

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $(6\sin^2 x + 5\sin x - 4) \cdot \sqrt{-7\cos x} = 0$.

Решение.

Если $\cos x > 0$, то решений нет.

Если $\cos x = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Если $\cos x < 0$, то $6\sin^2 x + 5\sin x - 4 = 0$, откуда $\sin x = -\frac{4}{3}$ или $\sin x = \frac{1}{2}$.

Уравнение $\sin x = -\frac{4}{3}$ не имеет решений.

Учитывая, что $\cos x < 0$, из уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ получаем:

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

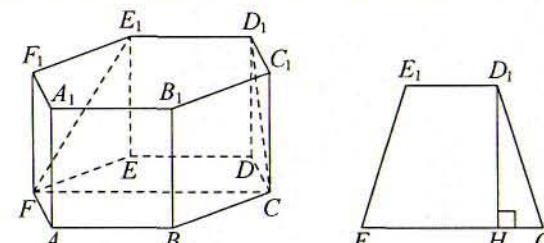
$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно найдены все значения переменной x , при которых равен нулю первый сомножитель левой части исходного уравнения. Возможно отбор найденных значений или не произведён, или произведён неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C2 В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, стороны основания которой равны 3, а боковые рёбра равны 4, найдите расстояние от точки C до прямой D_1E_1 .

Решение.

Так как $ABCDEF$ правильный шестиугольник, то прямые FC и DE параллельны, параллельны также прямые D_1E_1 и DE , следовательно, прямые D_1E_1 и FC параллельны. Расстояние от точки C до прямой D_1E_1 равно расстоянию между прямыми D_1E_1 и FC .



В трапеции FE_1D_1C $D_1E_1 = 3$, $FC = 6$, $FE_1 = CD_1 = 5$.

$$CH = \frac{FC - E_1D_1}{2} = \frac{6 - 3}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\text{тогда } D_1H = \frac{\sqrt{91}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{91}}{2}.$$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C3 Решите неравенство $3\log_{11}(x^2 + 8x - 9) \leq 4 + \log_{11}\frac{(x-1)^3}{x+9}$.

Решение.

Значения x , при которых определены обе части неравенства:

$$\begin{cases} x^2 + 8x - 9 > 0, \\ \frac{(x-1)^3}{x+9} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+9)(x-1) > 0, \\ \frac{(x-1)^3}{x+9} > 0, \end{cases}$$

откуда $x \in (-\infty; -9) \cup (1; +\infty)$. Для таких x получаем:

$$\begin{aligned} 3\log_{11}(x^2 + 8x - 9) + \log_{11}\frac{x+9}{(x-1)^3} &= \log_{11}\frac{(x+9)^3(x-1)^3(x+9)}{(x-1)^3} = \\ &= \log_{11}(x+9)^4. \end{aligned}$$

Исходное неравенство примет вид: $\log_{11}(x+9)^4 \leq 4$.

Так как $(x+9)^4 \geq 0$, то при условии $x \neq -9$ имеем:

$$\log_{11}(x+9)^4 \leq 4; (x+9)^4 \leq 11^4; (x+9)^2 \leq 11^2; (x-2)(x+20) \leq 0,$$

откуда $x \in [-20; -9] \cup (-9; 2]$.

Учитывая, что $x \in (-\infty; -9) \cup (1; +\infty)$, получаем: $x \in [-20; -9] \cup (1; 2]$.

Ответ: $[-20; -9]; (1; 2]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным количеством значений переменной, при которых определены обе части исходного неравенства	2
Произведён переход от исходного неравенства к неравенствам, которые не содержат логарифмов и являются следствиями исходного неравенства. Возможно ограничения, при которых исходное неравенство имеет смысл, отсутствуют или найдены неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

- C4** Прямая, перпендикулярная боковой стороне равнобедренного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок прямой, заключённый внутри треугольника, равен 6, а отношение боковой стороны треугольника к его основанию равно $\frac{5}{6}$.

Решение.

Обозначим данный треугольник ABC , $BC = 6x$ — основание, $AB = AC = 5x$. Заметим, что окружность, о которой говорится в условии, — окружность, вписанная в треугольник ABC . Пусть O — её центр, а E — точка касания с основанием BC . Обозначим $\angle ABC = \alpha$. $\cos \alpha = \frac{BC}{2AB} = \frac{3}{5}$,

$\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $AE = AB \cdot \sin \alpha = 4x$. Так как BO — биссектриса треугольника

ABE , то $\frac{OE}{AE - OE} = \frac{BE}{AB}$, следовательно, $OE = \frac{3}{2}x$.

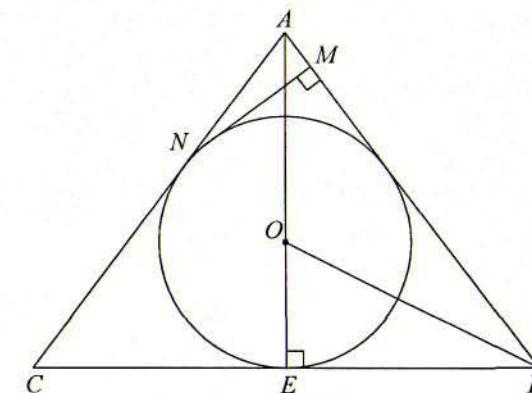


Рис. 1

Пусть прямая MN перпендикулярна AB , касается окружности, пересекает AB в точке M , а AC в точке N (рис. 1). $\angle MAN = 180^\circ - 2\alpha$, $\sin \angle MAN = \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{24}{25}$, $\cos \angle MAN = \frac{7}{25}$. Тогда в треугольнике

AMN $MN = 6$, $AM = \frac{7}{4}$, $AN = \frac{25}{4}$. У описанного четырёхугольника суммы противоположных сторон равны: $BC + MN = BM + CN$; $6x + 6 = \left(5x - \frac{7}{4}\right) + \left(5x - \frac{25}{4}\right)$, откуда находим: $x = \frac{7}{2}$, $OE = \frac{21}{4}$.

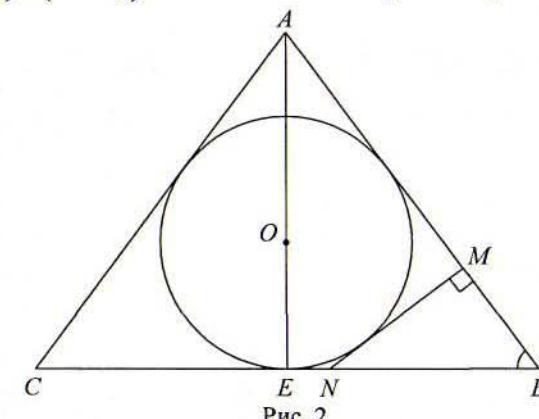


Рис. 2

Пусть прямая MN перпендикулярна AB , касается окружности, пересекает AB в точке M , а BC в точке N (рис. 2). В прямоугольном треугольнике NBM $\angle NBM = \alpha$, $MN = 6$, $BM = \frac{9}{2}$, $BN = \frac{15}{2}$. У описанного четырёхугольника суммы противоположных сторон равны:

$$AC + MN = AM + CN; \quad 5x + 6 = \left(5x - \frac{9}{2}\right) + \left(6x - \frac{15}{2}\right), \text{ откуда находим: } x = 3,$$

$$OE = \frac{9}{2}.$$

Ответ: $\frac{9}{2}$ или $\frac{21}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система

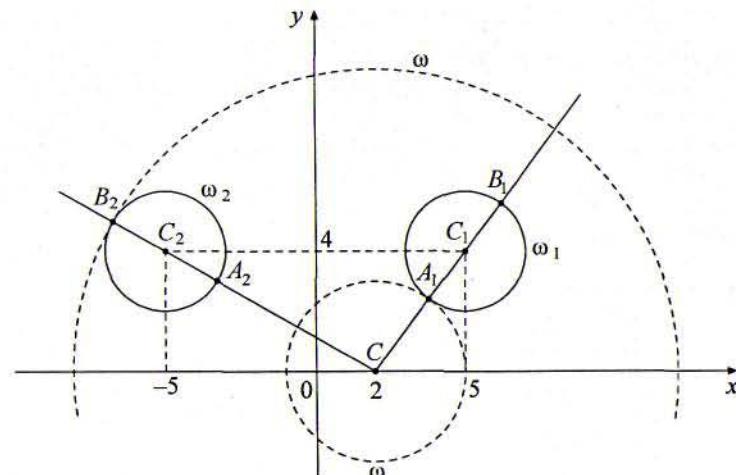
$$\begin{cases} (|x|-5)^2 + (y-4)^2 = 4, \\ (x-2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Если $x \geq 0$, то уравнение $(|x|-5)^2 + (y-4)^2 = 4$ задаёт окружность ω_1 с центром в точке $C_1(5; 4)$ радиуса 2, а если $x < 0$, то оно задаёт окружность ω_2 с центром в точке $C_2(-5; 4)$ того же радиуса (см. рис.).

При положительных значениях параметра a уравнение $(x-2)^2 + y^2 = a^2$ задаёт окружность ω с центром в точке $C(2; 0)$ радиуса a . Поэтому задача состоит в том, чтобы найти все значения параметра a , при каждом из которых окружность ω имеет единственную общую точку с объединением окружностей ω_1 и ω_2 .



Из точки C проведём луч CC_1 и обозначим A_1 и B_1 точки его пересечения с окружностью ω_1 , где A_1 лежит между C и C_1 . Так как

$$CC_1 = \sqrt{(5-2)^2 + 4^2} = 5, \text{ то } CA_1 = 5-2 = 3, CB_1 = 5+2 = 7.$$

При $a < CA_1$ или $a > CB_1$ окружности ω и ω_1 не пересекаются.

При $CA_1 < a < CB_1$ окружности ω и ω_1 имеют две общие точки.

При $a = CA_1$ или $a = CB_1$ окружности ω и ω_1 касаются.

Из точки C проведём луч CC_2 и обозначим A_2 и B_2 точки его пересечения с окружностью ω_2 , где A_2 лежит между C и C_2 . Так как

$$CC_2 = \sqrt{(-5-2)^2 + 4^2} = \sqrt{65}, \text{ то } CA_2 = \sqrt{65} - 2, CB_2 = \sqrt{65} + 2.$$

При $a < CA_2$ или $a > CB_2$ окружности ω и ω_2 не пересекаются.

При $CA_2 < a < CB_2$ окружности ω и ω_2 имеют две общие точки.

При $a = CA_2$ или $a = CB_2$ окружности ω и ω_2 касаются.

Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружность ω касается ровно одной из двух окружностей ω_1 и ω_2 и не пересекается с другой. Так как $CA_1 < CA_2 < CB_1 < CB_2$, то условию задачи удовлетворяют только числа $a=3$ и $a=\sqrt{65}+2$.

Ответ: 3; $\sqrt{65}+2$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены оба верных значения параметра, но	3
– или в ответ включены также и одно-два неверных значения; – или решение недостаточно обосновано	
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения трёх окружностей; – или двух квадратных уравнений с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

C6 На доске написано более 42, но менее 56 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно 4, среднее арифметическое всех положительных из них равно 14, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -7 .

- a) Сколько чисел написано на доске?
- б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?
- в) Какое наибольшее количество отрицательных чисел может быть среди них?

Решение.

Пусть среди написанных чисел k положительных, l отрицательных и m нулей. Сумма набора чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое, поэтому $14k - 7l + 0 \cdot m = 4(k + l + m)$.

а) Заметим, что в левой части каждое слагаемое делится на 7, поэтому $k + l + m$ — количество целых чисел — делится на 7. По условию $42 < k + l + m < 56$, поэтому $k + l + m = 49$. Таким образом, написано 49 чисел.

б) Приведём равенство $14k - 7l = 4(k + l + m)$ к виду $10k = 11l + 4m$. Так как $m \geq 0$, получаем, что $10k \geq 11l$, откуда $k > l$. Следовательно, положительных чисел больше, чем отрицательных.

в(оценка) Подставим $k + l + m = 49$ в правую часть равенства $14k - 7l = 4(k + l + m)$: $14k - 7l = 196$, откуда $l = 2k - 28$. Так как $k + l \leq 49$, получаем: $3k - 28 \leq 49$, $3k \leq 77$, $k \leq 25$, $l = 2k - 28 \leq 22$; то есть отрицательных чисел не более 22.

в(пример) Приведём пример, когда отрицательных чисел ровно 22. Пусть на доске 25 раз написано число 14, 22 раза написано число -7 и два

раза написан 0. Тогда $\frac{14 \cdot 25 - 7 \cdot 22}{49} = \frac{350 - 154}{49} = 4$, указанный набор удовлетворяет всем условиям задачи.

Ответ: а) 49; б) положительных; в) 22.

Содержание критерия	Баллы
Верно выполнены: а), б), в(пример), в(оценка)	4
Верно выполнены три пункта из четырёх: а), б), в(пример), в(оценка)	3
Верно выполнены два пункта из четырёх: а), б), в(пример), в(оценка)	2
Верно выполнен один пункт из четырёх: а), б), в(пример), в(оценка)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Критерии оценивания заданий с развернутым ответом

C1 Решите уравнение $(2\cos^2 x - 5\cos x + 2) \cdot \log_{11}(-\sin x) = 0$.

Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $\sin x < 0$.

Если $\log_{11}(-\sin x) = 0$, то $\sin x = -1$, откуда $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Если $\log_{11}(-\sin x) \neq 0$, то $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$, откуда $\cos x = 2$ или $\cos x = \frac{1}{2}$.

Уравнение $\cos x = 2$ не имеет решений.

Учитывая, что $\sin x < 0$, из уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ получаем:

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

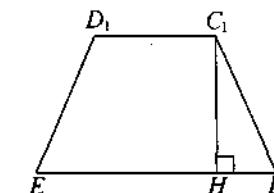
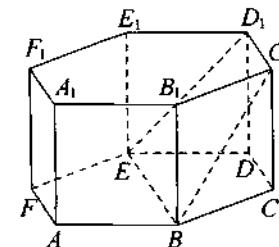
$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно найдены все значения переменной x , при которых равен нулю первый сомножитель левой части исходного уравнения. Возможно отбор найденных значений или не произведён, или произведён неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C2 В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, стороны основания которой равны 4, а боковые рёбра равны 3, найдите расстояние от точки B до прямой C_1D_1 .

Решение.

Так как $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, то прямые BE и CD параллельны, параллельны также прямые C_1D_1 и CD , следовательно, прямые C_1D_1 и BE параллельны. Расстояние от точки B до прямой C_1D_1 равно расстоянию между прямыми C_1D_1 и BE .



В трапеции BC_1D_1E $BC_1 = 4$, $D_1E = 8$, $BC_1 = ED_1 = 5$.

$$BH = \frac{BE - C_1D_1}{2} = \frac{8 - 4}{2} = 2,$$

тогда $C_1H = \sqrt{21}$.

Ответ: $\sqrt{21}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C3 Решите неравенство $11 \cdot \lg(x^2 + 11x + 30) \leq 12 + \lg \frac{(x+6)^{11}}{x+5}$.

Решение.

Значения x , при которых определены обе части неравенства:

$$\begin{cases} x^2 + 11x + 30 > 0, \\ \frac{(x+6)^{11}}{x+5} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+6)(x+5) > 0, \\ \frac{(x+6)^{11}}{x+5} > 0, \end{cases}$$

откуда $x \in (-\infty; -6) \cup (-5; +\infty)$. Для таких x получаем:

$$\begin{aligned} 11 \cdot \lg(x^2 + 11x + 30) + \lg \frac{x+5}{(x+6)^{11}} &= \lg \frac{(x+5)^{11}(x+6)^{11}(x+5)}{(x+6)^{11}} = \\ &= \lg(x+5)^{12}. \end{aligned}$$

Исходное неравенство примет вид: $\lg(x+5)^{12} \leq 12$.

Так как $(x+5)^{12} \geq 0$, то при условии $x \neq -5$ имеем:

$$\lg(x+5)^{12} \leq 12; (x+5)^{12} \leq 10^{12}; (x+5)^2 \leq 10^2; (x-5)(x+15) \leq 0,$$

откуда $x \in [-15; -5) \cup (-5; 5]$.

Учитывая, что $x \in (-\infty; -6) \cup (-5; +\infty)$, получаем:
 $x \in [-15; -6) \cup (-5; 5]$.

Ответ: $[-15; -6); (-5; 5]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным количеством значений переменной, при которых определены обе части исходного неравенства	2
Произведён переход от исходного неравенства к неравенствам, которые не содержат логарифмов и являются следствиями исходного неравенства. Возможно ограничения, при которых исходное неравенство имеет смысл, отсутствуют или найдены неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

- C4** Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключённый внутри треугольника, равен 12, а косинус острого угла равен $\frac{3}{5}$.

Решение.

Обозначим данный треугольник ABC , $\cos \angle ABC = \frac{3}{5}$, $AB = 5x$ — гипотенуза, $BC = 3x$, $AC = 4x$. Заметим, что окружность, о которой говорится в условии, — окружность, вписанная в треугольник ABC . Пусть O — её центр, а D и E — точки касания с катетами AC и BC соответственно. Тогда, так как $ODCE$ — квадрат, радиус этой окружности

$$OD = EC = \frac{AC + BC - AB}{2} = \frac{4x + 3x - 5x}{2} = x.$$

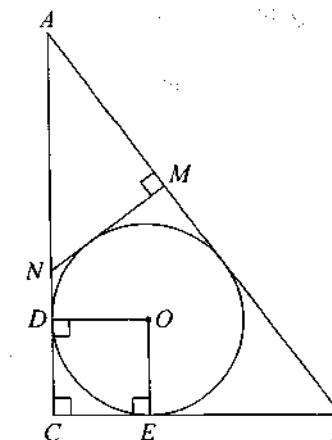


Рис. 1

Пусть прямая MN перпендикулярна AB , касается окружности, пересекает AB в точке M , а AC в точке N (рис. 1). Прямоугольный треугольник ANM подобен треугольнику ABC . В нём $MN = 12$, $AM = 16$, $AN = 20$. У описанного четырёхугольника суммы противоположных сторон равны: $BC + MN = BM + CN$; $3x + 12 = (5x - 16) + (4x - 20)$, откуда находим: $x = 8$.

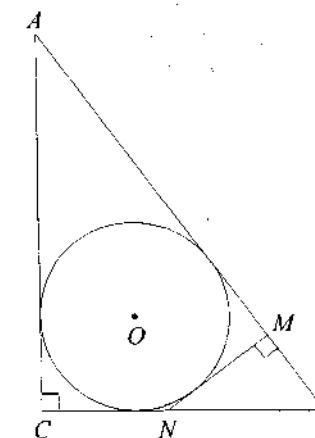


Рис. 2

Пусть прямая MN перпендикулярна AB , касается окружности, пересекает AB в точке M , а BC в точке N (рис. 2). Прямоугольный треугольник NBM подобен треугольнику ABC . В нём $MN = 12$, $BM = 9$, $BN = 15$. У описанного четырёхугольника суммы противоположных сторон

равны: $AC + MN = AM + CN$; $4x + 12 = (5x - 9) + (3x - 15)$, откуда находим:
 $x = 9$.

Ответ: 8 или 9.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система

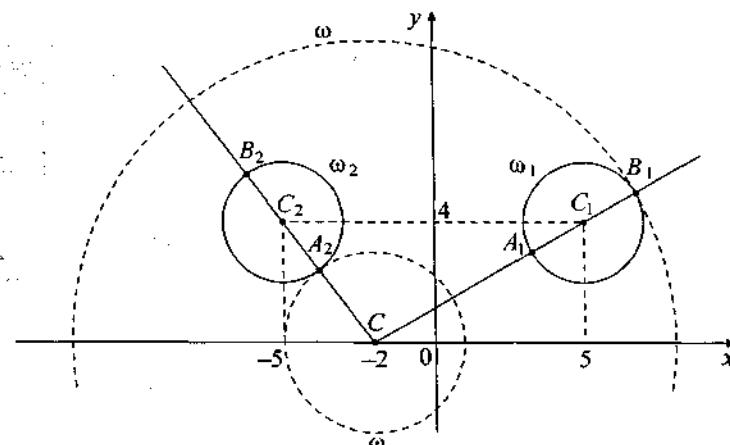
$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 4, \\ (x + 2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Если $x \geq 0$, то уравнение $(|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 4$ задаёт окружность ω_1 с центром в точке $C_1(5; 4)$ радиуса 2, а если $x < 0$, то оно задаёт окружность ω_2 с центром в точке $C_2(-5; 4)$ того же радиуса (см. рис.).

При положительных значениях параметра a уравнение $(x + 2)^2 + y^2 = a^2$ задаёт окружность ω с центром в точке $C(-2; 0)$ радиуса a . Поэтому задача состоит в том, чтобы найти все значения параметра a , при каждом из которых окружность ω имеет единственную общую точку с объединением окружностей ω_1 и ω_2 .



Из точки C проведём луч CC_1 и обозначим A_1 и B_1 точки его пересечения с окружностью ω_1 , где A_1 лежит между C и C_1 . Так как $CC_1 = \sqrt{(5+2)^2 + 4^2} = \sqrt{65}$, то $CA_1 = \sqrt{65} - 2$, $CB_1 = \sqrt{65} + 2$.

При $a < CA_1$ или $a > CB_1$ окружности ω и ω_1 не пересекаются.

При $CA_1 < a < CB_1$ окружности ω и ω_1 имеют две общие точки.

При $a = CA_1$ или $a = CB_1$ окружности ω и ω_1 касаются.

Из точки C проведём луч CC_2 и обозначим A_2 и B_2 точки его пересечения с окружностью ω_2 , где A_2 лежит между C и C_2 . Так как $CC_2 = \sqrt{(-5+2)^2 + 4^2} = 5$, то $CA_2 = 5 - 2 = 3$, $CB_2 = 5 + 2 = 7$.

При $a < CA_2$ или $a > CB_2$ окружности ω и ω_2 не пересекаются.

При $CA_2 < a < CB_2$ окружности ω и ω_2 имеют две общие точки.

При $a = CA_2$ или $a = CB_2$ окружности ω и ω_2 касаются.

Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружность ω касается ровно одной из двух окружностей ω_1 и ω_2 и не пересекается с другой. Так как $CA_2 < CA_1 < CB_2 < CB_1$, то условию задачи удовлетворяют только числа $a = 3$ и $a = \sqrt{65} + 2$.

Ответ: 3; $\sqrt{65} + 2$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены оба верных значения параметра, но	3
– или в ответ включены также и одно-два неверных значения;	
– или решение недостаточно обосновано	
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2
Задача сведена к исследованию:	
– или взаимного расположения трёх окружностей;	1
– или двух квадратных уравнений с параметром	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

в(пример) Приведём пример, когда положительных чисел ровно 15. Пусть на доске 15 раз написано число 6, 25 раз написано число -12 и два раза написан 0. Тогда $\frac{6 \cdot 15 - 12 \cdot 25}{42} = \frac{90 - 300}{42} = -5$, указанный набор удовлетворяет всем условиям задачи.

Ответ: а) 42; б) отрицательных; в) 15.

Содержание критерия	Баллы
Верно выполнены: а), б), в(пример), в(оценка)	4
Верно выполнены три пункта из четырёх: а), б), в(пример), в(оценка)	3
Верно выполнены два пункта из четырёх: а), б), в(пример), в(оценка)	2
Верно выполнен один пункт из четырёх: а), б), в(пример), в(оценка)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

- C6** На доске написано более 36, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -5 , среднее арифметическое всех положительных из них равно 6, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -12 .
- а) Сколько чисел написано на доске?
 б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?
 в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Решение.

Пусть среди написанных чисел k положительных, l отрицательных и m нулей. Сумма набора чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое, поэтому $6k - 12l + 0 \cdot m = -5(k + l + m)$.

а) Заметим, что в левой части каждое слагаемое делится на 6, поэтому $k + l + m$ — количество целых чисел — делится на 6. По условию $36 < k + l + m < 48$, поэтому $k + l + m = 42$. Таким образом, написано 42 числа.

б) Приведём равенство $6k - 12l = -5(k + l + m)$ к виду $7l = 11k + 5m$. Так как $m \geq 0$, получаем, что $7l \geq 11k$, откуда $l > k$. Следовательно, отрицательных чисел больше, чем положительных.

в(оценка) Подставим $k + l + m = 42$ в правую часть равенства $6k - 12l = -5(k + l + m)$: $6k - 12l = -210$, откуда $k = 2l - 35$. Так как $k + l \leq 42$, получаем: $3l - 35 \leq 42$, $3l \leq 77$, $l \leq 25$, $k = 2l - 35 \leq 15$; то есть положительных чисел не более 15.

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $(2\sin x + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{\cos x} = 0$.

Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x \geq 0$.

Если $\cos x = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Если $\cos x > 0$, то $2\sin x + \sqrt{3} = 0$, откуда $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Учитывая, что

$\cos x > 0$, из уравнения $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ получаем: $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

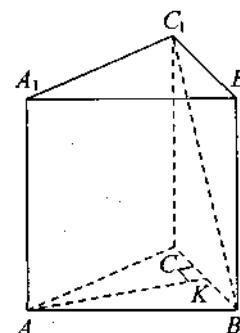
Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно найдены все значения переменной x , при которых равен нулю один из сомножителей левой части исходного уравнения. Возможно отбор найденных значений или не произведён, или произведён неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C2 В правильной треугольной призме $ABC A_1 B_1 C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1 .

Решение.

Так как прямая BC_1 пересекается с прямой BB_1 , параллельной прямой AA_1 , и лежит в плоскости BCC_1 , параллельной AA_1 , то расстояние между прямыми AA_1 и BC_1 равно расстоянию от прямой AA_1 до плоскости BCC_1 .



Пусть AK — высота треугольника ABC . AK перпендикулярна BB_1 , так как BB_1 перпендикулярна плоскости ABC . Таким образом, искомое расстояние — длина отрезка AK . Из равностороннего треугольника ABC находим:

$$AK = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C3 Решите неравенство $\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}}\left(\frac{x}{3}\right) > 0$.

Решение.

Решение будем искать при условиях:

$$\begin{cases} 2x^2 - 7x + 6 > 0, \\ 2x^2 - 7x + 6 \neq 1, \\ x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-3)(x-2) > 0, \\ (2x-5)(x-1) \neq 0, \\ x > 0, \end{cases}$$

откуда $x \in (0; 1) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right) \cup \left(2; \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in (0; 1) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$, тогда

$2x^2 - 7x + 6 > 1$, откуда $\frac{x}{3} > 1$, то есть $x \in (3; +\infty)$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in \left(1; \frac{3}{2}\right) \cup \left(2; \frac{5}{2}\right)$, тогда

$2x^2 - 7x + 6 < 1$, откуда $0 < \frac{x}{3} < 1$, то есть $x \in \left(1; \frac{3}{2}\right) \cup \left(2; \frac{5}{2}\right)$.

Ответ: $\left(1; \frac{3}{2}\right); \left(2; \frac{5}{2}\right); (3; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного конечным количеством значений переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	2
Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам или верно найдены все значения переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

- C4** Данна окружность радиуса 4 с центром в точке O , расположенной на биссектрисе угла, равного 60° . Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся данной окружности внешним образом, если известно, что расстояние от точки O до вершины угла равно 10.

Решение.

Пусть Q — центр искомой окружности радиуса x , M — точка касания с данной окружностью, B — точка касания с одной из сторон данного угла с вершиной A .

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе угла, поэтому $\angle BAQ = 30^\circ$. Из прямоугольного треугольника BAQ находим, что $AQ = 2QB = 2x$.

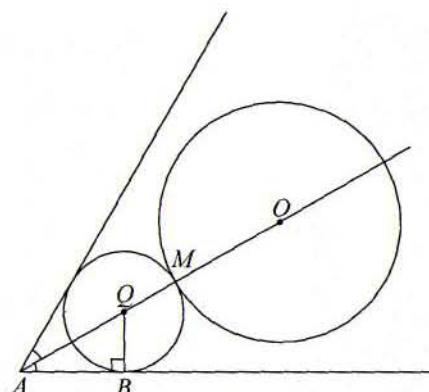


Рис. 1

Пусть точка Q лежит между A и O (рис. 1). Линия центров касающихся окружностей проходит через точку их касания, поэтому $AO = AQ + QM + MO$, или $10 = 2x + x + 4$, откуда находим, что $x = 2$.

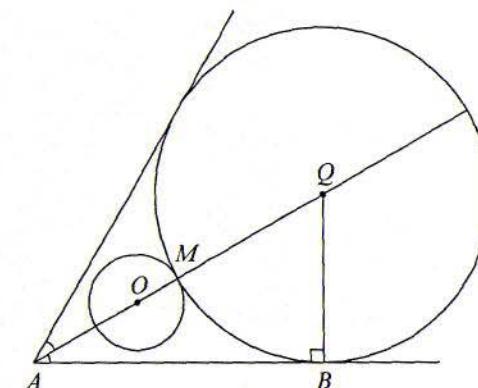


Рис. 2

Пусть точка O лежит между A и Q (рис. 2), тогда $AQ = AO + OM + MQ$, или $2x = 10 + 4 + x$, откуда $x = 14$.

Ответ: 2 или 14.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

- C5** Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 - 8x = 2|x - a| - 16$$

имеет ровно три различных решения.

Решение.

Запишем уравнение в виде $(x - 4)^2 = 2|x - a|$ и рассмотрим графики функций

$$y = (x - 4)^2 \text{ и } y = 2|x - a|.$$

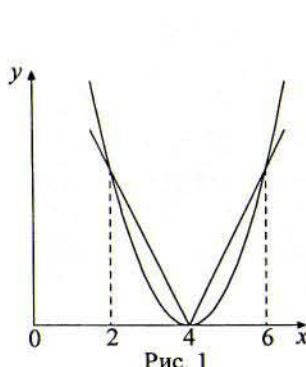


Рис. 1

График первой функции — парабола, график второй функции — угол с вершиной в точке a . Уравнение будет иметь три различных решения в следующих случаях.

- 1) Вершина параболы совпадает с вершиной угла (рис. 1).
- 2) Одна из сторон угла касается параболы (рис. 2).

В первом случае $a = 4$, и уравнение имеет три корня: 2, 4, 6.

Рассмотрим второй случай. Пусть правая сторона угла касается параболы. Уравнение $(x - 4)^2 = 2x - 2a$ должно иметь единственное решение.

Приведём уравнение к стандартному виду: $x^2 - 10x + 16 + 2a = 0$. Из равенства нулю дискриминанта получаем $25 - (16 + 2a) = 0$, откуда $a = 4,5$.

Если параболы касаются левая сторона угла, получаем уравнение $(x - 4)^2 = 2a - 2x$; $x^2 - 6x + 16 - 2a = 0$. Оно имеет единственное решение, только если $a = 3,5$.

Ответ: 3,5; 4; 4,5.

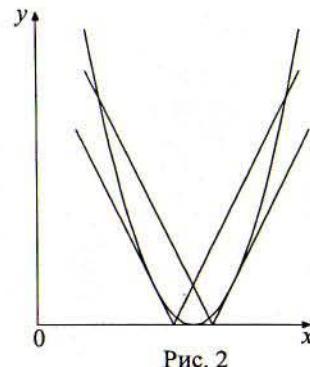


Рис. 2

C6

Сумма двух натуральных чисел равна 43, а их наименьшее общее кратное в 120 раз больше их наибольшего общего делителя. Найдите эти числа.

Решение.

Сумма чисел кратна их наибольшему общему делителю, поэтому их наибольший общий делитель является делителем числа 43, откуда следует, что он равен 1. Тогда наименьшее общее кратное этих чисел равно их произведению. Обозначив искомые числа x и y , получаем систему

$$\begin{cases} x + y = 43, \\ xy = 120, \end{cases}$$

решая которую, получаем числа 40 и 3.

Ответ: 40 и 3.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Решение в целом верное, но содержит легко устранимые неточности	3
Верно использованы свойства делимости, найдено наименьшее общее кратное, решение не доведено до конца	2
Найден верный ответ и показано, что найденные числа удовлетворяют условию задачи. Доказательство единственности решения отсутствует или неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены три значения параметра, но	
– или в ответ включено также одно-два неверных;	3
– или решение недостаточно обосновано	
С помощью верного рассуждения получено хотя бы два значения параметра, одно из которых верное	2
Задача сведена к исследованию:	
– или взаимного расположения параболы и угла;	1
– или квадратных уравнений с параметром	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4