$$\log_2(x^2 + 2x)^2 \leq \log_2 x^2; (x^2 + 2x)^2 \leq x^2; x^2((x+2)^2 - 1) \leq 0;$$

$$x^2(x+1)(x+3) \leq 0; -3 \leq x \leq -1, x \neq 0,$$

откуда $x \in [-3; -2)$.Рассмотрим исходное неравенство при $x \in (0; 1)$, тогда $x^2 < 1$, откуда $\log_2 x^2 < 0$, поэтому

Треугольник AQD подобен треугольнику EQC с коэффициентом $\frac{AD}{CE} = \frac{2AM}{CE} = \frac{8}{3}$, значит, если QH — высота треугольника AQD , то

$$QH = \frac{8}{11}h = \frac{32}{11}. Следовательно, S_{AOD} = \frac{1}{2}AD \cdot QH = AM \cdot QH = \frac{128}{11}.$$

Тот же результат для прямой, проходящей через вершину D .

Ответ: 10 или $\frac{128}{11}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 3 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины | 2 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 3 |

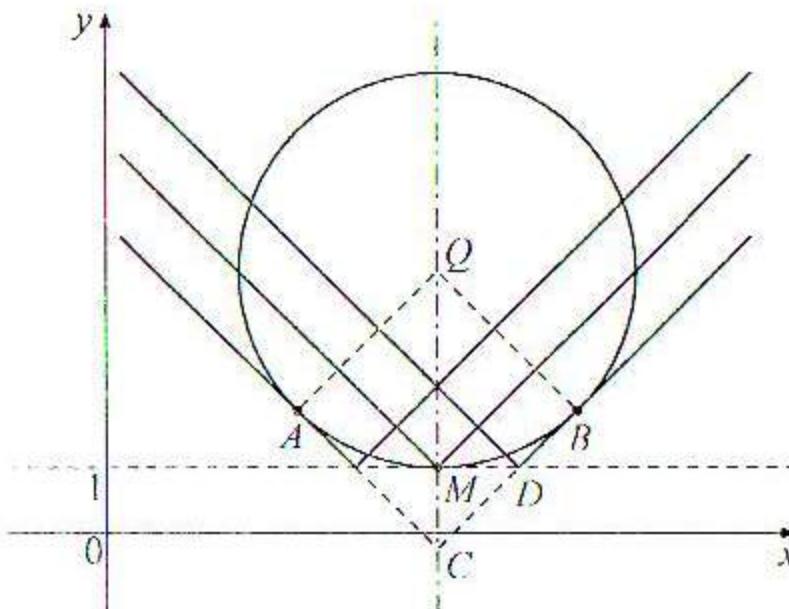
C5 Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-5)^2 + (y-4)^2 = 9, \\ y = |x-a| + 1 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение.

Первое уравнение системы задаёт окружность с центром в точке $(5; 4)$ радиуса 3. Второе уравнение — прямой угол с вершиной в точке $(a; 1)$ и симметричен относительно прямой $x = a$ (см. рис.).



Прямая $y = 1$ является касательной к окружности.

Ровно три общие точки фигуры имеют в трёх случаях.

1. Вершина прямого угла лежит в точке касания окружности и прямой $y = 1$ (в точке M), а его стороны пересекают окружность в двух точках. Это условие выполняется при $a = 5$.

2. Одна из сторон прямого угла пересекает окружность в двух точках, а другая касается окружности (два случая).

Четырёхугольник $BQAC$ — квадрат (см. рис.), симметричный относительно прямой $x = 5$, со стороной 3 и диагональю $3\sqrt{2}$.

$$MD = MC = QC - QM = 3\sqrt{2} - 3, \text{ тогда } a = 3\sqrt{2} - 3 + 5 - 2 + 3\sqrt{2}.$$

В силу симметрии получаем ещё одно значение параметра: $a = 5 - (3\sqrt{2} - 3) = 8 - 3\sqrt{2}$.

При $a < 8 - 3\sqrt{2}$ или $a > 2 + 3\sqrt{2}$ прямой угол имеет не более двух общих точек с окружностью.

При $8 - 3\sqrt{2} < a < 5$ или $5 < a < 2 + 3\sqrt{2}$ прямой угол имеет четыре общие точки с окружностью.

Ответ: $8 - 3\sqrt{2}; 5; 2 + 3\sqrt{2}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 4 |
| С помощью верного рассуждения получены три верных значения параметра, но решение недостаточно обосновано | 3 |
| С помощью верного рассуждения получены хотя бы два верных значения параметра | 2 |
| Задача сведена к исследованию: — или взаимного расположения окружности и угла; — или двух квадратных уравнений с параметром | 1 |

| | |
|--|---|
| Решение не соответствует ни одному из критерии, перечисленных выше | 0 |
|--|---|

| | |
|--------------------------|---|
| <i>Максимальный балл</i> | 4 |
|--------------------------|---|

- C6** Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 10 раз больше, либо в 10 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3024.
- Может ли последовательность состоять из двух членов?
 - Может ли последовательность состоять из трёх членов?
 - Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Решение.

а) Если последовательность состоит из двух членов, a и $10a$ (в произвольном порядке), то $a+10a=3024$. Уравнение $11a=3024$ не имеет решений в натуральных числах. Поэтому последовательность не может состоять из двух членов.

б) Последовательность может состоять из трёх членов: 252, 2520, 252.

в(пример) Приведём пример последовательности из 549 членов:

$$\begin{array}{ccccccccc} 10, & \underbrace{1, & 10, & 1, & 10, & \dots, & 1, & 10,} \\ & \underbrace{\quad\quad\quad}_{2}, & \underbrace{\quad\quad\quad}_{2}, & \underbrace{\quad\quad\quad}_{2}, & & & \underbrace{\quad\quad\quad}_{2}, & \end{array}$$

Сумма её членов равна $10 + 11 \cdot 274 = 3024$.

в(оценка) Допустим, что в последовательности более чем 549 членов. Разобъём первые 550 членов последовательности на 275 пар соседних членов: первый и второй, третий и четвёртый, пятый и шестой и т.д. Сумма двух членов в каждой паре делится на 11 и поэтому не меньше 11. Значит, сумма всех членов последовательности не меньше, чем $275 \cdot 11 = 3025 > 3024$.

Противоречие.

Ответ: а) нет, б) да, в) 549.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|-------|
| Верно выполнены: а), б), в(пример), в(оценка) | 4 |
| Верно выполнены три пункта из четырёх: а), б), в(пример), в(оценка) | 3 |
| Верно выполнены два пункта из четырёх: а), б), в(пример), в(оценка) | 2 |
| Верно выполнен один пункт из четырёх: а), б), в(пример), в(оценка) | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| <i>Максимальный балл</i> | 4 |

Критерии оценивания заданий с развернутым ответом

С1

Решите уравнение $(4\sin^2 x + 8\sin x - 5) \cdot \log_{16}(-\cos x) = 0$.

Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x < 0$.Если $\log_{16}(-\cos x) = 0$, то $\cos x = -1$, откуда $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Если $\log_{16}(-\cos x) \neq 0$, то $4\sin^2 x + 8\sin x - 5 = 0$, откуда $\sin x = -\frac{5}{2}$ или $\sin x = \frac{1}{2}$.

Уравнение $\sin x = -\frac{5}{2}$ не имеет решений.

Учитывая, что $\cos x < 0$, из уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ получаем: $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

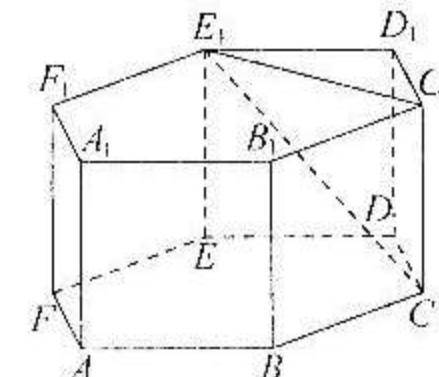
Ответ: $\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Верно найдены все значения переменной x , при которых равен нулю первый сомножитель левой части исходного уравнения. Возможно отбор найденных значений или не произведён, или произведен неверно | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 2 |

С2 В правильной шестнугольной призме $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 3, найдите расстояние от точки C до прямой E_1E_1 .

Решение.

Так как $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильный шестнугольник, то прямые E_1E_1 и E_1C_1 перпендикулярны, следовательно, прямые E_1E_1 и CE_1 перпендикулярны. Расстояние от точки C до прямой E_1E_1 равно длине отрезка CE_1 .

Из треугольника $E_1D_1C_1$ находим: $E_1C_1 = 3\sqrt{3}$.Из прямоугольного треугольника E_1C_1C находим: $CE_1 = 6$.

Ответ: 6.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 2 |

С3 Решите неравенство $\frac{2\log_5(x^2 - 5x)}{\log_5 x^2} \leq 1$.

Решение.

Решение будем искать при условиях:

$$\begin{cases} x^2 - 5x > 0, \\ x^2 > 0, \\ x^2 \neq 1, \end{cases}$$

откуда $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (5; +\infty)$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$, тогда $x^2 > 1$, откуда $\log_5 x^2 > 0$, поэтому

$$\log_5(x^2 - 5x)^2 \leq \log_5 x^2; (x^2 - 5x)^2 \leq x^2; x^2((x-5)^2 - 1) \leq 0;$$

$$x^2(x-4)(x-6) \leq 0; 4 \leq x \leq 6, x \neq 0,$$

откуда $x \in (5; 6]$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in (-1; 0)$, тогда $x^2 < 1$, откуда $\log_5 x^2 < 0$, поэтому

Следовательно, $\frac{S_{\triangle QD}}{S} = \frac{81}{130}$.

Тот же результат для прямой, проходящей через вершину D .

Ответ: $\frac{1}{2}$ или $\frac{81}{130}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 3 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины | 2 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| <i>Максимальный балл</i> | 3 |

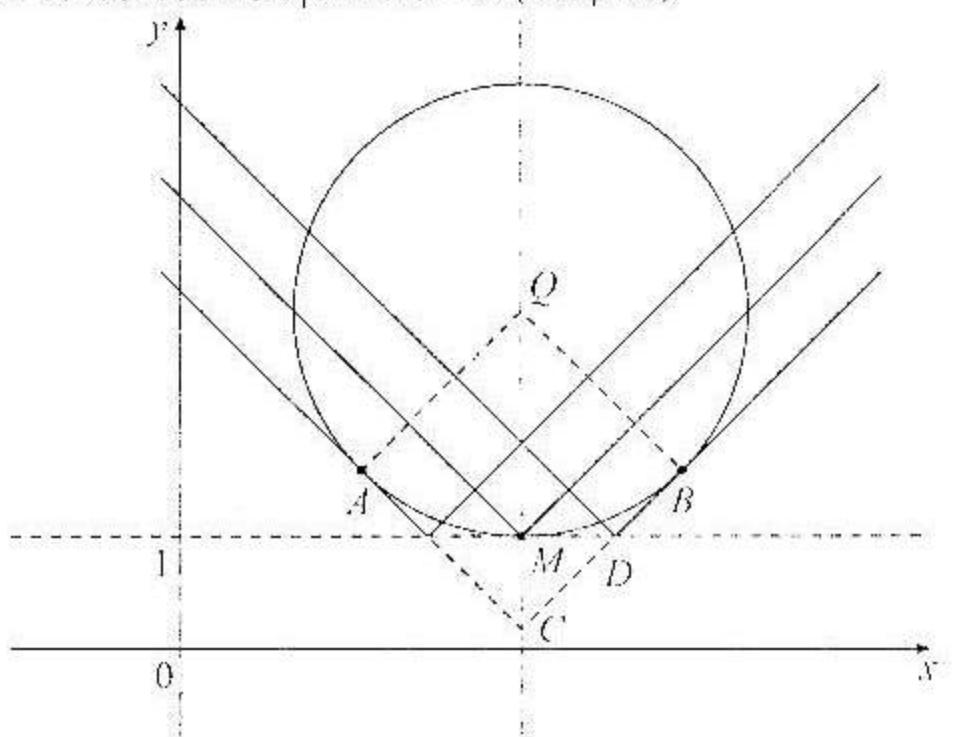
C5 Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-3)^2 = 4, \\ y = |x-a| + 1 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение.

Первое уравнение системы задаёт окружность с центром в точке $(3; 3)$ радиуса 2. Второе уравнение — прямой угол с вершиной в точке $(a; 1)$ и симметричен относительно прямой $x=a$ (см. рис.).



Прямая $y=1$ является касательной к окружности.

Ровно три общие точки фигуры имеют в трёх случаях.

1. Вершина прямого угла лежит в точке касания окружности и прямой $y=1$ (в точке M), а его стороны пересекают окружность в двух точках. Это условие выполняется при $a=3$.

2. Одна из сторон прямого угла пересекает окружность в двух точках, а другая касается окружности (два случая).

Четырёхугольник $BQAC$ — квадрат (см. рис.), симметричен относительно прямой $x=3$, со стороной 2 и диагональю $2\sqrt{2}$.

$$MD = MC = QC - QM = 2\sqrt{2} - 2, \text{ тогда } a = 2\sqrt{2} - 2 + 3 = 1 + 2\sqrt{2}.$$

В силу симметрии получаем ещё одно значение параметра: $a = 3 - (2\sqrt{2} - 2) = 5 - 2\sqrt{2}$.

При $a < 5 - 2\sqrt{2}$ или $a > 1 + 2\sqrt{2}$ прямой угол имеет не более двух общих точек с окружностью.

При $5 - 2\sqrt{2} < a < 3$ или $3 < a < 1 + 2\sqrt{2}$ прямой угол имеет четыре общие точки с окружностью.

Ответ: $5 - 2\sqrt{2}; 3; 1 + 2\sqrt{2}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 4 |
| С помощью верного рассуждения получены три верных значения параметра, но решение недостаточно обосновано | 3 |
| С помощью верного рассуждения получены хотя бы два верных значения параметра | 2 |
| Задача сведена к исследованию: — или взаимного расположения окружности и угла; — или двух квадратных уравнений с параметром | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| <i>Максимальный балл</i> | 4 |

C6

Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 10 раз больше, либо в 10 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3024.

- Может ли последовательность состоять из двух членов?
- Может ли последовательность состоять из трёх членов?
- Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Решение.

а) Если последовательность состоит из двух членов, a и $10a$ (в произвольном порядке), то $a + 10a = 3024$. Уравнение $11a = 3024$ не имеет решений в натуральных числах. Поэтому последовательность не может состоять из двух членов.

б) Последовательность может состоять из трёх членов: 252, 2520, 252.

в(пример) Приведём пример последовательности из 549 членов:

$$10, \underbrace{1, 10,}_{2}, \underbrace{1, 10,}_{2}, \dots, \underbrace{1, 10,}_{2},$$

$$\sum_{\text{274 пар}}^{274}$$

Сумма её членов равна $10 + 11 \cdot 274 = 3024$.

в(оценка) Допустим, что в последовательности более чем 549 членов. Разобъём первые 550 членов последовательности на 275 пар соседних членов: первый и второй, третий и четвёртый, пятый и шестой и т.д. Сумма двух членов в каждой паре делится на 11 и поэтому не меньше 11. Значит, сумма всех членов последовательности не меньше, чем $275 \cdot 11 = 3025 > 3024$. Противоречие.

Ответ: а) нет, б) да, в) 549.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|-------|
| Верно выполнены: а), б), в(пример), в(оценка) | 4 |
| Верно выполнены три пункта из четырёх: а), б), в(пример), в(оценка) | 3 |
| Верно выполнены два пункта из четырёх: а), б), в(пример), в(оценка) | 2 |
| Верно выполнен один пункт из четырёх: а), б), в(пример), в(оценка) | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| <i>Максимальный балл</i> | |
| 4 | |

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1Решите уравнение $(2\cos^2 x + 11\cos x + 5) \cdot \log_{18}(\sin x) = 0$.

Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $\sin x > 0$.Если $\log_{18}(\sin x) = 0$, то $\sin x = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.Если $\log_{18}(\sin x) \neq 0$, то $2\cos^2 x + 11\cos x + 5 = 0$, откуда $\cos x = -5$ или $\cos x = -\frac{1}{2}$.Уравнение $\cos x = -5$ не имеет решений.Учитывая, что $\sin x > 0$, из уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$ получаем:

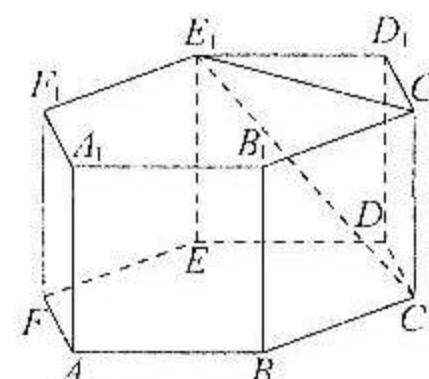
$$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Верно найдены все значения переменной x , при которых равен нулю первый сомножитель левой части исходного уравнения. Возможно отбор найденных значений или не произведён, или произведен неверно | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 2 |

C2 В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 3, найдите расстояние от точки C до прямой E_1E_1 .

Решение.

Так как $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильный шестиугольник, то прямые E_1E_1 и E_1C_1 перпендикулярны, следовательно, прямые E_1E_1 и CE_1 перпендикулярны. Расстояние от точки C до прямой E_1E_1 равно длине отрезка CE_1 .Из треугольника $E_1D_1C_1$ находим: $E_1C_1 = 3\sqrt{3}$.Из прямоугольного треугольника E_1C_1C находим: $CE_1 = 6$.

Ответ: 6.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 2 |

C3 Решите неравенство $\frac{2\log_6(x^2 + 5x)}{\log_6 x^2} \leq 1$.

Решение.

Решение будем искать при условиях:

$$\begin{cases} x^2 + 5x > 0, \\ x^2 > 0, \\ x^2 \neq 1, \end{cases}$$

откуда $x \in (-\infty; -5) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.Рассмотрим исходное неравенство при $x \in (-\infty; -5) \cup (1; +\infty)$, тогда $x^2 > 1$, откуда $\log_6 x^2 > 0$, поэтому

$$\log_6(x^2 + 5x)^2 \leq \log_6 x^2; (x^2 + 5x)^2 \leq x^2; x^2((x+5)^2 - 1) \leq 0;$$

$$x^2(x+4)(x+6) \leq 0; -6 \leq x \leq -4, x=0,$$

откуда $x \in [-6; -5]$.Рассмотрим исходное неравенство при $x \in (0; 1)$, тогда $x^2 < 1$, откуда $\log_6 x^2 < 0$, поэтому

$$\log_6(x^2 + 5x) \geq \log_6 x^2; (x^2 + 5x)^2 \geq x^2; x^2((x+5)^2 - 1) \geq 0;$$

$$x^2(x+4)(x+6) \geq 0; x \leq -6, x \geq -4,$$

откуда $x \in \{0; 1\}$.

Ответ: $[-6; -5]; \{0; 1\}$.

| Содержание критерия | | Баллы |
|--|--|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | | 3 |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного конечным количеством значений переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства | | 2 |
| Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам или верно найдены все значения переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства | | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критерев, перечисленных выше | | 0 |
| Максимальный балл | | 3 |

- C4** Окружность вписана в равнобедренную трапецию, большее основание которой равно 24, а синус угла при большем основании равен $\frac{3}{5}$. Прямая, проходящая через центр окружности и вершину трапеции, отсекает от трапеции треугольник. Найдите отношение площади этого треугольника к площади трапеции.

Решение.

Пусть окружность радиуса R с центром O , вписанная в равнобедренную трапецию $ABCD$ с углом α при большем основании, касается боковой стороны AB в точке M , большего основания AD в точке N , меньшего основания BC — в точке L , причём $AD=24$ и $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Тогда

$$AM = AN = \frac{1}{2}AD = 12.$$

Пусть BT — высота трапеции. Обозначим $BL = BM = x$. Тогда

$$AB = 12 + x; AT = AN - TN = 12 - x; \cos \alpha = \frac{4}{5}.$$

Из уравнения $\frac{12-x}{12+x} = \frac{4}{5}$ находим, что $x = \frac{4}{3}$. Тогда

$$AB = \frac{40}{3}; 2R = BT = AB \cdot \sin \alpha = \frac{40}{3} \cdot \frac{3}{5} = 8; BC = 2x = \frac{8}{3},$$

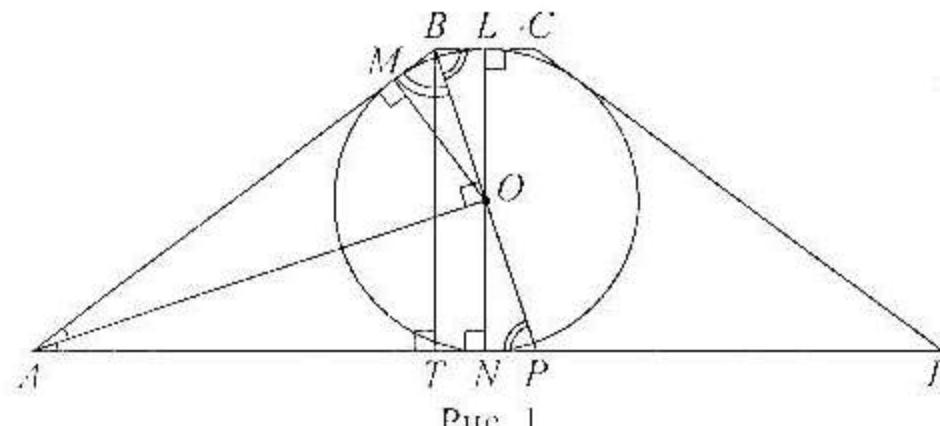


Рис. 1

Пусть прямая, о которой говорится в условии задачи, проходит через вершину B и пересекает основание AD трапеции в точке P (рис. 1). Тогда $\angle APB = \angle CBP = \angle ABP$, значит, треугольник ABP — равнобедренный, $AP = AB = \frac{40}{3}$, поэтому $S_{ABP} = \frac{1}{2}AP \cdot BT = \frac{160}{3}$.

Пусть S — площадь трапеции $ABCD$, тогда

$$S = \frac{1}{2}(AD + BC)BT = \frac{320}{3}.$$

Следовательно, $\frac{S_{ABP}}{S} = \frac{1}{2}$.

Поскольку трапеция равнобедренная, для прямой, проходящей через вершину C , получим тот же результат.

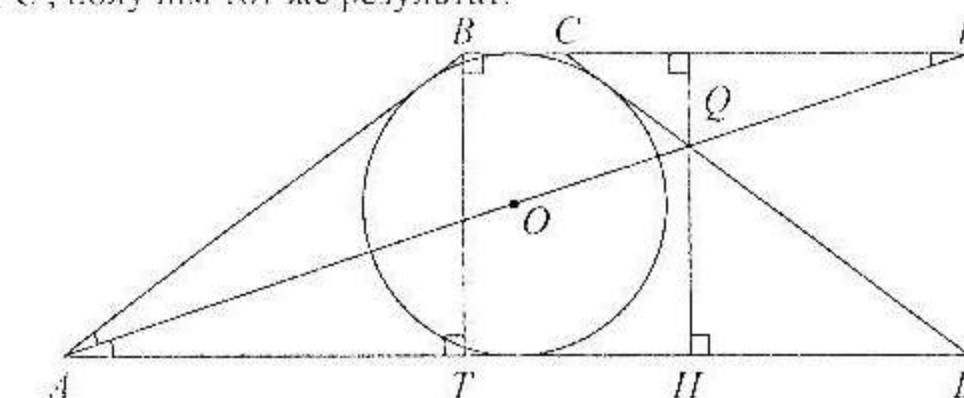


Рис. 2

Пусть теперь указанная прямая проходит через вершину A (рис. 2), пересекает боковую сторону CD в точке Q , а продолжение основания BC — в точке E . Треугольник ABE — равнобедренный ($\angle AEB = \angle DAE = \angle BAE$), поэтому $BE = AB = \frac{40}{3}$; $CE = BE - BC = \frac{32}{3}$.

Треугольник AQD подобен треугольнику EQC с коэффициентом $\frac{AD}{CE} = \frac{9}{4}$, значит, если QH — высота треугольника AQD , то

$$QH = \frac{9}{13}BT = \frac{72}{13}; S_{AQD} = \frac{1}{2}AD \cdot QH = \frac{864}{13}.$$

Треугольник AQD подобен треугольнику EQC с коэффициентом $\frac{AD}{CE} = \frac{18}{5}$, значит, если QH — высота треугольника AQD , то

$$QH = \frac{18}{23}h = \frac{216}{23}; S_{AQD} = \frac{1}{2}AD \cdot QH = \frac{1944}{23}.$$

$$\text{Следовательно, } \frac{S_{AQD}}{S} = \frac{162}{299}.$$

Тот же результат для прямой, проходящей через вершину D .

Ответ: $\frac{1}{2}$ или $\frac{162}{299}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 3 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение некомой величины | 2 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение некомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критерии, перечисленных выше | 0 |
| Абсолютный балл | 3 |

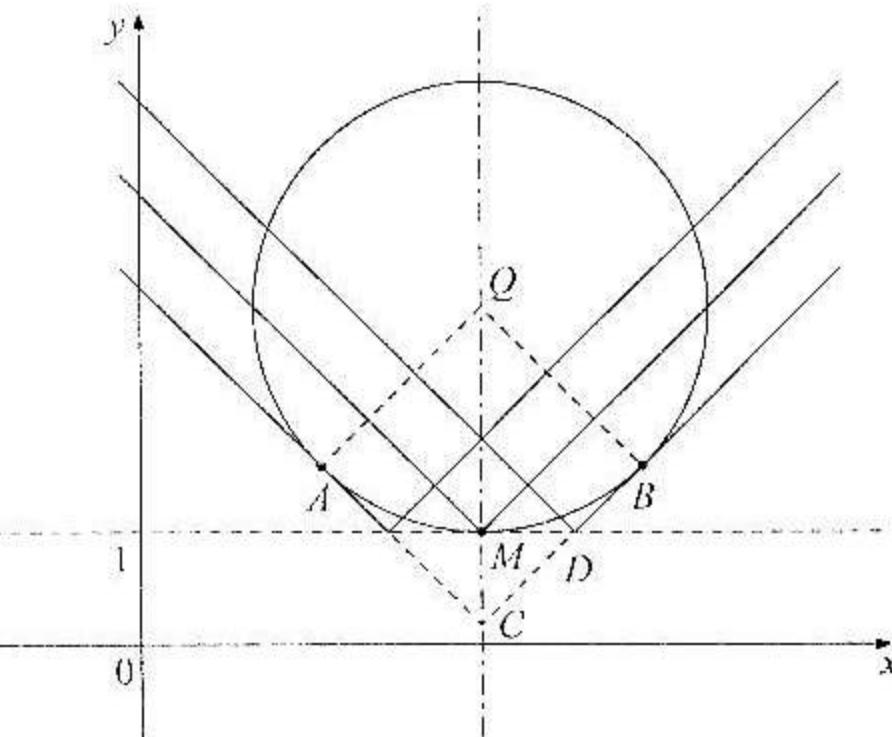
C5 Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-3)^2 = 4, \\ y = |x-a| + 1 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение.

Первое уравнение системы задаёт окружность с центром в точке $(3; 3)$ радиуса 2. Второе уравнение — прямой угол с вершиной в точке $(a; 1)$ и симметричен относительно прямой $x=a$ (см. рис.).



Прямая $y=1$ является касательной к окружности.

Ровно три общие точки фигуры имеют в трёх случаях.

1. Вершина прямого угла лежит в точке касания окружности и прямой $y=1$ (в точке M), а его стороны пересекают окружность в двух точках. Это условие выполняется при $a=3$.

2. Одна из сторон прямого угла пересекает окружность в двух точках, а другая касается окружности (два случая).

Четырёхугольник $BQAC$ — квадрат (см. рис.), симметричен относительно прямой $x=3$, со стороной 2 и диагональю $2\sqrt{2}$.

$$MD = MC = QC = QM = 2\sqrt{2} - 2, \text{ тогда } a = 2\sqrt{2} - 2 + 3 = 1 + 2\sqrt{2}.$$

В силу симметрии получаем ещё одно значение параметра: $a = 3 - (2\sqrt{2} - 2) = 5 - 2\sqrt{2}$.

При $a < 5 - 2\sqrt{2}$ или $a > 1 + 2\sqrt{2}$ прямой угол имеет не более двух общих точек с окружностью.

При $5 - 2\sqrt{2} < a < 3$ или $3 < a < 1 + 2\sqrt{2}$ прямой угол имеет четыре общие точки с окружностью.

Ответ: $5 - 2\sqrt{2}; 3; 1 + 2\sqrt{2}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 4 |
| С помощью верного рассуждения получены три верных значения параметра, но решение недостаточно обосновано | 3 |
| С помощью верного рассуждения получены хотя бы два верных значения параметра | 2 |

$$\log_4(x^2 - 2x)^2 \geq \log_4 x^2; (x^2 - 2x)^2 \geq x^2; x^2((x-2)^2 - 1) \geq 0;$$

$$x^2(x-1)(x-3) \geq 0; x \leq 1, x \geq 3,$$

откуда $x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$.

| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 3 |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного конечным количеством значений переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства | 2 |
| Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам или верно найдены все значения переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критерiev, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 3 |

С4

Окружность радиуса 6 вписана в равнобедренную трапецию, большее основание которой равно 18. Прямая, проходящая через центр окружности и вершину трапеции, отсекает от трапеции треугольник. Найдите отношение площади этого треугольника к площади трапеции.

Решение.

Пусть окружность радиуса R с центром O , вписанная в равнобедренную трапецию $ABCD$, касается боковой стороны AB в точке M , причём $R=6$ и $AD=18$.

AO и BO соответственно являются биссектрисами углов A и B трапеции $ABCD$, которые в сумме составляют 180° , поэтому треугольник ABO — прямоугольный, тогда OM — высота, проведённая из вершины прямого угла AOB , поэтому

$$BM = \frac{OM^2}{AM} = \frac{R^2}{\frac{1}{2}AD} = \frac{36}{9} = 4; BC = 2BM = 8; AB = AM + BM = 13.$$

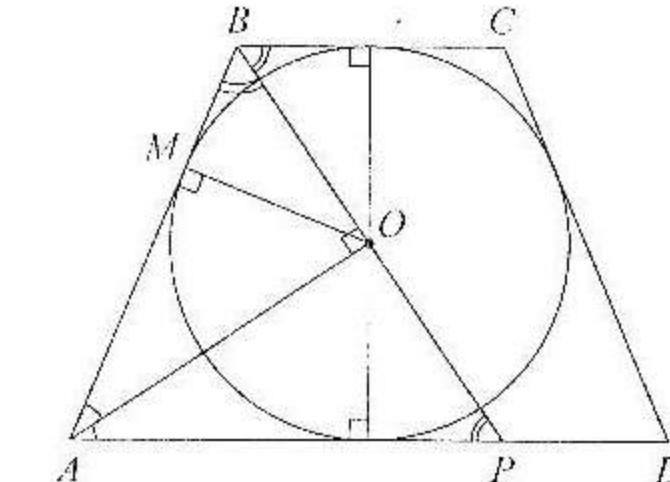


Рис. 1

Пусть прямая, о которой говорится в условии задачи, проходит через вершину B и пересекает основание AD трапеции в точке P (рис. 1). Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе угла, поэтому $\angle APB = \angle CBP = \angle ABP$, значит, треугольник ABP — равнобедренный, $AP = AB = 13$, поэтому $S_{ABP} = 2S_{OAB} = 2 \cdot \frac{1}{2}AB \cdot OM = 78$.

Пусть S — площадь трапеции, h — высота трапеции, тогда

$$h = 2R = 12; S = \frac{1}{2}(AD + BC)h = 156.$$

$$\text{Следовательно, } \frac{S_{ABP}}{S} = \frac{1}{2}.$$

Поскольку трапеция равнобедренная, для прямой, проходящей через вершину C , получим тот же результат.

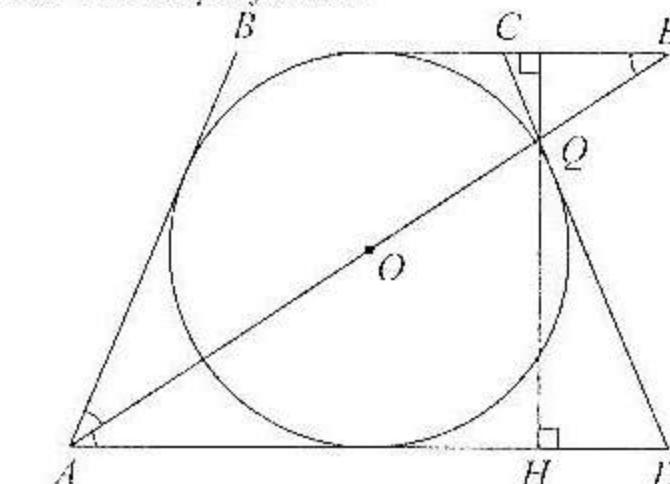


Рис. 2

Пусть теперь указанная прямая проходит через вершину A (рис. 2), пересекает боковую сторону CD в точке Q , а продолжение основания BC — в точке E . Треугольник ABE — равнобедренный ($\angle AEB = \angle DAE = \angle BAE$), поэтому $BE = AB = 13$; $CE = BE - BC = 5$.

Критерии оценивания заданий с развернутым ответом

C1

Решите уравнение $(2\cos^2 x + 11\cos x + 5) \cdot \log_{18}(\sin x) = 0$.

Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $\sin x > 0$.Если $\log_{18}(\sin x) = 0$, то $\sin x = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.Если $\log_{18}(\sin x) \neq 0$, то $2\cos^2 x + 11\cos x + 5 = 0$, откуда $\cos x = -5$ или $\cos x = -\frac{1}{2}$.Уравнение $\cos x = -5$ не имеет решений.Учитывая, что $\sin x > 0$, из уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$ получаем:

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

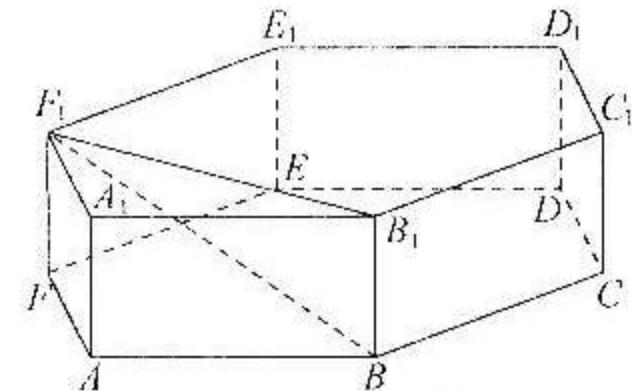
$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

| Содержание критерия | Баллы |
|---|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Верно найдены все значения переменной x , при которых равен нулю первый член множителя левой части исходного уравнения. Возможно отбор найденных значений или не произведён, или произведён неверно | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 2 |

C2 В правильной шестигранной призме $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, стороны основания которой равны 4, а боковые рёбра равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой E_1E_1 .

Решение.

Так как $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильный шестиугольник, то прямые B_1E_1 и E_1E_1 перпендикулярны, следовательно, прямые BE_1 и E_1E_1 перпендикулярны. Расстояние от точки B до прямой E_1E_1 равно длине отрезка BE_1 .

Из треугольника $A_1E_1B_1$ находим: $E_1B_1 = 4\sqrt{3}$.Из прямоугольного треугольника BB_1E_1 находим: $BE_1 = 7$.

Ответ: 7.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 2 |

C3 Решите неравенство $\frac{2\log_4(x^2 - 2x)}{\log_4 x^2} \leq 1$.

Решение.

Решение будем искать при условиях:

$$\begin{cases} x^2 - 2x > 0, \\ x^2 > 0, \\ x^2 \neq 1, \end{cases}$$

откуда $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (2; +\infty)$.Рассмотрим исходное неравенство при $x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$, тогда $x^2 > 1$, откуда $\log_4 x^2 > 0$, поэтому

$$\log_4(x^2 - 2x)^2 \leq \log_4 x^2; (x^2 - 2x)^2 \leq x^2; x^2((x-2)^2 - 1) \leq 0;$$

$$x^2(x-1)(x-3) \leq 0; 1 \leq x \leq 3; x=0,$$

откуда $x \in [2; 3]$.Рассмотрим исходное неравенство при $x \in (-1; 0)$, тогда $x^2 < 1$, откуда $\log_4 x^2 < 0$, поэтому

$$\text{Следовательно, } \frac{S_{AQD}}{S} = \frac{81}{130}.$$

Тот же результат для прямой, проходящей через вершину D .

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2} \text{ или } \frac{81}{130}.$$

| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 3 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение некомой величины | 2 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение некомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критерев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 3 |

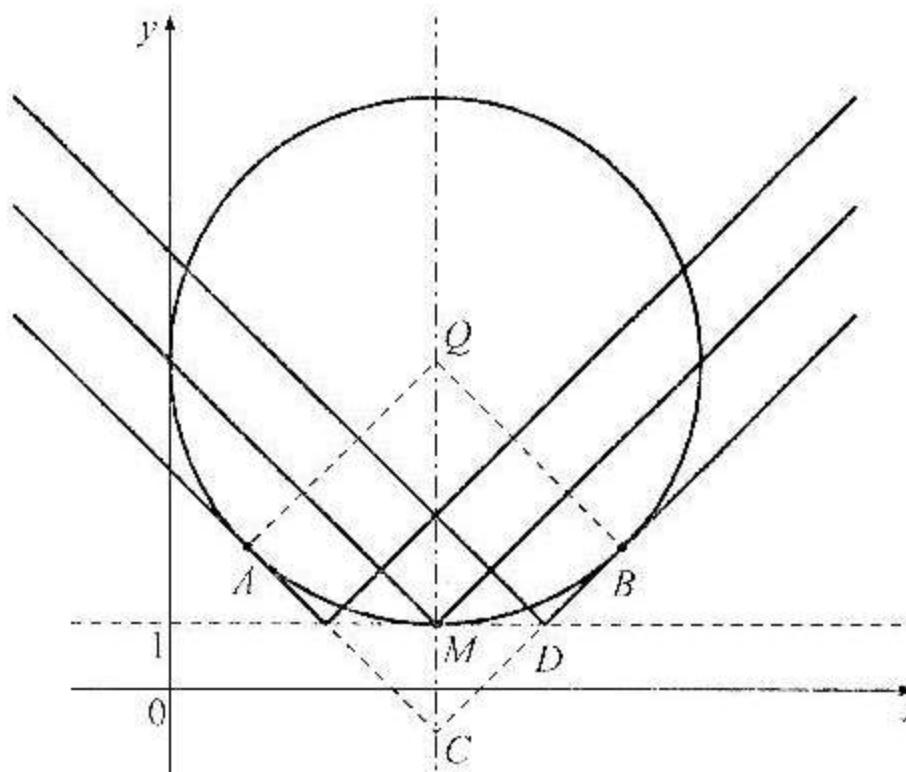
C5 Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-5)^2 = 16, \\ y = |x-a| + 1 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение.

Первое уравнение системы задаёт окружность с центром в точке $(4; 5)$ радиуса 4. Второе уравнение — прямой угол с вершиной в точке $(a; 1)$ и симметричен относительно прямой $x = a$ (см. рис.).



Прямая $y = 1$ является касательной к окружности.

Ровно три общие точки фигуры имеют в трёх случаях.

1. Вершина прямого угла лежит в точке касания окружности и прямой $y = 1$ (в точке M), а его стороны пересекают окружность в двух точках. Это условие выполняется при $a = 4$.

2. Одна из сторон прямого угла пересекает окружность в двух точках, а другая касается окружности (два случая).

Четырёхугольник $BQAC$ — квадрат (см. рис.), симметричный относительно прямой $x = 4$, со стороной 4 и диагональю $4\sqrt{2}$.

$$MD = MC = QC - QM = 4\sqrt{2} - 4, \text{ тогда } a = 4\sqrt{2} - 4 + 4 = 4\sqrt{2}.$$

В силу симметрии получаем ещё одно значение параметра: $a = 4 - (4\sqrt{2} - 4) = 8 - 4\sqrt{2}$.

При $a < 8 - 4\sqrt{2}$ или $a > 4\sqrt{2}$ прямой угол имеет не более двух общих точек с окружностью.

При $8 - 4\sqrt{2} < a < 4$ или $4 < a < 4\sqrt{2}$ прямой угол имеет четыре общие точки с окружностью.

Ответ: $8 - 4\sqrt{2}; 4; 4\sqrt{2}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|--|----------|
| Обоснованно получен верный ответ | 4 |
| С помощью верного рассуждения получены три верных решения параметра, по решению недостаточно обосновано | 3 |
| С помощью верного рассуждения получены хотя бы два верных значения параметра | 2 |
| Задача сведена к исследованию: - при взаимном расположении окружности и угла; - при двух квадратных уравнений с параметром | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| <i>Максимальный балл</i> | 4 |

| Содержание критерия | Баллы |
|---|----------|
| Верно выполнены а), б), в(пример), в(оценка) | 4 |
| Верно выполнены три пункта из четырёх; а), б), в(пример), в(оценка) | 3 |
| Верно выполнены два пункта из четырёх; а), б), в(пример), в(оценка) | 2 |
| Верно выполнен один пункт из четырёх; а), б), в(пример), в(оценка) | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| <i>Максимальный балл</i> | 4 |

- C6** Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 15 раз больше, либо в 15 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 2193.
- а) Может ли последовательность состоять из двух членов?
 б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?
 в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Решение.

- а) Если последовательность состоит из двух членов, a и $15a$ (в произвольном порядке), то $a+15a=2193$. Уравнение $16a=2193$ не имеет решений в натуральных числах. Поэтому последовательность не может состоять из двух членов.
- б) Последовательность может состоять из трёх членов: 129, 1935, 129.

и(пример) Приведём пример последовательности из 275 членов:

$$1, \underbrace{15, 1,}_{2}, \underbrace{15, 1,}_{2}, \dots, \underbrace{15, 1,}_{2}, 137$$

Сумма её членов равна $1+16\cdot137=2193$.

в(оценка) Допустим, что в последовательности более чем 275 членов. Рассмотрим первые 276 членов последовательности на 138 пар соседних членов: первый и второй, третий и четвёртый, пятый и шестой и т.д. Сумма двух членов в каждой паре делится на 16 и поэтому не меньше 16. Значит, сумма всех членов последовательности не меньше, чем $138 \cdot 16 = 2208 > 2193$.

Противоречие.

Ответ: а) нет, б) да, в) 275.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|----------|
| Обоснованно получена верный ответ | 4 |
| С помощью верного рассуждения получены три верных значения параметра, но решение недостаточно обосновано | 3 |
| С помощью верного рассуждения получены хотя бы два верных значения параметра | 2 |
| Задача сведена к исследованию: или взаимного расположения окружности и угла; или двух квадратных уравнений с параметром | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| <i>Максимальный балл</i> | <i>4</i> |

| Содержание критерия | Баллы |
|---|----------|
| Верно выполнены а), б), в(пример), в(оценка) | 4 |
| Верно выполнены три пункта из четырёх: а), б), в(пример), в(оценка) | 3 |
| Верно выполнены два пункта из четырёх: а), б), в(пример), в(оценка) | 2 |
| Верно выполнен один пункт из четырёх: а), б), в(пример), в(оценка) | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| <i>Максимальный балл</i> | <i>4</i> |

- C6** Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 11 раз больше, либо в 11 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 2231.
- а) Может ли последовательность состоять из двух членов?
 б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?
 в) Какое наибольшее количество числов может быть в последовательности?

Решение.

а) Если последовательность состоит из двух членов, a и $11a$ (в произвольном порядке), то $a+11a=2231$. Уравнение $12a=2231$ не имеет решений в натуральных числах. Поэтому последовательность не может состоять из двух членов.

б) Последовательность может состоять из трёх членов: 1067, 97, 1067.

в(пример) Приведём пример последовательности из 371 члена:

$$11, \underbrace{1, 11, 1, 11, \dots, 1, 11}_{\text{2}}, \underbrace{\dots}_{\text{2}}, \underbrace{11}_{\text{2}} = 185$$

Сумма её членов равна $11 + 12 \cdot 185 = 2231$.

в(оценка) Допустим, что в последовательности более чем 371 член. Разобьём первые 372 члена последовательности на 186 пар соседних членов: первый и второй, третий и четвёртый, пятый и шестой и т.д. Сумма двух членов в каждой паре делится на 12 и поэтому не меньше 12. Значит, сумма всех членов последовательности не меньше, чем $186 \cdot 12 = 2232 > 2231$.

Противоречие.

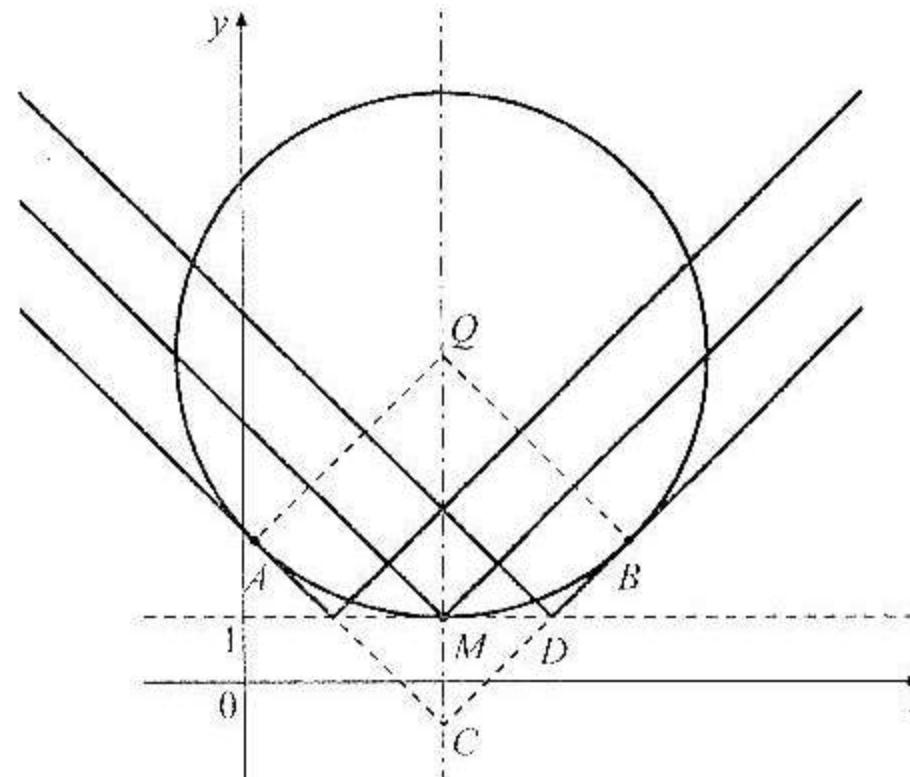
Ответ: а) нет, б) да, в) 371.

Следовательно, $S_{\triangle QD} = \frac{1}{2} AD \cdot QH = \frac{128}{11}$.

Тот же результат для прямой, проходящей через вершину D .

Ответ: 10 или $\frac{128}{11}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 3 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины | 2 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 3 |



Прямая $y=1$ является касательной к окружности.

Ровно три общие точки фигуры имеют в трёх случаях.

1. Вершина прямого угла лежит в точке касания окружности и прямой $y=1$ (в точке M), а его стороны пересекают окружность в двух точках. Это условие выполняется при $a=3$.

2. Одна из сторон прямого угла пересекает окружность в двух точках, а другая касается окружности (два случая).

Четырёхугольник $BQAC$ — квадрат (см. рис.), симметричный относительно прямой $x=3$, со стороной 4 и диагональю $4\sqrt{2}$.

$$MD = MC = QC - QM = 4\sqrt{2} - 4, \text{ тогда } a = 4\sqrt{2} - 4 + 3 - 4\sqrt{2} - 1.$$

В силу симметрии получаем ещё одно значение параметра: $a = 3 - (4\sqrt{2} - 4) = 7 - 4\sqrt{2}$.

При $a < 7 - 4\sqrt{2}$ или $a > 4\sqrt{2} - 1$ прямой угол имеет не более двух общих точек с окружностью.

При $7 - 4\sqrt{2} < a < 3$ или $3 < a < 4\sqrt{2} - 1$ прямой угол имеет четыре общие точки с окружностью.

Ответ: $7 - 4\sqrt{2}; 3; 4\sqrt{2} - 1$.

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-5)^2 = 16, \\ y = |x-a| + 1 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение.

Первое уравнение системы задаёт окружность с центром в точке $(3, 5)$ радиуса 4. Второе уравнение — прямой угол с вершиной в точке $(a, 1)$ и симметричен относительно прямой $x=a$ (см. рис.).

$$\log_2(x^2 - 2x)^2 \geq \log_2 x^2; (x^2 + 2x)^2 \geq x^2; x^2((x-2)^2 - 1) \geq 0;$$

$$x^2(x+1)(x+3) \geq 0; x \leq -3, x \geq -1,$$

откуда $x \in \{0; 1\}$.

Ответ: $[-3; -2]; \{0; 1\}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 3 |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного конечным количеством значений переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства | 2 |
| Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам или верно найдены все значения переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 3 |

- 4** Окружность вписана в равнобедренную трапецию, большее основание которой равно 24, а синус угла при большем основании равен $\frac{3}{5}$. Прямая, проходящая через центр окружности и вершину трапеции, отсекает от трапеции треугольник. Найдите отношение площади этого треугольника к площади трапеции.

Решение.

Пусть окружность радиуса R с центром O , вписанная в равнобедренную трапецию $ABCD$ с углом α при большем основании, касается боковой стороны AB в точке M , большего основания AD в точке N , меньшего основания BC — в точке L , причём $AD=24$ и $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Тогда $AM = AN = \frac{1}{2}AD = 12$.

Пусть BT — высота трапеции. Обозначим $BL = BM = x$. Тогда

$$AB = 12 + x; AT = AN - TN = 12 - x; \cos \alpha = \frac{4}{5}.$$

Из уравнения $\frac{12-x}{12+x} = \frac{4}{5}$ находим, что $x = \frac{4}{3}$. Тогда

$$AB = \frac{40}{3}; 2R = BT = AB \cdot \sin \alpha = \frac{40}{3} \cdot \frac{3}{5} = 8; BC = 2x = \frac{8}{3}.$$

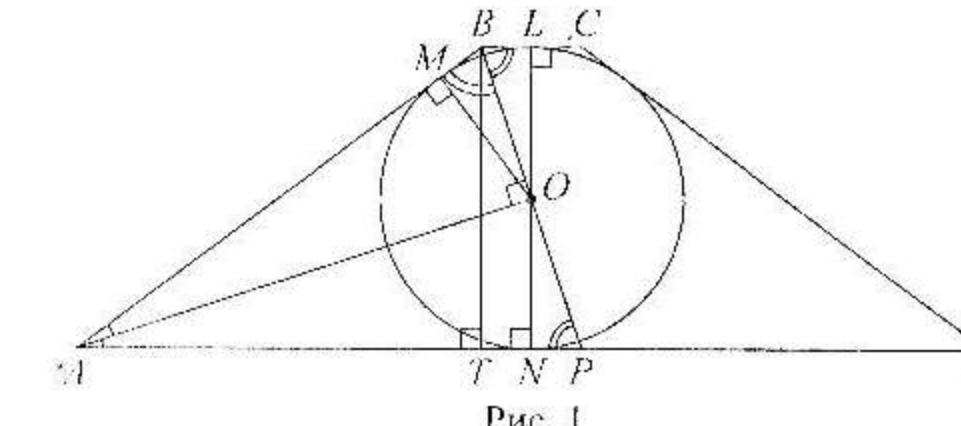


Рис. 1

Пусть прямая, о которой говорится в условии задачи, проходит через вершину B и пересекает основание AD трапеции в точке P (рис. 1). Тогда $\angle APB = \angle CBP - \angle ABP$, значит, треугольник ABP — равнобедренный, $AP = AB = \frac{40}{3}$, поэтому $S_{ABP} = \frac{1}{2}AP \cdot BT = \frac{160}{3}$.

Пусть S — площадь трапеции $ABCD$, тогда

$$S = \frac{1}{2}(AD + BC)BT = \frac{320}{3}.$$

Следовательно, $\frac{S_{ABP}}{S} = \frac{1}{2}$.

Поскольку трапеция равнобедренная, для прямой, проходящей через вершину C , получим тот же результат.

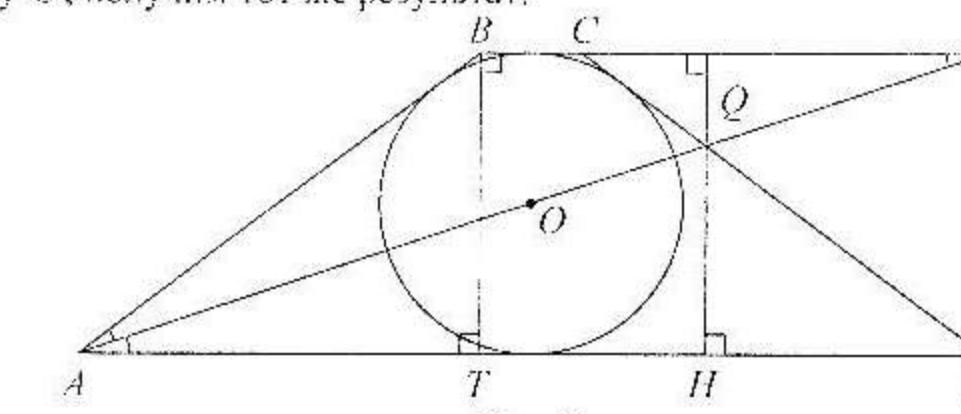


Рис. 2

Пусть теперь указанная прямая проходит через вершину A (рис. 2), пересекает боковую сторону CD в точке Q , а продолжение основания BC — в точке E . Треугольник ABE — равнобедренный ($\angle AEB = \angle DAE = \angle BAE$), поэтому $BE = AB = \frac{40}{3}$; $CE = BE - BC = \frac{32}{3}$.

Треугольник AQD подобен треугольнику EQC с коэффициентом $\frac{AD}{CE} = \frac{9}{4}$, значит, если QH — высота треугольника AQD , то

$$QH = \frac{9}{13}BT = \frac{72}{13}; S_{AQD} = \frac{1}{2}AD \cdot QH = \frac{864}{13}.$$

Критерии оценивания заданий с развернутым ответом

C1Решите уравнение $(2\sin^2 x - 5\sin x + 2) \cdot \log_{12}(\cos x) = 0$.

Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x > 0$.Если $\log_{12}(\cos x) = 0$, то $\cos x = 1$, откуда $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.Если $\log_{12}(\cos x) \neq 0$, то $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$, откуда $\sin x = 2$ или

$$\sin x = \frac{1}{2}.$$

Уравнение $\sin x = 2$ не имеет решений.Учитывая, что $\cos x > 0$, из уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ получаем:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

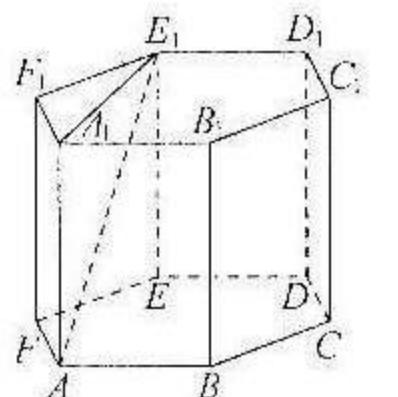
Ответ: $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Верно найдены все значения переменной x , при которых равен нулю первый множитель левой части исходного уравнения. Возможно отбор найденных значений или не произведён, или произведён неверно | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 2 |

C2 В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, стороны основания которой равны 5, а боковые рёбра равны 11, найдите расстояние от точки A до прямой E_1D_1 .

Решение.

Так как $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильный шестиугольник, то прямые A_1E_1 и E_1D_1 перпендикулярны, следовательно, прямые AE_1 и E_1D_1 перпендикулярны. Расстояние от точки A до прямой E_1D_1 равно длине отрезка AE_1 .

Из треугольника $A_1F_1E_1$ находим: $A_1E_1 = 5\sqrt{3}$.Из прямоугольного треугольника AA_1E_1 находим: $AE_1 = 14$.

Ответ: 14.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 2 |

C3 Решите неравенство $\frac{2\log_2(x^2 + 2x)}{\log_2 x^2} \leq 1$.

Решение.

Решение будем искать при условиях:

$$\begin{cases} x^2 + 2x > 0, \\ x^2 > 0, \\ x^2 \neq 1, \end{cases}$$

откуда $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$, тогда $x^2 > 1$, откуда $\log_2 x^2 > 0$, поэтому

$$\log_2(x^2 + 2x)^2 \leq \log_2 x^2; (x^2 + 2x)^2 \leq x^2; x^2((x+2)^2 - 1) \leq 0;$$

$$x^2(x+1)(x+3) \leq 0; -3 \leq x \leq -1, x=0,$$

откуда $x \in [-3; -2]$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in (0; 1)$, тогда $x^2 < 1$, откуда $\log_2 x^2 < 0$, поэтому

$$\log_3(x^2 - 4x)^2 \geq \log_3 x^2; (x^2 - 4x)^2 \geq x^2; x^2((x-4)^2 - 1) \geq 0;$$

$$x^2(x-3)(x-5) \geq 0; x < 3, x \geq 5,$$

откуда $x \in (-\infty; 0) \cup (4; 5]$.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (4; 5]$.

| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 3 |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного константой количеством значений переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства | 2 |
| Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам или верно найдены все значения переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критерев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 3 |

C4

В равнобедренную трапецию с периметром 20 вписана окружность. Точка касания делит боковую сторону в отношении 1 : 4. Прямая, проходящая через центр окружности и вершину трапеции, отсекает от трапеции треугольник. Найдите его площадь.

Решение.

Поскольку в трапецию вписана окружность, сумма боковых сторон равна сумме оснований, значит, сумма боковых сторон равна полупериметру трапеции, то есть 10, а так как трапеция равнобедренная, то боковая сторона равна 5. Тогда точка касания делит боковую сторону на отрезки 1 и 4.

Пусть окружность радиуса R с центром O , вписанная в равнобедренную трапецию $ABCD$, касается боковой стороны AB в точке M , причём $AM = 1$ и $BM = 4$. Тогда $AD = 2AM = 8$, $BC = 2BM = 2$.

AO и BO соответственно являются биссектрисами углов A и B трапеции $ABCD$, которые в сумме составляют 180° , поэтому треугольник ABO — прямоугольный, тогда OM — высота, проведённая из вершины прямого угла AOB , поэтому $R = OM = \sqrt{AM \cdot BM} = 2$.

Пусть h — высота трапеции, тогда $h = 2R = 4$.

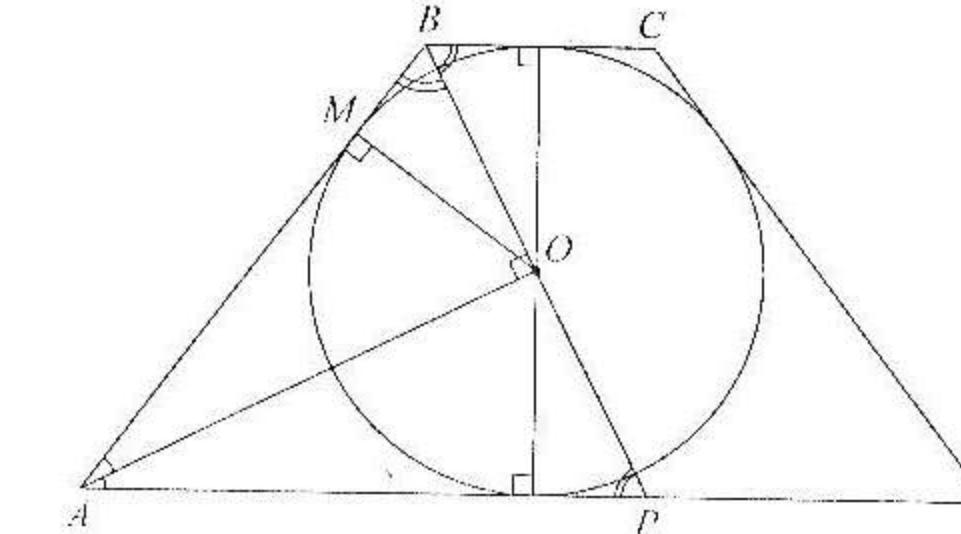


Рис. 1

Пусть прямая, о которой говорится в условии задачи, проходит через вершину B и пересекает основание AD трапеции в точке P (рис. 1). Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе угла, поэтому $\angle APB = \angle CBP = \angle ABP$, значит, треугольник ABP — равнобедренный, $AP = AB = 5$. Следовательно, $S_{ABP} = 2S_{OAB} = 2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot OM = 10$.

Поскольку трапеция равнобедренная, для прямой, проходящей через вершину C , получим тот же результат.

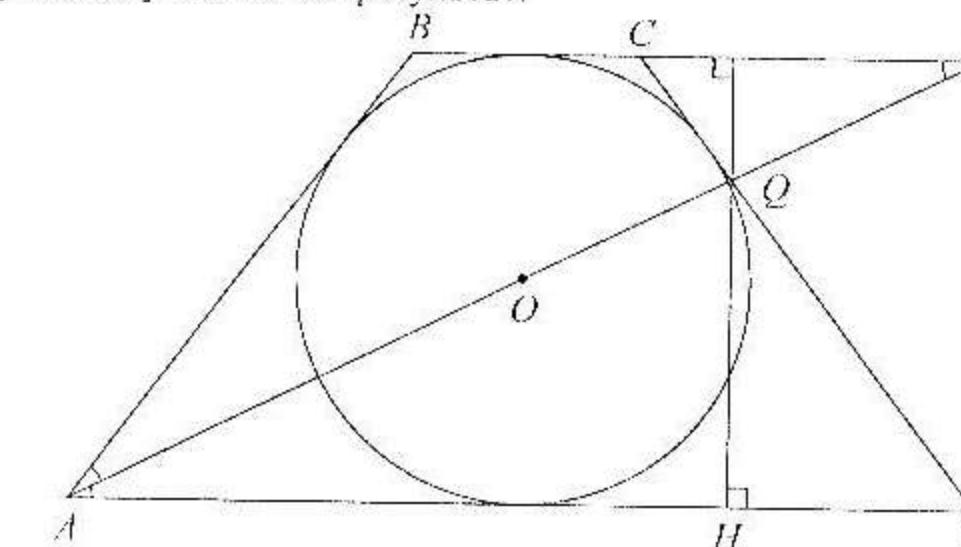


Рис. 2

Пусть теперь указанная прямая проходит через вершину A (рис. 2), пересекает боковую сторону CD в точке Q , а продолжение основания BC — в точке E . Треугольник ABE — равнобедренный ($\angle AEB = \angle DAE = \angle BAE$), поэтому $BE = AB = 5$; $CE = BE - BC = 3$.

Треугольник AQD подобен треугольнику EQC с коэффициентом $\frac{AD}{CE} = \frac{8}{3}$, значит, если QH — высота треугольника AQD , то

$$QH = \frac{8}{11} h = \frac{32}{11}.$$

Критерии оценивания заданий с развернутым ответом

C1

Решите уравнение $(8\cos^2 x - 6\cos x - 5) \cdot \log_7(\sin x) = 0$.

Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $\sin x > 0$.Если $\log_7(\sin x) = 0$, то $\sin x = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Если $\log_7(\sin x) \neq 0$, то $8\cos^2 x - 6\cos x - 5 = 0$, откуда $\cos x = \frac{5}{4}$ или $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Уравнение $\cos x = \frac{5}{4}$ не имеет решений.Учитывая, что $\sin x > 0$, из уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$ получаем:

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

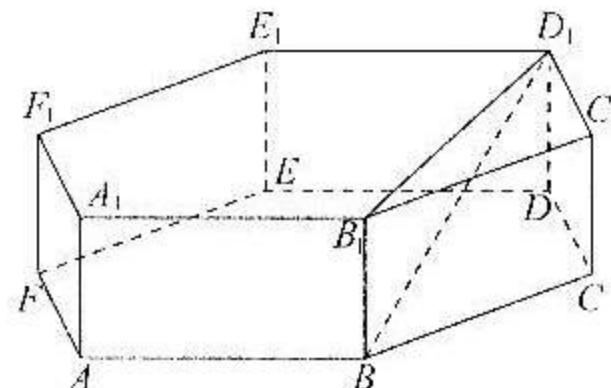
Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Верно найдены все значения переменной x , при которых равен нулю первый сомножитель левой части исходного уравнения. Возможно отбор найденных значений или не произведён, или произведён неверно | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 2 |

C2 В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, стороны основания которой равны 12, а боковые рёбра равны 3, найдите расстояние от точки B до прямой D_1E_1 .

Решение.

Так как $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильный шестиугольник, то прямые B_1D_1 и D_1E_1 перпендикулярны, следовательно, прямые BD_1 и D_1E_1 перпендикулярны. Расстояние от точки B до прямой D_1E_1 равно длине отрезка BD_1 .

Из треугольника $B_1C_1D_1$ находим: $B_1D_1 = 12\sqrt{3}$.Из прямоугольного треугольника BB_1D_1 находим: $BD_1 = 21$.

Ответ: 21.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 2 |

C3

Решите неравенство $\frac{2\log_3(x^2 - 4x)}{\log_3 x^2} \leq 1$.

Решение.

Решение будем искать при условиях:

$$\begin{cases} x^2 - 4x > 0, \\ x^2 > 0, \\ x^2 \neq 1, \end{cases}$$

откуда $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (4; +\infty)$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$, тогда $x^2 > 1$, откуда $\log_3 x^2 > 0$, поэтому

$$\begin{aligned} \log_3(x^2 - 4x)^2 &\leq \log_3 x^2; (x^2 - 4x)^2 \leq x^2; x^2((x-4)^2 - 1) \leq 0; \\ x^2(x-3)(x-5) &\leq 0; 3 \leq x \leq 5, x=0, \end{aligned}$$

откуда $x \in (4; 5]$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in (-1; 0)$, тогда $x^2 < 1$, откуда $\log_3 x^2 < 0$, поэтому

$$\log_3(x^2 - 4x)^2 \geq \log_3 x^2; (x^2 - 4x)^2 \geq x^2; x^2((x-4)^2 - 1) \geq 0;$$

$$x^2(x-3)(x-5) \geq 0; x \leq 3, x \geq 5,$$

откуда $x \in (-\infty; 0] \cup [4; 5]$.

Ответ: $(-\infty; 0] \cup [4; 5]$.

| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Обоснованию получен верный ответ | 3 |
| Обоснованию получен ответ, отличающийся от верного конечным количеством значений переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства | 2 |
| Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам или верно найдены все значения переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 3 |

- C4** В равнобедренную трапецию с периметром 20 вписана окружность. Точка касания делит боковую сторону в отношении 1 : 4. Прямая, проходящая через центр окружности и вершину трапеции, отсекает от трапеции треугольник. Найдите его площадь.

Решение.

Поскольку в трапеции вписана окружность, сумма боковых сторон равна сумме оснований, значит, сумма боковых сторон равна полупериметру трапеции, то есть 10, а так как трапеция равнобедренная, то боковая сторона равна 5. Тогда точка касания делит боковую сторону на отрезки 1 и 4.

Пусть окружность радиуса R с центром O , вписанная в равнобедренную трапецию $ABCD$, касается боковой стороны AB в точке M , причём $AM = 4$ и $BM = 1$. Тогда $AD = 2AM = 8$, $BC = 2BM = 2$.

AO и BO соответственно являются биссектрисами углов A и B трапеции $ABCD$, которые в сумме составляют 180° , поэтому треугольник ABO — прямоугольный, тогда OM — высота, проведённая из вершины прямого угла AOB , поэтому $R = OM = \sqrt{AM \cdot BM} = 2$.

Пусть h — высота трапеции, тогда $h = 2R = 4$.

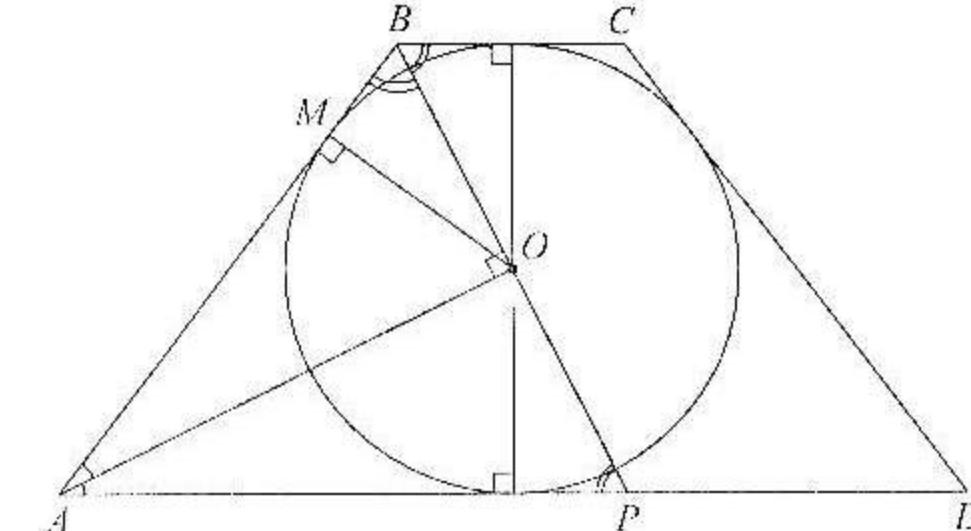


Рис. 1

Пусть прямая, о которой говорится в условии задачи, проходит через вершину B и пересекает основание AD трапеции в точке P (рис. 1). Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе угла, поэтому $\angle APB = \angle CBP = \angle ABP$, значит, треугольник ABP — равнобедренный, $AP = AB = 5$. Следовательно, $S_{ABP} = 2S_{OAB} = 2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot OM = 10$.

Поскольку трапеция равнобедренная, для прямой, проходящей через вершину C , получим тот же результат.

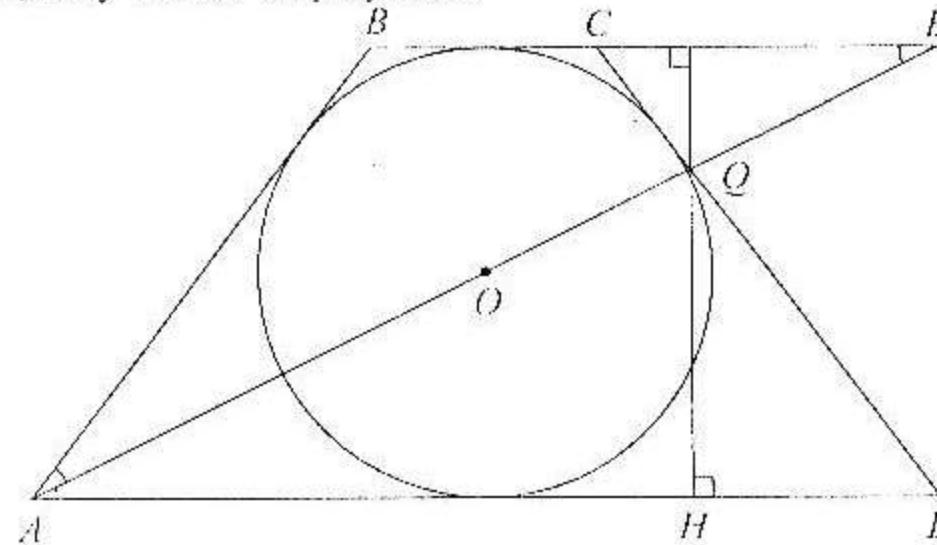


Рис. 2

Пусть теперь указанная прямая проходит через вершину A (рис. 2), пересекает боковую сторону CD в точке Q , а продолжение основания BC — в точке E . Треугольник ABE — равнобедренный ($\angle AEB = \angle DAE = \angle BAE$), поэтому $BE = AB = 5$; $CE = BE - BC = 3$.

Треугольник AQD подобен треугольнику EQC с коэффициентом $\frac{AD}{CE} = \frac{8}{3}$, значит, если QH — высота треугольника AQD , то

$$QH = \frac{8}{11} h = \frac{32}{11}.$$

| Содержание критерия | Баллы |
|---|----------|
| Обоснованно получен верный ответ | 4 |
| С помощью верного рассуждения получены три верных значения параметра, но решение недостаточно обосновано | 3 |
| С помощью верного рассуждения получены хотя бы два верных значения параметра | 2 |
| Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения окружности и угла; – или двух квадратных уравнений с параметром | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критерев, перечисленных выше | 0 |
| <i>Максимальный балл</i> | 4 |

| Содержание критерия | Баллы |
|---|----------|
| Верно выполнены: а), б), в(пример), в(оценка) | 4 |
| Верно выполнены три пункта из четырёх: а), б), в(пример), в(оценка) | 3 |
| Верно выполнены два пункта из четырёх: а), б), в(пример), в(оценка) | 2 |
| Верно выполнен один пункт из четырёх: а), б), в(пример), в(оценка) | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критерев, перечисленных выше | 0 |
| <i>Максимальный балл</i> | 4 |

- C6** Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 11 раз больше, либо в 11 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 2231.
- а) Может ли последовательность состоять из двух членов?
 б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?
 в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Решение.

а) Если последовательность состоит из двух членов, a и $11a$ (в произвольном порядке), то $a + 11a = 2231$. Уравнение $12a = 2231$ не имеет решений в натуральных числах. Поэтому последовательность не может состоять из двух членов.

б) Последовательность может состоять из трёх членов: 1067, 97, 1067.

в(пример) Приведём пример последовательности из 371 члена:

$$\underbrace{11, 1, 11, 1, 11, \dots, 1, 11}_{185}$$

Сумма её членов равна $11 + 12 \cdot 185 = 2231$.

в(оценка) Допустим, что в последовательности более чем 371 член. Рассмотрим первые 372 члена последовательности на 186 пар соседних членов: первый и второй, третий и четвёртый, пятый и шестой и т.д. Сумма двух членов в каждой паре делится на 12 и поэтому не меньше 12. Значит, сумма всех членов последовательности не меньше, чем $186 \cdot 12 = 2232 > 2231$.

Противоречие.

Ответ: а) нет, б) да, в) 371.

Треугольник AQD подобен треугольнику EQC с коэффициентом $\frac{AD}{CE} = \frac{18}{5}$, значит, если QH — высота треугольника AQD , то

$$QH = \frac{18}{23}h = \frac{216}{23}; S_{AOD} = \frac{1}{2}AD \cdot QH = \frac{1944}{23}.$$

$$\text{Следовательно, } \frac{S_{AOD}}{S} = \frac{162}{299}.$$

Тот же результат для прямой, проходящей через вершину D .

Ответ: $\frac{1}{2}$ или $\frac{162}{299}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 3 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение некомой величины | 2 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение некомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критерев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 3 |

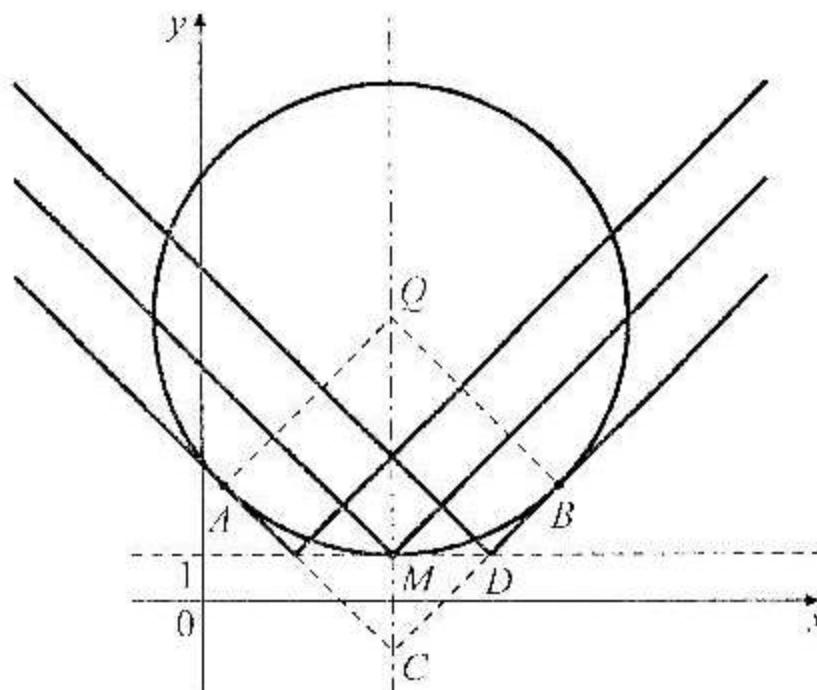
C5 Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-6)^2 = 25, \\ y = |x-a| + 1 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение.

Первое уравнение системы задаёт окружность с центром в точке $(4; 6)$ радиуса 5. Второе уравнение — прямой угол с вершиной в точке $(a; 1)$ и симметричен относительно прямой $x = a$ (см. рис.).



Прямая $y=1$ является касательной к окружности.

Ровно три общие точки фигуры имеют в трёх случаях.

1. Вершина прямого угла лежит в точке касания окружности и прямой $y=1$ (в точке M), а его стороны пересекают окружность в двух точках. Это условие выполняется при $a=4$.

2. Одна из сторон прямого угла пересекает окружность в двух точках, а другая касается окружности (два случая).

Четырёхугольник $BQAC$ — квадрат. (см. рис.), симметричный относительно прямой $x=4$, со стороной 5 и диагональю $5\sqrt{2}$.

$$MD = MC = QC - QM = 5\sqrt{2} - 5, \text{ тогда } a = 5\sqrt{2} - 5 + 4 = 5\sqrt{2} - 1.$$

В силу симметрии получаем ещё одно значение параметра: $a = 4 - (5\sqrt{2} - 5) = 9 - 5\sqrt{2}$.

При $a < 9 - 5\sqrt{2}$ или $a > 5\sqrt{2} - 1$ прямой угол имеет не более двух общих точек с окружностью.

При $9 - 5\sqrt{2} < a < 4$ или $4 < a < 5\sqrt{2} - 1$ прямой угол имеет чётыре общие точки с окружностью.

Ответ: $9 - 5\sqrt{2}; 4; 5\sqrt{2} - 1$.

$$\log_3(x^2 - 4x)^2 \geq \log_3 x^2; (x^2 - 4x)^2 \geq x^2; x^2((x-4)^2 - 1) \geq 0;$$

$$x^2(x-3)(x-5) \geq 0; x < 3, x \geq 5.$$

откуда $x \in (-\infty; 0) \cup (4; 5]$.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (4; 5]$.

| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 3 |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного конечным количеством значениями переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства | 2 |
| Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам или верно найдены все значения переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 3 |

C4

Периметр равнобедренной трапеции равен 52. В трапецию вписана окружность радиуса 6. Прямая, проходящая через центр окружности и вершину трапеции, отсекает от трапеции треугольник. Найдите отношение площади этого треугольника к площади трапеции.

Решение.

Поскольку в трапецию вписана окружность, сумма боковых сторон равна сумме оснований, значит, сумма боковых сторон равна полупериметру трапеции, то есть 26, а так как трапеция равнобедренная, то боковая сторона равна 13.

Пусть окружность радиуса R с центром O , вписанная в равнобедренную трапецию $ABCD$, касается боковой стороны AB в точке M , причём $R = 6$ и $AB = 13$.

AO и BO соответственно являются биссектрисами углов A и B трапеции $ABCD$, которые в сумме составляют 180° , поэтому треугольник ABO — прямоугольный, тогда OM — высота, проведённая из вершины прямого угла AOB , поэтому если $AM = x$, то $BM = 13 - x$, и $OM^2 = AM \cdot BM$, или $36 = x(13 - x)$, откуда находим, что $x = 4$ или $x = 9$. Предположим, что $AM > BM$. Тогда $AM = 9$; $BM = 4$; $AD = 2AM = 18$; $BC = 2BM = 8$.

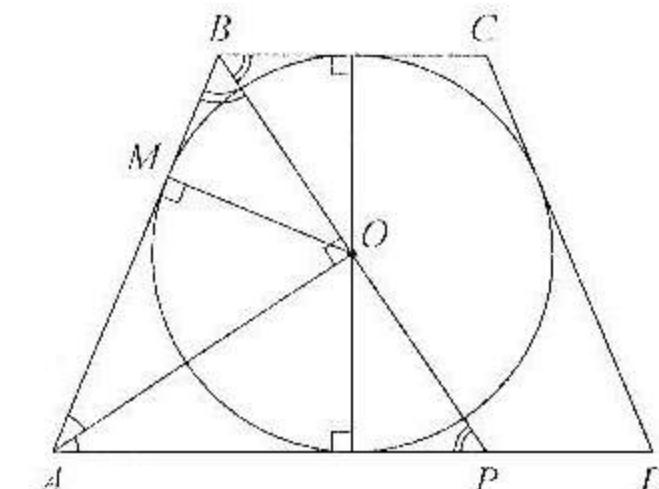


Рис. 1

Пусть прямая, о которой говорится в условии задачи, проходит через вершину B и пересекает основание AD трапеции в точке P (рис. 1). Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе угла, поэтому $\angle APB = \angle CBP = \angle ABP$, значит, треугольник ABP — равнобедренный, $AP = AB = 13$, поэтому $S_{ABP} = 2S_{OAB} = 2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot OM = 78$.

Пусть S — площадь трапеции, h — высота трапеции, тогда

$$h = 2R = 12; S = \frac{1}{2}(AD + BC)h = 156.$$

Следовательно, $\frac{S_{ABP}}{S} = \frac{1}{2}$.

Поскольку трапеция равнобедренная, для прямой, проходящей через вершину C , получим тот же результат.

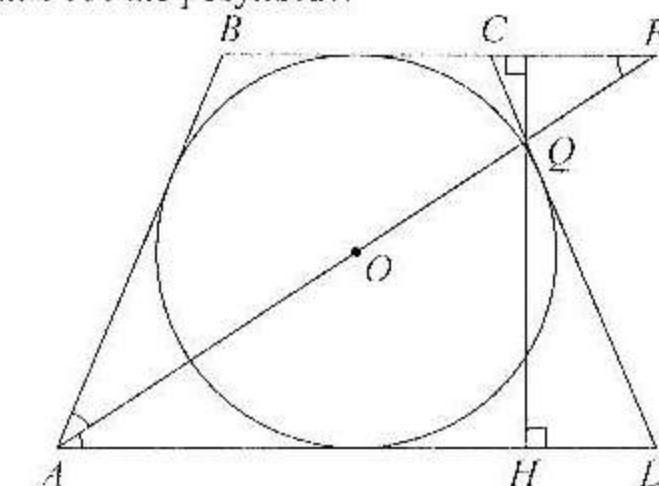


Рис. 2

Пусть теперь указанная прямая проходит через вершину A (рис. 2), пересекает боковую сторону CD в точке Q , а продолжение основания BC — в точке E . Треугольник ABE — равнобедренный ($\angle AEB = \angle DAE = \angle BAE$), поэтому $BE = AB = 13$; $CE = BE - BC = 5$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 4 |
| С помощью верного рассуждения получены три верных значения параметра, но решение недостаточно обосновано | 3 |
| С помощью верного рассуждения получены хотя бы два верных значения параметра | 2 |
| Задача свелена к исследованию: – или взаимного расположения окружности и угла; – или двух квадратных уравнений с параметром | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критерев, перечисленных выше | 0 |
| <i>Максимальный балл</i> | 4 |

| Содержание критерия | Баллы |
|---|-------|
| Верно выполнены: а), б), в(пример), в(оценка) | 4 |
| Верно выполнены три пункта из четырёх: а), б), в(пример), в(оценка) | 3 |
| Верно выполнены два пункта из четырёх: а), б), в(пример), в(оценка) | 2 |
| Верно выполнен один пункт из четырёх: а), б), в(пример), в(оценка) | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критерев, перечисленных выше | 0 |
| <i>Максимальный балл</i> | 4 |

- С6** Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 8 раз больше, либо в 8 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 2618.
- Может ли последовательность состоять из двух членов?
 - Может ли последовательность состоять из трёх членов?
 - Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Решение.

а) Если последовательность состоит из двух членов, a и $8a$ (в произвольном порядке), то $a+8a=2618$. Уравнение $9a=2618$ не имеет решений в натуральных числах. Поэтому последовательность не может состоять из двух членов.

б) Последовательность может состоять из трёх членов: 1232, 154, 1232.

в(пример) Приведём пример последовательности из 581 членов:

$$8, \underbrace{1, 8, 1, 8, \dots, 1, 8}_{290}$$

Сумма её членов равна $8 + 9 \cdot 290 = 2618$.

в(оценка) Допустим, что в последовательности более чем 581 член. Разобъём первые 582 члена последовательности на 291 пару соседних членов: первый и второй, третий и четвёртый, пятый и шестой и т.д. Сумма двух членов в каждой паре делится на 9 и поэтому не меньше 9. Значит, сумма всех членов последовательности не меньше, чем $291 \cdot 9 = 2619 > 2618$. Противоречие.

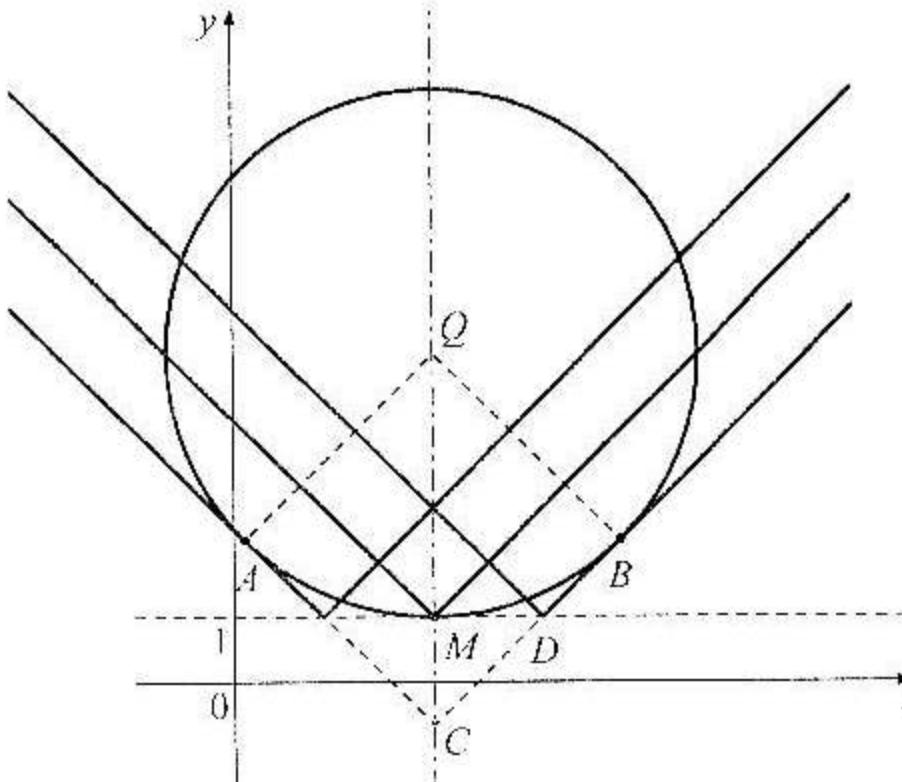
Ответ: а) нет, б) да, в) 581.

$$\text{Следовательно, } S_{AQP} = \frac{1}{2} AD \cdot QH = \frac{128}{11}.$$

Тот же результат для прямой, проходящей через вершину D .

$$\text{Ответ: } 10 \text{ или } \frac{128}{11}.$$

| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 3 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины | 2 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 3 |



Прямая $y=1$ является касательной к окружности.

Ровно три общие точки фигуры имеют в трёх случаях.

1. Вершина прямого угла лежит в точке касания окружности и прямой $y=1$ (в точке M), а его стороны пересекают окружность в двух точках. Это условие выполняется при $a=3$.

2. Одна из сторон прямого угла пересекает окружность в двух точках, а другая касается окружности (два случая).

Четырёхугольник $BQAC$ — квадрат (см. рис.), симметричный относительно прямой $x=3$, со стороной 4 и диагональю $4\sqrt{2}$.

$$MD = MC = QC - QM = 4\sqrt{2} - 4, \text{ тогда } a = 4\sqrt{2} - 4 + 3 = 4\sqrt{2} - 1.$$

В силу симметрии получаем ещё одно значение параметра: $a = 3 - (4\sqrt{2} - 4) = 7 - 4\sqrt{2}$.

При $a < 7 - 4\sqrt{2}$ или $a > 4\sqrt{2} - 1$ прямой угол имеет не более двух общих точек с окружностью.

При $7 - 4\sqrt{2} < a < 3$ или $3 < a < 4\sqrt{2} - 1$ прямой угол имеет четыре общие точки с окружностью.

$$\text{Ответ: } 7 - 4\sqrt{2}; 3; 4\sqrt{2} - 1.$$

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-5)^2 = 16, \\ y = |x-a| + 1 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение.

Первое уравнение системы задаёт окружность с центром в точке $(3, 5)$ радиуса 4. Второе уравнение — прямой угол с вершиной в точке $(a, 1)$ и симметричный относительно прямой $x=a$ (см. рис.).

$$\log_7(x^2 - 2x)^2 \geq \log_7 x^2; (x^2 - 2x)^2 > x^2; x^2((x-2)^2 - 1) \geq 0;$$

$$x^2(x-1)(x-3) \geq 0; x \leq 1, x \geq 3,$$

откуда $x \in (-\infty; 0] \cup [2; 3]$.

Ответ: $(-\infty; 0] \cup [2; 3]$.

| Содержание критерия | Баллы |
|--|----------|
| Обоснованно получен верный ответ | 3 |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного конечным количеством значений переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства | 2 |
| Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам или верно найдены все значения переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критерев, перечисленных выше | 0 |
| <i>Максимальный балл</i> | 3 |

- С4** Периметр равнобедренной трапеции равен 52. В трапецию вписана окружность радиуса 6. Прямая, проходящая через центр окружности и вершину трапеции, отсекает от трапеции треугольник. Найдите отношение площади этого треугольника к площади трапеции.

Решение:

Поскольку в трапецию вписана окружность, сумма боковых сторон равна сумме оснований, значит, сумма боковых сторон равна полупериметру трапеции, то есть 26, а так как трапеция равнобедренная, то боковая сторона равна 13.

Пусть окружность радиуса R с центром O , вписанная в равнобедренную трапецию $ABCD$, касается боковой стороны AB в точке M , причём $R = 6$ и $AB = 13$.

AO и BO соответственно являются биссектрисами углов A и B трапеции $ABCD$, которые в сумме составляют 180° , поэтому треугольник ABO — прямоугольный, тогда OM — высота, проведённая из вершины прямого угла AOB , поэтому если $AM = x$, то $BM = 13 - x$, и $OM^2 = AM \cdot BM$, или $36 = x(13 - x)$, откуда находим, что $x = 4$ или $x = 9$. Предположим, что $AM > BM$. Тогда $AM = 9$, $BM = 4$; $AD = 2AM = 18$, $BC = 2BM = 8$.

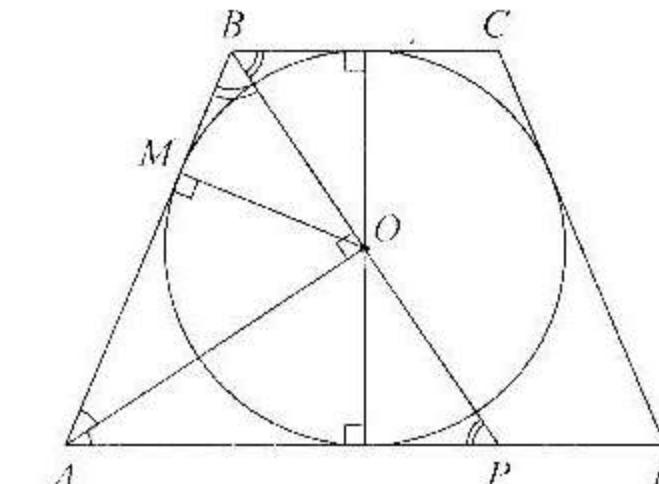


Рис. 1

Пусть прямая, о которой говорится в условии задачи, проходит через вершину B и пересекает основание AD трапеции в точке P (рис. 1). Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе угла, поэтому $\angle APB = \angle CBP = \angle ABP$, значит, треугольник ABP — равнобедренный, $AP = AB = 13$, поэтому $S_{ABP} = 2S_{OAB} = 2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot OM = 78$.

Пусть S — площадь трапеции, h — высота трапеции, тогда

$$h = 2R = 12; S = \frac{1}{2}(AD + BC)h = 156.$$

Следовательно, $\frac{S_{ABP}}{S} = \frac{1}{2}$.

Поскольку трапеция равнобедренная, для прямой, проходящей через вершину C , получим тот же результат.

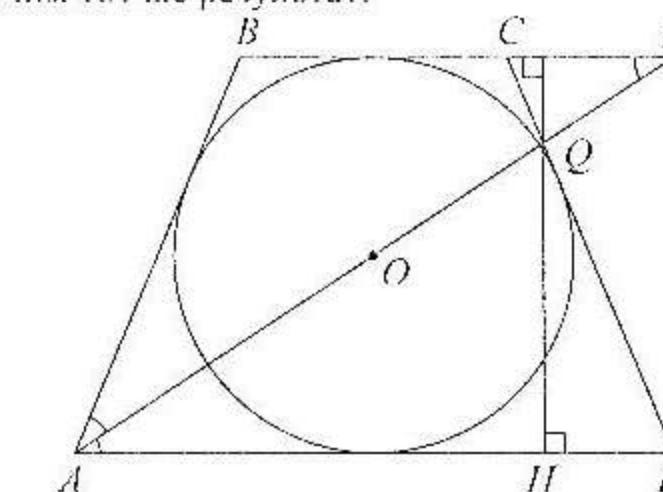


Рис. 2

Пусть теперь указанная прямая проходит через вершину A (рис. 2), пересекает боковую сторону CD в точке Q , а продолжение основания BC — в точке E . Треугольник ABE — равнобедренный ($\angle AEB = \angle DAE = \angle BAE$), поэтому $BE = AB = 13$; $CE = BE - BC = 5$.

Критерии оценивания заданий с развернутым ответом

С1

Решите уравнение $(2\sin^2 x - 7\sin x - 4) \cdot \log_5(-\cos x) = 0$.

Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x < 0$.Если $\log_5(-\cos x) = 0$, то $\cos x = -1$, откуда $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.Если $\log_5(-\cos x) \neq 0$, то $2\sin^2 x - 7\sin x - 4 = 0$, откуда $\sin x = 4$ или $\sin x = -\frac{1}{2}$.Уравнение $\sin x = 4$ не имеет решений.Учитывая, что $\cos x < 0$, из уравнения $\sin x = -\frac{1}{2}$ получаем:

$$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

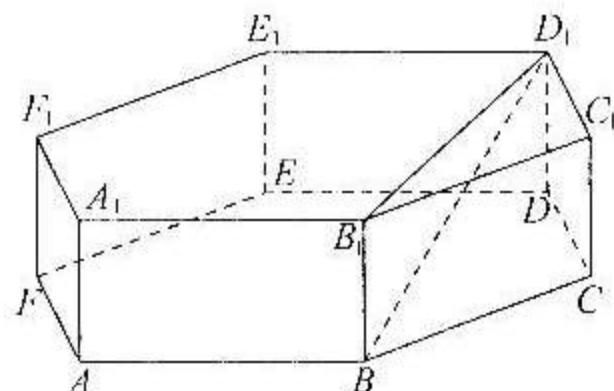
$$\text{Ответ: } \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Верно найдены все значения переменной x , при которых равен нулю первый сомножитель левой части исходного уравнения. Возможен отбор найденных значений или же произведён, или произведён перевернуто | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 2 |

С2 В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, стороны основания которой равны 12, а боковые рёбра равны 3, найдите расстояние от точки B до прямой D_1E_1 .

Решение.

Так как $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильный шестиугольник, то прямые B_1D_1 и D_1E_1 перпендикулярны, следовательно, прямые BD_1 и D_1E_1 перпендикулярны. Расстояние от точки B до прямой D_1E_1 равно длине отрезка BD_1 .

Из треугольника $B_1C_1D_1$ находим: $B_1D_1 = 12\sqrt{3}$.Из прямоугольного треугольника BB_1D_1 находим: $BD_1 = 21$.

Ответ: 21.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 2 |

С3 Решите неравенство $\frac{2\log_7(x^2 - 2x)}{\log_7 x^2} \leq 1$.

Решение.

Решение будем искать при условиях:

$$\begin{cases} x^2 - 2x > 0, \\ x^2 > 0, \\ x^2 \neq 1, \end{cases}$$

откуда $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (2; +\infty)$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$, тогда $x^2 > 1$, откуда $\log_7 x^2 > 0$, поэтому

$$\log_7(x^2 - 2x)^2 \leq \log_7 x^2; (x^2 - 2x)^2 \leq x^2; x^2((x-2)^2 - 1) \leq 0;$$

$$x^2(x-1)(x-3) \leq 0; 1 \leq x \leq 3, x=0,$$

откуда $x \in (2; 3]$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in (-1; 0)$, тогда $x^2 < 1$, откуда $\log_7 x^2 < 0$, поэтому

| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 4 |
| С помощью верного рассуждения получены три верных значения параметра, но решение недостаточно обосновано | 3 |
| С помощью верного рассуждения получены хотя бы два верных значения параметра | 2 |
| Задача сведена к исследованию: – при взаимном расположении окружности и угла; – при двух квадратных уравнений с параметром | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критерев, перечисленных выше | 0 |
| <i>Максимальный балл</i> | 4 |

| Содержание критерия | Баллы |
|---|-------|
| Верно выполнены а), б), в(пример), в(оценка) | 4 |
| Верно выполнены три пункта из четырёх: а), б), в(пример), в(оценка) | 3 |
| Верно выполнены два пункта из четырёх: а), б), в(пример), в(оценка) | 2 |
| Верно выполнен один пункт из четырёх: а), б), в(пример), в(оценка) | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критерев, перечисленных выше | 0 |
| <i>Максимальный балл</i> | 4 |

C6

Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 8 раз больше, либо в 8 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 2618.

- а) Может ли последовательность состоять из двух членов?
- б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?
- в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Решение.

а) Если последовательность состоит из двух членов, a и $8a$ (в произвольном порядке), то $a + 8a = 2618$. Уравнение $9a = 2618$ не имеет решений в натуральных числах. Поэтому последовательность не может состоять из двух членов.

б) Последовательность может состоять из трёх членов: 1232, 154, 1232, в(пример) Приведём пример последовательности из 581 члена:

$$8, \underbrace{1, 8, 1, 8, \dots, 1, 8}_{290}$$

Сумма её членов равна $8 + 9 \cdot 290 = 2618$.

в(оценка) Допустим, что в последовательности более чем 581 член. Разобъём первые 582 члена последовательности на 291 пару соседних членов: первый и второй, третий и четвёртый, пятый и шестой и т.д. Сумма двух членов в каждой паре делится на 9 и поэтому не меньше 9. Значит, сумма всех членов последовательности не меньше, чем $291 \cdot 9 = 2619 > 2618$. Противоречие.

Ответ: а) нет, б) да, в) 581.

Треугольник AQD подобен треугольнику EQC с коэффициентом

$\frac{AD}{CE} = \frac{18}{5}$, значит, если QH — высота треугольника AQD , то

$$QH = \frac{18}{23} h = \frac{216}{23}; S_{\triangle QD} = \frac{1}{2} AD \cdot QH = \frac{1044}{23}.$$

$$\text{Следовательно, } \frac{S_{\triangle QD}}{S} = \frac{162}{299}.$$

Тот же результат для прямой, проходящей через вершину D .

Ответ: $\frac{1}{2}$ или $\frac{162}{299}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 3 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины | 2 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 3 |

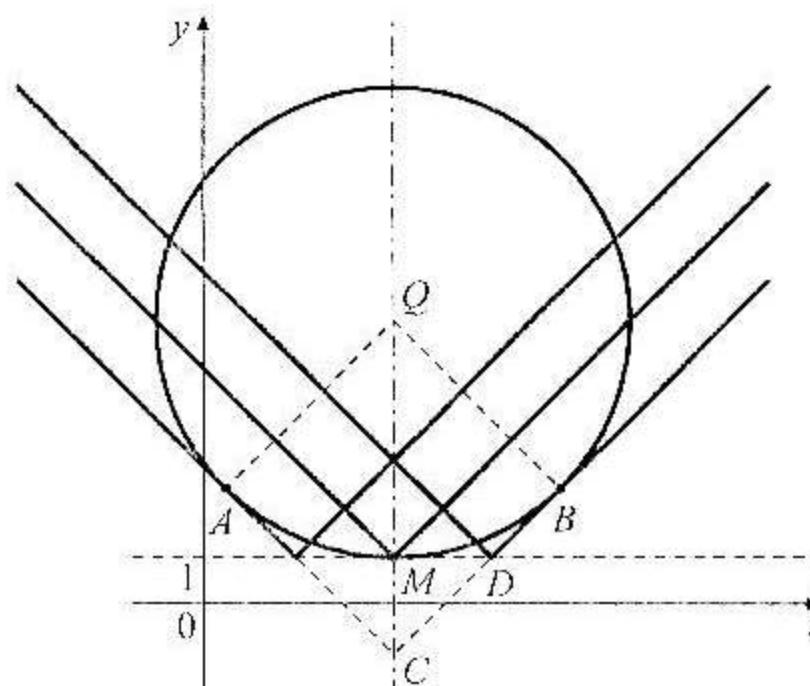
C5 Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-6)^2 = 25, \\ y = |x-a| + 1 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение.

Первое уравнение системы задаёт окружность с центром в точке $(4; 6)$ радиуса 5. Второе уравнение — прямой угол с вершиной в точке $(a; 1)$ и симметричен относительно прямой $x=a$ (см. рис.).



Прямая $y=1$ является касательной к окружности.

Ровно три общие точки фигуры имеют в трёх случаях.

1. Вершина прямого угла лежит в точке касания окружности и прямой $y=1$ (в точке M), а его стороны пересекают окружность в двух точках. Это условие выполняется при $a=4$.

2. Одна из сторон прямого угла пересекает окружность в двух точках, а другая касается окружности (два случая).

Четырёхугольник $BQAC$ — квадрат (см. рис.), симметричный относительно прямой $x=4$, со стороной 5 и диагональю $5\sqrt{2}$.

$$MD = MC = QC - QM = 5\sqrt{2} - 5, \text{ тогда } a = 5\sqrt{2} - 5 + 4 = 5\sqrt{2} - 1.$$

В силу симметрии получаем ещё одно значение параметра: $a = 4 - (5\sqrt{2} - 5) = 9 - 5\sqrt{2}$.

При $a < 9 - 5\sqrt{2}$ или $a > 5\sqrt{2} - 1$ прямой угол имеет не более двух общих точек с окружностью.

При $9 - 5\sqrt{2} < a < 4$ или $4 < a < 5\sqrt{2} - 1$ прямой угол имеет четыре общие точки с окружностью.

Ответ: $9 - 5\sqrt{2}; 4; 5\sqrt{2} - 1$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|----------|
| Обоснованно получен верный ответ | 4 |
| С помощью верного рассуждения получены три верных значения параметра, но решение недостаточно обосновано | 3 |
| С помощью верного рассуждения получены хотя бы два верных значения параметра | 2 |
| Задача сведена к исследованию: или взаимного расположения окружности и угла; или двух квадратных уравнений с параметром | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критерев, перечисленных выше | 0 |
| <i>Максимальный балл</i> | 4 |

| Содержание критерия | Баллы |
|---|----------|
| Верно выполнены а), б), в(пример), в(оценка) | 4 |
| Верно выполнены три пункта из четырёх: а), б), в(пример), в(оценка) | 3 |
| Верно выполнены два пункта из четырёх: а), б), в(пример), в(оценка) | 2 |
| Верно выполнен один пункт из четырёх: а), б), в(пример), в(оценка) | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критерев, перечисленных выше | 0 |
| <i>Максимальный балл</i> | 4 |

- C6** Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 8 раз больше, либо в 8 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 2618.
- Может ли последовательность состоять из двух членов?
 - Может ли последовательность состоять из трёх членов?
 - Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Решение.

а) Если последовательность состоит из двух членов, a и $8a$ (в произвольном порядке), то $a+8a=2618$. Уравнение $9a=2618$ не имеет решений в натуральных числах. Поэтому последовательность не может состоять из двух членов.

б) Последовательность может состоять из трёх членов: 1232, 154, 1232.

в(пример) Приведём пример последовательности из 581 члена:

$$8, \underbrace{1, 8,}_{2}, \underbrace{1, 8,}_{2}, \dots, \underbrace{1, 8,}_{2}, \overbrace{\quad\quad\quad}^{299}$$

Сумма её членов равна $8+9 \cdot 299 = 2618$.

в(оценка) Допустим, что в последовательности более чем 581 член. Разобьём первые 582 члена последовательности на 291 пару соседних членов: первый и второй, третий и четвёртый, пятый и шестой и т.д. Сумма двух членов в каждой паре делится на 9 и поэтому не меньше 9. Значит, сумма всех членов последовательности не меньше, чем $291 \cdot 9 = 2619 > 2618$.

Противоречие.

Ответ: а) нет, б) да, в) 581.