

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Вариант № 401

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике даётся 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом (В1–В12) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (С1–С6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий вы сможете вернуться, если у вас останется время.

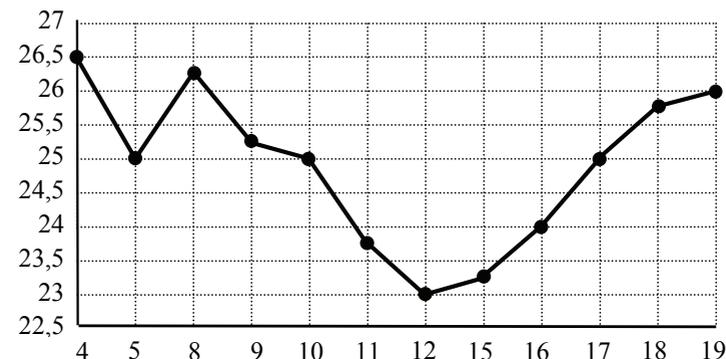
Желаем успеха!

Часть 1

Ответом к заданиям этой части (В1–В12) является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак минус и запятую пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

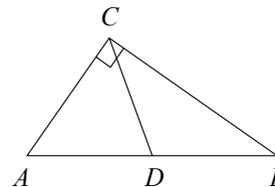
В1 В доме, в котором живёт Петя, один подъезд. На каждом этаже по шесть квартир. Петя живёт в квартире 45. На каком этаже живёт Петя?

В2 На рисунке жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 4 по 19 апреля 2002 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена нефти на момент закрытия торгов составила 24 доллара за баррель.



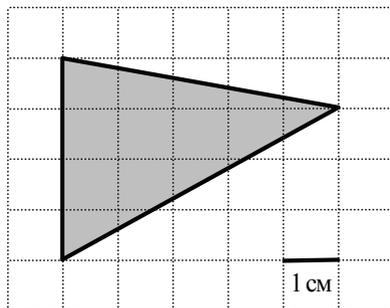
В3 Найдите корень уравнения $\log_2(4 - x) = 8$.

В4 В треугольнике ABC CD — медиана, угол C равен 90° , угол B равен 35° . Найдите угол ACD . Ответ дайте в градусах.



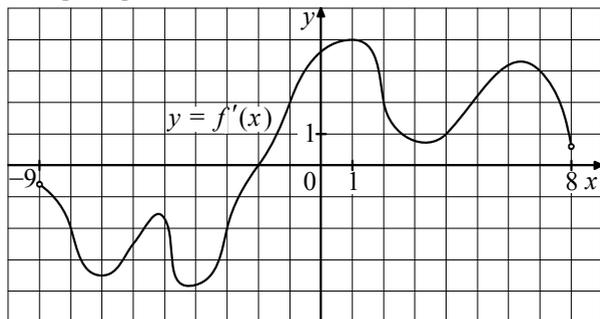
B5 В первом банке один фунт стерлингов можно купить за 47,4 рубля. Во втором банке 15 фунтов — за 696 рублей. В третьем банке 22 фунта стоят 1067 рублей. Какую наименьшую сумму (в рублях) придётся заплатить за 10 фунтов стерлингов?

B6 Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

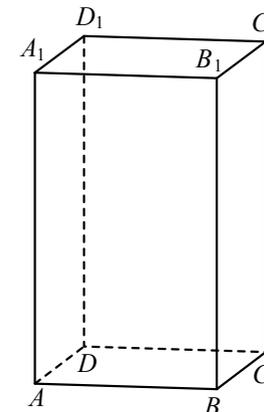


B7 Найдите значение выражения $12\sin 150^\circ \cdot \cos 120^\circ$.

B8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9; 8)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-3; 3]$.



B9 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, D, A_1, B, C, B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 3, AD = 4, AA_1 = 5$.



B10 Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально. На исследуемом интервале температура вычисляется по формуле $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 1300$ К, $a = -\frac{14}{3}$ К/мин², $b = 98$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1720 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.

B11 Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 + 2x^2 + x - 7$ на отрезке $[-3; -0,5]$.

B12 В понедельник акции компании подорожали на некоторое число процентов, а во вторник подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 4% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите уравнение $(\sqrt{3} \sin x - 2 \sin^2 x) \cdot \log_6(-\operatorname{tg} x) = 0$.

C2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1 .

C3 Решите неравенство $\frac{\log_x 2x^{-1} \cdot \log_x 2x^2}{\log_{2x} x \cdot \log_{2x^{-2}} x} < 40$.

C4 Точки M , K и N лежат на сторонах соответственно AB , BC и AC треугольника ABC , причём $AMKN$ — параллелограмм, площадь которого составляет $\frac{4}{9}$ площади треугольника ABC . Найдите диагональ MN параллелограмма, если известно, что $AB = 21$, $AC = 12$ и $\angle BAC = 120^\circ$.

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y = \sqrt{5 + 4x - x^2} + 2, \\ y = \sqrt{9 - a^2 + 2ax - x^2} + a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

C6 Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 720, и

- а) пять;
 - б) четыре;
 - в) три
- из них образуют геометрическую прогрессию?

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Вариант № 402

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике даётся 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом (В1–В12) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (С1–С6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий вы сможете вернуться, если у вас останется время.

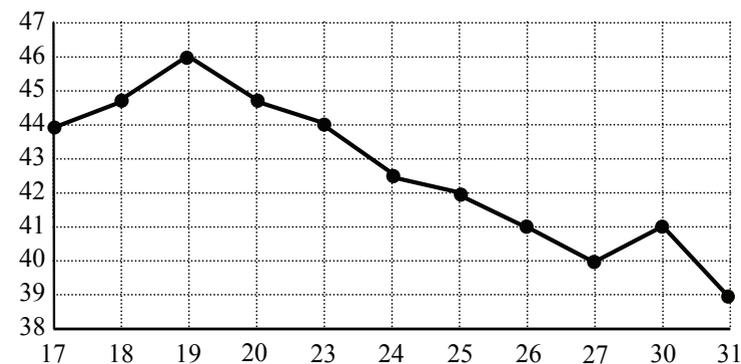
Желаем успеха!

Часть 1

Ответом к заданиям этой части (В1–В12) является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

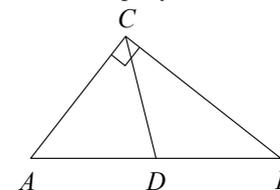
В1 В доме, в котором живёт Ваня, один подъезд. На каждом этаже по семь квартир. Ваня живёт в квартире 58. На каком этаже живёт Ваня?

В2 На рисунке жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 17 по 31 августа 2004 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена нефти на момент закрытия торгов составила 42 доллара за баррель.



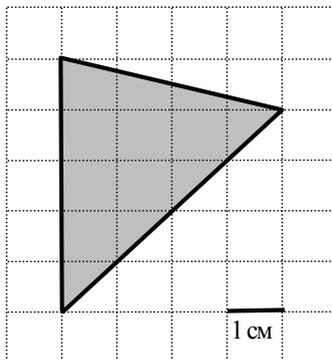
В3 Найдите корень уравнения $\log_3(3-x) = 3$.

В4 В треугольнике ABC CD — медиана, угол C равен 90° , угол B равен 38° . Найдите угол ACD . Ответ дайте в градусах.



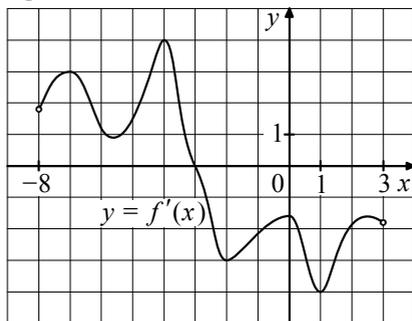
B5 В первом банке один фунт стерлингов можно купить за 43,1 рубля. Во втором банке 30 фунтов — за 1446 рублей. В третьем банке 18 фунтов стоят 765 рублей. Какую наименьшую сумму (в рублях) придётся заплатить за 10 фунтов стерлингов?

B6 Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

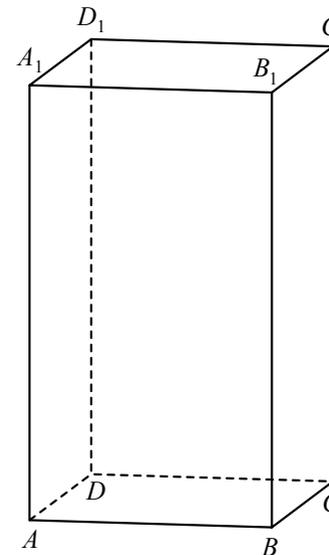


B7 Найдите значение выражения $24\sin 150^\circ \cdot \cos 120^\circ$.

B8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 3)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-6; 1]$.



B9 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, D, A_1, B, C, B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 4, AD = 5, AA_1 = 7$.



B10 Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально. На исследуемом интервале температура вычисляется по формуле $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 1380$ К, $a = -15$ К/мин², $b = 165$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1800 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.

B11 Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 + 4x^2 + 4x + 7$ на отрезке $[-5; -1]$.

B12 В понедельник акции компании подорожали на некоторое число процентов, а во вторник подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 2,25% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала выполняемого задания (C1, C2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите уравнение $(2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x) \cdot \log_3(\operatorname{tg} x) = 0$.

C2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 3, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1 .

C3 Решите неравенство $\frac{\log_x 3x^{-1} \cdot \log_x 3x^2}{\log_{3x} x \cdot \log_{3x^{-2}} x} < 180$.

C4 Точки A , B и C лежат на сторонах соответственно KL , LM и KM треугольника KLM , причём $KABC$ — параллелограмм, площадь которого составляет $\frac{3}{8}$ площади треугольника KLM . Найдите диагональ AC параллелограмма, если известно, что $KL = 8$, $KM = 12$ и $\cos \angle LKM = \frac{7}{12}$.

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y = \sqrt{12 + 4x - x^2} + 2, \\ y = \sqrt{16 - a^2 + 2ax - x^2} + a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

C6 Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1200, и

- а) пять;
- б) четыре;
- в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Вариант № 403

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике даётся 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом (В1–В12) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (С1–С6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий вы сможете вернуться, если у вас останется время.

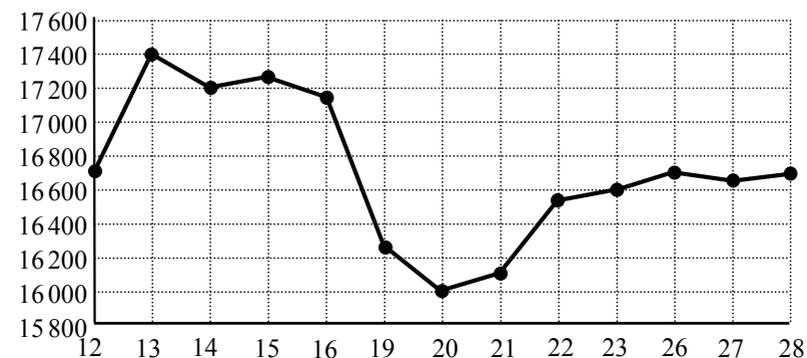
Желаем успеха!

Часть 1

Ответом к заданиям этой части (В1–В12) является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак минус и запятую пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

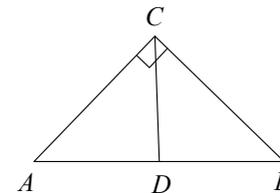
В1 В доме, в котором живёт Аня, один подъезд. На каждом этаже по шесть квартир. Аня живёт в квартире 39. На каком этаже живёт Аня?

В2 На рисунке жирными точками показана цена олова на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 12 по 28 ноября 2007 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны олова в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена олова на момент закрытия торгов составила 16 600 долларов США за тонну.



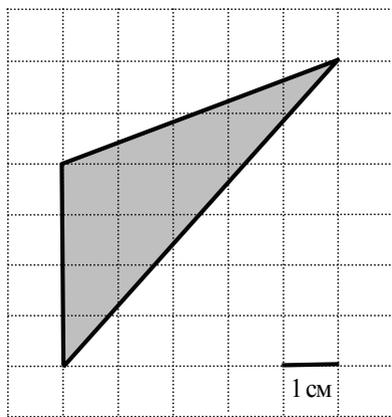
В3 Найдите корень уравнения $\log_2(4 - x) = 9$.

В4 В треугольнике ABC CD — медиана, угол C равен 90° , угол B равен 44° . Найдите угол ACD . Ответ дайте в градусах.



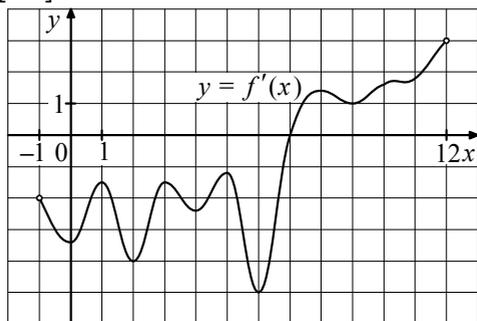
B5 В первом банке один фунт стерлингов можно купить за 47,1 рубля. Во втором банке 15 фунтов — за 651 рубль. В третьем банке 25 фунтов стоят 1130 рублей. Какую наименьшую сумму (в рублях) придётся заплатить за 10 фунтов стерлингов?

B6 Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

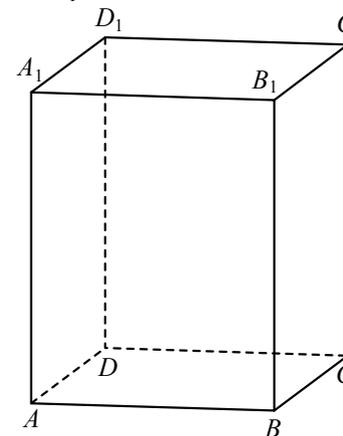


B7 Найдите значение выражения $12 \cos 150^\circ \cdot \sin 120^\circ$.

B8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-1; 12)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[4; 8]$.



B9 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, D, A_1, B, C, B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 4, AD = 6, AA_1 = 5$.



B10 Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально. На исследуемом интервале температура вычисляется по формуле $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 1330$ К, $a = -15$ К/мин², $b = 165$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1600 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.

B11 Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 + 6x^2 + 9x - 5$ на отрезке $[-5; -2]$.

B12 В понедельник акции компании подорожали на некоторое число процентов, а во вторник подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 9% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите уравнение $(2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x) \cdot \log_7(\operatorname{tg} x) = 0$.

C2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 7, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1 .

C3 Решите неравенство $\frac{\log_x 2x^{-2} \cdot \log_x 2x^3}{\log_{2x^2} x \cdot \log_{2x^{-3}} x} < 84$.

C4 Точки E , H и F лежат на сторонах соответственно PQ , QR и PR треугольника PQR , причём $PEHF$ — параллелограмм, площадь которого составляет $\frac{12}{25}$ площади треугольника PQR . Найдите диагональ EF параллелограмма, если известно, что $PQ = 10$, $PR = 15$ и $\cos \angle QPR = \frac{2}{9}$.

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y = \sqrt{16 + 6x - x^2} + 3, \\ y = \sqrt{25 - a^2 + 2ax - x^2} + a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

C6 Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 2800, и

- а) пять;
- б) четыре;
- в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Вариант № 404

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике даётся 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом (В1–В12) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (С1–С6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий вы сможете вернуться, если у вас останется время.

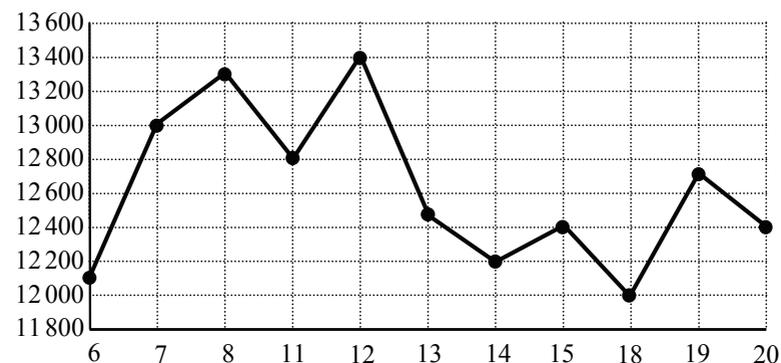
Желаем успеха!

Часть 1

Ответом к заданиям этой части (В1–В12) является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак минус и запятую пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

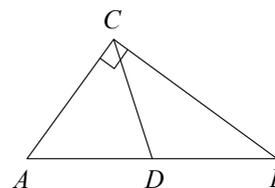
В1 В доме, в котором живёт Ира, один подъезд. На каждом этаже по девять квартир. Ира живёт в квартире 49. На каком этаже живёт Ира?

В2 На рисунке жирными точками показана цена никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 6 по 20 мая 2009 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны никеля в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена никеля равнялась 12 800 долларам США за тонну.



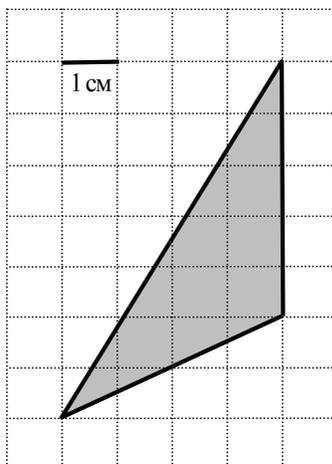
В3 Найдите корень уравнения $\log_6(5 - x) = 2$.

В4 В треугольнике ABC CD — медиана, угол C равен 90° , угол B равен 36° . Найдите угол ACD . Ответ дайте в градусах.



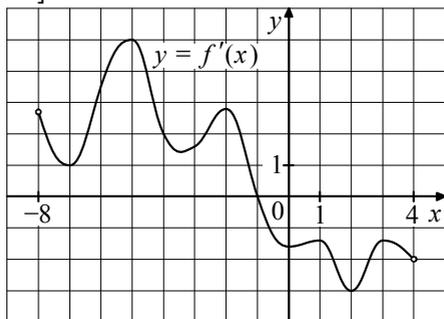
B5 В первом банке один фунт стерлингов можно купить за 43,5 рубля. Во втором банке 15 фунтов — за 696 рублей. В третьем банке 18 фунтов стоят 765 рублей. Какую наименьшую сумму (в рублях) придётся заплатить за 10 фунтов стерлингов?

B6 Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

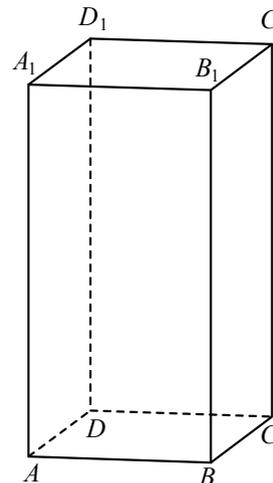


B7 Найдите значение выражения $24 \cos 150^\circ \cdot \sin 120^\circ$.

B8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 4)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-3; 1]$.



B9 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, D, A_1, B, C, B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 3, AD = 5, AA_1 = 6$.



B10 Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально. На исследуемом интервале температура вычисляется по формуле $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 700$ К, $a = -15$ К/мин², $b = 210$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1300 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.

B11 Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 10$ на отрезке $[0; 3]$.

B12 В понедельник акции компании подорожали на некоторое число процентов, а во вторник подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 12,25% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала выполняемого задания (C1, C2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите уравнение $(\sqrt{3} \cos x - 2 \cos^2 x) \cdot \log_5(-\operatorname{tg} x) = 0$.

C2 В правильной треугольной призме $ABC_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 6, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1 .

C3 Решите неравенство $\frac{\log_x 5x^{-1} \cdot \log_x 5x^3}{\log_{5x} x \cdot \log_{5x^{-3}} x} < 105$.

C4 Точки P , R и Q лежат на сторонах соответственно EF , FG и EG треугольника EFG , причём $EPRQ$ — параллелограмм, площадь которого составляет $\frac{8}{25}$ площади треугольника EFG . Найдите диагональ PQ параллелограмма, если известно, что $EF = 15$, $EG = 10$ и $\angle FEG = 60^\circ$.

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y = \sqrt{-5 + 6x - x^2} + 3, \\ y = \sqrt{4 - a^2 - 2ax - x^2} - a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

C6 Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 648, и

- а) пять;
 - б) четыре;
 - в) три
- из них образуют геометрическую прогрессию?

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $(\sqrt{3} \sin x - 2 \sin^2 x) \cdot \log_6(-\operatorname{tg} x) = 0$.

Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $\operatorname{tg} x < 0$.

Если $\log_6(-\operatorname{tg} x) = 0$, то $\operatorname{tg} x = -1$, откуда $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Если $\log_6(-\operatorname{tg} x) \neq 0$, то $\sqrt{3} \sin x - 2 \sin^2 x = 0$, откуда $\sin x = 0$ или $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решения уравнения $\sin x = 0$ не являются корнями исходного уравнения.

Учитывая, что $\operatorname{tg} x < 0$, из уравнения $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ получаем:

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

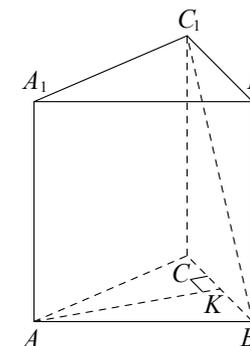
Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно найдены все значения переменной x , при которых равен нулю один из сомножителей левой части исходного уравнения. Возможно отбор найденных значений или не произведён, или произведён неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C2 В правильной треугольной призме $ABC A_1 B_1 C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1 .

Решение.

Так как прямая BC_1 пересекается с прямой BB_1 , параллельной прямой AA_1 , и лежит в плоскости BCC_1 , параллельной AA_1 , то расстояние между прямыми AA_1 и BC_1 равно расстоянию от прямой AA_1 до плоскости BCC_1 .



Пусть AK — высота треугольника ABC . AK перпендикулярна BB_1 , так как BB_1 перпендикулярна плоскости ABC . Таким образом, искомое расстояние — длина отрезка AK . Из равностороннего треугольника ABC находим:

$$AK = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C3 Решите неравенство $\frac{\log_x 2x^{-1} \cdot \log_x 2x^2}{\log_{2x} x \cdot \log_{2x^{-2}} x} < 40$.

Решение.

Решение будем искать при условиях: $x > 0, x \neq \frac{1}{2}, x \neq 1, x \neq \sqrt{2}$.

Для таких x получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\log_x 2x^{-1} \cdot \log_x 2x^2}{\log_{2x} x \cdot \log_{2x^{-2}} x} &= \frac{(\log_x 2 + \log_x x^{-1})(\log_x 2 + \log_x x^2)}{\frac{1}{\log_x 2 + \log_x x} \cdot \frac{1}{\log_x 2 + \log_x x^{-2}}} = \\ &= (\log_x 2 - 2) \cdot (\log_x 2 - 1) \cdot (\log_x 2 + 1) \cdot (\log_x 2 + 2). \end{aligned}$$

Пусть $t = \log_x 2$. Тогда

$$(t-2)(t-1)(t+1)(t+2) < 40; (t^2-4)(t^2-1) < 40; t^4 - 5t^2 - 36 < 0;$$

$$(t^2-9)(t^2+4) < 0; -3 < t < 3.$$

Значит, $-3 < \log_x 2 < 3$, откуда $0 < x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $x > \sqrt[3]{2}$.

Учитывая условия, получаем: $0 < x < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $\sqrt[3]{2} < x < \sqrt{2}$, $x > \sqrt{2}$.

Ответ: $(0; \frac{1}{2})$; $(\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$; $(\sqrt[3]{2}; \sqrt{2})$; $(\sqrt{2}; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного конечным количеством значений переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	2
Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам или верно найдены все значения переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

C4 Точки M , K и N лежат на сторонах соответственно AB , BC и AC треугольника ABC , причём $AMKN$ — параллелограмм, площадь которого составляет $\frac{4}{9}$ площади треугольника ABC . Найдите диагональ MN параллелограмма, если известно, что $AB = 21$, $AC = 12$ и $\angle BAC = 120^\circ$.

Решение.

Пусть площадь треугольника ABC равна S , а $\frac{BK}{BC} = k$. Тогда треугольник MBK подобен треугольнику ABC с коэффициентом k , а треугольник NKC — с коэффициентом $1-k$.

$$S = S_{AMKN} + S_{MBK} + S_{NKC}; S = \frac{4}{9}S + k^2S + (1-k)^2S; k^2 - k + \frac{2}{9} = 0,$$

откуда получаем: $k = \frac{2}{3}$ или $k = \frac{1}{3}$.

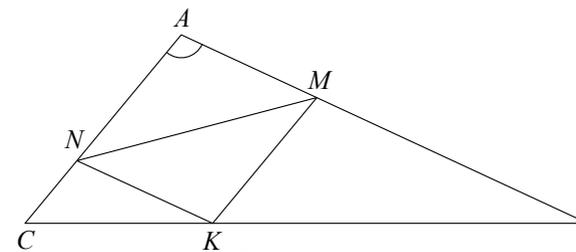


Рис. 1

В первом случае (рис. 1): $AM = NK = \frac{1}{3}AB = 7$; $AN = MK = \frac{2}{3}AC = 8$.

Следовательно, $MN = \sqrt{AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cdot \cos 120^\circ} = 13$.

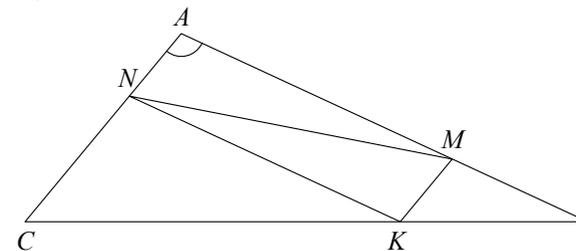


Рис. 2

Во втором случае (рис. 2): $AM = NK = \frac{2}{3}AB = 14$; $AN = MK = \frac{1}{3}AC = 4$.

Следовательно, $MN = \sqrt{AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cdot \cos 120^\circ} = 2\sqrt{67}$.

Ответ: 13 или $2\sqrt{67}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y = \sqrt{5 + 4x - x^2} + 2, \\ y = \sqrt{9 - a^2 + 2ax - x^2} + a \end{cases}$$

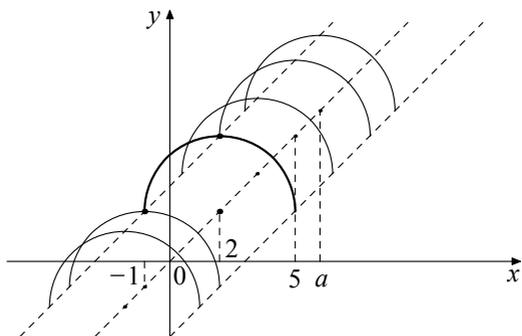
имеет единственное решение.

Решение.

Система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда графики функций $y = \sqrt{5 + 4x - x^2} + 2$ и $y = a + \sqrt{4 - a^2 + 2ax - x^2}$ имеют единственную общую точку.

Первое уравнение запишем в виде $y - 2 = \sqrt{9 - (x - 2)^2}$, то есть $(y - 2)^2 + (x - 2)^2 = 9$ при $y \geq 2$.

Эти условия задают верхнюю полуокружность с центром (2; 2) и радиусом 3.



Второе уравнение запишем в виде $y - a = \sqrt{9 - (x - a)^2}$, то есть $(x - a)^2 + (y - a)^2 = 9$ при $y \geq a$.

Эти условия задают верхнюю полуокружность с центром (a; a) и радиусом 3.

При $a = 2$ полуокружности совпадают.

При $a < -1$, $a > 5$ полуокружности не имеют общих точек.

При $-1 \leq a \leq 5$, $a \neq 2$, они имеют единственную общую точку.

Ответ: $-1 \leq a < 2$; $2 < a \leq 5$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но – или ответ отличается от верного конечным числом значений параметра; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен хотя бы один промежуток значений параметра, одна из границ которого верная	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения двух полуокружностей; – или квадратного уравнения с параметром	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

С6

Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 720, и

- а) пять;
 - б) четыре;
 - в) три
- из них образуют геометрическую прогрессию?

Решение.

а) Покажем, что пяти чисел, образующих геометрическую прогрессию быть не может. Действительно, пусть такие пять чисел найдутся. Обозначим первый член прогрессии b_1 , а знаменатель прогрессии q . Тогда $720 = b_1 \cdot b_1 q \cdot b_1 q^2 \cdot b_1 q^3 \cdot b_1 q^4 = b_1^5 q^{10} = (b_1 q^2)^5$, то есть 720 является пятой степенью. Противоречие.

б) Покажем, что четырёх чисел, образующих геометрическую прогрессию, быть не может. Пусть среди натуральных чисел, дающих в произведении 720, есть четыре целых числа, образующих геометрическую прогрессию. Обозначим первый член прогрессии b_1 , а знаменатель прогрессии $q = \frac{m}{n} > 1$ (m, n — взаимно простые числа, причём $m > 1$). Тогда произведение этих четырёх чисел будет являться делителем числа 720.

Заметим, что произведение чисел равно $\frac{b_1^4 m^6}{n^6}$. Так как числа m, n взаимно просты, простые множители числа m будут входить в состав произведения чисел в той степени, в которой они входят в число $b_1^4 m^6$, то есть как минимум в шестой степени. Однако $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$, то есть простых множителей, входящих в шестой степени, в составе этого числа нет.

в) Приведём пример пяти чисел, произведение которых равно 720, среди которых есть три, образующих геометрическую прогрессию: 1, 2, 4, 6, 15.

Ответ: а) нет; б) нет; в) да.

Содержание критерия	Баллы
Верно выполнены: а), б), в)	4
Верно выполнены б) и один пункт из двух: а), в)	3
Верно выполнено б) или а) и в)	2
Верно выполнен один пункт из двух: а), в)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $(2 \cos^2 x + \sqrt{3} \cos x) \cdot \log_3(\operatorname{tg} x) = 0$.

Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $\operatorname{tg} x > 0$.

Если $\log_3(\operatorname{tg} x) = 0$, то $\operatorname{tg} x = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Если $\log_3(\operatorname{tg} x) \neq 0$, то $2 \cos^2 x + \sqrt{3} \cos x = 0$, откуда $\cos x = 0$ или $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решения уравнения $\cos x = 0$ не являются корнями исходного уравнения.

Учитывая, что $\operatorname{tg} x > 0$, из уравнения $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ получаем:

$$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

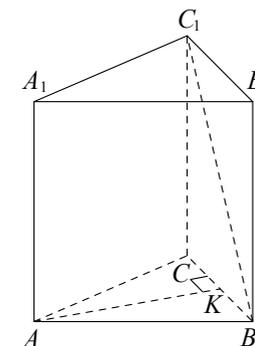
Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно найдены все значения переменной x , при которых равен нулю один из сомножителей левой части исходного уравнения. Возможно отбор найденных значений или не произведён, или произведён неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C2 В правильной треугольной призме $ABC A_1 B_1 C_1$, все рёбра которой равны 3, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1 .

Решение.

Так как прямая BC_1 пересекается с прямой BB_1 , параллельной прямой AA_1 , и лежит в плоскости BCC_1 , параллельной AA_1 , то расстояние между прямыми AA_1 и BC_1 равно расстоянию от прямой AA_1 до плоскости BCC_1 .



Пусть AK — высота треугольника ABC . AK перпендикулярна BB_1 , так как BB_1 перпендикулярна плоскости ABC . Таким образом, искомое расстояние — длина отрезка AK . Из равностороннего треугольника ABC находим:

$$AK = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C3 Решите неравенство $\frac{\log_x 3x^{-1} \cdot \log_x 3x^2}{\log_{3x} x \cdot \log_{3x^{-2}} x} < 180$.

Решение.

Решение будем искать при условиях: $x > 0, x \neq \frac{1}{3}, x \neq 1, x \neq \sqrt{3}$.

Для таких x получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\log_x 3x^{-1} \cdot \log_x 3x^2}{\log_{3x} x \cdot \log_{3x^{-2}} x} &= \frac{(\log_x 3 + \log_x x^{-1})(\log_x 3 + \log_x x^2)}{\frac{1}{\log_x 3 + \log_x x} \cdot \frac{1}{\log_x 3 + \log_x x^{-2}}} = \\ &= (\log_x 3 - 2) \cdot (\log_x 3 - 1) \cdot (\log_x 3 + 1) \cdot (\log_x 3 + 2). \end{aligned}$$

Пусть $t = \log_x 3$. Тогда

$$(t-2)(t-1)(t+1)(t+2) < 180; (t^2-4)(t^2-1) < 180; t^4 - 5t^2 - 176 < 0;$$

$$(t^2-16)(t^2+11) < 0; -4 < t < 4.$$

Значит, $-4 < \log_x 3 < 4$, откуда $0 < x < \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$, $x > \sqrt[4]{3}$.

Учитывая условия, получаем: $0 < x < \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$, $\sqrt[4]{3} < x < \sqrt{3}$, $x > \sqrt{3}$.

Ответ: $(0; \frac{1}{3})$; $(\frac{1}{3}; \frac{1}{\sqrt[4]{3}})$; $(\sqrt[4]{3}; \sqrt{3})$; $(\sqrt{3}; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного конечным количеством значений переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	2
Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам или верно найдены все значения переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

C4 Точки A , B и C лежат на сторонах соответственно KL , LM и KM треугольника KLM , причём $KABC$ — параллелограмм, площадь которого составляет $\frac{3}{8}$ площади треугольника KLM . Найдите диагональ AC параллелограмма, если известно, что $KL = 8$, $KM = 12$ и $\cos \angle LKM = \frac{7}{12}$.

Решение.

Пусть площадь треугольника KML равна S , а $\frac{MB}{ML} = k$. Тогда треугольник CMB подобен треугольнику KML с коэффициентом k , а треугольник ABL — с коэффициентом $1-k$.

$$S = S_{KCB} + S_{CMB} + S_{ABL}; S = \frac{3}{8}S + k^2S + (1-k)^2S; k^2 - k + \frac{3}{16} = 0,$$

откуда получаем: $k = \frac{1}{4}$ или $k = \frac{3}{4}$.

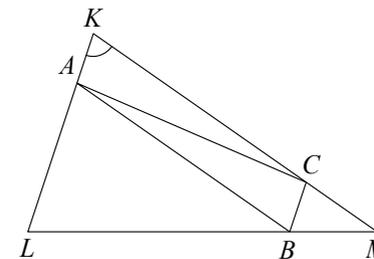


Рис. 1

В первом случае (рис. 1): $AK = BC = \frac{1}{4}KL = 2$; $CK = AB = \frac{3}{4}KM = 9$.

Следовательно, $AC = \sqrt{AK^2 + CK^2 - 2AK \cdot CK \cdot \cos \angle LKM} = 8$.

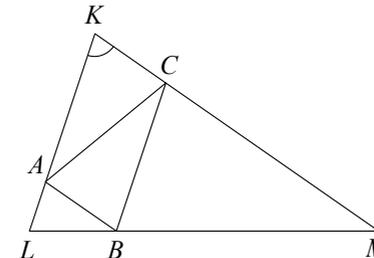


Рис. 2

Во втором случае (рис. 2): $AK = BC = \frac{3}{4}KL = 6$; $CK = AB = \frac{1}{4}KM = 3$.

Следовательно, $AC = \sqrt{AK^2 + CK^2 - 2AK \cdot CK \cdot \cos \angle LKM} = 2\sqrt{6}$.

Ответ: 8 или $2\sqrt{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y = \sqrt{12 + 4x - x^2} + 2, \\ y = \sqrt{16 - a^2 + 2ax - x^2} + a \end{cases}$$

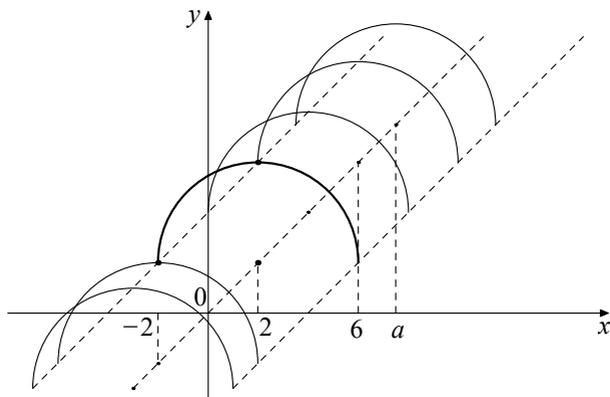
имеет единственное решение.

Решение.

Система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда графики функций $y = \sqrt{12 + 4x - x^2} + 2$ и $y = a + \sqrt{16 - a^2 + 2ax - x^2}$ имеют единственную общую точку.

Первое уравнение запишем в виде $y - 2 = \sqrt{16 - (x - 2)^2}$, то есть $(y - 2)^2 + (x - 2)^2 = 16$ при $y \geq 2$.

Эти условия задают верхнюю полуокружность с центром (2; 2) и радиусом 4.



Второе уравнение запишем в виде $y - a = \sqrt{16 - (x - a)^2}$, то есть $(x - a)^2 + (y - a)^2 = 16$ при $y \geq a$.

Эти условия задают верхнюю полуокружность с центром (a; a) и радиусом 4.

При $a = 2$ полуокружности совпадают.

При $a < -2, a > 6$ полуокружности не имеют общих точек.

При $-2 \leq a \leq 6, a \neq 2$, они имеют единственную общую точку.

Ответ: $-2 \leq a < 2; 2 < a \leq 6$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но – или ответ отличается от верного конечным числом значений параметра; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен хотя бы один промежуток значений параметра, одна из границ которого верная	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения двух полуокружностей; – или квадратного уравнения с параметром	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

С6

Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1200, и

- а) пять;
 - б) четыре;
 - в) три
- из них образуют геометрическую прогрессию?

Решение.

а) Покажем, что пяти чисел, образующих геометрическую прогрессию быть не может. Действительно, пусть такие пять чисел найдутся. Обозначим первый член прогрессии b_1 , а знаменатель прогрессии q . Тогда $1200 = b_1 \cdot b_1q \cdot b_1q^2 \cdot b_1q^3 \cdot b_1q^4 = b_1^5 q^{10} = (b_1q^2)^5$, то есть 1200 является пятой степенью. Противоречие.

б) Покажем, что четырёх чисел, образующих геометрическую прогрессию, быть не может. Пусть среди натуральных чисел, дающих в произведении 1200, есть четыре целых числа, образующих геометрическую прогрессию. Обозначим первый член прогрессии b_1 , а знаменатель прогрессии $q = \frac{m}{n} > 1$ (m, n — взаимно простые числа, причём $m > 1$). Тогда произведение этих четырёх чисел будет являться делителем числа 1200.

Заметим, что произведение чисел равно $\frac{b_1^4 m^6}{n^6}$. Так как числа m, n взаимно просты, простые множители числа m будут входить в состав произведения чисел в той степени, в которой они входят в число $b_1^4 m^6$, то есть как минимум в шестой степени. Однако $1200 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$, то есть простых множителей, входящих в шестой степени, в составе этого числа нет.

в) Приведём пример пяти чисел, произведение которых равно 1200, среди которых есть три, образующих геометрическую прогрессию: 1, 2, 4, 10, 15.

Ответ: а) нет; б) нет; в) да.

Содержание критерия	Баллы
Верно выполнены: а), б), в)	4
Верно выполнены б) и один пункт из двух: а), в)	3
Верно выполнено б) или а) и в)	2
Верно выполнен один пункт из двух: а), в)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $(2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x) \cdot \log_7(\operatorname{tg} x) = 0$.

Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $\operatorname{tg} x > 0$.

Если $\log_7(\operatorname{tg} x) = 0$, то $\operatorname{tg} x = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Если $\log_7(\operatorname{tg} x) \neq 0$, то $2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x = 0$, откуда $\sin x = 0$ или $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решения уравнения $\sin x = 0$ не являются корнями исходного уравнения.

Учитывая, что $\operatorname{tg} x > 0$, из уравнения $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ получаем:

$$x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

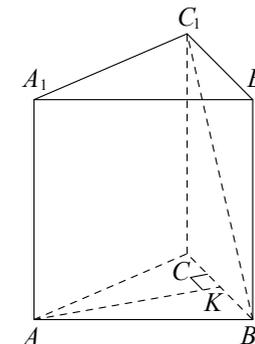
Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно найдены все значения переменной x , при которых равен нулю один из сомножителей левой части исходного уравнения. Возможно отбор найденных значений или не произведён, или произведён неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C2 В правильной треугольной призме $ABC A_1 B_1 C_1$, все рёбра которой равны 7, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1 .

Решение.

Так как прямая BC_1 пересекается с прямой BB_1 , параллельной прямой AA_1 , и лежит в плоскости BCC_1 , параллельной AA_1 , то расстояние между прямыми AA_1 и BC_1 равно расстоянию от прямой AA_1 до плоскости BCC_1 .



Пусть AK — высота треугольника ABC . AK перпендикулярна BB_1 , так как BB_1 перпендикулярна плоскости ABC . Таким образом, искомое расстояние — длина отрезка AK . Из равностороннего треугольника ABC находим:

$$AK = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 7 = \frac{7\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{7\sqrt{3}}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C3 Решите неравенство $\frac{\log_x 2x^{-2} \cdot \log_x 2x^3}{\log_{2x^2} x \cdot \log_{2x^{-3}} x} < 84$.

Решение.

Решение будем искать при условиях: $x > 0, x \neq \frac{1}{\sqrt{2}}, x \neq 1, x \neq \sqrt[3]{2}$.

Для таких x получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\log_x 2x^{-2} \cdot \log_x 2x^3}{\log_{2x^2} x \cdot \log_{2x^{-3}} x} &= \frac{(\log_x 2 + \log_x x^{-2})(\log_x 2 + \log_x x^3)}{\frac{1}{\log_x 2 + \log_x x^2} \cdot \frac{1}{\log_x 2 + \log_x x^{-3}}} = \\ &= (\log_x 2 - 3) \cdot (\log_x 2 - 2) \cdot (\log_x 2 + 2) \cdot (\log_x 2 + 3). \end{aligned}$$

Пусть $t = \log_x 2$. Тогда

$$(t-3)(t-2)(t+2)(t+3) < 84; (t^2-9)(t^2-4) < 84; t^4-13t^2-48 < 0;$$

$$(t^2-16)(t^2+3) < 0; -4 < t < 4.$$

Значит, $-4 < \log_x 2 < 4$, откуда $0 < x < \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$, $x > \sqrt[4]{2}$.

Учитывая условия, получаем: $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$,

$$\sqrt[4]{2} < x < \sqrt[3]{2}, x > \sqrt[3]{2}.$$

Ответ: $(0; \frac{1}{\sqrt{2}})$; $(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt[4]{2}})$; $(\sqrt[4]{2}; \sqrt[3]{2})$; $(\sqrt[3]{2}; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного конечным количеством значений переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	2
Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам или верно найдены все значения переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

C4 Точки E , H и F лежат на сторонах соответственно PQ , QR и PR треугольника PQR , причём $PEHF$ — параллелограмм, площадь которого составляет $\frac{12}{25}$ площади треугольника PQR . Найдите диагональ EF параллелограмма, если известно, что $PQ=10$, $PR=15$ и $\cos \angle QPR = \frac{2}{9}$.

Решение.

Пусть площадь треугольника PRQ равна S , а $\frac{RH}{RQ} = k$. Тогда треугольник FRH подобен треугольнику PRQ с коэффициентом k , а треугольник EHQ — с коэффициентом $1-k$.

$$S = S_{PFHE} + S_{FRH} + S_{EHQ}; S = \frac{12}{25}S + k^2S + (1-k)^2S; k^2 - k + \frac{6}{25} = 0,$$

откуда получаем: $k = \frac{2}{5}$ или $k = \frac{3}{5}$.

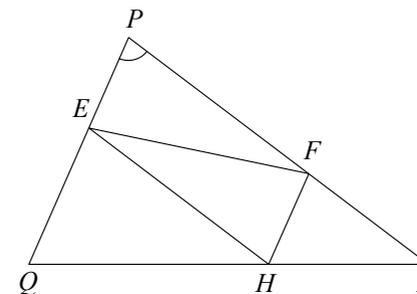


Рис. 1

В первом случае (рис. 1): $PE = FH = \frac{2}{5}PQ = 4$; $PF = EH = \frac{3}{5}PR = 9$.

Следовательно, $EF = \sqrt{PE^2 + PF^2 - 2PE \cdot PF \cdot \cos \angle QPR} = 9$.

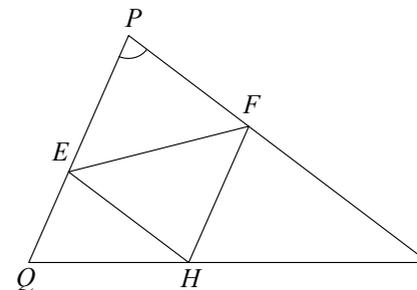


Рис. 2

Во втором случае (рис. 2): $PE = FH = \frac{3}{5}PQ = 6$; $PF = EH = \frac{2}{5}PR = 6$.

Следовательно, $EF = \sqrt{PE^2 + PF^2 - 2PE \cdot PF \cdot \cos \angle QPR} = 2\sqrt{14}$.

Ответ: 9 или $2\sqrt{14}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y = \sqrt{16 + 6x - x^2} + 3, \\ y = \sqrt{25 - a^2 + 2ax - x^2} + a \end{cases}$$

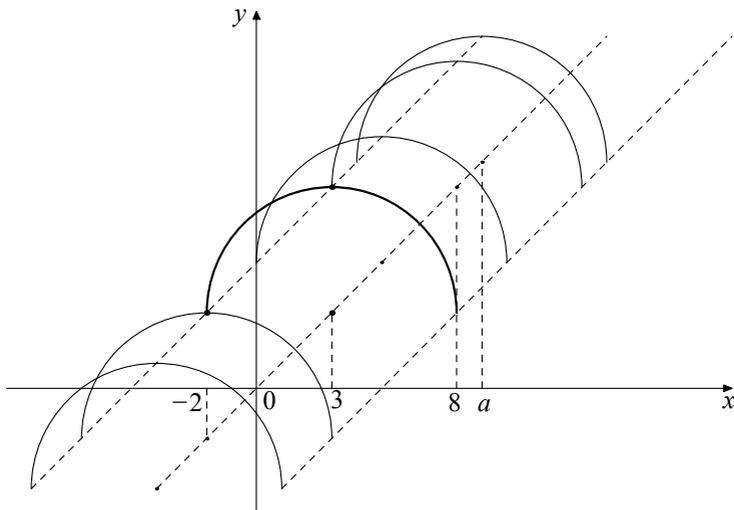
имеет единственное решение.

Решение.

Система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда графики функций $y = \sqrt{16 + 6x - x^2} + 3$ и $y = a + \sqrt{25 - a^2 + 2ax - x^2}$ имеют единственную общую точку.

Первое уравнение запишем в виде $y - 3 = \sqrt{25 - (x - 3)^2}$, то есть $(y - 3)^2 + (x - 3)^2 = 25$ при $y \geq 3$.

Эти условия задают верхнюю полуокружность с центром (3; 3) и радиусом 5.



Второе уравнение запишем в виде $y - a = \sqrt{25 - (x - a)^2}$, то есть $(x - a)^2 + (y - a)^2 = 25$ при $y \geq a$.

Эти условия задают верхнюю полуокружность с центром $(a; a)$ и радиусом 5.

При $a = 3$ полуокружности совпадают.

При $a < -2$, $a > 8$ полуокружности не имеют общих точек.

При $-2 \leq a \leq 8$, $a \neq 3$, они имеют единственную общую точку.

Ответ: $-2 \leq a < 3$; $3 < a \leq 8$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но – или ответ отличается от верного конечным числом значений параметра; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен хотя бы один промежуток значений параметра, одна из границ которого верная	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения двух полуокружностей; – или квадратного уравнения с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	4

C6 Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 2800, и
а) пять;
б) четыре;
в) три
из них образуют геометрическую прогрессию?

Решение.

а) Покажем, что пяти чисел, образующих геометрическую прогрессию быть не может. Действительно, пусть такие пять чисел найдутся. Обозначим первый член прогрессии b_1 , а знаменатель прогрессии q . Тогда $2800 = b_1 \cdot b_1 q \cdot b_1 q^2 \cdot b_1 q^3 \cdot b_1 q^4 = b_1^5 q^{10} = (b_1 q^2)^5$, то есть 2800 является пятой степенью. Противоречие.

б) Покажем, что четырёх чисел, образующих геометрическую прогрессию, быть не может. Пусть среди натуральных чисел, дающих в произведении 2800, есть четыре целых числа, образующих геометрическую прогрессию. Обозначим первый член прогрессии b_1 , а знаменатель прогрессии $q = \frac{m}{n} > 1$ (m, n — взаимно простые числа, причём $m > 1$). Тогда произведение этих четырёх чисел будет являться делителем числа 2800.

Заметим, что произведение чисел равно $\frac{b_1^4 m^6}{n^6}$. Так как числа m, n взаимно просты, простые множители числа m будут входить в состав произведения чисел в той степени, в которой они входят в число $b_1^4 m^6$, то есть как минимум в шестой степени. Однако $2800 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 7$, то есть простых множителей, входящих в шестой степени, в составе этого числа нет.

в) Приведём пример пяти чисел, произведение которых равно 2800, среди которых есть три, образующих геометрическую прогрессию: 1, 2, 4, 10, 35.

Ответ: а) нет; б) нет; в) да.

Содержание критерия	Баллы
Верно выполнены: а), б), в)	4
Верно выполнены б) и один пункт из двух: а), в)	3
Верно выполнено б) или а) и в)	2
Верно выполнен один пункт из двух: а), в)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $(\sqrt{3} \cos x - 2 \cos^2 x) \cdot \log_5(-\operatorname{tg} x) = 0$.

Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $\operatorname{tg} x < 0$.

Если $\log_5(-\operatorname{tg} x) = 0$, то $\operatorname{tg} x = -1$, откуда $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Если $\log_5(-\operatorname{tg} x) \neq 0$, то $\sqrt{3} \cos x - 2 \cos^2 x = 0$, откуда $\cos x = 0$ или $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решения уравнения $\cos x = 0$ не являются корнями исходного уравнения.

Учитывая, что $\operatorname{tg} x < 0$, из уравнения $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ получаем:

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

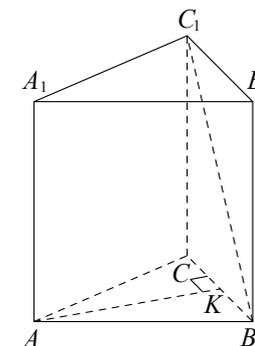
Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно найдены все значения переменной x , при которых равен нулю один из сомножителей левой части исходного уравнения. Возможно отбор найденных значений или не произведён, или произведён неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C2 В правильной треугольной призме $ABC A_1 B_1 C_1$, все рёбра которой равны 6, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1 .

Решение.

Так как прямая BC_1 пересекается с прямой BB_1 , параллельной прямой AA_1 , и лежит в плоскости BCC_1 , параллельной AA_1 , то расстояние между прямыми AA_1 и BC_1 равно расстоянию от прямой AA_1 до плоскости BCC_1 .



Пусть AK — высота треугольника ABC . AK перпендикулярна BB_1 , так как BB_1 перпендикулярна плоскости ABC . Таким образом, искомое расстояние — длина отрезка AK . Из равностороннего треугольника ABC находим:

$$AK = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 3\sqrt{3}.$$

Ответ: $3\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C3 Решите неравенство $\frac{\log_x 5x^{-1} \cdot \log_x 5x^3}{\log_{5x} x \cdot \log_{5x^{-3}} x} < 105$.

Решение.

Решение будем искать при условиях: $x > 0, x \neq \frac{1}{5}, x \neq 1, x \neq \sqrt[3]{5}$.

Для таких x получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\log_x 5x^{-1} \cdot \log_x 5x^3}{\log_{5x} x \cdot \log_{5x^{-3}} x} &= \frac{(\log_x 5 + \log_x x^{-1})(\log_x 5 + \log_x x^3)}{\frac{1}{\log_x 5 + \log_x x} \cdot \frac{1}{\log_x 5 + \log_x x^{-3}}} = \\ &= (\log_x 5 - 3) \cdot (\log_x 5 - 1) \cdot (\log_x 5 + 1) \cdot (\log_x 5 + 3). \end{aligned}$$

Пусть $t = \log_x 5$. Тогда

$$(t-3)(t-1)(t+1)(t+3) < 105; (t^2-9)(t^2-1) < 105; t^4 - 10t^2 - 96 < 0;$$

$$(t^2-16)(t^2+6) < 0; -4 < t < 4.$$

Значит, $-4 < \log_x 5 < 4$, откуда $0 < x < \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$, $x > \sqrt[4]{5}$.

Учитывая условия, получаем: $0 < x < \frac{1}{5}$, $\frac{1}{5} < x < \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$, $\sqrt[4]{5} < x < \sqrt[3]{5}$, $x > \sqrt[3]{5}$.

Ответ: $(0; \frac{1}{5})$; $(\frac{1}{5}; \frac{1}{\sqrt[4]{5}})$; $(\sqrt[4]{5}; \sqrt[3]{5})$; $(\sqrt[3]{5}; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного конечным количеством значений переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	2
Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам или верно найдены все значения переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

C4 Точки P , R и Q лежат на сторонах соответственно EF , FG и EG треугольника EFG , причём $EPRQ$ — параллелограмм, площадь которого составляет $\frac{8}{25}$ площади треугольника EFG . Найдите диагональ PQ параллелограмма, если известно, что $EF = 15$, $EG = 10$ и $\angle FEG = 60^\circ$.

Решение.

Пусть площадь треугольника EFG равна S , а $\frac{FR}{FG} = k$. Тогда треугольник PFR подобен треугольнику EFG с коэффициентом k , а треугольник QRG — с коэффициентом $1-k$.

$$S = S_{EPRQ} + S_{PFR} + S_{QRG}; S = \frac{8}{25}S + k^2S + (1-k)^2S; k^2 - k + \frac{4}{25} = 0,$$

откуда получаем: $k = \frac{4}{5}$ или $k = \frac{1}{5}$.

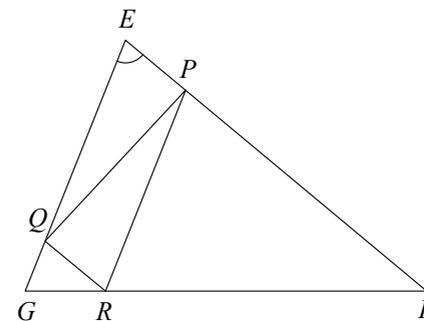


Рис. 1

В первом случае (рис. 1): $EQ = PR = \frac{4}{5}EG = 8$; $EP = QR = \frac{1}{5}EF = 3$.

Следовательно, $PQ = \sqrt{EP^2 + EQ^2 - 2EP \cdot EQ \cdot \cos 60^\circ} = 7$.

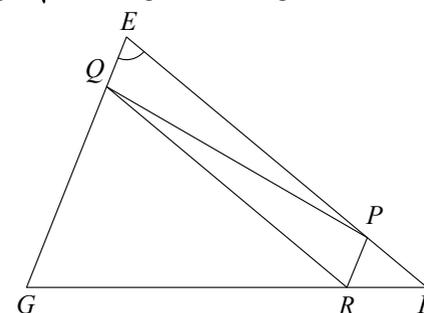


Рис. 2

Во втором случае (рис. 2): $EQ = PR = \frac{1}{5}EG = 2$; $EP = QR = \frac{4}{5}EF = 12$.

Следовательно, $PQ = \sqrt{EP^2 + EQ^2 - 2EP \cdot EQ \cdot \cos 60^\circ} = 2\sqrt{31}$.

Ответ: 7 или $2\sqrt{31}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y = \sqrt{-5 + 6x - x^2} + 3, \\ y = \sqrt{4 - a^2 - 2ax - x^2} - a \end{cases}$$

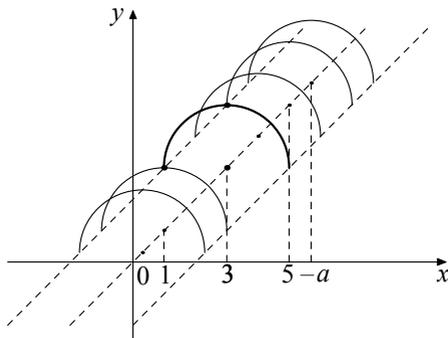
имеет единственное решение.

Решение.

Система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда графики функций $y = \sqrt{-5 + 6x - x^2} + 3$ и $y = -a + \sqrt{4 - a^2 - 2ax - x^2}$ имеют единственную общую точку.

Первое уравнение запишем в виде $y - 3 = \sqrt{4 - (x - 3)^2}$, то есть $(y - 3)^2 + (x - 3)^2 = 4$ при $y \geq 3$.

Эти условия задают верхнюю полуокружность с центром $(3; 3)$ и радиусом 2.



Второе уравнение запишем в виде $y + a = \sqrt{4 - (x + a)^2}$, то есть $(x + a)^2 + (y + a)^2 = 4$ при $y \geq -a$.

Эти условия задают верхнюю полуокружность с центром $(-a; -a)$ и радиусом 2.

При $a = -3$ полуокружности совпадают.

При $a < -5$, $a > -1$ полуокружности не имеют общих точек.

При $-5 \leq a \leq -1$, $a \neq -3$, они имеют единственную общую точку.

Ответ: $-5 \leq a < -3$; $-3 < a \leq -1$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но – или ответ отличается от верного конечным числом значений параметра; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен хотя бы один промежуток значений параметра, одна из границ которого верная	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения двух полуокружностей; – или квадратного уравнения с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	4

C6 Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 648, и

- пять;
 - четыре;
 - три
- из них образуют геометрическую прогрессию?

Решение.

а) Покажем, что пяти чисел, образующих геометрическую прогрессию быть не может. Действительно, пусть такие пять чисел найдутся. Обозначим первый член прогрессии b_1 , а знаменатель прогрессии q . Тогда $648 = b_1 \cdot b_1 q \cdot b_1 q^2 \cdot b_1 q^3 \cdot b_1 q^4 = b_1^5 q^{10} = (b_1 q^2)^5$, то есть 648 является пятой степенью. Противоречие.

б) Покажем, что четырёх чисел, образующих геометрическую прогрессию, быть не может. Пусть среди натуральных чисел, дающих в произведении 648, есть четыре целых числа, образующих геометрическую прогрессию. Обозначим первый член прогрессии b_1 , а знаменатель прогрессии $q = \frac{m}{n} > 1$ (m, n — взаимно простые числа, причём $m > 1$). Тогда произведение этих четырёх чисел будет являться делителем числа 648.

Заметим, что произведение чисел равно $\frac{b_1^4 m^6}{n^6}$. Так как числа m, n взаимно просты, простые множители числа m будут входить в состав произведения чисел в той степени, в которой они входят в число $b_1^4 m^6$, то есть как минимум в шестой степени. Однако $648 = 2^3 \cdot 3^4$, то есть простых множителей, входящих в шестой степени, в составе этого числа нет.

в) Приведём пример пяти чисел, произведение которых равно 648, среди которых есть три, образующих геометрическую прогрессию: 1, 3, 9, 6, 4.

Ответ: а) нет; б) нет; в) да.

Содержание критерия	Баллы
Верно выполнены: а), б), в)	4
Верно выполнены б) и один пункт из двух: а), в)	3
Верно выполнено б) или а) и в)	2
Верно выполнен один пункт из двух: а), в)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Памятка для эксперта, проверяющего решения заданий С1–С6 по математике

Эксперт, проверяющий работу, располагает критериями оценивания решений заданий С1–С6, включающими:

- 1) формулировку задания с развёрнутым ответом;
- 2) одно из возможных решений задания;
- 3) содержание критерия.

Следует помнить, что, проверяя решения заданий с развёрнутым ответом, эксперт оценивает математическую грамотность представленного решения. Эксперт не должен предъявлять особых требований к форме записи и к степени подробности решения, но в то же время должен следить за правильностью и обоснованностью математических утверждений, используемых экзаменуемым.

Максимальный балл за задания:

- С1 – 2 балла,
- С2 – 2 балла,
- С3 – 3 балла.
- С4 – 3 балла,
- С5 – 4 балла,
- С6 – 4 балла.

Если экзаменуемый не приступал к задаче, то в протокол ставится «х».

Если же экзаменуемый приступил к выполнению задания (даже если только переписал условие или написал номер задания), то решение должно быть оценено в соответствии с критериями проверки соответствующего задания.

В распечатанные изображения работ эксперт имеет право вносить любые пометки, помогающие объективной оценке решения задания (эти листы больше не сканируются, а подлежат уничтожению в РЦОИ).

По каждой из шести задач эксперт обязательно заносит в протокол одну из меток: «х», «0», «1», «2», «3», «4» в соответствии с образцом написания меток.

Результаты оценивания заносятся в протокол проверки следующим образом:

- баллы по С1 переносятся в колонку 1 протокола;
- баллы по С2 переносятся в колонку 2 протокола;
- баллы по С3 переносятся в колонку 3 протокола;
- баллы по С4 переносятся в колонку 4 протокола;
- баллы по С5 переносятся в колонку 5 протокола;
- баллы по С6 переносятся в колонку 6 протокола.

Оставшиеся колонки протокола не заполняются.