Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Вариант № 501

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике даётся 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом (B1–B12) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1–C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий вы сможете вернуться, если у вас останется время.

Желаем успеха!

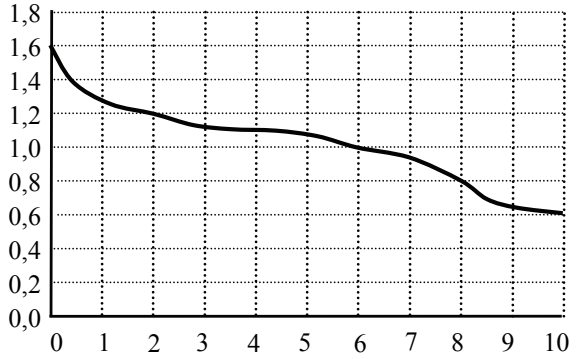
© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Часть 1

Ответом к заданиям этой части (B1–B12) является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

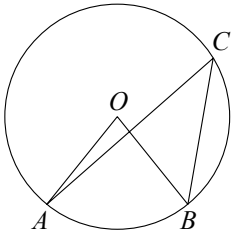
B1 Аня купила проездной билет на месяц и сделала за месяц 30 поездок. Сколько рублей она сэкономила, если проездной билет на месяц стоит 515 рублей, а разовая поездка — 22 рубля?

B2 При работе фонарика батарейка постепенно разряжается, и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На рисунке показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечается время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по рисунку, какое напряжение будет в цепи через 8 часов работы фонарика. Ответ дайте в вольтах.



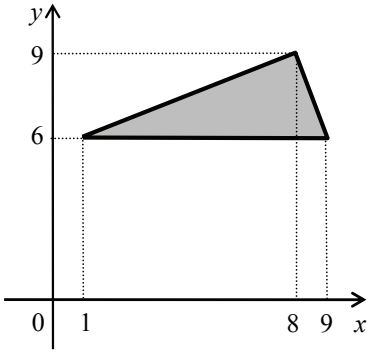
B3 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{13-x} = 64$.

B4 Найдите центральный угол AOB, если он на 39° больше вписанного угла ACB, опирающегося на ту же дугу. Ответ дайте в градусах.



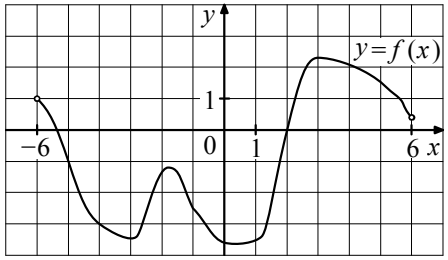
B5 В среднем гражданин А. в дневное время расходует 120 кВт·ч электроэнергии в месяц, а в ночное время — 185 кВт·ч. Раньше у А. в квартире был установлен однотарифный счётчик, и всю электроэнергию он оплачивал по тарифу 2,40 руб. за кВт·ч. Год назад А. установил двухтарифный счётчик, при этом дневной расход электроэнергии оплачивается по тарифу 2,40 руб. за кВт·ч, а ночной расход оплачивается по тарифу 0,60 руб. за кВт·ч.
В течение 12 месяцев режим потребления и тарифы оплаты электроэнергии не менялись. На сколько больше заплатил бы А. за этот период, если бы не поменял счётчик? Ответ дайте в рублях.

B6 Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты $(1;6)$, $(9;6)$, $(8;9)$.

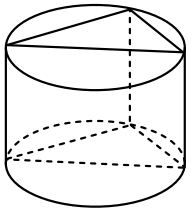


B7 Найдите значение выражения $\left(3^{\log_2 3}\right)^{\log_3 2}$.

B8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6;6)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -5$.



B9 Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник с катетами 8 и 7. Боковые рёбра равны $\frac{4}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.



B10 Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально. На исследуемом интервале температура вычисляется по формуле $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 1360$ К, $a = -20$ К/мин^2, $b = 240$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1900 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.

B11 Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 36}$.

B12 Два велосипедиста одновременно отправляются в 99-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 2 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 2 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите уравнение $(\operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3}\operatorname{tg} x)\cdot\sqrt{-5\cos x} = 0$.

C2 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$, стороны основания которой равны 3, а боковые рёбра равны 4, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1.

C3 Решите неравенство $\log_{0,25}(19-9x)\cdot\log_{3-x}0,5 \ge 1$.

C4 Через вершину B правильного шестиугольника $ABCDEF$ проведена прямая, пересекающая диагональ CF в точке K. Известно, что эта прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как $1:2$. Найдите отношение $CK:KF$.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x|-4)^2 + (|y|-4)^2 = 4, \\ y = ax+1, \\ xy > 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

C6 Набор состоит из тридцати трёх натуральных чисел, среди которых есть числа 3, 4 и 5. Среднее арифметическое любых двадцати семи чисел этого набора меньше 2.

а) Может ли такой набор содержать ровно тринадцать единиц?

б) Может ли такой набор содержать менее тринадцати единиц?

в) Докажите, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 28.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Вариант № 505

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике даётся 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом (B1–B12) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1–C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий вы сможете вернуться, если у вас останется время.

Желаем успеха!

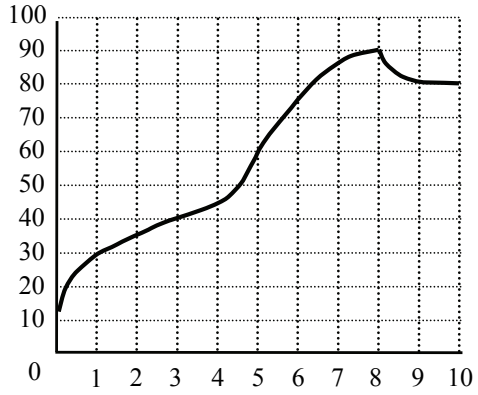
© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Часть 1

Ответом к заданиям этой части (B1–B12) является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

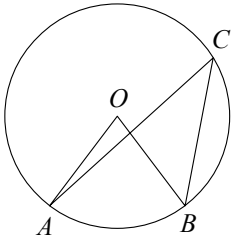
B1 Аня купила проездной билет на месяц и сделала за месяц 31 поездку. Сколько рублей она сэкономила, если проездной билет на месяц стоит 515 рублей, а разовая поездка — 21 рубль?

B2 На графике показан процесс разогрева двигателя легкового автомобиля. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее от запуска двигателя, на оси ординат — температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, сколько минут двигатель нагревался до температуры $90°$.



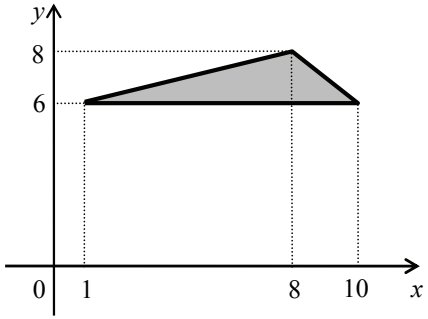
B3 Найдите корень уравнения $2^{3x-7} = \frac{1}{16}$.

B4 Найдите центральный угол AOB, если он на 37° больше вписанного угла ACB, опирающегося на ту же дугу. Ответ дайте в градусах.



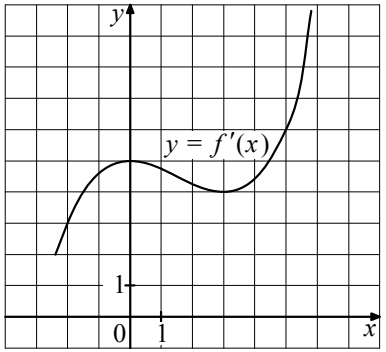
B5 Толя загружает на свой компьютер из Интернета файл размером 34 Мб за 30 секунд. Митя загружает файл размером 42 Мб за 35 секунд, а Костя загружает файл размером 30 Мб за 28 секунд. Сколько секунд будет загружаться файл размером 540 Мб на компьютер с наибольшей скоростью загрузки?

B6 Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты $(1;6)$, $(10;6)$, $(8;8)$.

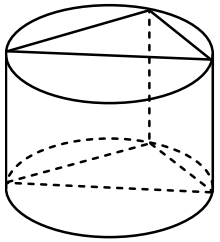


B7 Найдите значение выражения $\dfrac{\log_5 36}{\log_5 6}$.

B8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 3x$ или совпадает с ней.



B9 Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник с катетами 8 и 7. Боковые рёбра равны $\dfrac{4}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.



B10 Скорость автомобиля, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной l км с постоянным ускорением a км/ч^2, вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$. Определите наименьшее ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,4 км, приобрести скорость не менее 120 км/ч. Ответ выразите в км/ч^2.

B11 Найдите точку минимума функции $y = -\dfrac{x}{x^2 + 36}$.

B12 Два велосипедиста одновременно отправляются в 99-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 2 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 2 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите уравнение $(\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}\, x)\cdot\sqrt{8\cos x} = 0$.

C2 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$, стороны основания которой равны 4, а боковые рёбра равны 8, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1.

C3 Решите неравенство $\log_{\frac{1}{36}}(22-3x)\cdot\log_{8-x}\frac{1}{6}\geq 1$.

C4 Через вершину B правильного шестиугольника $ABCDEF$ проведена прямая, пересекающая диагональ CF в точке K. Известно, что эта прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как $2:3$. Найдите отношение $CK:KF$.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(|x|-6)^2+(|y|-6)^2=4,\\ y=ax+1,\\ xy>0\end{cases}$$

имеет единственное решение.

C6 Набор состоит из тридцати девяти натуральных чисел, среди которых есть числа 4, 5 и 7. Среднее арифметическое любых тридцати четырёх чисел этого набора меньше 2.

а) Может ли такой набор содержать ровно шестнадцать единиц?

б) Может ли такой набор содержать менее шестнадцати единиц?

в) Докажите, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 35.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Вариант № 509

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике даётся 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом (B1–B12) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1–C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий вы сможете вернуться, если у вас останется время.

Желаем успеха!

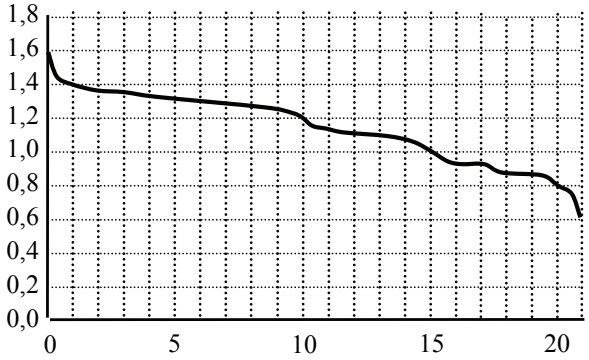
© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Часть 1

Ответом к заданиям этой части (B1–B12) является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

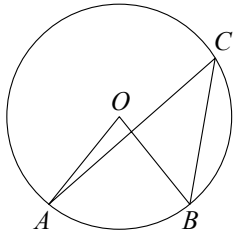
B1 Аня купила проездной билет на месяц и сделала за месяц 46 поездок. Сколько рублей она сэкономила, если проездной билет на месяц стоит 755 рублей, а разовая поездка — 21 рубль?

B2 При работе фонарика батарейка постепенно разряжается, и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На рисунке показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечается время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по рисунку, какое напряжение будет в цепи через 10 часов работы фонарика. Ответ дайте в вольтах.



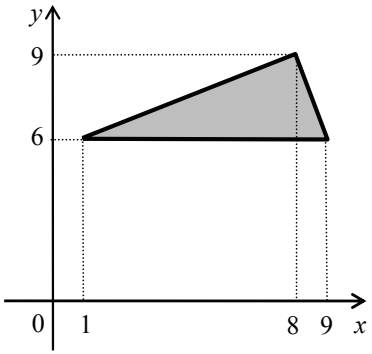
B3 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{13-x} = 64$.

B4 Найдите центральный угол AOB, если он на 39° больше вписанного угла ACB, опирающегося на ту же дугу. Ответ дайте в градусах.



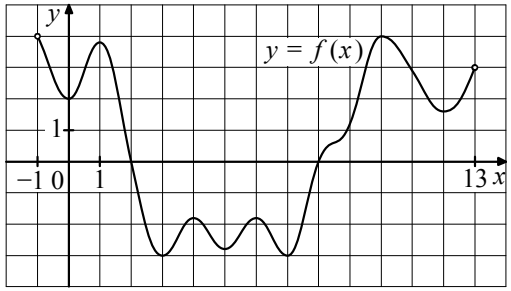
B5 В среднем гражданин А. в дневное время расходует 120 кВт·ч электроэнергии в месяц, а в ночное время — 190 кВт·ч. Раньше у А. в квартире был установлен однотарифный счётчик, и всю электроэнергию он оплачивал по тарифу 2,60 руб. за кВт·ч. Год назад А. установил двухтарифный счётчик, при этом дневной расход электроэнергии оплачивается по тарифу 2,60 руб. за кВт·ч, а ночной расход оплачивается по тарифу 0,80 руб. за кВт·ч.
В течение 12 месяцев режим потребления и тарифы оплаты электроэнергии не менялись. На сколько больше заплатил бы А. за этот период, если бы не поменял счётчик? Ответ дайте в рублях.

B6 Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты $(1;6)$, $(9;6)$, $(8;9)$.

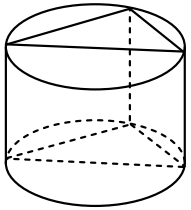


B7 Найдите значение выражения $\left(3^{\log_2 3}\right)^{\log_3 2}$.

B8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-1;13)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 20$.



B9 Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник с катетами 8 и 7. Боковые рёбра равны $\frac{4}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.



B10 Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально. На исследуемом интервале температура вычисляется по формуле $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 1360$ К, $a = -20$ К/мин^2, $b = 240$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1900 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.

B11 Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 16}$.

B12 Два велосипедиста одновременно отправляются в 99-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 2 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 2 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите уравнение $(\operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3}\operatorname{tg} x)\cdot\sqrt{-5\cos x} = 0$.

C2 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$, стороны основания которой равны 8, а боковые рёбра равны 2, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1.

C3 Решите неравенство $\log_{\frac{1}{9}}(7-6x)\cdot\log_{2-x}\frac{1}{3} \geq 1$.

C4 Через вершину C правильного шестиугольника $ABCDEF$ проведена прямая, пересекающая прямую BE в точке P. Известно, что эта прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как $1:17$. Найдите отношение $BP:PE$.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x|-6)^2 + (|y|-6)^2 = 9, \\ y = ax+1, \\ xy > 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

C6 Набор состоит из тридцати трёх натуральных чисел, среди которых есть числа 3, 4 и 5. Среднее арифметическое любых двадцати семи чисел этого набора меньше 2.

а) Может ли такой набор содержать ровно тринадцать единиц?

б) Может ли такой набор содержать менее тринадцати единиц?

в) Докажите, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 28.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Вариант № 513

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике даётся 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом (B1–B12) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1–C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий вы сможете вернуться, если у вас останется время.

Желаем успеха!

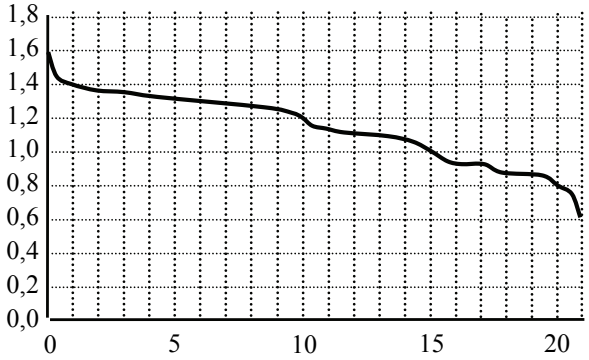
© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Часть 1

Ответом к заданиям этой части (B1–B12) является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

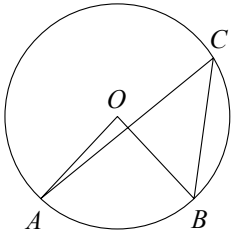
B1 Аня купила проездной билет на месяц и сделала за месяц 30 поездок. Сколько рублей она сэкономила, если проездной билет на месяц стоит 515 рублей, а разовая поездка — 22 рубля?

B2 При работе фонарика батарейка постепенно разряжается, и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На рисунке показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечается время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по рисунку, какое напряжение будет в цепи через 10 часов работы фонарика. Ответ дайте в вольтах.



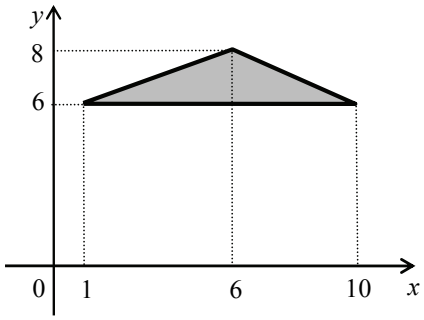
B3 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{11-x} = 128$.

B4 Найдите центральный угол AOB, если он на 43° больше вписанного угла ACB, опирающегося на ту же дугу. Ответ дайте в градусах.



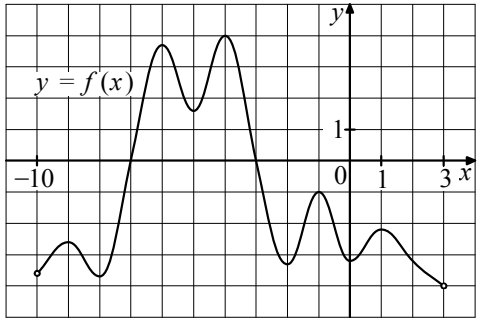
B5 В среднем гражданин А. в дневное время расходует 120 кВт·ч электроэнергии в месяц, а в ночное время — 185 кВт·ч. Раньше у А. в квартире был установлен однотарифный счётчик, и всю электроэнергию он оплачивал по тарифу 2,40 руб. за кВт·ч. Год назад А. установил двухтарифный счётчик, при этом дневной расход электроэнергии оплачивается по тарифу 2,40 руб. за кВт·ч, а ночной расход оплачивается по тарифу 0,60 руб. за кВт·ч.
В течение 12 месяцев режим потребления и тарифы оплаты электроэнергии не менялись. На сколько больше заплатил бы А. за этот период, если бы не поменял счётчик? Ответ дайте в рублях.

B6 Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты $(1;6)$, $(10;6)$, $(6;8)$.

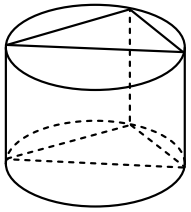


B7 Найдите значение выражения $\left(5^{\log_2 5}\right)^{\log_5 2}$.

B8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-10;3)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -3$.



B9 Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник с катетами 8 и 7. Боковые рёбра равны $\frac{4}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.



B10 Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально. На исследуемом интервале температура вычисляется по формуле $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 1360$ К, $a = -20$ К/мин^2, $b = 240$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1900 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.

B11 Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x}{x^2+16}$.

B12 Два велосипедиста одновременно отправляются в 99-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 2 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 2 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите уравнение $(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}\, x)\cdot\sqrt{3\cos x} = 0$.

C2 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$, стороны основания которой равны 3, а боковые рёбра равны 4, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1.

C3 Решите неравенство $\log_{\frac{1}{9}}(7-6x)\cdot\log_{2-x}\frac{1}{3}\geq 1$.

C4 Через вершину C правильного шестиугольника $ABCDEF$ проведена прямая, пересекающая прямую AD в точке Q. Известно, что эта прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как $5:13$. Найдите отношение $AQ:QD$.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(|x|-5)^2+(|y|-5)^2=4,\\ y=ax+1,\\ xy>0\end{cases}$$

имеет единственное решение.

C6 Набор состоит из тридцати трёх натуральных чисел, среди которых есть числа 3, 4 и 5. Среднее арифметическое любых двадцати семи чисел этого набора меньше 2.

а) Может ли такой набор содержать ровно тринадцать единиц?

б) Может ли такой набор содержать менее тринадцати единиц?

в) Докажите, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 28.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $(\operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3}\operatorname{tg} x)\cdot\sqrt{-5\cos x} = 0$.

Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x < 0$.

Получаем уравнение $\operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3}\operatorname{tg} x = 0$, откуда $\operatorname{tg} x = 0$ или $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

Учитывая, что $\cos x < 0$, из уравнения $\operatorname{tg} x = 0$ получаем: $x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; а из уравнения $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ получаем: $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

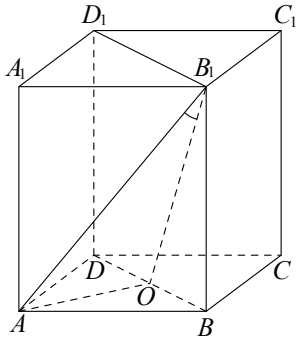
Ответ: $\pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно найдены все значения переменной x, при которых равен нулю первый сомножитель левой части исходного уравнения. Возможно отбор найденных значений или не произведён, или произведён неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$, стороны основания которой равны 3, а боковые рёбра равны 4, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1.

Решение.

Пусть O — середина отрезка BD. Отрезок AO является перпендикуляром, опущенным из точки A на плоскость BDD_1. Угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1 равен углу AB_1O.



© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

В прямоугольном треугольнике AB_1O $AO = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $AB_1 = 5$.

Следовательно, $\sin\angle AB_1O = \frac{3\sqrt{2}}{10}$.

Ответ: $\arcsin\frac{3\sqrt{2}}{10}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Способ нахождения искомого угла верный, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не удовлетворяет ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите неравенство $\log_{0,25}(19-9x)\cdot\log_{3-x}0,5 \ge 1$.

Решение.

Решение будем искать при условиях:

$$\begin{cases} 19-9x>0, \\ 3-x>0, \\ 3-x\ne 1, \end{cases}$$

откуда $x \in (-\infty;\ 2) \cup \left(2;\ \frac{19}{9}\right)$. Для таких x получаем:

$$\frac{\log_{0,25}(19-9x)}{\log_{0,5}(3-x)} = \frac{\log_{0,5}(19-9x)}{2\log_{0,5}(3-x)} = \frac{\log_{0,5}(19-9x)}{\log_{0,5}(3-x)^2}.$$

Исходное неравенство примет вид: $\frac{\log_{0,5}(19-9x)}{\log_{0,5}(3-x)^2} \ge 1$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in (-\infty;\ 2)$, тогда $(3-x)^2 > 1$, откуда $\log_{0,5}(3-x)^2 < 0$, поэтому

$$\log_{0,5}(19-9x) \le \log_{0,5}(3-x)^2;\ 19-9x \ge 9-6x+x^2;\ (x+5)(x-2) \le 0;$$
$$-5 \le x \le 2,$$

откуда $x \in [-5;\ 2)$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in \left(2;\ \frac{19}{9}\right)$, тогда $(3-x)^2 < 1$, откуда $\log_{0,5}(3-x)^2 > 0$, поэтому

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

$$\log_{0,5}(19-9x) \ge \log_{0,5}(3-x)^2;\ 19-9x \le 9-6x+x^2;\ (x+5)(x-2) \ge 0;$$
$$x \le -5,\ x \ge 2,$$

откуда $x \in \left(2;\ \frac{19}{9}\right)$.

Ответ: $[-5;\ 2)$; $\left(2;\ \frac{19}{9}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного конечным количеством значений переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	2
Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам или верно найдены все значения переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Через вершину B правильного шестиугольника $ABCDEF$ проведена прямая, пересекающая диагональ CF в точке K. Известно, что эта прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как $1:2$. Найдите отношение $CK:KF$.

Решение.

Пусть O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$, S — его площадь. Тогда

$$S_{ABEF} = S_{BCDE} = \frac{1}{2}S;\ S_{ABF} = S_{BCD} = \frac{1}{6}S.$$

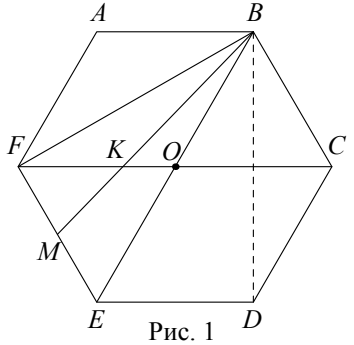


Рис. 1

Рассмотрим случай, когда точка K расположена между точками O и F (рис. 1). Тогда прямая BK пересекает сторону EF в некоторой точке M, причём

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

$$S_{ABMF} = \frac{1}{3}S;\ S_{BMF} = S_{ABMF} - S_{ABF} = \frac{1}{3}S - \frac{1}{6}S = \frac{1}{6}S;$$

$$S_{BME} = S_{ABEF} - S_{ABMF} = \frac{1}{2}S - \frac{1}{3}S = \frac{1}{6}S = S_{BMF}.$$

Треугольники BME и BMF равновеликие, поэтому BM — медиана треугольника BEF. Треугольник BKC подобен треугольнику MKF с коэффициентом 2 $(FM \parallel BC;\ BC = EF = 2MF)$, следовательно, $\frac{CK}{KF} = 2$.

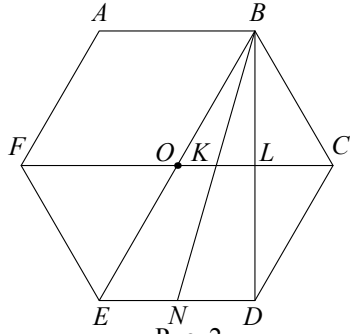


Рис. 2

Пусть теперь точка K лежит между C и O (рис. 2). Тогда прямая BK пересекает сторону DE в некоторой точке N, причём

$$S_{BCDE} = \frac{1}{2}S;\ S_{BCDN} = \frac{1}{3}S;\ S_{BCD} = \frac{1}{6}S;$$

$$S_{BND} = S_{BCDN} - S_{BCD} = \frac{1}{3}S - \frac{1}{6}S = \frac{1}{6}S;$$

$$S_{BNE} = S_{BCDE} - S_{BCDN} = \frac{1}{2}S - \frac{1}{3}S = \frac{1}{6}S = S_{BND}.$$

Треугольники BNE и BND равновеликие, поэтому BN — медиана треугольника BDE.

Пусть диагонали CF и BD пересекаются в точке L. Тогда L — середина OC, OL — средняя линия треугольника BDE, а так как N — середина DE, то K — середина OL. Обозначим $OK = z$. Тогда

$$CL = OL = 2z;\ CK = CL + LK = 3z;\ OF = OC = 4z;\ KF = OK + OF = 5z.$$

Следовательно, $\frac{CK}{KF} = \frac{3}{5}$.

Ответ: 2 или $\frac{3}{5}$.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

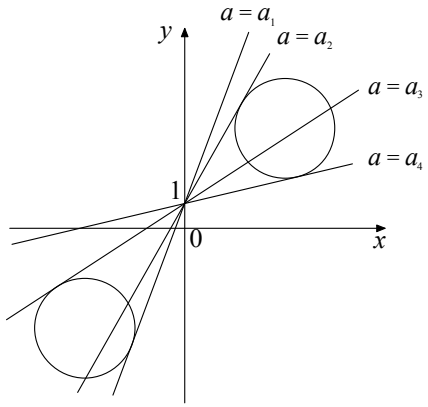
C5 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \left(|x|-4\right)^2+\left(|y|-4\right)^2=4, \\ y=ax+1, \\ xy>0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Первое уравнение при условии $xy>0$ задаёт на плоскости две окружности радиуса 2 с центрами $(4;4)$ и $(-4;-4)$, а второе — прямую l с угловым коэффициентом a, проходящую через точку $(0;1)$ (см. рис.).



Прямая l касается окружности с центром в точке $(-4;-4)$ радиуса 2 тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} y=ax+1, \\ (x+4)^2+(y+4)^2=4 \end{cases} \qquad (1)$$

имеет единственное решение. Для этого необходимо, чтобы квадратное уравнение

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

$$(x+4)^2+(ax+1+4)^2=4$$

имело единственное решение. Приведём уравнение к виду

$$\left(a^2+1\right)x^2+2(5a+4)x+37=0$$

и из равенства нулю дискриминанта получим:

$$(5a+4)^2-37\left(a^2+1\right)=0,$$

откуда $12a^2-40a+21=0$.

Значит, $a_1=\dfrac{10+\sqrt{37}}{6}$, $a_3=\dfrac{10-\sqrt{37}}{6}$. Система (1) имеет решения только при $\dfrac{10-\sqrt{37}}{6}\le a\le\dfrac{10+\sqrt{37}}{6}$.

Аналогично, прямая l касается окружности с центром в точке $(4;4)$ радиуса 2 тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} y=ax+1, \\ (x-4)^2+(y-4)^2=4 \end{cases} \qquad (2)$$

имеет единственное решение. Для этого необходимо, чтобы квадратное уравнение

$$(x-4)^2+(ax+1-4)^2=4$$

имело единственное решение. Приведём уравнение к виду

$$\left(a^2+1\right)x^2-2(3a+4)x+21=0$$

и из равенства нулю дискриминанта получим:

$$(3a+4)^2-21\left(a^2+1\right)=0,$$

откуда $12a^2-24a+5=0$.

Значит, $a_2=\dfrac{6+\sqrt{21}}{6}$, $a_4=\dfrac{6-\sqrt{21}}{6}$. Система (2) имеет решения только при $\dfrac{6-\sqrt{21}}{6}\le a\le\dfrac{6+\sqrt{21}}{6}$.

Так как $\dfrac{6-\sqrt{21}}{6}<\dfrac{10-\sqrt{37}}{6}<\dfrac{6+\sqrt{21}}{6}<\dfrac{10+\sqrt{37}}{6}$, в ответ попадают только $a_4=\dfrac{6-\sqrt{21}}{6}$ и $a_1=\dfrac{10+\sqrt{37}}{6}$.

Ответ: $\dfrac{6-\sqrt{21}}{6}$; $\dfrac{10+\sqrt{37}}{6}$.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но – или в ответ включено также и одно-два неверных значений; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения окружностей и прямой; – или квадратных уравнений с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6

Набор состоит из тридцати трёх натуральных чисел, среди которых есть числа 3, 4 и 5. Среднее арифметическое любых двадцати семи чисел этого набора меньше 2.

а) Может ли такой набор содержать ровно тринадцать единиц?

б) Может ли такой набор содержать менее тринадцати единиц?

в) Докажите, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 28.

Решение.

а) Да, может. Например, сумма любых двадцати семи чисел из набора $5,\ 4,\ 3,\ \underbrace{2,\ldots,\ 2}_{17},\ \underbrace{1,\ldots,\ 1}_{13}$ не больше, чем $5+4+3+2\cdot 17+7=53$, и их среднее арифметическое меньше 2.

б) Нет, не может. Выпишем все числа слева направо в порядке убывания и рассмотрим первые 27 чисел, считая слева. Их сумма S меньше 54. Пусть количество единиц среди них равно x. Тогда

$$53 \ge S \ge x + 2(24-x) + 3 + 4 + 5,\ \ x \ge 7,$$

то есть среди выбранных 27 чисел всегда есть семь единиц. Каждое из оставшихся шести чисел равно 1, и поэтому во всём наборе есть как минимум тринадцать единиц.

в) Используя тринадцать единиц и числа 3, 4, 5, можно составить все суммы от 1 до 25.

Если среди оставшихся семнадцати чисел есть число от 3 до 27, то его можно добавить и получить в сумме 28.

Если среди оставшихся семнадцати чисел нет чисел от 3 до 27, то каждое из них или равно 1, или равно 2, или больше 27. Так как сумма этих семнадцати чисел не больше 53, то только одно из чисел может быть больше 27. Значит, в этом случае как минимум шестнадцать чисел равны 1

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

или 2. Используя их и тринадцать единиц, всегда можно получить сумму, равную 28.

Ответ: а) да, б) нет.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Решение в целом верное, содержит: – или верный пример для п. а) и обоснованное выполнение п. в); – или верный пример для п. а), обоснованное выполнение п. б), а ход доказательства п. в) в целом верный, но содержит легко устранимые неточности	3
Решение содержит: – или верный пример для п. а) и обоснованное выполнение п. б); – или обоснованное выполнение п. в) (при не выполненных п. а) и п. б)	2
Решение содержит: – или верный пример для п. а); – или обоснованное выполнение п. б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}\,x)\cdot\sqrt{3\cos x} = 0$.

Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x > 0$.

Получаем уравнение $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}\,x = 0$, откуда $\mathrm{tg}\,x = 0$ или $\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Учитывая, что $\cos x > 0$, из уравнения $\mathrm{tg}\,x = 0$ получаем: $x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; а из уравнения $\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ получаем: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

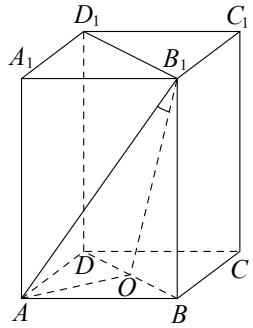
Ответ: $2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно найдены все значения переменной x, при которых равен нулю первый сомножитель левой части исходного уравнения. Возможно отбор найденных значений или не произведён, или произведён неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$, стороны основания которой равны 5, а боковые рёбра равны 7, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1.

Решение.

Пусть O — середина отрезка BD. Отрезок AO является перпендикуляром, опущенным из точки A на плоскость BDD_1. Угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1 равен углу AB_1O.



© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

В прямоугольном треугольнике AB_1O $AO = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, $AB_1 = \sqrt{74}$.

Следовательно, $\sin\angle AB_1O = \frac{5\sqrt{37}}{74}$.

Ответ: $\arcsin\frac{5\sqrt{37}}{74}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Способ нахождения искомого угла верный, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не удовлетворяет ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите неравенство $\log_{\frac{1}{9}}(7-6x)\cdot\log_{2-x}\frac{1}{3} \ge 1$.

Решение.

Решение будем искать при условиях:

$$\begin{cases} 7-6x>0, \\ 2-x>0, \\ 2-x\ne 1, \end{cases}$$

откуда $x \in (-\infty;\ 1) \cup \left(1;\ \frac{7}{6}\right)$. Для таких x получаем:

$$\frac{\log_{\frac{1}{9}}(7-6x)}{\log_{\frac{1}{3}}(2-x)} = \frac{\log_{\frac{1}{3}}(7-6x)}{2\log_{\frac{1}{3}}(2-x)} = \frac{\log_{\frac{1}{3}}(7-6x)}{\log_{\frac{1}{3}}(2-x)^2}.$$

Исходное неравенство примет вид: $\frac{\log_{\frac{1}{3}}(7-6x)}{\log_{\frac{1}{3}}(2-x)^2} \ge 1$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in (-\infty;\ 1)$, тогда $(2-x)^2 > 1$, откуда $\log_{\frac{1}{3}}(2-x)^2 < 0$, поэтому

$$\log_{\frac{1}{3}}(7-6x) \le \log_{\frac{1}{3}}(2-x)^2;\ 7-6x \ge 4-4x+x^2;\ (x+3)(x-1) \le 0;\ -3 \le x \le 1,$$

откуда $x \in [-3;\ 1)$.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in \left(1;\ \frac{7}{6}\right)$, тогда $(2-x)^2 < 1$, откуда $\log_{\frac{1}{3}}(2-x)^2 > 0$, поэтому

$$\log_{\frac{1}{3}}(7-6x) \ge \log_{\frac{1}{3}}(2-x)^2;\ 7-6x \le 4-4x+x^2;\ (x+3)(x-1) \ge 0;$$

$$x \le -3,\ x \ge 1,$$

откуда $x \in \left(1;\ \frac{7}{6}\right)$.

Ответ: $[-3;\ 1)$; $\left(1;\ \frac{7}{6}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного конечным количеством значений переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	2
Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам или верно найдены все значения переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Через вершину A правильного шестиугольника $ABCDEF$ проведена прямая, пересекающая прямую CF в точке K. Известно, что эта прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как $1:11$. Найдите отношение $CK:KF$.

Решение.

Пусть O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$, S — его площадь, L — точка пересечения диагоналей AE и CF. Площади частей, на которые прямая AK разбивает шестиугольник, равны $\frac{1}{12}S$ и $\frac{11}{12}S$.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

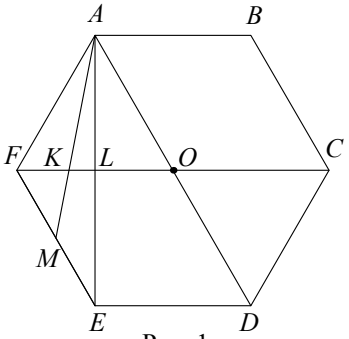


Рис. 1

Предположим, что точка F — вершина меньшей по площади части шестиугольника (рис. 1). Тогда точка K лежит между точками F и L, так как

$$S_{AEF} = \frac{1}{6}S > \frac{1}{12}S,$$

значит, прямая AK пересекает сторону EF в некоторой точке M. При этом треугольники AMF и AME равновеликие, значит, AM — медиана треугольника AEF, а так как FL — также медиана этого треугольника, то K — точка пересечения его медиан, поэтому $KF = 2KL$.

Обозначим $KL = a$. Тогда

$$KF = 2a;\ OL = LF = 3a;\ OC = OF = 2OL = 6a;$$

$$CK = OC + OL + KL = 10a.$$

Следовательно, $\frac{CK}{KF} = 5$.

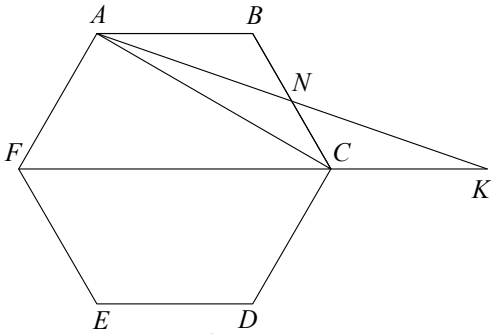


Рис. 2

Пусть теперь точка F — вершина большей по площади части шестиугольника (рис. 2). Тогда точка K лежит на продолжении диагонали CF за точку C, так как

$$S_{ABC} = \frac{1}{6}S > \frac{1}{12}S,$$

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

значит, прямая AK пересекает сторону BC в некоторой точке N. При этом треугольники ANB и ANC равновеликие, значит, AN — медиана треугольника ABC.

Треугольники ABN и KCN равны по стороне и двум прилежащим к ней углам $(CK \parallel AB)$. Обозначим $AB = b$. Тогда

$$CK = AB = b;\ CF = 2AB = 2b;\ KF = CK + CF = 3b.$$

Следовательно, $\dfrac{CK}{KF} = \dfrac{1}{3}$.

Ответ: 5 или $\dfrac{1}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых система

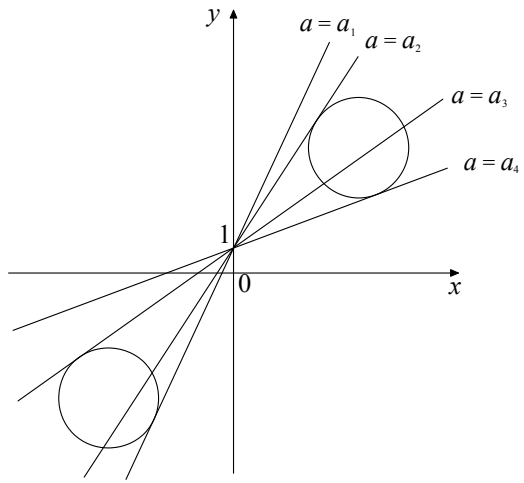
$$\begin{cases} \left(|x|-5\right)^2 + \left(|y|-5\right)^2 = 4, \\ y = ax + 1, \\ xy > 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Первое уравнение при условии $xy > 0$ задаёт на плоскости две окружности радиуса 2 с центрами $(5;5)$ и $(-5;-5)$, а второе — прямую l с угловым коэффициентом a, проходящую через точку $(0;1)$ (см. рис.).

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**



Прямая l касается окружности с центром в точке $(-5;-5)$ радиуса 2 тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} y = ax + 1, \\ (x+5)^2 + (y+5)^2 = 4 \end{cases} \qquad (1)$$

имеет единственное решение. Для этого необходимо, чтобы квадратное уравнение

$$(x+5)^2 + (ax+1+5)^2 = 4$$

имело единственное решение. Приведём уравнение к виду

$$\left(a^2+1\right)x^2 + 2(6a+5) + 57 = 0$$

и из равенства нулю дискриминанта получим:

$$(6a+5)^2 - 57\left(a^2+1\right) = 0,$$

откуда $21a^2 - 60a + 32 = 0$.

Значит, $a_1 = \dfrac{30+2\sqrt{57}}{21}$, $a_3 = \dfrac{30-2\sqrt{57}}{21}$. Система (1) имеет решения только при $\dfrac{30-2\sqrt{57}}{21} \le a \le \dfrac{30+2\sqrt{57}}{21}$.

Аналогично, прямая l касается окружности с центром в точке $(5;5)$ радиуса 2 тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} y = ax + 1, \\ (x-5)^2 + (y-5)^2 = 4 \end{cases} \qquad (2)$$

имеет единственное решение. Для этого необходимо, чтобы квадратное уравнение

$$(x-5)^2 + (ax+1-5)^2 = 4$$

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

имело единственное решение. Приведём уравнение к виду

$$\left(a^2+1\right)x^2-2\left(4a+5\right)+37=0$$

и из равенства нулю дискриминанта получим:

$$\left(4a+5\right)^2-37\left(a^2+1\right)=0,$$

откуда $21a^2-40a+12=0$.

Значит, $a_2=\frac{20+2\sqrt{37}}{21}$, $a_4=\frac{20-2\sqrt{37}}{21}$. Система (2) имеет решения только при $\frac{20-2\sqrt{37}}{21}\le a\le\frac{20+2\sqrt{37}}{21}$.

Так как $\frac{20-2\sqrt{37}}{21}<\frac{30-2\sqrt{57}}{21}<\frac{20+2\sqrt{37}}{21}<\frac{30+2\sqrt{57}}{21}$, в ответ попадают только $a_4=\frac{20-2\sqrt{37}}{21}$ и $a_1=\frac{30+2\sqrt{57}}{21}$.

Ответ: $\frac{20-2\sqrt{37}}{21}$; $\frac{30+2\sqrt{57}}{21}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но – или в ответ включено также и одно-два неверных значений; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения окружностей и прямой; – или квадратных уравнений с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Набор состоит из тридцати семи натуральных чисел, среди которых есть числа 3, 4 и 6. Среднее арифметическое любых тридцати чисел этого набора меньше 2.

а) Может ли такой набор содержать ровно пятнадцать единиц?

б) Может ли такой набор содержать менее пятнадцати единиц?

в) Докажите, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 31.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Решение.

а) Да, может. Например, сумма любых тридцати чисел из набора $6,\ 4,\ 3,\ \underbrace{2,\dots,\ 2}_{19},\ \underbrace{1,\dots,\ 1}_{15}$ не больше, чем $6+4+3+2\cdot19+8=59$, и их среднее арифметическое меньше 2.

б) Нет, не может. Выпишем все числа слева направо в порядке убывания и рассмотрим первые 30 чисел, считая слева. Их сумма S меньше 60. Пусть количество единиц среди них равно x. Тогда

$$59\ge S\ge x+2(27-x)+3+4+6;\ x\ge8,$$

то есть среди выбранных 30 чисел всегда есть восемь единиц. Каждое из оставшихся семи чисел равно 1, и поэтому во всём наборе есть как минимум пятнадцать единиц.

в) Используя пятнадцать единиц и числа 3, 4, 6, можно составить все суммы от 1 до 28.

Если среди оставшихся девятнадцати чисел есть число от 3 до 30, то его можно добавить и получить в сумме 31.

Если среди оставшихся девятнадцати чисел нет чисел от 3 до 30, то каждое из них или равно 1, или равно 2, или больше 30. Так как сумма этих девятнадцати чисел не больше 59, то только одно из чисел может быть больше 30. Значит, в этом случае как минимум восемнадцать чисел равны 1 или 2. Используя их и пятнадцать единиц, всегда можно получить сумму, равную 31.

Ответ: а) да, б) нет.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Решение в целом верное, содержит: – или верный пример для п. а) и обоснованное выполнение п. в); – или верный пример для п. а), обоснованное выполнение п. б), а ход доказательства п. в) в целом верный, но содержит легко устранимые неточности	3
Решение содержит: – или верный пример для п. а) и обоснованное выполнение п. б); – или обоснованное выполнение п. в) (при не выполненных п. а) и п. б)	2
Решение содержит: – или верный пример для п. а); – или обоснованное выполнение п. б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $(\operatorname{tg}^2 x+\sqrt{3}\operatorname{tg} x)\cdot\sqrt{7\cos x}=0$.

Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x>0$.

Получаем уравнение $\operatorname{tg}^2 x+\sqrt{3}\operatorname{tg} x=0$, откуда $\operatorname{tg} x=0$ или $\operatorname{tg} x=-\sqrt{3}$.

Учитывая, что $\cos x>0$, из уравнения $\operatorname{tg} x=0$ получаем: $x=2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; а из уравнения $\operatorname{tg} x=-\sqrt{3}$ получаем: $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

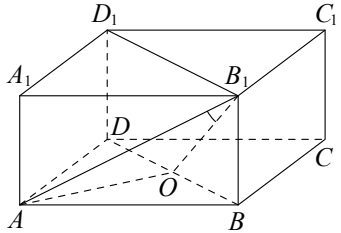
Ответ: $2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}; -\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно найдены все значения переменной x, при которых равен нулю первый сомножитель левой части исходного уравнения. Возможно отбор найденных значений или не произведён, или произведён неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$, стороны основания которой равны 8, а боковые рёбра равны 2, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1.

Решение.

Пусть O — середина отрезка BD. Отрезок AO является перпендикуляром, опущенным из точки A на плоскость BDD_1. Угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1 равен углу AB_1O.



В прямоугольном треугольнике AB_1O $AO=4\sqrt{2}$, $AB_1=2\sqrt{17}$. Следовательно, $\sin\angle AB_1O=\frac{2\sqrt{34}}{17}$.

Ответ: $\arcsin\frac{2\sqrt{34}}{17}$.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Способ нахождения искомого угла верный, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не удовлетворяет ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите неравенство $\log_{\frac{1}{16}}(53-13x)\cdot\log_{5-x}0{,}25\ge 1$.

Решение.

Решение будем искать при условиях:

$$\begin{cases}53-13x>0,\\5-x>0,\\5-x\ne 1,\end{cases}$$

откуда $x\in(-\infty;\ 4)\cup\left(4;\ \frac{53}{13}\right)$. Для таких x получаем:

$$\frac{\log_{\frac{1}{16}}(53-13x)}{\log_{\frac{1}{4}}(5-x)}=\frac{\log_{\frac{1}{4}}(53-13x)}{2\log_{\frac{1}{4}}(5-x)}=\frac{\log_{\frac{1}{4}}(53-13x)}{\log_{\frac{1}{4}}(5-x)^2}.$$

Исходное неравенство примет вид: $\frac{\log_{\frac{1}{4}}(53-13x)}{\log_{\frac{1}{4}}(5-x)^2}\ge 1$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x\in(-\infty;\ 4)$, тогда $(5-x)^2>1$, откуда $\log_{\frac{1}{4}}(5-x)^2<0$, поэтому

$$\log_{\frac{1}{4}}(53-13x)\le\log_{\frac{1}{4}}(5-x)^2;\ 53-13x\ge 25-10x+x^2;\ (x+7)(x-4)\le 0;$$

$$-7\le x\le 4,$$

откуда $x\in[-7;\ 4)$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x\in\left(4;\ \frac{53}{13}\right)$, тогда $(5-x)^2<1$, откуда $\log_{\frac{1}{4}}(5-x)^2>0$, поэтому

$$\log_{\frac{1}{4}}(53-13x)\ge\log_{\frac{1}{4}}(5-x)^2;\ 53-13x\le 25-10x+x^2;\ (x+7)(x-4)\ge 0;$$

$$x\le -7,\ x\ge 4,$$

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

откуда $x \in \left(4;\ \frac{53}{13}\right)$.

Ответ: $[-7;\ 4)$; $\left(4;\ \frac{53}{13}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного конечным количеством значений переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	2
Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам или верно найдены все значения переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Через вершину C правильного шестиугольника $ABCDEF$ проведена прямая, пересекающая прямую BE в точке P. Известно, что эта прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как $1:17$. Найдите отношение $BP:PE$.

Решение.

Пусть O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$, S — его площадь, H — точка пересечения диагоналей BE и AC. Площади частей, на которые прямая CP разбивает шестиугольник, равны $\frac{1}{18}S$ и $\frac{17}{18}S$.

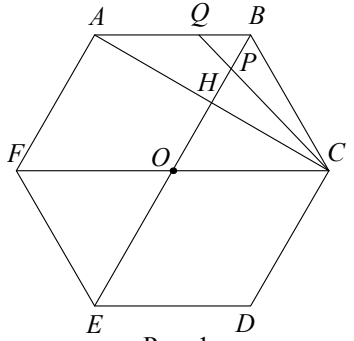


Рис. 1

Предположим, что точка B — вершина меньшей по площади части шестиугольника (рис. 1). Тогда точка P лежит между точками B и H, так как

$$S_{ABC} = \frac{1}{6}S > \frac{1}{18}S,$$

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

значит, прямая CP пересекает сторону AB в некоторой точке Q. При этом площадь треугольника BCQ в три раза меньше площади треугольника ABC, значит, $AQ = 2BQ$.

Треугольник OPC подобен треугольнику BPQ с коэффициентом 3 $(OC \parallel BQ;\ OC = AB = 3BQ)$. Обозначим $PB = x$. Тогда

$$OP = 3x;\ OE = OB = 4x;\ PE = OE + OP = 7x.$$

Следовательно, $\frac{BP}{PE} = \frac{1}{7}$.

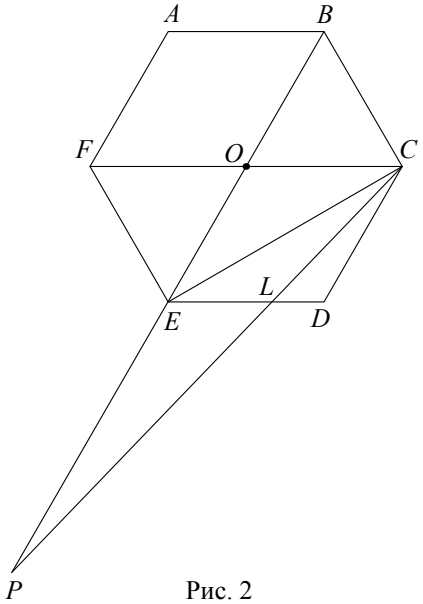


Рис. 2

Пусть теперь точка B — вершина большей по площади части шестиугольника (рис. 2). Тогда точка P лежит на продолжении диагонали BE за точку E, так как

$$S_{CDE} = \frac{1}{6}S > \frac{1}{18}S,$$

значит, прямая CP пересекает сторону DE в некоторой точке L. При этом площадь треугольника CDL в три раза меньше площади треугольника CDE, значит, $EL = 2DL$.

Треугольник PLE подобен треугольнику CLD с коэффициентом 2 $(PE \parallel CD)$, значит, $PE = 2CD = BE$. Следовательно, $\frac{BP}{PE} = \frac{BE + EP}{PE} = \frac{2PE}{PE} = 2$.

Ответ: $\frac{1}{7}$ или 2.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5

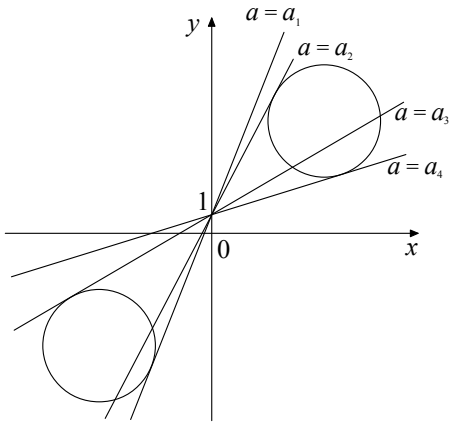
Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \left(|x|-6\right)^2+\left(|y|-6\right)^2=9, \\ y=ax+1, \\ xy>0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Первое уравнение при условии $xy>0$ задаёт на плоскости две окружности радиуса 3 с центрами $(6;6)$ и $(-6;-6)$, а второе — прямую l с угловым коэффициентом a, проходящую через точку $(0;1)$ (см. рис.).



Прямая l касается окружности с центром в точке $(-6;-6)$ радиуса 3 тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} y=ax+1, \\ (x+6)^2+(y+6)^2=9 \end{cases} \qquad (1)$$

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

имеет единственное решение. Для этого необходимо, чтобы квадратное уравнение

$$(x+6)^2+(ax+1+6)^2=9$$

имело единственное решение. Приведём уравнение к виду

$$\left(a^2+1\right)x^2+2(7a+6)x+76=0$$

и из равенства нулю дискриминанта получим:

$$(7a+6)^2-76\left(a^2+1\right)=0,$$

откуда $27a^2-84a+40=0$.

Значит, $a_1=\dfrac{14+2\sqrt{19}}{9}$, $a_3=\dfrac{14-2\sqrt{19}}{9}$. Система (1) имеет решения только при $\dfrac{14-2\sqrt{19}}{9}\le a\le\dfrac{14+2\sqrt{19}}{9}$.

Аналогично, прямая l касается окружности с центром в точке $(6;6)$ радиуса 3 тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} y=ax+1, \\ (x-6)^2+(y-6)^2=9 \end{cases} \qquad (2)$$

имеет единственное решение. Для этого необходимо, чтобы квадратное уравнение

$$(x-6)^2+(ax+1-6)^2=9$$

имело единственное решение. Приведём уравнение к виду

$$\left(a^2+1\right)x^2-2(5a+6)x+52=0$$

и из равенства нулю дискриминанта получим:

$$(5a+6)^2-52\left(a^2+1\right)=0,$$

откуда $27a^2-60a+16=0$.

Значит, $a_2=\dfrac{10+2\sqrt{13}}{9}$, $a_4=\dfrac{10-2\sqrt{13}}{9}$. Система (2) имеет решения только при $\dfrac{10-2\sqrt{13}}{9}\le a\le\dfrac{10+2\sqrt{13}}{9}$.

Так как $\dfrac{10-2\sqrt{13}}{9}<\dfrac{14-2\sqrt{19}}{9}<\dfrac{10+2\sqrt{13}}{9}<\dfrac{14+2\sqrt{19}}{9}$, в ответ попадают только $a_4=\dfrac{10-2\sqrt{13}}{9}$ и $a_1=\dfrac{14+2\sqrt{19}}{9}$.

Ответ: $\dfrac{10-2\sqrt{13}}{9}$; $\dfrac{14+2\sqrt{19}}{9}$.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но – или в ответ включено также и одно-два неверных значений; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения окружностей и прямой; – или квадратных уравнений с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6

Набор состоит из тридцати одного натурального числа, среди которых есть числа 3, 4 и 5. Среднее арифметическое любых двадцати шести чисел этого набора меньше 2.

а) Может ли такой набор содержать ровно двенадцать единиц?

б) Может ли такой набор содержать менее двенадцати единиц?

в) Докажите, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 27.

Решение.

а) Да, может. Например, сумма любых двадцати шести чисел из набора $5,\ 4,\ 3,\ \underbrace{2,\ \ldots,\ 2}_{16},\ \underbrace{1,\ \ldots,\ 1}_{12}$ не больше, чем $5+4+3+2\cdot 16+7=51$, и их среднее арифметическое меньше 2.

б) Нет, не может. Выпишем все числа слева направо в порядке убывания и рассмотрим первые 26 чисел, считая слева. Их сумма S меньше 52. Пусть количество единиц среди них равно x. Тогда

$$51 \ge S \ge x + 2(23-x) + 3 + 4 + 5;\ x \ge 7,$$

то есть среди выбранных 26 чисел всегда есть семь единиц. Каждое из оставшихся пяти чисел равно 1, и поэтому во всём наборе есть как минимум двенадцать единиц.

в) Используя двенадцать единиц и числа 3, 4, 5, можно составить все суммы от 1 до 24.

Если среди оставшихся шестнадцати чисел есть число от 3 до 26, то его можно добавить и получить в сумме 27.

Если среди оставшихся шестнадцати чисел нет чисел от 3 до 26, то каждое из них или равно 1, или равно 2, или больше 26. Так как сумма этих шестнадцати чисел не больше 51, то только одно из чисел может быть

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

больше 26. Значит, в этом случае как минимум пятнадцать чисел равны 1 или 2. Используя их и двенадцать единиц, всегда можно получить сумму, равную 27.

Ответ: а) да, б) нет.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Решение в целом верное, содержит: – или верный пример для п. а) и обоснованное выполнение п. в); – или верный пример для п. а), обоснованное выполнение п. б), а ход доказательства п. в) в целом верный, но содержит легко устранимые неточности	3
Решение содержит: – или верный пример для п. а) и обоснованное выполнение п. б); – или обоснованное выполнение п. в) (при не выполненных п. а) и п. б)	2
Решение содержит: – или верный пример для п. а); – или обоснованное выполнение п. б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\, x)\cdot\sqrt{-2\cos x} = 0$.

Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x < 0$.

Получаем уравнение $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\, x = 0$, откуда $\mathrm{tg}\, x = 0$ или $\mathrm{tg}\, x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Учитывая, что $\cos x < 0$, из уравнения $\mathrm{tg}\, x = 0$ получаем: $x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; а из уравнения $\mathrm{tg}\, x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ получаем: $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

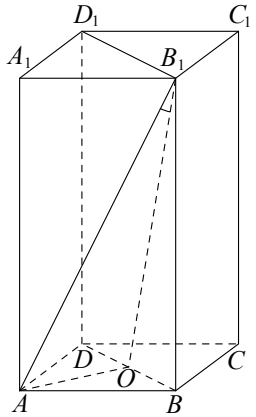
Ответ: $\pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно найдены все значения переменной x, при которых равен нулю первый сомножитель левой части исходного уравнения. Возможно отбор найденных значений или не произведён, или произведён неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$, стороны основания которой равны 2, а боковые рёбра равны 5, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1.

Решение.

Пусть O — середина отрезка BD. Отрезок AO является перпендикуляром, опущенным из точки A на плоскость BDD_1. Угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1 равен углу AB_1O.



© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

В прямоугольном треугольнике AB_1O $AO = \sqrt{2}$, $AB_1 = \sqrt{29}$. Следовательно, $\sin\angle AB_1O = \frac{\sqrt{58}}{29}$.

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{58}}{29}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Способ нахождения искомого угла верный, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не удовлетворяет ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите неравенство $\log_{0,04}(55-9x)\cdot\log_{7-x}0,2 \ge 1$.

Решение.

Решение будем искать при условиях:

$$\begin{cases} 55-9x>0, \\ 7-x>0, \\ 7-x\ne 1, \end{cases}$$

откуда $x \in (-\infty;\ 6)\cup\left(6;\ \frac{55}{9}\right)$. Для таких x получаем:

$$\frac{\log_{0,04}(55-9x)}{\log_{0,2}(7-x)} = \frac{\log_{0,2}(55-9x)}{2\log_{0,2}(7-x)} = \frac{\log_{0,2}(55-9x)}{\log_{0,2}(7-x)^2}.$$

Исходное неравенство примет вид: $\frac{\log_{0,2}(55-9x)}{\log_{0,2}(7-x)^2} \ge 1$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in (-\infty;\ 6)$, тогда $(7-x)^2 > 1$, откуда $\log_{0,2}(7-x)^2 < 0$, поэтому

$$\log_{0,2}(55-9x) \le \log_{0,2}(7-x)^2;\ 55-9x \ge 49-14x+x^2;\ (x+1)(x-6)\le 0;$$
$$-1 \le x \le 6,$$

откуда $x \in [-1;\ 6)$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in \left(6;\ \frac{55}{9}\right)$, тогда $(7-x)^2 < 1$, откуда $\log_{0,2}(7-x)^2 > 0$, поэтому

$$\log_{0,2}(55-9x) \ge \log_{0,2}(7-x)^2;\ 55-9x \le 49-14x+x^2;\ (x+1)(x-6)\ge 0;$$
$$x \le -1,\ x \ge 6,$$

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

откуда $x \in \left(6;\ \frac{55}{9}\right)$.

Ответ: $[-1;\ 6)$; $\left(6;\ \frac{55}{9}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного конечным количеством значений переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	2
Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам или верно найдены все значения переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Через вершину C правильного шестиугольника $ABCDEF$ проведена прямая, пересекающая прямую AD в точке Q. Известно, что эта прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как $5:13$. Найдите отношение $AQ:QD$.

Решение.

Пусть O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$, S — его площадь, K — точка пересечения диагоналей AD и CE. Площади частей, на которые прямая CQ разбивает шестиугольник, равны $\frac{5}{18}S$ и $\frac{13}{18}S$.

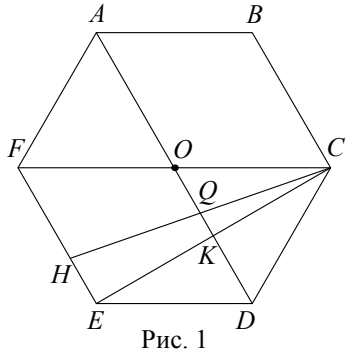


Рис. 1

Предположим, что точка D — вершина меньшей по площади части шестиугольника (рис. 1). Тогда точка Q лежит между точками O и K, так как

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

$$S_{CDE} = \frac{1}{6}S < \frac{5}{18}S;\ S_{CDEF} = \frac{1}{2}S > \frac{5}{18}S,$$

значит, прямая CQ пересекает сторону EF в некоторой точке H. При этом

$$S_{CEH} = S_{CDEH} - S_{CDE} = \frac{5}{18}S - \frac{1}{6}S = \frac{1}{9}S = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}S = \frac{1}{3}S_{CEF},$$

то есть площадь треугольника CEH в три раза меньше площади треугольника CEF, значит, $EH = \frac{1}{3}EF$, а так как $OK \parallel EF$, то $QK = \frac{1}{3}OK$.

Обозначим $QK = x$. Тогда

$$KD = OK = 3x;\ QD = QK + KD = 4x;$$

$$AO = OD = 2OK = 6x;\ AQ = AO + OQ = 8x,$$

следовательно, $\frac{AQ}{QD} = 2$.

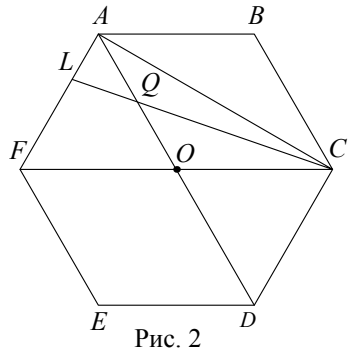


Рис. 2

Пусть теперь точка D — вершина большей по площади части шестиугольника (рис. 2). Аналогично предыдущему случаю доказывается, что тогда точка Q лежит между точками A и O, значит, прямая CQ пересекает сторону AF в некоторой точке L и при этом площадь треугольника CAL в три раза меньше площади треугольника CAF, значит, $AL = \frac{1}{3}AF = \frac{1}{3}CD$.

Треугольник AQL подобен треугольнику DQC с коэффициентом $\frac{1}{3}$ $(AL \parallel CD)$, следовательно, $\frac{AQ}{QD} = \frac{1}{3}$.

Ответ: 2 или $\frac{1}{3}$.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

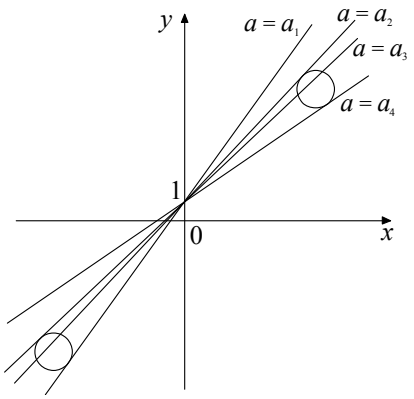
C5 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \left(|x|-7\right)^2+\left(|y|-7\right)^2=1, \\ y=ax+1, \\ xy>0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Первое уравнение при условии $xy>0$ задаёт на плоскости две единичные окружности с центрами $(7;7)$ и $(-7;-7)$, а второе — прямую l с угловым коэффициентом a, проходящую через точку $(0;1)$ (см. рис.).



Прямая l касается окружности с центром в точке $(-7;-7)$ единичного радиуса тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} y=ax+1, \\ (x+7)^2+(y+7)^2=1 \end{cases} \qquad (1)$$

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

имеет единственное решение. Для этого необходимо, чтобы квадратное уравнение

$$(x+7)^2+(ax+1+7)^2=1$$

имело единственное решение. Приведём уравнение к виду

$$\left(a^2+1\right)x^2+2(8a+7)x+112=0$$

и из равенства нулю дискриминанта получим:

$$(8a+7)^2-112\left(a^2+1\right)=0,$$

откуда $48a^2-112a+63=0$.

Значит, $a_1=\dfrac{14+\sqrt{7}}{12}$, $a_3=\dfrac{14-\sqrt{7}}{12}$. Система (1) имеет решения только при

$$\frac{14-\sqrt{7}}{12}\le a\le\frac{14+\sqrt{7}}{12}.$$

Аналогично, прямая l касается окружности с центром в точке $(7;7)$ единичного радиуса тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} y=ax+1, \\ (x-7)^2+(y-7)^2=1 \end{cases} \qquad (2)$$

имеет единственное решение. Для этого необходимо, чтобы квадратное уравнение

$$(x-7)^2+(ax+1-7)^2=1$$

имело единственное решение. Приведём уравнение к виду

$$\left(a^2+1\right)x^2-2(6a+7)x+84=0$$

и из равенства нулю дискриминанта получим:

$$(6a+7)^2-84\left(a^2+1\right)=0,$$

откуда $48a^2-84a+35=0$.

Значит, $a_2=\dfrac{21+\sqrt{21}}{24}$, $a_4=\dfrac{21-\sqrt{21}}{24}$. Система (2) имеет решения только при $\dfrac{21-\sqrt{21}}{24}\le a\le\dfrac{21+\sqrt{21}}{24}$.

Так как $\dfrac{21-\sqrt{21}}{24}<\dfrac{14-\sqrt{7}}{12}<\dfrac{21+\sqrt{21}}{24}<\dfrac{14+\sqrt{7}}{12}$, в ответ попадают только $a_4=\dfrac{21-\sqrt{21}}{24}$ и $a_1=\dfrac{14+\sqrt{7}}{12}$.

Ответ: $\dfrac{21-\sqrt{21}}{24}$; $\dfrac{14+\sqrt{7}}{12}$.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но – или в ответ включено также и одно-два неверных значений; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения окружностей и прямой; – или квадратных уравнений с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6

Набор состоит из тридцати семи натуральных чисел, среди которых есть числа 4, 5 и 6. Среднее арифметическое любых тридцати двух чисел этого набора меньше 2.

а) Может ли такой набор содержать ровно пятнадцать единиц?

б) Может ли такой набор содержать менее пятнадцати единиц?

в) Докажите, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 33.

Решение.

а) Да, может. Например, сумма любых тридцати двух чисел из набора $6,\ 5,\ 4,\ \underbrace{2,\ \ldots,\ 2}_{19},\ \underbrace{1,\ \ldots,\ 1}_{15}$ не больше, чем $6+5+4+2\cdot 19+10=63$, и их среднее арифметическое меньше 2.

б) Нет, не может. Выпишем все числа слева направо в порядке убывания и рассмотрим первые 32 числа, считая слева. Их сумма S меньше 64. Пусть количество единиц среди них равно x. Тогда

$$63 \ge S \ge x + 2(29-x) + 4 + 5 + 6;\ x \ge 10,$$

то есть среди выбранных 32 чисел всегда есть десять единиц. Каждое из оставшихся пяти чисел равно 1, и поэтому во всём наборе есть как минимум пятнадцать единиц.

в) Используя пятнадцать единиц и числа 4, 5, 6, можно составить все суммы от 1 до 30.

Если среди оставшихся девятнадцати чисел есть число от 3 до 32, то его можно добавить и получить в сумме 33.

Если среди оставшихся девятнадцати чисел нет чисел от 3 до 32, то каждое из них или равно 1, или равно 2, или больше 32. Так как сумма этих девятнадцати чисел не больше 63, то только одно из чисел может быть

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

больше 32. Значит, в этом случае как минимум восемнадцать чисел равны 1 или 2. Используя их и пятнадцать единиц, всегда можно получить сумму, равную 33.

Ответ: а) да, б) нет.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Решение в целом верное, содержит: – или верный пример для п. а) и обоснованное выполнение п. в); – или верный пример для п. а), обоснованное выполнение п. б), а ход доказательства п. в) в целом верный, но содержит легко устранимые неточности	3
Решение содержит: – или верный пример для п. а) и обоснованное выполнение п. б); – или обоснованное выполнение п. в) (при не выполненных п. а) и п. б)	2
Решение содержит: – или верный пример для п. а); – или обоснованное выполнение п. б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $(\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x)\cdot\sqrt{8\cos x} = 0$.

Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x > 0$.

Получаем уравнение $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0$, откуда $\operatorname{tg} x = 0$ или $\operatorname{tg} x = 1$.

Учитывая, что $\cos x > 0$, из уравнения $\operatorname{tg} x = 0$ получаем: $x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; а из уравнения $\operatorname{tg} x = 1$ получаем: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

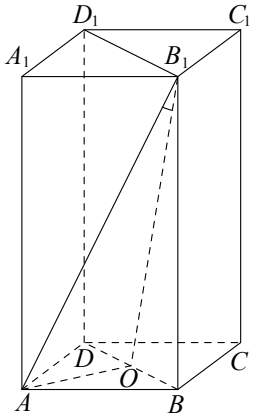
Ответ: $2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно найдены все значения переменной x, при которых равен нулю первый сомножитель левой части исходного уравнения. Возможно отбор найденных значений или не произведён, или произведён неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$, стороны основания которой равны 4, а боковые рёбра равны 8, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1.

Решение.

Пусть O — середина отрезка BD. Отрезок AO является перпендикуляром, опущенным из точки A на плоскость BDD_1. Угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1 равен углу AB_1O.



© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

В прямоугольном треугольнике AB_1O $AO = 2\sqrt{2}$, $AB_1 = 4\sqrt{5}$. Следовательно, $\sin\angle AB_1O = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Способ нахождения искомого угла верный, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не удовлетворяет ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите неравенство $\log_{\frac{1}{36}}(22-3x)\cdot\log_{8-x}\frac{1}{6} \ge 1$.

Решение.

Решение будем искать при условиях:

$$\begin{cases} 22-3x>0, \\ 8-x>0, \\ 8-x\ne 1, \end{cases}$$

откуда $x \in (-\infty;\ 7) \cup \left(7;\ \frac{22}{3}\right)$. Для таких x получаем:

$$\frac{\log_{\frac{1}{36}}(22-3x)}{\log_{\frac{1}{6}}(8-x)} = \frac{\log_{\frac{1}{6}}(22-3x)}{2\log_{\frac{1}{6}}(8-x)} = \frac{\log_{\frac{1}{6}}(22-3x)}{\log_{\frac{1}{6}}(8-x)^2}.$$

Исходное неравенство примет вид: $\frac{\log_{\frac{1}{6}}(22-3x)}{\log_{\frac{1}{6}}(8-x)^2} \ge 1$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in (-\infty;\ 7)$, тогда $(8-x)^2 > 1$, откуда $\log_{\frac{1}{6}}(8-x)^2 < 0$, поэтому

$$\log_{\frac{1}{6}}(22-3x) \le \log_{\frac{1}{6}}(8-x)^2;\ 22-3x \ge 64-16x+x^2;\ (x-6)(x-7) \le 0;$$

$$6 \le x \le 7,$$

откуда $x \in [6;\ 7)$.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in \left(7;\ \frac{22}{3}\right)$, тогда $(8-x)^2 < 1$, откуда $\log_{\frac{1}{6}}(8-x)^2 > 0$, поэтому

$$\log_{\frac{1}{6}}(22-3x) \ge \log_{\frac{1}{6}}(8-x)^2;\ 22-3x \le 64-16x+x^2;\ (x-6)(x-7) \ge 0;$$

$$x \le 6,\ x \ge 7,$$

откуда $x \in \left(7;\ \frac{22}{3}\right)$.

Ответ: $[6;\ 7)$; $\left(7;\ \frac{22}{3}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного конечным количеством значений переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	2
Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам или верно найдены все значения переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Через вершину B правильного шестиугольника $ABCDEF$ проведена прямая, пересекающая диагональ CF в точке K. Известно, что эта прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как $2:3$. Найдите отношение $CK:KF$.

Решение.

Пусть O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$, S — его площадь. Тогда

$$S_{ABEF} = S_{BCDE} = \frac{1}{2}S;\ S_{ABF} = S_{BCD} = \frac{1}{6}S.$$

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

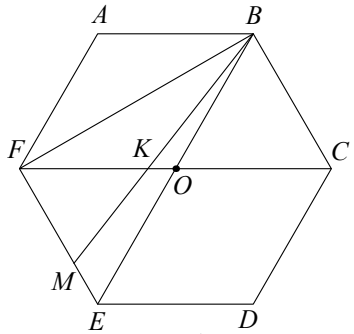


Рис. 1

Рассмотрим случай, когда точка K расположена между точками O и F (рис. 1). Тогда прямая BK пересекает сторону EF в некоторой точке M, причём

$$S_{ABMF} = \frac{2}{5}S;\ S_{BMF} = S_{ABMF} - S_{ABF} = \frac{7}{30}S;$$

$$S_{BME} = S_{ABEF} - S_{ABMF} = \frac{1}{10}S.$$

Площади треугольников BME и BMF относятся как $3:7$, поэтому M делит EF в отношении $3:7$. Треугольник BKC подобен треугольнику MKF с коэффициентом $\frac{10}{7}$ $\left(FM \parallel BC;\ BC = EF = \frac{10}{7}MF\right)$, следовательно, $\frac{CK}{KF} = \frac{10}{7}$.

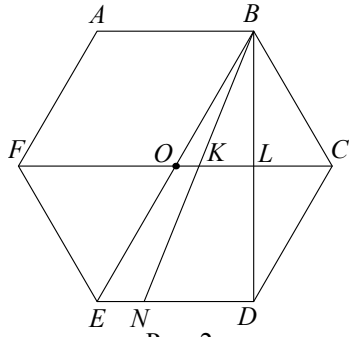


Рис. 2

Пусть теперь точка K лежит между C и O (рис. 2). Тогда прямая BK пересекает сторону DE в некоторой точке N, причём

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

$$S_{BCDE}=\frac{1}{2}S;\ S_{BCDN}=\frac{2}{5}S;\ S_{BCD}=\frac{1}{6}S;$$

$$S_{BND}=S_{BCDN}-S_{BCD}=\frac{7}{30}S;$$

$$S_{BNE}=S_{BCDE}-S_{BCDN}=\frac{1}{2}S-\frac{2}{5}S=\frac{1}{10}S.$$

Площади треугольников BNE и BND относятся как $3:7$, поэтому N делит DE в отношении $3:7$.

Пусть диагонали CF и BD пересекаются в точке L. Тогда L — середина OC, OL — средняя линия треугольника BDE, а так как N делит отрезок DE в отношении $3:7$, то K делит отрезок OL в том же отношении. Обозначим $OK=3z$. Тогда

$$KL=7z;\ CL=OL=10z;\ CK=CL+LK=17z;$$

$$OF=OC=2CL=20z;\ KF=OK+OF=23z.$$

Следовательно, $\frac{CK}{KF}=\frac{17}{23}$.

Ответ: $\frac{10}{7}$ или $\frac{17}{23}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых система

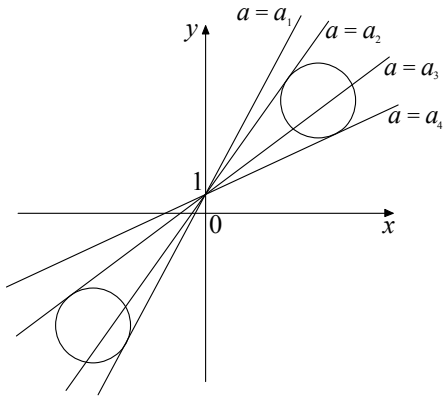
$$\begin{cases}(|x|-6)^2+(|y|-6)^2=4,\\ y=ax+1,\\ xy>0\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Первое уравнение при условии $xy>0$ задаёт на плоскости две окружности радиуса 2 с центрами $(6;6)$ и $(-6;-6)$, а второе — прямую l с угловым коэффициентом a, проходящую через точку $(0;1)$ (см. рис.).

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**



Прямая l касается окружности с центром в точке $(-6;-6)$ радиуса 2 тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases}y=ax+1,\\ (x+6)^2+(y+6)^2=4\end{cases}\qquad(1)$$

имеет единственное решение. Для этого необходимо, чтобы квадратное уравнение

$$(x+6)^2+(ax+1+6)^2=4$$

имело единственное решение. Приведём уравнение к виду

$$(a^2+1)x^2+2(7a+6)x+81=0$$

и из равенства нулю дискриминанта получим:

$$(7a+6)^2-81(a^2+1)=0,$$

откуда $32a^2-84a+45=0$.

Значит, $a_1=\frac{15}{8}$, $a_3=\frac{3}{4}$. Система (1) имеет решения только при $\frac{3}{4}\le a\le\frac{15}{8}$.

Аналогично, прямая l касается окружности с центром в точке $(6;6)$ радиуса 2 тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases}y=ax+1,\\ (x-6)^2+(y-6)^2=4\end{cases}\qquad(2)$$

имеет единственное решение. Для этого необходимо, чтобы квадратное уравнение

$$(x-6)^2+(ax+1-6)^2=4$$

имело единственное решение. Приведём уравнение к виду

$$(a^2+1)x^2-2(5a+6)x+57=0$$

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

и из равенства нулю дискриминанта получим:

$$(5a+6)^2-57\left(a^2+1\right)=0,$$

откуда $32a^2-60a+21=0$.

Значит, $a_2=\frac{15+\sqrt{57}}{16}$, $a_4=\frac{15-\sqrt{57}}{16}$. Система (2) имеет решения только при $\frac{15-\sqrt{57}}{16}\le a\le\frac{15+\sqrt{57}}{16}$.

Так как $\frac{15-\sqrt{57}}{16}<\frac{3}{4}<\frac{15+\sqrt{57}}{16}<\frac{15}{8}$, в ответ попадают только $a_4=\frac{15-\sqrt{57}}{16}$ и $a_1=\frac{15}{8}$.

Ответ: $\frac{15-\sqrt{57}}{16}$, $\frac{15}{8}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но – или в ответ включено также и одно-два неверных значений; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения окружностей и прямой; – или квадратных уравнений с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Набор состоит из тридцати девяти натуральных чисел, среди которых есть числа 4, 5 и 7. Среднее арифметическое любых тридцати четырёх чисел этого набора меньше 2.

а) Может ли такой набор содержать ровно шестнадцать единиц?

б) Может ли такой набор содержать менее шестнадцати единиц?

в) Докажите, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 35.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Решение.

а) Да, может. Например, сумма любых тридцати четырёх чисел из набора $7,\ 5,\ 4,\ \underbrace{2,\ \ldots,\ 2}_{20},\ \underbrace{1,\ \ldots,\ 1}_{16}$ не больше, чем $7+5+4+2\cdot 20+11=67$, и их среднее арифметическое меньше 2.

б) Нет, не может. Выпишем все числа слева направо в порядке убывания и рассмотрим первые 34 числа, считая слева. Их сумма S меньше 68. Пусть количество единиц среди них равно x. Тогда

$$67\ge S\ge x+2(31-x)+4+5+7;\ x\ge 11,$$

то есть среди выбранных 34 чисел всегда есть одиннадцать единиц. Каждое из оставшихся пяти чисел равно 1, и поэтому во всём наборе есть как минимум шестнадцать единиц.

в) Используя шестнадцать единиц и числа 4, 5, 7, можно составить все суммы от 1 до 32.

Если среди оставшихся двадцати чисел есть число от 3 до 34, то его можно добавить и получить в сумме 35.

Если среди оставшихся двадцати чисел нет чисел от 3 до 34, то каждое из них или равно 1, или равно 2, или больше 34. Так как сумма этих двадцати чисел не больше 67, то только одно из чисел может быть больше 34. Значит, в этом случае как минимум девятнадцать чисел равны 1 или 2. Используя их и шестнадцать единиц, всегда можно получить сумму, равную 35.

Ответ: а) да, б) нет.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Решение в целом верное, содержит: – или верный пример для п. а) и обоснованное выполнение п. в); – или верный пример для п. а), обоснованное выполнение п. б), а ход доказательства п. в) в целом верный, но содержит легко устранимые неточности	3
Решение содержит: – или верный пример для п. а) и обоснованное выполнение п. б); – или обоснованное выполнение п. в) (при не выполненных п. а) и п. б)	2
Решение содержит: – или верный пример для п. а); – или обоснованное выполнение п. б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $(\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\, x)\cdot\sqrt{-7\cos x} = 0$.

Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x < 0$.

Получаем уравнение $\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\, x = 0$, откуда $\mathrm{tg}\, x = 0$ или $\mathrm{tg}\, x = -1$.

Учитывая, что $\cos x < 0$, из уравнения $\mathrm{tg}\, x = 0$ получаем: $x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; а из уравнения $\mathrm{tg}\, x = -1$ получаем: $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

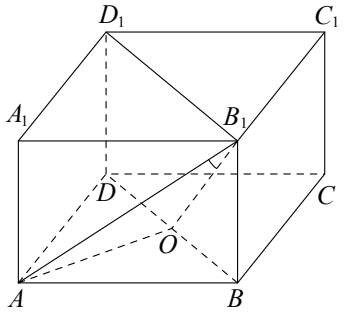
Ответ: $\pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно найдены все значения переменной x, при которых равен нулю первый сомножитель левой части исходного уравнения. Возможно отбор найденных значений или не произведён, или произведён неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$, стороны основания которой равны 7, а боковые рёбра равны 3, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1.

Решение.

Пусть O — середина отрезка BD. Отрезок AO является перпендикуляром, опущенным из точки A на плоскость BDD_1. Угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1 равен углу AB_1O.



© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

В прямоугольном треугольнике AB_1O $AO = \frac{7\sqrt{2}}{2}$, $AB_1 = \sqrt{58}$.

Следовательно, $\sin\angle AB_1O = \frac{7\sqrt{29}}{58}$.

Ответ: $\arcsin\frac{7\sqrt{29}}{58}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Способ нахождения искомого угла верный, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не удовлетворяет ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите неравенство $\log_{\frac{1}{49}}(26-5x)\cdot\log_{6-x}\frac{1}{7} \ge 1$.

Решение.

Решение будем искать при условиях:

$$\begin{cases} 26-5x>0, \\ 6-x>0, \\ 6-x\ne 1, \end{cases}$$

откуда $x \in (-\infty;\ 5) \cup \left(5;\ \frac{26}{5}\right)$. Для таких x получаем:

$$\frac{\log_{\frac{1}{49}}(26-5x)}{\log_{\frac{1}{7}}(6-x)} = \frac{\log_{\frac{1}{7}}(26-5x)}{2\log_{\frac{1}{7}}(6-x)} = \frac{\log_{\frac{1}{7}}(26-5x)}{\log_{\frac{1}{7}}(6-x)^2}.$$

Исходное неравенство примет вид: $\frac{\log_{\frac{1}{7}}(26-5x)}{\log_{\frac{1}{7}}(6-x)^2} \ge 1$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in (-\infty;\ 5)$, тогда $(6-x)^2 > 1$, откуда $\log_{\frac{1}{7}}(6-x)^2 < 0$, поэтому

$$\log_{\frac{1}{7}}(26-5x) \le \log_{\frac{1}{7}}(6-x)^2;\ 26-5x \ge 36-12x+x^2;\ (x-2)(x-5) \le 0;$$

$$2 \le x \le 5,$$

откуда $x \in [2;\ 5)$.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in \left(5;\ \frac{26}{5}\right)$, тогда $(6-x)^2 < 1$, откуда $\log_{\frac{1}{7}}(6-x)^2 > 0$, поэтому

$$\log_{\frac{1}{7}}(26-5x) \ge \log_{\frac{1}{7}}(6-x)^2;\ 26-5x \le 36-12x+x^2;\ (x-2)(x-5) \ge 0;$$

$$x \le 2,\ x \ge 5,$$

откуда $x \in \left(5;\ \frac{26}{5}\right)$.

Ответ: $[2;\ 5)$; $\left(5;\ \frac{26}{5}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного конечным количеством значений переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	2
Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам или верно найдены все значения переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Через вершину A правильного шестиугольника $ABCDEF$ проведена прямая, пересекающая прямую CF в точке K. Известно, что эта прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как $1:8$. Найдите отношение $CK:KF$.

Решение.

Пусть O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$, S — его площадь, L — точка пересечения диагоналей AE и CF. Площади частей, на которые прямая AK разбивает шестиугольник, равны $\frac{1}{9}S$ и $\frac{8}{9}S$.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

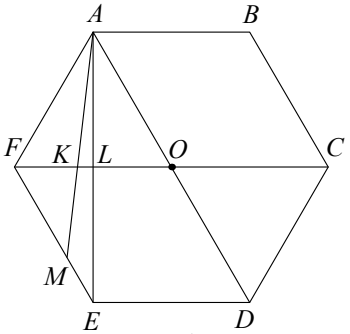


Рис. 1

Предположим, что точка F — вершина меньшей по площади части шестиугольника (рис. 1). Тогда точка K лежит между точками F и L, так как

$$S_{AEF} = \frac{1}{6}S > \frac{1}{9}S,$$

значит, прямая AK пересекает сторону EF в некоторой точке M. При этом площади треугольников AMF и AME относятся как $2:1$, значит, точка M делит EF в отношении $2:1$.

Треугольники KAO и KMF подобны с коэффициентом $\frac{3}{2}$, поэтому $KO = \frac{3}{2}KF$. Обозначим $KF = 2a$. Тогда

$$KO = 3a;\ OC = OF = 5a;\ CK = OC + OK = 8a.$$

Следовательно, $\frac{CK}{KF} = 4$.

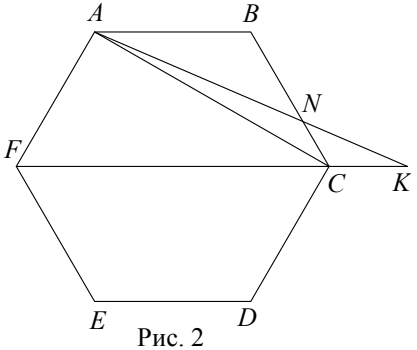


Рис. 2

Пусть теперь точка F — вершина большей по площади части шестиугольника (рис. 2). Тогда точка K лежит на продолжении диагонали CF за точку C, так как

$$S_{ABC} = \frac{1}{6}S > \frac{1}{9}S,$$

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

значит, прямая AK пересекает сторону BC в некоторой точке N. При этом площади треугольников ANB и ANC относятся как $2:1$, значит, точка N делит BC в отношении $2:1$.

Треугольники KCN и ABN подобны с коэффициентом $\frac{1}{2}$ $(CK \parallel AB)$. Обозначим $CK = b$. Тогда

$$AB = 2CK = 2b;\ CF = 2AB = 4b;\ KF = CK + CF = 5b.$$

Следовательно, $\frac{CK}{KF} = \frac{1}{5}$.

Ответ: 4 или $\frac{1}{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых система

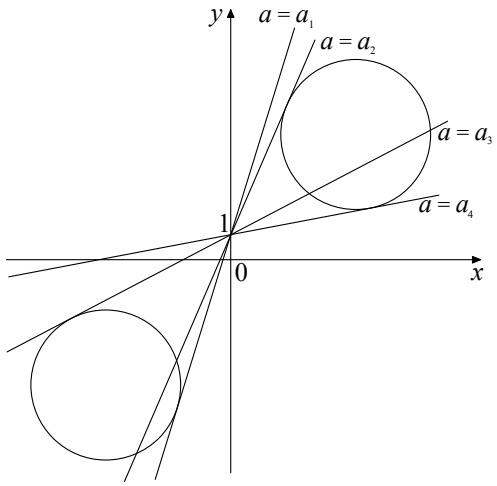
$$\begin{cases} (|x|-5)^2 + (|y|-5)^2 = 9, \\ y = ax + 1, \\ xy > 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Первое уравнение при условии $xy > 0$ задаёт на плоскости две окружности радиуса 3 с центрами $(5;5)$ и $(-5;-5)$, а второе — прямую l с угловым коэффициентом a, проходящую через точку $(0;1)$ (см. рис.).

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**



Прямая l касается окружности с центром в точке $(-5;-5)$ радиуса 3 тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} y = ax + 1, \\ (x+5)^2 + (y+5)^2 = 9 \end{cases} \qquad (1)$$

имеет единственное решение. Для этого необходимо, чтобы квадратное уравнение

$$(x+5)^2 + (ax+1+5)^2 = 9$$

имело единственное решение. Приведём уравнение к виду

$$(a^2+1)x^2 + 2(6a+5) + 52 = 0$$

и из равенства нулю дискриминанта получим:

$$(6a+5)^2 - 52(a^2+1) = 0,$$

откуда $16a^2 - 60a + 27 = 0$.

Значит, $a_1 = \frac{15+\sqrt{117}}{8}$, $a_3 = \frac{15-\sqrt{117}}{8}$. Система (1) имеет решения только при $\frac{15-\sqrt{117}}{8} \le a \le \frac{15+\sqrt{117}}{8}$.

Аналогично, прямая l касается окружности с центром в точке $(5;5)$ радиуса 3 тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} y = ax + 1, \\ (x-5)^2 + (y-5)^2 = 9 \end{cases} \qquad (2)$$

имеет единственное решение. Для этого необходимо, чтобы квадратное уравнение

$$(x-5)^2 + (ax+1-5)^2 = 9$$

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

имело единственное решение. Приведём уравнение к виду

$$\left(a^2+1\right)x^2-2\left(4a+5\right)+32=0$$

и из равенства нулю дискриминанта получим:

$$\left(4a+5\right)^2-32\left(a^2+1\right)=0,$$

откуда $16a^2-40a+7=0$.

Значит, $a_2=\frac{5+3\sqrt{2}}{4}$, $a_4=\frac{5-3\sqrt{2}}{4}$. Система (2) имеет решения только при $\frac{5-3\sqrt{2}}{4}\le a\le\frac{5+3\sqrt{2}}{4}$.

Так как $\frac{5-3\sqrt{2}}{4}<\frac{15-\sqrt{117}}{8}<\frac{5+3\sqrt{2}}{4}<\frac{15+\sqrt{117}}{8}$, в ответ попадают только $a_4=\frac{5-3\sqrt{2}}{4}$ и $a_1=\frac{15+\sqrt{117}}{8}$.

Ответ: $\frac{5-3\sqrt{2}}{4}$, $\frac{15+3\sqrt{13}}{8}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но – или в ответ включено также и одно-два неверных значений; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения окружностей и прямой; – или квадратных уравнений с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Набор состоит из тридцати девяти натуральных чисел, среди которых есть числа 3, 4 и 6. Среднее арифметическое любого тридцати одного числа этого набора меньше 2.

а) Может ли такой набор содержать ровно шестнадцать единиц?

б) Может ли такой набор содержать менее шестнадцати единиц?

в) Докажите, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 32.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Решение.

а) Да, может. Например, сумма любого тридцати одного числа из набора $6,\ 4,\ 3,\ \underbrace{2,\ \ldots,\ 2}_{20},\ \underbrace{1,\ \ldots,\ 1}_{16}$ не больше, чем $6+4+3+2\cdot 20+8=61$, и их среднее арифметическое меньше 2.

б) Нет, не может. Выпишем все числа слева направо в порядке убывания и рассмотрим 31 число, считая слева. Их сумма S меньше 62. Пусть количество единиц среди них равно x. Тогда

$$61\ge S\ge x+2(28-x)+3+4+6;\ x\ge 8,$$

то есть среди выбранного 31 числа всегда есть восемь единиц. Каждое из оставшихся восьми чисел равно 1, и поэтому во всём наборе есть как минимум шестнадцать единиц.

в) Используя шестнадцать единиц и числа 3, 4, 6, можно составить все суммы от 1 до 29.

Если среди оставшихся двадцати чисел есть число от 3 до 31, то его можно добавить и получить в сумме 32.

Если среди оставшихся двадцати чисел нет чисел от 3 до 31, то каждое из них или равно 1, или равно 2, или больше 31. Так как сумма этих двадцати чисел не больше 61, то только одно из чисел может быть больше 31. Значит, в этом случае как минимум девятнадцать чисел равны 1 или 2. Используя их и шестнадцать единиц, всегда можно получить сумму, равную 32.

Ответ: а) да, б) нет.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Решение в целом верное, содержит: – или верный пример для п. а) и обоснованное выполнение п. в); – или верный пример для п. а), обоснованное выполнение п. б), а ход доказательства п. в) в целом верный, но содержит легко устранимые неточности	3
Решение содержит: – или верный пример для п. а) и обоснованное выполнение п. б); – или обоснованное выполнение п. в) (при не выполненных п. а) и п. б)	2
Решение содержит: – или верный пример для п. а); – или обоснованное выполнение п. б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $(\operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3}\operatorname{tg} x)\cdot\sqrt{-5\cos x} = 0$.

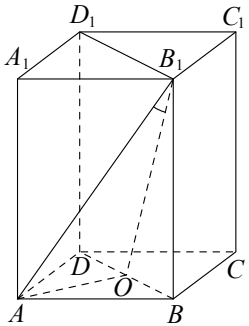
Решение.
Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x < 0$.
Получаем уравнение $\operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3}\operatorname{tg} x = 0$, откуда $\operatorname{tg} x = 0$ или $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.
Учитывая, что $\cos x < 0$, из уравнения $\operatorname{tg} x = 0$ получаем: $x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; а из уравнения $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ получаем: $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно найдены все значения переменной x, при которых равен нулю первый сомножитель левой части исходного уравнения. Возможно отбор найденных значений или не произведён, или произведён неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$, стороны основания которой равны 5, а боковые рёбра равны 7, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1.

Решение.
Пусть O — середина отрезка BD. Отрезок AO является перпендикуляром, опущенным из точки A на плоскость BDD_1. Угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1 равен углу AB_1O.



© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

В прямоугольном треугольнике AB_1O $AO = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, $AB_1 = \sqrt{74}$.

Следовательно, $\sin\angle AB_1O = \frac{5\sqrt{37}}{74}$.

Ответ: $\arcsin\frac{5\sqrt{37}}{74}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Способ нахождения искомого угла верный, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не удовлетворяет ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите неравенство $\log_{0,25}(19-9x)\cdot\log_{3-x}0,5 \ge 1$.

Решение.
Решение будем искать при условиях:

$$\begin{cases} 19-9x>0, \\ 3-x>0, \\ 3-x\ne 1, \end{cases}$$

откуда $x \in (-\infty;\ 2) \cup \left(2;\ \frac{19}{9}\right)$. Для таких x получаем:

$$\frac{\log_{0,25}(19-9x)}{\log_{0,5}(3-x)} = \frac{\log_{0,5}(19-9x)}{2\log_{0,5}(3-x)} = \frac{\log_{0,5}(19-9x)}{\log_{0,5}(3-x)^2}.$$

Исходное неравенство примет вид: $\frac{\log_{0,5}(19-9x)}{\log_{0,5}(3-x)^2} \ge 1$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in (-\infty;\ 2)$, тогда $(3-x)^2 > 1$, откуда $\log_{0,5}(3-x)^2 < 0$, поэтому

$$\log_{0,5}(19-9x) \le \log_{0,5}(3-x)^2;\ 19-9x \ge 9-6x+x^2;\ (x+5)(x-2) \le 0;$$
$$-5 \le x \le 2,$$

откуда $x \in [-5;\ 2)$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in \left(2;\ \frac{19}{9}\right)$, тогда $(3-x)^2 < 1$, откуда $\log_{0,5}(3-x)^2 > 0$, поэтому

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

$$\log_{0,5}(19-9x) \ge \log_{0,5}(3-x)^2;\ 19-9x \le 9-6x+x^2;\ (x+5)(x-2) \ge 0;$$
$$x \le -5,\ x \ge 2,$$

откуда $x \in \left(2;\ \frac{19}{9}\right)$.

Ответ: $[-5;\ 2)$; $\left(2;\ \frac{19}{9}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного конечным количеством значений переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	2
Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам или верно найдены все значения переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Через вершину B правильного шестиугольника $ABCDEF$ проведена прямая, пересекающая диагональ CF в точке K. Известно, что эта прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как $1:2$. Найдите отношение $CK:KF$.

Решение.

Пусть O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$, S — его площадь. Тогда

$$S_{ABEF} = S_{BCDE} = \frac{1}{2}S;\ S_{ABF} = S_{BCD} = \frac{1}{6}S.$$

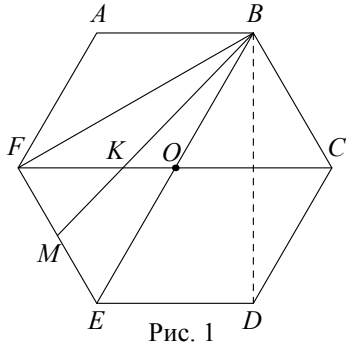


Рис. 1

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Рассмотрим случай, когда точка K расположена между точками O и F (рис. 1). Тогда прямая BK пересекает сторону EF в некоторой точке M, причём

$$S_{ABMF} = \frac{1}{3}S;\ S_{BMF} = S_{ABMF} - S_{ABF} = \frac{1}{3}S - \frac{1}{6}S = \frac{1}{6}S;$$
$$S_{BME} = S_{ABEF} - S_{ABMF} = \frac{1}{2}S - \frac{1}{3}S = \frac{1}{6}S = S_{BMF}.$$

Треугольники BME и BMF равновеликие, поэтому BM — медиана треугольника BEF. Треугольник BKC подобен треугольнику MKF с коэффициентом 2 $(FM \parallel BC;\ BC = EF = 2MF)$, следовательно, $\frac{CK}{KF} = 2$.

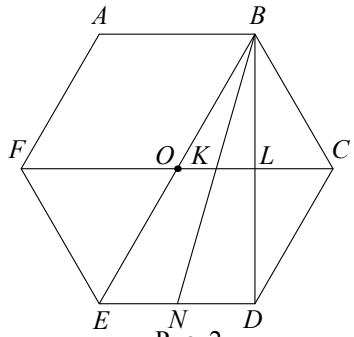


Рис. 2

Пусть теперь точка K лежит между C и O (рис. 2). Тогда прямая BK пересекает сторону DE в некоторой точке N, причём

$$S_{BCDE} = \frac{1}{2}S;\ S_{BCDN} = \frac{1}{3}S;\ S_{BCD} = \frac{1}{6}S;$$
$$S_{BND} = S_{BCDN} - S_{BCD} = \frac{1}{3}S - \frac{1}{6}S = \frac{1}{6}S;$$
$$S_{BNE} = S_{BCDE} - S_{BCDN} = \frac{1}{2}S - \frac{1}{3}S = \frac{1}{6}S = S_{BND}.$$

Треугольники BNE и BND равновеликие, поэтому BN — медиана треугольника BDE.

Пусть диагонали CF и BD пересекаются в точке L. Тогда L — середина OC, OL — средняя линия треугольника BDE, а так как N — середина DE, то K — середина OL. Обозначим $OK = z$. Тогда

$$CL = OL = 2z;\ CK = CL + LK = 3z;\ OF = OC = 4z;\ KF = OK + OF = 5z.$$

Следовательно, $\frac{CK}{KF} = \frac{3}{5}$.

Ответ: 2 или $\frac{3}{5}$.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

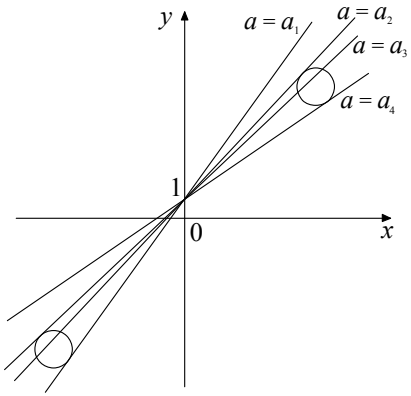
C5 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \left(|x|-7\right)^2+\left(|y|-7\right)^2=1, \\ y=ax+1, \\ xy>0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Первое уравнение при условии $xy>0$ задаёт на плоскости две единичные окружности с центрами $(7;7)$ и $(-7;-7)$, а второе — прямую l с угловым коэффициентом a, проходящую через точку $(0;1)$ (см. рис.).



Прямая l касается окружности с центром в точке $(-7;-7)$ единичного радиуса тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} y=ax+1, \\ (x+7)^2+(y+7)^2=1 \end{cases} \qquad (1)$$

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

имеет единственное решение. Для этого необходимо, чтобы квадратное уравнение

$$(x+7)^2+(ax+1+7)^2=1$$

имело единственное решение. Приведём уравнение к виду

$$\left(a^2+1\right)x^2+2(8a+7)x+112=0$$

и из равенства нулю дискриминанта получим:

$$(8a+7)^2-112\left(a^2+1\right)=0,$$

откуда $48a^2-112a+63=0$.

Значит, $a_1=\dfrac{14+\sqrt{7}}{12}$, $a_3=\dfrac{14-\sqrt{7}}{12}$. Система (1) имеет решения только при

$$\frac{14-\sqrt{7}}{12}\le a\le\frac{14+\sqrt{7}}{12}.$$

Аналогично, прямая l касается окружности с центром в точке $(7;7)$ единичного радиуса тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} y=ax+1, \\ (x-7)^2+(y-7)^2=1 \end{cases} \qquad (2)$$

имеет единственное решение. Для этого необходимо, чтобы квадратное уравнение

$$(x-7)^2+(ax+1-7)^2=1$$

имело единственное решение. Приведём уравнение к виду

$$\left(a^2+1\right)x^2-2(6a+7)x+84=0$$

и из равенства нулю дискриминанта получим:

$$(6a+7)^2-84\left(a^2+1\right)=0,$$

откуда $48a^2-84a+35=0$.

Значит, $a_2=\dfrac{21+\sqrt{21}}{24}$, $a_4=\dfrac{21-\sqrt{21}}{24}$. Система (2) имеет решения только при $\dfrac{21-\sqrt{21}}{24}\le a\le\dfrac{21+\sqrt{21}}{24}$.

Так как $\dfrac{21-\sqrt{21}}{24}<\dfrac{14-\sqrt{7}}{12}<\dfrac{21+\sqrt{21}}{24}<\dfrac{14+\sqrt{7}}{12}$, в ответ попадают только $a_4=\dfrac{21-\sqrt{21}}{24}$ и $a_1=\dfrac{14+\sqrt{7}}{12}$.

Ответ: $\dfrac{21-\sqrt{21}}{24}$; $\dfrac{14+\sqrt{7}}{12}$.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но – или в ответ включено также и одно-два неверных значений; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения окружностей и прямой; – или квадратных уравнений с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Набор состоит из тридцати одного натурального числа, среди которых есть числа 3, 4 и 5. Среднее арифметическое любых двадцати шести чисел этого набора меньше 2.

а) Может ли такой набор содержать ровно двенадцать единиц?

б) Может ли такой набор содержать менее двенадцати единиц?

в) Докажите, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 27.

Решение.

а) Да, может. Например, сумма любых двадцати шести чисел из набора $5,\ 4,\ 3,\ \underbrace{2,\ \ldots,\ 2}_{16},\ \underbrace{1,\ \ldots,\ 1}_{12}$ не больше, чем $5+4+3+2\cdot 16+7=51$, и их среднее арифметическое меньше 2.

б) Нет, не может. Выпишем все числа слева направо в порядке убывания и рассмотрим первые 26 чисел, считая слева. Их сумма S меньше 52. Пусть количество единиц среди них равно x. Тогда

$$51 \ge S \ge x + 2(23-x) + 3 + 4 + 5;\ x \ge 7,$$

то есть среди выбранных 26 чисел всегда есть семь единиц. Каждое из оставшихся пяти чисел равно 1, и поэтому во всём наборе есть как минимум двенадцать единиц.

в) Используя двенадцать единиц и числа 3, 4, 5, можно составить все суммы от 1 до 24.

Если среди оставшихся шестнадцати чисел есть число от 3 до 26, то его можно добавить и получить в сумме 27.

Если среди оставшихся шестнадцати чисел нет чисел от 3 до 26, то каждое из них или равно 1, или равно 2, или больше 26. Так как сумма этих шестнадцати чисел не больше 51, то только одно из чисел может быть больше 26. Значит, в этом случае как минимум пятнадцать чисел равны 1 или

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

2. Используя их и двенадцать единиц, всегда можно получить сумму, равную 27.

Ответ: а) да, б) нет.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Решение в целом верное, содержит: – или верный пример для п. а) и обоснованное выполнение п. в); – или верный пример для п. а), обоснованное выполнение п. б), а ход доказательства п. в) в целом верный, но содержит легко устранимые неточности	3
Решение содержит: – или верный пример для п. а) и обоснованное выполнение п. б); – или обоснованное выполнение п. в) (при не выполненных п. а) и п. б)	2
Решение содержит: – или верный пример для п. а); – или обоснованное выполнение п. б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\, x)\cdot\sqrt{-2\cos x} = 0$.

Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x < 0$.

Получаем уравнение $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\, x = 0$, откуда $\mathrm{tg}\, x = 0$ или $\mathrm{tg}\, x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Учитывая, что $\cos x < 0$, из уравнения $\mathrm{tg}\, x = 0$ получаем: $x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; а из уравнения $\mathrm{tg}\, x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ получаем: $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

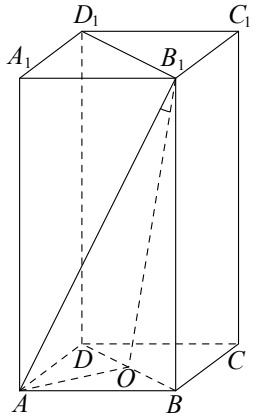
Ответ: $\pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно найдены все значения переменной x, при которых равен нулю первый сомножитель левой части исходного уравнения. Возможно отбор найденных значений или не произведён, или произведён неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$, стороны основания которой равны 2, а боковые рёбра равны 5, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1.

Решение.

Пусть O — середина отрезка BD. Отрезок AO является перпендикуляром, опущенным из точки A на плоскость BDD_1. Угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1 равен углу AB_1O.



© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

В прямоугольном треугольнике AB_1O $AO = \sqrt{2}$, $AB_1 = \sqrt{29}$. Следовательно, $\sin\angle AB_1O = \frac{\sqrt{58}}{29}$.

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{58}}{29}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Способ нахождения искомого угла верный, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не удовлетворяет ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите неравенство $\log_{\frac{1}{16}}(53-13x)\cdot\log_{5-x}0{,}25 \ge 1$.

Решение.

Решение будем искать при условиях:

$$\begin{cases} 53-13x>0, \\ 5-x>0, \\ 5-x\ne 1, \end{cases}$$

откуда $x \in (-\infty;\ 4) \cup \left(4;\ \frac{53}{13}\right)$. Для таких x получаем:

$$\frac{\log_{\frac{1}{16}}(53-13x)}{\log_{\frac{1}{4}}(5-x)} = \frac{\log_{\frac{1}{4}}(53-13x)}{2\log_{\frac{1}{4}}(5-x)} = \frac{\log_{\frac{1}{4}}(53-13x)}{\log_{\frac{1}{4}}(5-x)^2}.$$

Исходное неравенство примет вид: $\frac{\log_{\frac{1}{4}}(53-13x)}{\log_{\frac{1}{4}}(5-x)^2} \ge 1$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in (-\infty;\ 4)$, тогда $(5-x)^2 > 1$, откуда $\log_{\frac{1}{4}}(5-x)^2 < 0$, поэтому

$$\log_{\frac{1}{4}}(53-13x) \le \log_{\frac{1}{4}}(5-x)^2;\ 53-13x \ge 25-10x+x^2;\ (x+7)(x-4)\le 0;$$

$$-7 \le x \le 4,$$

откуда $x \in [-7;\ 4)$.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in \left(4;\ \frac{53}{13}\right)$, тогда $(5-x)^2 < 1$, откуда $\log_{\frac{1}{4}}(5-x)^2 > 0$, поэтому

$$\log_{\frac{1}{4}}(53-13x) \ge \log_{\frac{1}{4}}(5-x)^2;\ 53-13x \le 25-10x+x^2;\ (x+7)(x-4) \ge 0;$$

$$x \le -7,\ x \ge 4,$$

откуда $x \in \left(4;\ \frac{53}{13}\right)$.

Ответ: $[-7;\ 4)$; $\left(4;\ \frac{53}{13}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного конечным количеством значений переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	2
Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам или верно найдены все значения переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Через вершину C правильного шестиугольника $ABCDEF$ проведена прямая, пересекающая прямую BE в точке P. Известно, что эта прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как $1:17$. Найдите отношение $BP:PE$.

Решение.

Пусть O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$, S — его площадь, H — точка пересечения диагоналей BE и AC. Площади частей, на которые прямая CP разбивает шестиугольник, равны $\frac{1}{18}S$ и $\frac{17}{18}S$.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

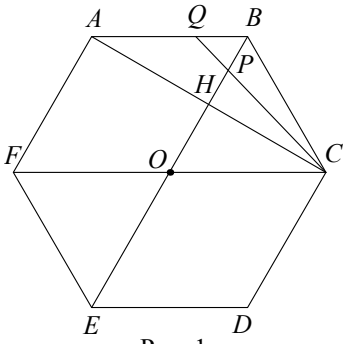


Рис. 1

Предположим, что точка B — вершина меньшей по площади части шестиугольника (рис. 1). Тогда точка P лежит между точками B и H, так как

$$S_{ABC} = \frac{1}{6}S > \frac{1}{18}S,$$

значит, прямая CP пересекает сторону AB в некоторой точке Q. При этом площадь треугольника BCQ в три раза меньше площади треугольника ABC, значит, $AQ = 2BQ$.

Треугольник OPC подобен треугольнику BPQ с коэффициентом 3 $(OC \parallel BQ;\ OC = AB = 3BQ)$. Обозначим $PB = x$. Тогда

$$OP = 3x;\ OE = OB = 4x;\ PE = OE + OP = 7x.$$

Следовательно, $\frac{BP}{PE} = \frac{1}{7}$.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

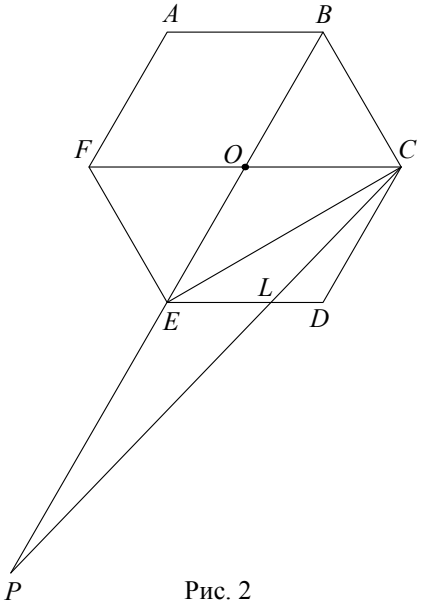


Рис. 2

Пусть теперь точка B — вершина большей по площади части шестиугольника (рис. 2). Тогда точка P лежит на продолжении диагонали BE за точку E, так как

$$S_{CDE} = \frac{1}{6}S > \frac{1}{18}S,$$

значит, прямая CP пересекает сторону DE в некоторой точке L. При этом площадь треугольника CDL в три раза меньше площади треугольника CDE, значит, $EL = 2DL$.

Треугольник PLE подобен треугольнику CLD с коэффициентом 2 $(PE \parallel CD)$, значит, $PE = 2CD = BE$. Следовательно, $\frac{BP}{PE} = \frac{BE+EP}{PE} = \frac{2PE}{PE} = 2$.

Ответ: $\frac{1}{7}$ или 2.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

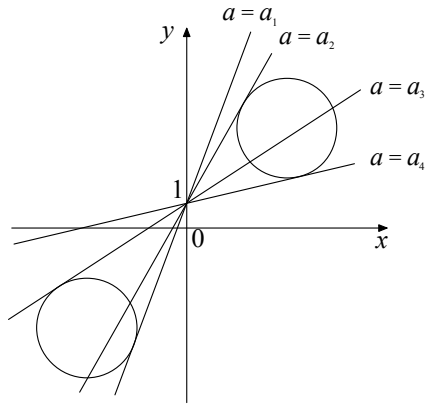
C5 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x|-4)^2 + (|y|-4)^2 = 4, \\ y = ax+1, \\ xy > 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Первое уравнение при условии $xy > 0$ задаёт на плоскости две окружности радиуса 2 с центрами $(4;4)$ и $(-4;-4)$, а второе — прямую l с угловым коэффициентом a, проходящую через точку $(0;1)$ (см. рис.).



Прямая l касается окружности с центром в точке $(-4;-4)$ радиуса 2 тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} y = ax+1, \\ (x+4)^2 + (y+4)^2 = 4 \end{cases} \qquad (1)$$

имеет единственное решение. Для этого необходимо, чтобы квадратное уравнение

$$(x+4)^2 + (ax+1+4)^2 = 4$$

имело единственное решение. Приведём уравнение к виду

$$(a^2+1)x^2 + 2(5a+4)x + 37 = 0$$

и из равенства нулю дискриминанта получим:

$$(5a+4)^2 - 37(a^2+1) = 0,$$

откуда $12a^2 - 40a + 21 = 0$.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Значит, $a_1 = \frac{10+\sqrt{37}}{6}$, $a_3 = \frac{10-\sqrt{37}}{6}$. Система (1) имеет решения только при $\frac{10-\sqrt{37}}{6} \le a \le \frac{10+\sqrt{37}}{6}$.

Аналогично, прямая l касается окружности с центром в точке $(4;4)$ радиуса 2 тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} y = ax+1, \\ (x-4)^2 + (y-4)^2 = 4 \end{cases} \qquad (2)$$

имеет единственное решение. Для этого необходимо, чтобы квадратное уравнение

$$(x-4)^2 + (ax+1-4)^2 = 4$$

имело единственное решение. Приведём уравнение к виду

$$(a^2+1)x^2 - 2(3a+4)x + 21 = 0$$

и из равенства нулю дискриминанта получим:

$$(3a+4)^2 - 21(a^2+1) = 0,$$

откуда $12a^2 - 24a + 5 = 0$.

Значит, $a_2 = \frac{6+\sqrt{21}}{6}$, $a_4 = \frac{6-\sqrt{21}}{6}$. Система (2) имеет решения только при $\frac{6-\sqrt{21}}{6} \le a \le \frac{6+\sqrt{21}}{6}$.

Так как $\frac{6-\sqrt{21}}{6} < \frac{10-\sqrt{37}}{6} < \frac{6+\sqrt{21}}{6} < \frac{10+\sqrt{37}}{6}$, в ответ попадают только $a_4 = \frac{6-\sqrt{21}}{6}$ и $a_1 = \frac{10+\sqrt{37}}{6}$.

Ответ: $\frac{6-\sqrt{21}}{6}$; $\frac{10+\sqrt{37}}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но – или в ответ включено также и одно-два неверных значений; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения окружностей и прямой; – или квадратных уравнений с параметром	1

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Набор состоит из тридцати семи натуральных чисел, среди которых есть числа 4, 5 и 6. Среднее арифметическое любых тридцати двух чисел этого набора меньше 2.

а) Может ли такой набор содержать ровно пятнадцать единиц?

б) Может ли такой набор содержать менее пятнадцати единиц?

в) Докажите, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 33.

Решение.

а) Да, может. Например, сумма любых тридцати двух чисел из набора $6,\ 5,\ 4,\ \underbrace{2,\ \ldots,\ 2}_{19},\ \underbrace{1,\ \ldots,\ 1}_{15}$ не больше, чем $6+5+4+2\cdot 19+10 = 63$, и их среднее арифметическое меньше 2.

б) Нет, не может. Выпишем все числа слева направо в порядке убывания и рассмотрим первые 32 числа, считая слева. Их сумма S меньше 64. Пусть количество единиц среди них равно x. Тогда

$$63 \ge S \ge x + 2(29-x) + 4 + 5 + 6;\ x \ge 10,$$

то есть среди выбранных 32 чисел всегда есть десять единиц. Каждое из оставшихся пяти чисел равно 1, и поэтому во всём наборе есть как минимум пятнадцать единиц.

в) Используя пятнадцать единиц и числа 4, 5, 6, можно составить все суммы от 1 до 30.

Если среди оставшихся девятнадцати чисел есть число от 3 до 32, то его можно добавить и получить в сумме 33.

Если среди оставшихся девятнадцати чисел нет чисел от 3 до 32, то каждое из них или равно 1, или равно 2, или больше 32. Так как сумма этих девятнадцати чисел не больше 63, то только одно из чисел может быть больше 32. Значит, в этом случае как минимум восемнадцать чисел равны 1 или 2. Используя их и пятнадцать единиц, всегда можно получить сумму, равную 33.

Ответ: а) да, б) нет.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Решение в целом верное, содержит: – или верный пример для п. а) и обоснованное выполнение п. в); – или верный пример для п. а), обоснованное выполнение п. б), а ход доказательства п. в) в целом верный, но содержит легко устранимые неточности	3
Решение содержит: – или верный пример для п. а) и обоснованное выполнение п. б); – или обоснованное выполнение п. в) (при не выполненных п. а) и п. б)	2
Решение содержит: – или верный пример для п. а); – или обоснованное выполнение п. б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $(\operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3}\operatorname{tg} x)\cdot\sqrt{-5\cos x} = 0$.

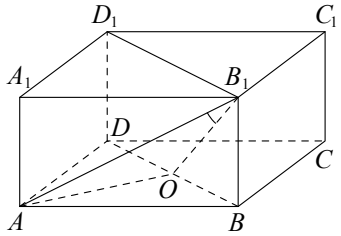
Решение.
Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x < 0$.
Получаем уравнение $\operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3}\operatorname{tg} x = 0$, откуда $\operatorname{tg} x = 0$ или $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.
Учитывая, что $\cos x < 0$, из уравнения $\operatorname{tg} x = 0$ получаем: $x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; а из уравнения $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ получаем: $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно найдены все значения переменной x, при которых равен нулю первый сомножитель левой части исходного уравнения. Возможно отбор найденных значений или не произведён, или произведён неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$, стороны основания которой равны 8, а боковые рёбра равны 2, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1.

Решение.
Пусть O — середина отрезка BD. Отрезок AO является перпендикуляром, опущенным из точки A на плоскость BDD_1. Угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1 равен углу AB_1O.



© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

В прямоугольном треугольнике AB_1O $AO = 4\sqrt{2}$, $AB_1 = 2\sqrt{17}$.
Следовательно, $\sin\angle AB_1O = \frac{2\sqrt{34}}{17}$.

Ответ: $\arcsin\frac{2\sqrt{34}}{17}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Способ нахождения искомого угла верный, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не удовлетворяет ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите неравенство $\log_{\frac{1}{9}}(7-6x)\cdot\log_{2-x}\frac{1}{3} \ge 1$.

Решение.
Решение будем искать при условиях:

$$\begin{cases} 7-6x>0, \\ 2-x>0, \\ 2-x\ne 1, \end{cases}$$

откуда $x \in (-\infty;\ 1) \cup \left(1;\ \frac{7}{6}\right)$. Для таких x получаем:

$$\frac{\log_{\frac{1}{9}}(7-6x)}{\log_{\frac{1}{3}}(2-x)} = \frac{\log_{\frac{1}{3}}(7-6x)}{2\log_{\frac{1}{3}}(2-x)} = \frac{\log_{\frac{1}{3}}(7-6x)}{\log_{\frac{1}{3}}(2-x)^2}.$$

Исходное неравенство примет вид: $\frac{\log_{\frac{1}{3}}(7-6x)}{\log_{\frac{1}{3}}(2-x)^2} \ge 1$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in (-\infty;\ 1)$, тогда $(2-x)^2 > 1$, откуда $\log_{\frac{1}{3}}(2-x)^2 < 0$, поэтому

$$\log_{\frac{1}{3}}(7-6x) \le \log_{\frac{1}{3}}(2-x)^2;\ 7-6x \ge 4-4x+x^2;\ (x+3)(x-1) \le 0;\ -3 \le x \le 1,$$

откуда $x \in [-3;\ 1)$.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in \left(1;\ \frac{7}{6}\right)$, тогда $(2-x)^2 < 1$, откуда $\log_{\frac{1}{3}}(2-x)^2 > 0$, поэтому

$$\log_{\frac{1}{3}}(7-6x) \ge \log_{\frac{1}{3}}(2-x)^2;\ 7-6x \le 4-4x+x^2;\ (x+3)(x-1) \ge 0;$$

$$x \le -3,\ x \ge 1,$$

откуда $x \in \left(1;\ \frac{7}{6}\right)$.

Ответ: $[-3;\ 1)$; $\left(1;\ \frac{7}{6}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного конечным количеством значений переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	2
Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам или верно найдены все значения переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Через вершину C правильного шестиугольника $ABCDEF$ проведена прямая, пересекающая прямую BE в точке P. Известно, что эта прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как $1:17$. Найдите отношение $BP:PE$.

Решение.

Пусть O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$, S — его площадь, H — точка пересечения диагоналей BE и AC. Площади частей, на которые прямая CP разбивает шестиугольник, равны $\frac{1}{18}S$ и $\frac{17}{18}S$.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

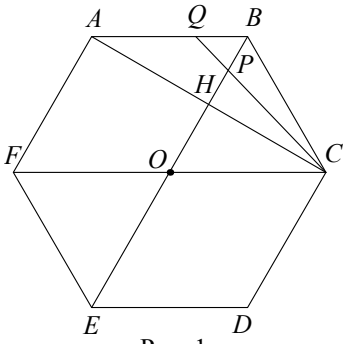


Рис. 1

Предположим, что точка B — вершина меньшей по площади части шестиугольника (рис. 1). Тогда точка P лежит между точками B и H, так как

$$S_{ABC} = \frac{1}{6}S > \frac{1}{18}S,$$

значит, прямая CP пересекает сторону AB в некоторой точке Q. При этом площадь треугольника BCQ в три раза меньше площади треугольника ABC, значит, $AQ = 2BQ$.

Треугольник OPC подобен треугольнику BPQ с коэффициентом 3 $(OC \parallel BQ;\ OC = AB = 3BQ)$. Обозначим $PB = x$. Тогда

$$OP = 3x;\ OE = OB = 4x;\ PE = OE + OP = 7x.$$

Следовательно, $\frac{BP}{PE} = \frac{1}{7}$.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

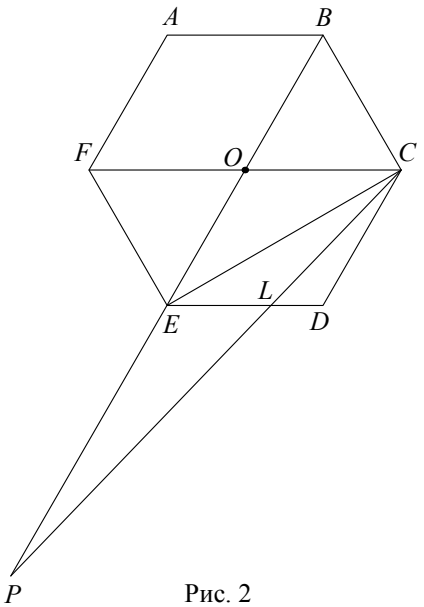


Рис. 2

Пусть теперь точка B — вершина большей по площади части шестиугольника (рис. 2). Тогда точка P лежит на продолжении диагонали BE за точку E, так как

$$S_{CDE} = \frac{1}{6}S > \frac{1}{18}S,$$

значит, прямая CP пересекает сторону DE в некоторой точке L. При этом площадь треугольника CDL в три раза меньше площади треугольника CDE, значит, $EL = 2DL$.

Треугольник PLE подобен треугольнику CLD с коэффициентом 2 $(PE \parallel CD)$, значит, $PE = 2CD = BE$. Следовательно, $\frac{BP}{PE} = \frac{BE+EP}{PE} = \frac{2PE}{PE} = 2$.

Ответ: $\frac{1}{7}$ или 2.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

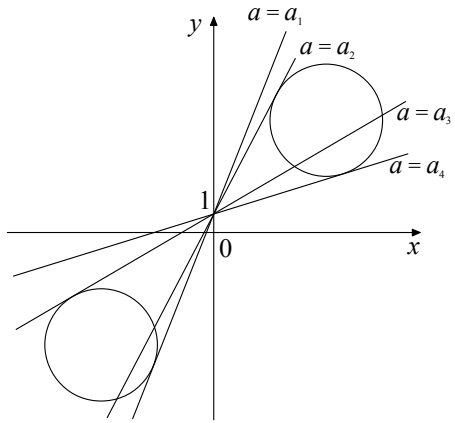
C5 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x|-6)^2 + (|y|-6)^2 = 9, \\ y = ax+1, \\ xy > 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Первое уравнение при условии $xy > 0$ задаёт на плоскости две окружности радиуса 3 с центрами $(6;6)$ и $(-6;-6)$, а второе — прямую l с угловым коэффициентом a, проходящую через точку $(0;1)$ (см. рис.).



Прямая l касается окружности с центром в точке $(-6;-6)$ радиуса 3 тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} y = ax+1, \\ (x+6)^2 + (y+6)^2 = 9 \end{cases} \qquad (1)$$

имеет единственное решение. Для этого необходимо, чтобы квадратное уравнение

$$(x+6)^2 + (ax+1+6)^2 = 9$$

имело единственное решение. Приведём уравнение к виду

$$(a^2+1)x^2 + 2(7a+6)x + 76 = 0$$

и из равенства нулю дискриминанта получим:

$$(7a+6)^2 - 76(a^2+1) = 0,$$

откуда $27a^2 - 84a + 40 = 0$.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Значит, $a_1 = \frac{14+2\sqrt{19}}{9}$, $a_3 = \frac{14-2\sqrt{19}}{9}$. Система (1) имеет решения только при $\frac{14-2\sqrt{19}}{9} \le a \le \frac{14+2\sqrt{19}}{9}$.

Аналогично, прямая l касается окружности с центром в точке $(6;6)$ радиуса 3 тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} y = ax+1, \\ (x-6)^2 + (y-6)^2 = 9 \end{cases} \qquad (2)$$

имеет единственное решение. Для этого необходимо, чтобы квадратное уравнение

$$(x-6)^2 + (ax+1-6)^2 = 9$$

имело единственное решение. Приведём уравнение к виду

$$(a^2+1)x^2 - 2(5a+6)x + 52 = 0$$

и из равенства нулю дискриминанта получим:

$$(5a+6)^2 - 52(a^2+1) = 0,$$

откуда $27a^2 - 60a + 16 = 0$.

Значит, $a_2 = \frac{10+2\sqrt{13}}{9}$, $a_4 = \frac{10-2\sqrt{13}}{9}$. Система (2) имеет решения только при $\frac{10-2\sqrt{13}}{9} \le a \le \frac{10+2\sqrt{13}}{9}$.

Так как $\frac{10-2\sqrt{13}}{9} < \frac{14-2\sqrt{19}}{9} < \frac{10+2\sqrt{13}}{9} < \frac{14+2\sqrt{19}}{9}$, в ответ попадают только $a_4 = \frac{10-2\sqrt{13}}{9}$ и $a_1 = \frac{14+2\sqrt{19}}{9}$.

Ответ: $\frac{10-2\sqrt{13}}{9}$; $\frac{14+2\sqrt{19}}{9}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но – или в ответ включено также и одно-два неверных значений; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения окружностей и прямой; – или квадратных уравнений с параметром	1

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Набор состоит из тридцати трёх натуральных чисел, среди которых есть числа 3, 4 и 5. Среднее арифметическое любых двадцати семи чисел этого набора меньше 2.

а) Может ли такой набор содержать ровно тринадцать единиц?

б) Может ли такой набор содержать менее тринадцати единиц?

в) Докажите, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 28.

Решение.

а) Да, может. Например, сумма любых двадцати семи чисел из набора $5,\ 4,\ 3,\ \underbrace{2,\dots,\ 2}_{17},\ \underbrace{1,\dots,\ 1}_{13}$ не больше, чем $5+4+3+2\cdot 17+7=53$, и их среднее арифметическое меньше 2.

б) Нет, не может. Выпишем все числа слева направо в порядке убывания и рассмотрим первые 27 чисел, считая слева. Их сумма S меньше 54. Пусть количество единиц среди них равно x. Тогда

$$53 \ge S \ge x + 2(24-x) + 3 + 4 + 5,\ \ x \ge 7,$$

то есть среди выбранных 27 чисел всегда есть семь единиц. Каждое из оставшихся шести чисел равно 1, и поэтому во всём наборе есть как минимум тринадцать единиц.

в) Используя тринадцать единиц и числа 3, 4, 5, можно составить все суммы от 1 до 25.

Если среди оставшихся семнадцати чисел есть число от 3 до 27, то его можно добавить и получить в сумме 28.

Если среди оставшихся семнадцати чисел нет чисел от 3 до 27, то каждое из них или равно 1, или равно 2, или больше 27. Так как сумма этих семнадцати чисел не больше 53, то только одно из чисел может быть больше 27. Значит, в этом случае как минимум шестнадцать чисел равны 1 или 2. Используя их и тринадцать единиц, всегда можно получить сумму, равную 28.

Ответ: а) да, б) нет.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Решение в целом верное, содержит: – или верный пример для п. а) и обоснованное выполнение п. в); – или верный пример для п. а), обоснованное выполнение п. б), а ход доказательства п. в) в целом верный, но содержит легко устранимые неточности	3
Решение содержит: – или верный пример для п. а) и обоснованное выполнение п. б); – или обоснованное выполнение п. в) (при не выполненных п. а) и п. б)	2
Решение содержит: – или верный пример для п. а); – или обоснованное выполнение п. б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $(\operatorname{tg}^2 x+\sqrt{3}\operatorname{tg} x)\cdot\sqrt{7\cos x}=0$.

Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x>0$.

Получаем уравнение $\operatorname{tg}^2 x+\sqrt{3}\operatorname{tg} x=0$, откуда $\operatorname{tg} x=0$ или $\operatorname{tg} x=-\sqrt{3}$.

Учитывая, что $\cos x>0$, из уравнения $\operatorname{tg} x=0$ получаем: $x=2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; а из уравнения $\operatorname{tg} x=-\sqrt{3}$ получаем: $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

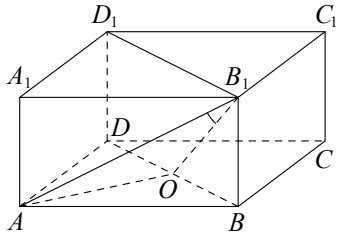
Ответ: $2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}; -\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно найдены все значения переменной x, при которых равен нулю первый сомножитель левой части исходного уравнения. Возможно отбор найденных значений или не произведён, или произведён неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$, стороны основания которой равны 8, а боковые рёбра равны 2, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1.

Решение.

Пусть O — середина отрезка BD. Отрезок AO является перпендикуляром, опущенным из точки A на плоскость BDD_1. Угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1 равен углу AB_1O.



© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

В прямоугольном треугольнике AB_1O $AO=4\sqrt{2}$, $AB_1=2\sqrt{17}$. Следовательно, $\sin\angle AB_1O=\frac{2\sqrt{34}}{17}$.

Ответ: $\arcsin\frac{2\sqrt{34}}{17}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Способ нахождения искомого угла верный, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не удовлетворяет ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите неравенство $\log_{0,04}(55-9x)\cdot\log_{7-x}0,2\ge 1$.

Решение.

Решение будем искать при условиях:

$$\begin{cases}55-9x>0,\\7-x>0,\\7-x\ne 1,\end{cases}$$

откуда $x\in(-\infty;\ 6)\cup\left(6;\ \frac{55}{9}\right)$. Для таких x получаем:

$$\frac{\log_{0,04}(55-9x)}{\log_{0,2}(7-x)}=\frac{\log_{0,2}(55-9x)}{2\log_{0,2}(7-x)}=\frac{\log_{0,2}(55-9x)}{\log_{0,2}(7-x)^2}.$$

Исходное неравенство примет вид: $\frac{\log_{0,2}(55-9x)}{\log_{0,2}(7-x)^2}\ge 1$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x\in(-\infty;\ 6)$, тогда $(7-x)^2>1$, откуда $\log_{0,2}(7-x)^2<0$, поэтому

$$\log_{0,2}(55-9x)\le\log_{0,2}(7-x)^2;\ 55-9x\ge 49-14x+x^2;\ (x+1)(x-6)\le 0;$$
$$-1\le x\le 6,$$

откуда $x\in[-1;\ 6)$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x\in\left(6;\ \frac{55}{9}\right)$, тогда $(7-x)^2<1$, откуда $\log_{0,2}(7-x)^2>0$, поэтому

$$\log_{0,2}(55-9x)\ge\log_{0,2}(7-x)^2;\ 55-9x\le 49-14x+x^2;\ (x+1)(x-6)\ge 0;$$
$$x\le -1,\ x\ge 6,$$

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

откуда $x \in \left(6;\ \frac{55}{9}\right)$.

Ответ: $[-1;\ 6)$; $\left(6;\ \frac{55}{9}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного конечным количеством значений переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	2
Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам или верно найдены все значения переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Через вершину C правильного шестиугольника $ABCDEF$ проведена прямая, пересекающая прямую AD в точке Q. Известно, что эта прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как $5:13$. Найдите отношение $AQ:QD$.

Решение.

Пусть O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$, S — его площадь, K — точка пересечения диагоналей AD и CE. Площади частей, на которые прямая CQ разбивает шестиугольник, равны $\frac{5}{18}S$ и $\frac{13}{18}S$.

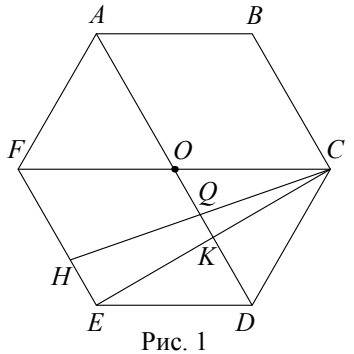


Рис. 1

Предположим, что точка D — вершина меньшей по площади части шестиугольника (рис. 1). Тогда точка Q лежит между точками O и K, так как

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

$$S_{CDE} = \frac{1}{6}S < \frac{5}{18}S;\ S_{CDEF} = \frac{1}{2}S > \frac{5}{18}S,$$

значит, прямая CQ пересекает сторону EF в некоторой точке H. При этом

$$S_{CEH} = S_{CDEH} - S_{CDE} = \frac{5}{18}S - \frac{1}{6}S = \frac{1}{9}S = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}S = \frac{1}{3}S_{CEF},$$

то есть площадь треугольника CEH в три раза меньше площади треугольника CEF, значит, $EH = \frac{1}{3}EF$, а так как $OK \parallel EF$, то $QK = \frac{1}{3}OK$.

Обозначим $QK = x$. Тогда

$$KD = OK = 3x;\ QD = QK + KD = 4x;$$

$$AO = OD = 2OK = 6x;\ AQ = AO + OQ = 8x,$$

следовательно, $\frac{AQ}{QD} = 2$.

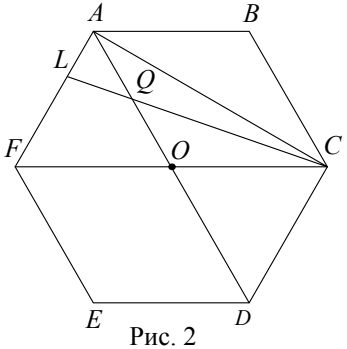


Рис. 2

Пусть теперь точка D — вершина большей по площади части шестиугольника (рис. 2). Аналогично предыдущему случаю доказывается, что тогда точка Q лежит между точками A и O, значит, прямая CQ пересекает сторону AF в некоторой точке L и при этом площадь треугольника CAL в три раза меньше площади треугольника CAF, значит, $AL = \frac{1}{3}AF = \frac{1}{3}CD$.

Треугольник AQL подобен треугольнику DQC с коэффициентом $\frac{1}{3}$ $(AL \parallel CD)$, следовательно, $\frac{AQ}{QD} = \frac{1}{3}$.

Ответ: 2 или $\frac{1}{3}$.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

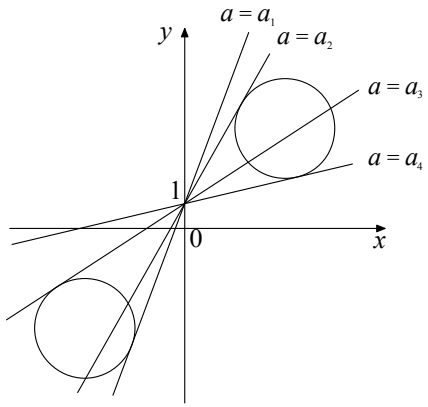
C5 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \left(|x|-4\right)^2+\left(|y|-4\right)^2=4, \\ y=ax+1, \\ xy>0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Первое уравнение при условии $xy>0$ задаёт на плоскости две окружности радиуса 2 с центрами $(4;4)$ и $(-4;-4)$, а второе — прямую l с угловым коэффициентом a, проходящую через точку $(0;1)$ (см. рис.).



Прямая l касается окружности с центром в точке $(-4;-4)$ радиуса 2 тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} y=ax+1, \\ (x+4)^2+(y+4)^2=4 \end{cases} \qquad (1)$$

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

имеет единственное решение. Для этого необходимо, чтобы квадратное уравнение

$$(x+4)^2+(ax+1+4)^2=4$$

имело единственное решение. Приведём уравнение к виду

$$\left(a^2+1\right)x^2+2(5a+4)x+37=0$$

и из равенства нулю дискриминанта получим:

$$(5a+4)^2-37\left(a^2+1\right)=0,$$

откуда $12a^2-40a+21=0$.

Значит, $a_1=\dfrac{10+\sqrt{37}}{6}$, $a_3=\dfrac{10-\sqrt{37}}{6}$. Система (1) имеет решения только при $\dfrac{10-\sqrt{37}}{6}\le a\le\dfrac{10+\sqrt{37}}{6}$.

Аналогично, прямая l касается окружности с центром в точке $(4;4)$ радиуса 2 тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} y=ax+1, \\ (x-4)^2+(y-4)^2=4 \end{cases} \qquad (2)$$

имеет единственное решение. Для этого необходимо, чтобы квадратное уравнение

$$(x-4)^2+(ax+1-4)^2=4$$

имело единственное решение. Приведём уравнение к виду

$$\left(a^2+1\right)x^2-2(3a+4)x+21=0$$

и из равенства нулю дискриминанта получим:

$$(3a+4)^2-21\left(a^2+1\right)=0,$$

откуда $12a^2-24a+5=0$.

Значит, $a_2=\dfrac{6+\sqrt{21}}{6}$, $a_4=\dfrac{6-\sqrt{21}}{6}$. Система (2) имеет решения только при $\dfrac{6-\sqrt{21}}{6}\le a\le\dfrac{6+\sqrt{21}}{6}$.

Так как $\dfrac{6-\sqrt{21}}{6}<\dfrac{10-\sqrt{37}}{6}<\dfrac{6+\sqrt{21}}{6}<\dfrac{10+\sqrt{37}}{6}$, в ответ попадают только $a_4=\dfrac{6-\sqrt{21}}{6}$ и $a_1=\dfrac{10+\sqrt{37}}{6}$.

Ответ: $\dfrac{6-\sqrt{21}}{6}$; $\dfrac{10+\sqrt{37}}{6}$.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но – или в ответ включено также и одно-два неверных значений; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения окружностей и прямой; – или квадратных уравнений с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Набор состоит из тридцати семи натуральных чисел, среди которых есть числа 3, 4 и 6. Среднее арифметическое любых тридцати чисел этого набора меньше 2.

а) Может ли такой набор содержать ровно пятнадцать единиц?

б) Может ли такой набор содержать менее пятнадцати единиц?

в) Докажите, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 31.

Решение.

а) Да, может. Например, сумма любых тридцати чисел из набора $6,\ 4,\ 3,\ \underbrace{2,\ldots,\ 2}_{19},\ \underbrace{1,\ldots,\ 1}_{15}$ не больше, чем $6+4+3+2\cdot 19+8=59$, и их среднее арифметическое меньше 2.

б) Нет, не может. Выпишем все числа слева направо в порядке убывания и рассмотрим первые 30 чисел, считая слева. Их сумма S меньше 60. Пусть количество единиц среди них равно x. Тогда

$$59 \ge S \ge x+2(27-x)+3+4+6;\ x \ge 8,$$

то есть среди выбранных 30 чисел всегда есть восемь единиц. Каждое из оставшихся семи чисел равно 1, и поэтому во всём наборе есть как минимум пятнадцать единиц.

в) Используя пятнадцать единиц и числа 3, 4, 6, можно составить все суммы от 1 до 28.

Если среди оставшихся девятнадцати чисел есть число от 3 до 30, то его можно добавить и получить в сумме 31.

Если среди оставшихся девятнадцати чисел нет чисел от 3 до 30, то каждое из них или равно 1, или равно 2, или больше 30. Так как сумма этих девятнадцати чисел не больше 59, то только одно из чисел может быть больше 30. Значит, в этом случае как минимум восемнадцать чисел равны 1 или 2. Используя их и пятнадцать единиц, всегда можно получить сумму, равную 31.

Ответ: а) да, б) нет.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Решение в целом верное, содержит: – или верный пример для п. а) и обоснованное выполнение п. в); – или верный пример для п. а), обоснованное выполнение п. б), а ход доказательства п. в) в целом верный, но содержит легко устранимые неточности	3
Решение содержит: – или верный пример для п. а) и обоснованное выполнение п. б); – или обоснованное выполнение п. в) (при не выполненных п. а) и п. б)	2
Решение содержит: – или верный пример для п. а); – или обоснованное выполнение п. б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\, x)\cdot\sqrt{-2\cos x} = 0$.

Решение.
Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x < 0$.

Получаем уравнение $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\, x = 0$, откуда $\mathrm{tg}\, x = 0$ или $\mathrm{tg}\, x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

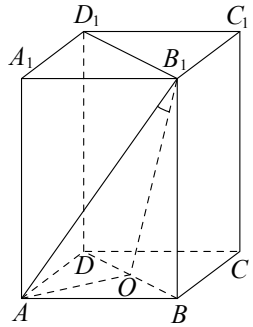
Учитывая, что $\cos x < 0$, из уравнения $\mathrm{tg}\, x = 0$ получаем: $x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; а из уравнения $\mathrm{tg}\, x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ получаем: $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно найдены все значения переменной x, при которых равен нулю первый сомножитель левой части исходного уравнения. Возможно отбор найденных значений или не произведён, или произведён неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$, стороны основания которой равны 5, а боковые рёбра равны 7, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1.

Решение.
Пусть O — середина отрезка BD. Отрезок AO является перпендикуляром, опущенным из точки A на плоскость BDD_1. Угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1 равен углу AB_1O.



© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

В прямоугольном треугольнике AB_1O $AO = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, $AB_1 = \sqrt{74}$.

Следовательно, $\sin\angle AB_1O = \frac{5\sqrt{37}}{74}$.

Ответ: $\arcsin\frac{5\sqrt{37}}{74}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Способ нахождения искомого угла верный, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не удовлетворяет ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите неравенство $\log_{0,04}(55-9x)\cdot\log_{7-x}0,2 \ge 1$.

Решение.
Решение будем искать при условиях:

$$\begin{cases} 55-9x>0, \\ 7-x>0, \\ 7-x\ne 1, \end{cases}$$

откуда $x \in (-\infty;\ 6)\cup\left(6;\ \frac{55}{9}\right)$. Для таких x получаем:

$$\frac{\log_{0,04}(55-9x)}{\log_{0,2}(7-x)} = \frac{\log_{0,2}(55-9x)}{2\log_{0,2}(7-x)} = \frac{\log_{0,2}(55-9x)}{\log_{0,2}(7-x)^2}.$$

Исходное неравенство примет вид: $\frac{\log_{0,2}(55-9x)}{\log_{0,2}(7-x)^2} \ge 1$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in (-\infty;\ 6)$, тогда $(7-x)^2 > 1$, откуда $\log_{0,2}(7-x)^2 < 0$, поэтому

$$\log_{0,2}(55-9x) \le \log_{0,2}(7-x)^2;\ 55-9x \ge 49-14x+x^2;\ (x+1)(x-6)\le 0;$$
$$-1 \le x \le 6,$$

откуда $x \in [-1;\ 6)$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in \left(6;\ \frac{55}{9}\right)$, тогда $(7-x)^2 < 1$, откуда $\log_{0,2}(7-x)^2 > 0$, поэтому

$$\log_{0,2}(55-9x) \ge \log_{0,2}(7-x)^2;\ 55-9x \le 49-14x+x^2;\ (x+1)(x-6)\ge 0;$$
$$x \le -1,\ x \ge 6,$$

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

откуда $x \in \left(6;\ \frac{55}{9}\right)$.

Ответ: $[-1;\ 6)$; $\left(6;\ \frac{55}{9}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного конечным количеством значений переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	2
Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам или верно найдены все значения переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Через вершину A правильного шестиугольника $ABCDEF$ проведена прямая, пересекающая прямую CF в точке K. Известно, что эта прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как $1:11$. Найдите отношение $CK:KF$.

Решение.

Пусть O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$, S — его площадь, L — точка пересечения диагоналей AE и CF. Площади частей, на которые прямая AK разбивает шестиугольник, равны $\frac{1}{12}S$ и $\frac{11}{12}S$.

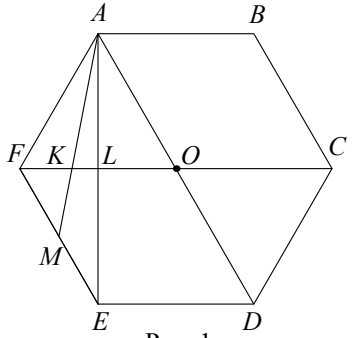


Рис. 1

Предположим, что точка F — вершина меньшей по площади части шестиугольника (рис. 1). Тогда точка K лежит между точками F и L, так как

$$S_{AEF} = \frac{1}{6}S > \frac{1}{12}S,$$

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

значит, прямая AK пересекает сторону EF в некоторой точке M. При этом треугольники AMF и AME равновеликие, значит, AM — медиана треугольника AEF, а так как FL — также медиана этого треугольника, то K — точка пересечения его медиан, поэтому $KF = 2KL$.

Обозначим $KL = a$. Тогда

$$KF = 2a;\ OL = LF = 3a;\ OC = OF = 2OL = 6a;$$

$$CK = OC + OL + KL = 10a.$$

Следовательно, $\frac{CK}{KF} = 5$.

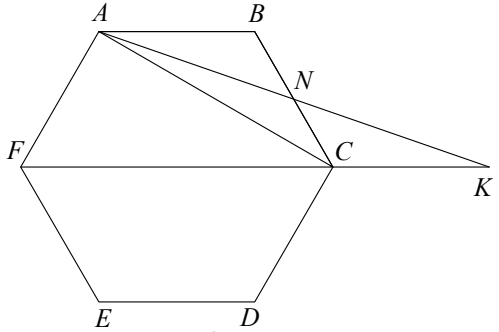


Рис. 2

Пусть теперь точка F — вершина большей по площади части шестиугольника (рис. 2). Тогда точка K лежит на продолжении диагонали CF за точку C, так как

$$S_{ABC} = \frac{1}{6}S > \frac{1}{12}S,$$

значит, прямая AK пересекает сторону BC в некоторой точке N. При этом треугольники ANB и ANC равновеликие, значит, AN — медиана треугольника ABC.

Треугольники ABN и KCN равны по стороне и двум прилежащим к ней углам $(CK \parallel AB)$. Обозначим $AB = b$. Тогда

$$CK = AB = b;\ CF = 2AB = 2b;\ KF = CK + CF = 3b.$$

Следовательно, $\frac{CK}{KF} = \frac{1}{3}$.

Ответ: 5 или $\frac{1}{3}$.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

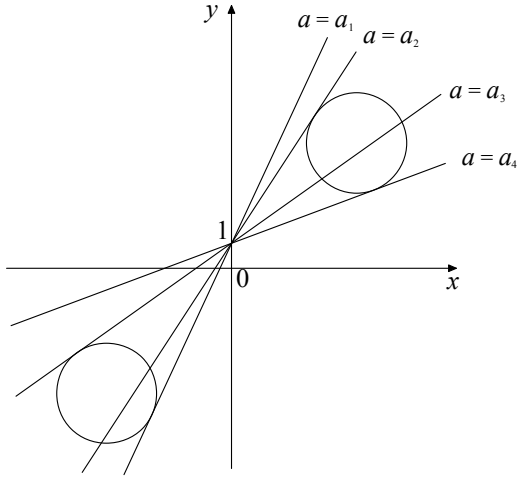
C5 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \left(|x|-5\right)^2+\left(|y|-5\right)^2=4, \\ y=ax+1, \\ xy>0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Первое уравнение при условии $xy>0$ задаёт на плоскости две окружности радиуса 2 с центрами $(5;5)$ и $(-5;-5)$, а второе — прямую l с угловым коэффициентом a, проходящую через точку $(0;1)$ (см. рис.).



Прямая l касается окружности с центром в точке $(-5;-5)$ радиуса 2 тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} y=ax+1, \\ (x+5)^2+(y+5)^2=4 \end{cases} \qquad (1)$$

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

имеет единственное решение. Для этого необходимо, чтобы квадратное уравнение

$$(x+5)^2+(ax+1+5)^2=4$$

имело единственное решение. Приведём уравнение к виду

$$\left(a^2+1\right)x^2+2(6a+5)+57=0$$

и из равенства нулю дискриминанта получим:

$$(6a+5)^2-57\left(a^2+1\right)=0,$$

откуда $21a^2-60a+32=0$.

Значит, $a_1=\dfrac{30+2\sqrt{57}}{21}$, $a_3=\dfrac{30-2\sqrt{57}}{21}$. Система (1) имеет решения только при $\dfrac{30-2\sqrt{57}}{21}\le a\le\dfrac{30+2\sqrt{57}}{21}$.

Аналогично, прямая l касается окружности с центром в точке $(5;5)$ радиуса 2 тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} y=ax+1, \\ (x-5)^2+(y-5)^2=4 \end{cases} \qquad (2)$$

имеет единственное решение. Для этого необходимо, чтобы квадратное уравнение

$$(x-5)^2+(ax+1-5)^2=4$$

имело единственное решение. Приведём уравнение к виду

$$\left(a^2+1\right)x^2-2(4a+5)+37=0$$

и из равенства нулю дискриминанта получим:

$$(4a+5)^2-37\left(a^2+1\right)=0,$$

откуда $21a^2-40a+12=0$.

Значит, $a_2=\dfrac{20+2\sqrt{37}}{21}$, $a_4=\dfrac{20-2\sqrt{37}}{21}$. Система (2) имеет решения только при $\dfrac{20-2\sqrt{37}}{21}\le a\le\dfrac{20+2\sqrt{37}}{21}$.

Так как $\dfrac{20-2\sqrt{37}}{21}<\dfrac{30-2\sqrt{57}}{21}<\dfrac{20+2\sqrt{37}}{21}<\dfrac{30+2\sqrt{57}}{21}$, в ответ попадают только $a_4=\dfrac{20-2\sqrt{37}}{21}$ и $a_1=\dfrac{30+2\sqrt{57}}{21}$.

Ответ: $\dfrac{20-2\sqrt{37}}{21}$; $\dfrac{30+2\sqrt{57}}{21}$.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но – или в ответ включено также и одно-два неверных значений; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения окружностей и прямой; – или квадратных уравнений с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Набор состоит из тридцати одного натурального числа, среди которых есть числа 3, 4 и 5. Среднее арифметическое любых двадцати шести чисел этого набора меньше 2.

а) Может ли такой набор содержать ровно двенадцать единиц?

б) Может ли такой набор содержать менее двенадцати единиц?

в) Докажите, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 27.

Решение.

а) Да, может. Например, сумма любых двадцати шести чисел из набора $5,\ 4,\ 3,\ \underbrace{2,\ \ldots,\ 2}_{16},\ \underbrace{1,\ \ldots,\ 1}_{12}$ не больше, чем $5+4+3+2\cdot 16+7=51$, и их среднее арифметическое меньше 2.

б) Нет, не может. Выпишем все числа слева направо в порядке убывания и рассмотрим первые 26 чисел, считая слева. Их сумма S меньше 52. Пусть количество единиц среди них равно x. Тогда

$$51 \ge S \ge x+2(23-x)+3+4+5;\ x \ge 7,$$

то есть среди выбранных 26 чисел всегда есть семь единиц. Каждое из оставшихся пяти чисел равно 1, и поэтому во всём наборе есть как минимум двенадцать единиц.

в) Используя двенадцать единиц и числа 3, 4, 5, можно составить все суммы от 1 до 24.

Если среди оставшихся шестнадцати чисел есть число от 3 до 26, то его можно добавить и получить в сумме 27.

Если среди оставшихся шестнадцати чисел нет чисел от 3 до 26, то каждое из них или равно 1, или равно 2, или больше 26. Так как сумма этих шестнадцати чисел не больше 51, то только одно из чисел может быть больше 26. Значит, в этом случае как минимум пятнадцать чисел равны 1 или 2. Используя их и двенадцать единиц, всегда можно получить сумму, равную 27.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Ответ: а) да, б) нет.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Решение в целом верное, содержит: – или верный пример для п. а) и обоснованное выполнение п. в); – или верный пример для п. а), обоснованное выполнение п. б), а ход доказательства п. в) в целом верный, но содержит легко устранимые неточности	3
Решение содержит: – или верный пример для п. а) и обоснованное выполнение п. б); – или обоснованное выполнение п. в) (при не выполненных п. а) и п. б)	2
Решение содержит: – или верный пример для п. а); – или обоснованное выполнение п. б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $(\operatorname{tg}^2 x+\sqrt{3}\operatorname{tg} x)\cdot\sqrt{7\cos x}=0$.

Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x>0$.

Получаем уравнение $\operatorname{tg}^2 x+\sqrt{3}\operatorname{tg} x=0$, откуда $\operatorname{tg} x=0$ или $\operatorname{tg} x=-\sqrt{3}$.

Учитывая, что $\cos x>0$, из уравнения $\operatorname{tg} x=0$ получаем: $x=2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; а из уравнения $\operatorname{tg} x=-\sqrt{3}$ получаем: $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

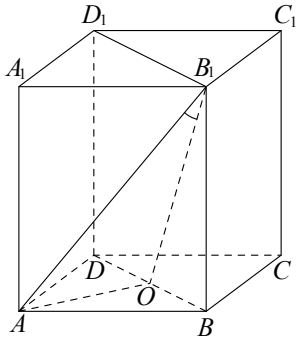
Ответ: $2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}; -\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно найдены все значения переменной x, при которых равен нулю первый сомножитель левой части исходного уравнения. Возможно отбор найденных значений или не произведён, или произведён неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$, стороны основания которой равны 3, а боковые рёбра равны 4, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1.

Решение.

Пусть O — середина отрезка BD. Отрезок AO является перпендикуляром, опущенным из точки A на плоскость BDD_1. Угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1 равен углу AB_1O.



© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

В прямоугольном треугольнике AB_1O $AO=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $AB_1=5$.

Следовательно, $\sin\angle AB_1O=\frac{3\sqrt{2}}{10}$.

Ответ: $\arcsin\frac{3\sqrt{2}}{10}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Способ нахождения искомого угла верный, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не удовлетворяет ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите неравенство $\log_{\frac{1}{16}}(53-13x)\cdot\log_{5-x}0{,}25\ge 1$.

Решение.

Решение будем искать при условиях:

$$\begin{cases}53-13x>0,\\5-x>0,\\5-x\ne 1,\end{cases}$$

откуда $x\in(-\infty;\ 4)\cup\left(4;\ \frac{53}{13}\right)$. Для таких x получаем:

$$\frac{\log_{\frac{1}{16}}(53-13x)}{\log_{\frac{1}{4}}(5-x)}=\frac{\log_{\frac{1}{4}}(53-13x)}{2\log_{\frac{1}{4}}(5-x)}=\frac{\log_{\frac{1}{4}}(53-13x)}{\log_{\frac{1}{4}}(5-x)^2}.$$

Исходное неравенство примет вид: $\dfrac{\log_{\frac{1}{4}}(53-13x)}{\log_{\frac{1}{4}}(5-x)^2}\ge 1$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x\in(-\infty;\ 4)$, тогда $(5-x)^2>1$, откуда $\log_{\frac{1}{4}}(5-x)^2<0$, поэтому

$$\log_{\frac{1}{4}}(53-13x)\le\log_{\frac{1}{4}}(5-x)^2;\ 53-13x\ge 25-10x+x^2;\ (x+7)(x-4)\le 0;$$

$$-7\le x\le 4,$$

откуда $x\in[-7;\ 4)$.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in \left(4;\ \frac{53}{13}\right)$, тогда $(5-x)^2 < 1$, откуда $\log_{\frac{1}{4}}(5-x)^2 > 0$, поэтому

$$\log_{\frac{1}{4}}(53-13x) \ge \log_{\frac{1}{4}}(5-x)^2;\ 53-13x \le 25-10x+x^2;\ (x+7)(x-4) \ge 0;$$

$$x \le -7,\ x \ge 4,$$

откуда $x \in \left(4;\ \frac{53}{13}\right)$.

Ответ: $[-7;\ 4)$; $\left(4;\ \frac{53}{13}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного конечным количеством значений переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	2
Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам или верно найдены все значения переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Через вершину A правильного шестиугольника $ABCDEF$ проведена прямая, пересекающая прямую CF в точке K. Известно, что эта прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как $1:11$. Найдите отношение $CK:KF$.

Решение.

Пусть O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$, S — его площадь, L — точка пересечения диагоналей AE и CF. Площади частей, на которые прямая AK разбивает шестиугольник, равны $\frac{1}{12}S$ и $\frac{11}{12}S$.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

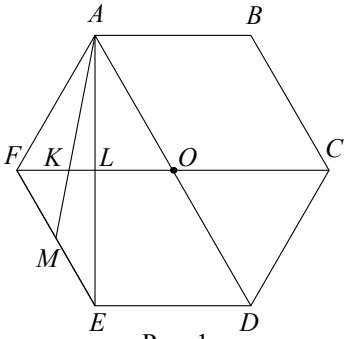


Рис. 1

Предположим, что точка F — вершина меньшей по площади части шестиугольника (рис. 1). Тогда точка K лежит между точками F и L, так как

$$S_{AEF} = \frac{1}{6}S > \frac{1}{12}S,$$

значит, прямая AK пересекает сторону EF в некоторой точке M. При этом треугольники AMF и AME равновеликие, значит, AM — медиана треугольника AEF, а так как FL — также медиана этого треугольника, то K — точка пересечения его медиан, поэтому $KF = 2KL$.

Обозначим $KL = a$. Тогда

$$KF = 2a;\ OL = LF = 3a;\ OC = OF = 2OL = 6a;$$

$$CK = OC + OL + KL = 10a.$$

Следовательно, $\frac{CK}{KF} = 5$.

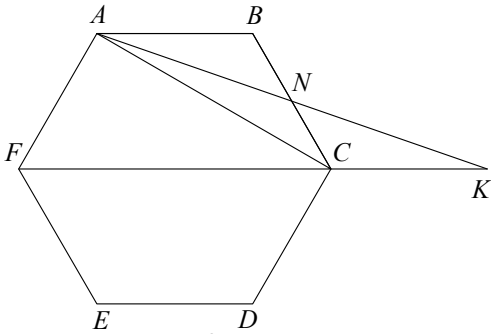


Рис. 2

Пусть теперь точка F — вершина большей по площади части шестиугольника (рис. 2). Тогда точка K лежит на продолжении диагонали CF за точку C, так как

$$S_{ABC} = \frac{1}{6}S > \frac{1}{12}S,$$

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

значит, прямая AK пересекает сторону BC в некоторой точке N. При этом треугольники ANB и ANC равновеликие, значит, AN — медиана треугольника ABC.

Треугольники ABN и KCN равны по стороне и двум прилежащим к ней углам $(CK \parallel AB)$. Обозначим $AB = b$. Тогда

$$CK = AB = b;\ CF = 2AB = 2b;\ KF = CK + CF = 3b.$$

Следовательно, $\dfrac{CK}{KF} = \dfrac{1}{3}$.

Ответ: 5 или $\dfrac{1}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых система

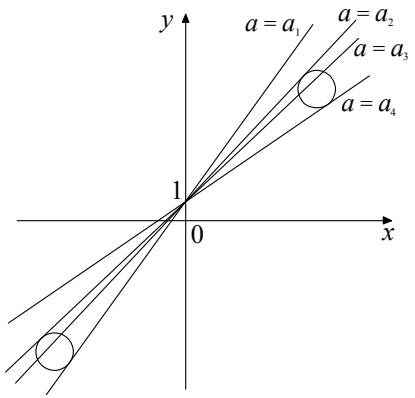
$$\begin{cases} \left(|x|-7\right)^2 + \left(|y|-7\right)^2 = 1, \\ y = ax + 1, \\ xy > 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Первое уравнение при условии $xy > 0$ задаёт на плоскости две единичные окружности с центрами $(7;7)$ и $(-7;-7)$, а второе — прямую l с угловым коэффициентом a, проходящую через точку $(0;1)$ (см. рис.).

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**



Прямая l касается окружности с центром в точке $(-7;-7)$ единичного радиуса тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} y = ax + 1, \\ (x+7)^2 + (y+7)^2 = 1 \end{cases} \qquad (1)$$

имеет единственное решение. Для этого необходимо, чтобы квадратное уравнение

$$(x+7)^2 + (ax+1+7)^2 = 1$$

имело единственное решение. Приведём уравнение к виду

$$\left(a^2+1\right)x^2 + 2(8a+7)x + 112 = 0$$

и из равенства нулю дискриминанта получим:

$$(8a+7)^2 - 112\left(a^2+1\right) = 0,$$

откуда $48a^2 - 112a + 63 = 0$.

Значит, $a_1 = \dfrac{14+\sqrt{7}}{12}$, $a_3 = \dfrac{14-\sqrt{7}}{12}$. Система (1) имеет решения только при

$$\frac{14-\sqrt{7}}{12} \le a \le \frac{14+\sqrt{7}}{12}.$$

Аналогично, прямая l касается окружности с центром в точке $(7;7)$ единичного радиуса тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} y = ax + 1, \\ (x-7)^2 + (y-7)^2 = 1 \end{cases} \qquad (2)$$

имеет единственное решение. Для этого необходимо, чтобы квадратное уравнение

$$(x-7)^2 + (ax+1-7)^2 = 1$$

имело единственное решение. Приведём уравнение к виду

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

$$\left(a^2+1\right)x^2-2\left(6a+7\right)x+84=0$$

и из равенства нулю дискриминанта получим:

$$\left(6a+7\right)^2-84\left(a^2+1\right)=0,$$

откуда $48a^2-84a+35=0$.

Значит, $a_2=\frac{21+\sqrt{21}}{24}$, $a_4=\frac{21-\sqrt{21}}{24}$. Система (2) имеет решения только при $\frac{21-\sqrt{21}}{24}\le a\le\frac{21+\sqrt{21}}{24}$.

Так как $\frac{21-\sqrt{21}}{24}<\frac{14-\sqrt{7}}{12}<\frac{21+\sqrt{21}}{24}<\frac{14+\sqrt{7}}{12}$, в ответ попадают только $a_4=\frac{21-\sqrt{21}}{24}$ и $a_1=\frac{14+\sqrt{7}}{12}$.

Ответ: $\frac{21-\sqrt{21}}{24}$; $\frac{14+\sqrt{7}}{12}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но – или в ответ включено также и одно-два неверных значений; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения окружностей и прямой; – или квадратных уравнений с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Набор состоит из тридцати семи натуральных чисел, среди которых есть числа 3, 4 и 6. Среднее арифметическое любых тридцати чисел этого набора меньше 2.

а) Может ли такой набор содержать ровно пятнадцать единиц?

б) Может ли такой набор содержать менее пятнадцати единиц?

в) Докажите, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 31.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Решение.

а) Да, может. Например, сумма любых тридцати чисел из набора $6,\ 4,\ 3,\ \underbrace{2,\dots,\ 2}_{19},\ \underbrace{1,\dots,\ 1}_{15}$ не больше, чем $6+4+3+2\cdot19+8=59$, и их среднее арифметическое меньше 2.

б) Нет, не может. Выпишем все числа слева направо в порядке убывания и рассмотрим первые 30 чисел, считая слева. Их сумма S меньше 60. Пусть количество единиц среди них равно x. Тогда

$$59\ge S\ge x+2(27-x)+3+4+6;\ x\ge8,$$

то есть среди выбранных 30 чисел всегда есть восемь единиц. Каждое из оставшихся семи чисел равно 1, и поэтому во всём наборе есть как минимум пятнадцать единиц.

в) Используя пятнадцать единиц и числа 3, 4, 6, можно составить все суммы от 1 до 28.

Если среди оставшихся девятнадцати чисел есть число от 3 до 30, то его можно добавить и получить в сумме 31.

Если среди оставшихся девятнадцати чисел нет чисел от 3 до 30, то каждое из них или равно 1, или равно 2, или больше 30. Так как сумма этих девятнадцати чисел не больше 59, то только одно из чисел может быть больше 30. Значит, в этом случае как минимум восемнадцать чисел равны 1 или 2. Используя их и пятнадцать единиц, всегда можно получить сумму, равную 31.

Ответ: а) да, б) нет.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Решение в целом верное, содержит: – или верный пример для п. а) и обоснованное выполнение п. в); – или верный пример для п. а), обоснованное выполнение п. б), а ход доказательства п. в) в целом верный, но содержит легко устранимые неточности	3
Решение содержит: – или верный пример для п. а) и обоснованное выполнение п. б); – или обоснованное выполнение п. в) (при не выполненных п. а) и п. б)	2
Решение содержит: – или верный пример для п. а); – или обоснованное выполнение п. б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}\,x)\cdot\sqrt{3\cos x} = 0$.

Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x > 0$.

Получаем уравнение $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}\,x = 0$, откуда $\mathrm{tg}\,x = 0$ или $\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Учитывая, что $\cos x > 0$, из уравнения $\mathrm{tg}\,x = 0$ получаем: $x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; а из уравнения $\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ получаем: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

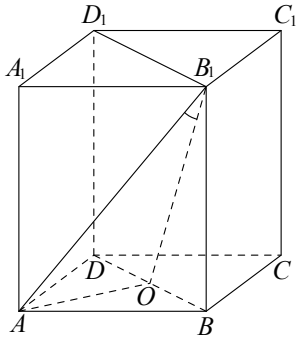
Ответ: $2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно найдены все значения переменной x, при которых равен нулю первый сомножитель левой части исходного уравнения. Возможно отбор найденных значений или не произведён, или произведён неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$, стороны основания которой равны 3, а боковые рёбра равны 4, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1.

Решение.

Пусть O — середина отрезка BD. Отрезок AO является перпендикуляром, опущенным из точки A на плоскость BDD_1. Угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1 равен углу AB_1O.



© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

В прямоугольном треугольнике AB_1O $AO = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $AB_1 = 5$.

Следовательно, $\sin\angle AB_1O = \frac{3\sqrt{2}}{10}$.

Ответ: $\arcsin\frac{3\sqrt{2}}{10}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Способ нахождения искомого угла верный, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не удовлетворяет ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите неравенство $\log_{\frac{1}{9}}(7-6x)\cdot\log_{2-x}\frac{1}{3} \ge 1$.

Решение.

Решение будем искать при условиях:

$$\begin{cases} 7-6x>0, \\ 2-x>0, \\ 2-x\ne 1, \end{cases}$$

откуда $x \in (-\infty;\ 1) \cup \left(1;\ \frac{7}{6}\right)$. Для таких x получаем:

$$\frac{\log_{\frac{1}{9}}(7-6x)}{\log_{\frac{1}{3}}(2-x)} = \frac{\log_{\frac{1}{3}}(7-6x)}{2\log_{\frac{1}{3}}(2-x)} = \frac{\log_{\frac{1}{3}}(7-6x)}{\log_{\frac{1}{3}}(2-x)^2}.$$

Исходное неравенство примет вид: $\frac{\log_{\frac{1}{3}}(7-6x)}{\log_{\frac{1}{3}}(2-x)^2} \ge 1$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in (-\infty;\ 1)$, тогда $(2-x)^2 > 1$, откуда $\log_{\frac{1}{3}}(2-x)^2 < 0$, поэтому

$$\log_{\frac{1}{3}}(7-6x) \le \log_{\frac{1}{3}}(2-x)^2;\ 7-6x \ge 4-4x+x^2;\ (x+3)(x-1) \le 0;\ -3 \le x \le 1,$$

откуда $x \in [-3;\ 1)$.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in \left(1;\ \frac{7}{6}\right)$, тогда $(2-x)^2 < 1$, откуда $\log_{\frac{1}{3}}(2-x)^2 > 0$, поэтому

$$\log_{\frac{1}{3}}(7-6x) \ge \log_{\frac{1}{3}}(2-x)^2;\ 7-6x \le 4-4x+x^2;\ (x+3)(x-1) \ge 0;$$

$$x \le -3,\ x \ge 1,$$

откуда $x \in \left(1;\ \frac{7}{6}\right)$.

Ответ: $[-3;\ 1)$; $\left(1;\ \frac{7}{6}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного конечным количеством значений переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	2
Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам или верно найдены все значения переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Через вершину C правильного шестиугольника $ABCDEF$ проведена прямая, пересекающая прямую AD в точке Q. Известно, что эта прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как $5:13$. Найдите отношение $AQ:QD$.

Решение.

Пусть O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$, S — его площадь, K — точка пересечения диагоналей AD и CE. Площади частей, на которые прямая CQ разбивает шестиугольник, равны $\frac{5}{18}S$ и $\frac{13}{18}S$.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

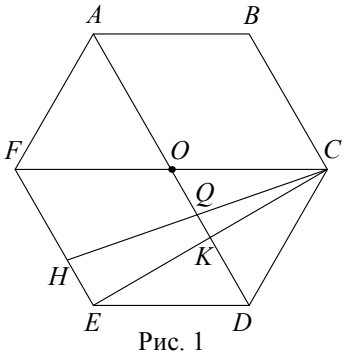


Рис. 1

Предположим, что точка D — вершина меньшей по площади части шестиугольника (рис. 1). Тогда точка Q лежит между точками O и K, так как

$$S_{CDE} = \frac{1}{6}S < \frac{5}{18}S;\ S_{CDEF} = \frac{1}{2}S > \frac{5}{18}S,$$

значит, прямая CQ пересекает сторону EF в некоторой точке H. При этом

$$S_{CEH} = S_{CDEH} - S_{CDE} = \frac{5}{18}S - \frac{1}{6}S = \frac{1}{9}S = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}S = \frac{1}{3}S_{CEF},$$

то есть площадь треугольника CEH в три раза меньше площади треугольника CEF, значит, $EH = \frac{1}{3}EF$, а так как $OK \parallel EF$, то $QK = \frac{1}{3}OK$.

Обозначим $QK = x$. Тогда

$$KD = OK = 3x;\ QD = QK + KD = 4x;$$

$$AO = OD = 2OK = 6x;\ AQ = AO + OQ = 8x,$$

следовательно, $\frac{AQ}{QD} = 2$.

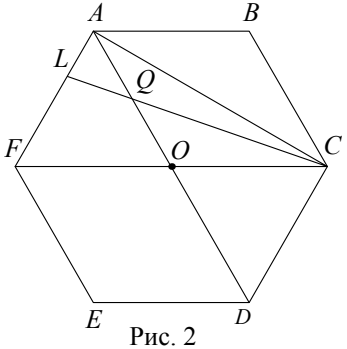


Рис. 2

Пусть теперь точка D — вершина большей по площади части шестиугольника (рис. 2). Аналогично предыдущему случаю доказывается, что тогда точка Q лежит между точками A и O, значит, прямая CQ

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

пересекает сторону AF в некоторой точке L и при этом площадь треугольника CAL в три раза меньше площади треугольника CAF, значит, $AL = \frac{1}{3}AF = \frac{1}{3}CD$.

Треугольник AQL подобен треугольнику DQC с коэффициентом $\frac{1}{3}$ $(AL \parallel CD)$, следовательно, $\frac{AQ}{QD} = \frac{1}{3}$.

Ответ: 2 или $\frac{1}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых система

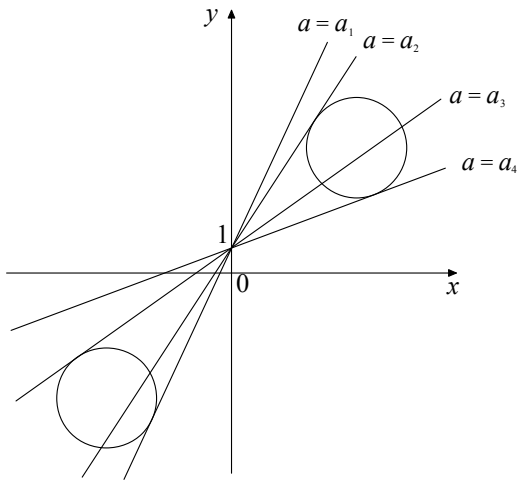
$$\begin{cases} (|x|-5)^2 + (|y|-5)^2 = 4, \\ y = ax + 1, \\ xy > 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Первое уравнение при условии $xy > 0$ задаёт на плоскости две окружности радиуса 2 с центрами $(5;5)$ и $(-5;-5)$, а второе — прямую l с угловым коэффициентом a, проходящую через точку $(0;1)$ (см. рис.).

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**



Прямая l касается окружности с центром в точке $(-5;-5)$ радиуса 2 тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} y = ax + 1, \\ (x+5)^2 + (y+5)^2 = 4 \end{cases} \qquad (1)$$

имеет единственное решение. Для этого необходимо, чтобы квадратное уравнение

$$(x+5)^2 + (ax+1+5)^2 = 4$$

имело единственное решение. Приведём уравнение к виду

$$(a^2+1)x^2 + 2(6a+5) + 57 = 0$$

и из равенства нулю дискриминанта получим:

$$(6a+5)^2 - 57(a^2+1) = 0,$$

откуда $21a^2 - 60a + 32 = 0$.

Значит, $a_1 = \frac{30+2\sqrt{57}}{21}$, $a_3 = \frac{30-2\sqrt{57}}{21}$. Система (1) имеет решения только при $\frac{30-2\sqrt{57}}{21} \le a \le \frac{30+2\sqrt{57}}{21}$.

Аналогично, прямая l касается окружности с центром в точке $(5;5)$ радиуса 2 тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} y = ax + 1, \\ (x-5)^2 + (y-5)^2 = 4 \end{cases} \qquad (2)$$

имеет единственное решение. Для этого необходимо, чтобы квадратное уравнение

$$(x-5)^2 + (ax+1-5)^2 = 4$$

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

имело единственное решение. Приведём уравнение к виду

$$\left(a^2+1\right)x^2-2\left(4a+5\right)+37=0$$

и из равенства нулю дискриминанта получим:

$$\left(4a+5\right)^2-37\left(a^2+1\right)=0,$$

откуда $21a^2-40a+12=0$.

Значит, $a_2=\frac{20+2\sqrt{37}}{21}$, $a_4=\frac{20-2\sqrt{37}}{21}$. Система (2) имеет решения только при $\frac{20-2\sqrt{37}}{21}\le a\le\frac{20+2\sqrt{37}}{21}$.

Так как $\frac{20-2\sqrt{37}}{21}<\frac{30-2\sqrt{57}}{21}<\frac{20+2\sqrt{37}}{21}<\frac{30+2\sqrt{57}}{21}$, в ответ попадают только $a_4=\frac{20-2\sqrt{37}}{21}$ и $a_1=\frac{30+2\sqrt{57}}{21}$.

Ответ: $\frac{20-2\sqrt{37}}{21}$; $\frac{30+2\sqrt{57}}{21}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но – или в ответ включено также и одно-два неверных значений; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения окружностей и прямой; – или квадратных уравнений с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Набор состоит из тридцати трёх натуральных чисел, среди которых есть числа 3, 4 и 5. Среднее арифметическое любых двадцати семи чисел этого набора меньше 2.

а) Может ли такой набор содержать ровно тринадцать единиц?

б) Может ли такой набор содержать менее тринадцати единиц?

в) Докажите, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 28.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Решение.

а) Да, может. Например, сумма любых двадцати семи чисел из набора $5,\ 4,\ 3,\ \underbrace{2,\dots,\ 2}_{17},\ \underbrace{1,\dots,\ 1}_{13}$ не больше, чем $5+4+3+2\cdot17+7=53$, и их среднее арифметическое меньше 2.

б) Нет, не может. Выпишем все числа слева направо в порядке убывания и рассмотрим первые 27 чисел, считая слева. Их сумма S меньше 54. Пусть количество единиц среди них равно x. Тогда

$$53\ge S\ge x+2(24-x)+3+4+5,\ \ x\ge7,$$

то есть среди выбранных 27 чисел всегда есть семь единиц. Каждое из оставшихся шести чисел равно 1, и поэтому во всём наборе есть как минимум тринадцать единиц.

в) Используя тринадцать единиц и числа 3, 4, 5, можно составить все суммы от 1 до 25.

Если среди оставшихся семнадцати чисел есть число от 3 до 27, то его можно добавить и получить в сумме 28.

Если среди оставшихся семнадцати чисел нет чисел от 3 до 27, то каждое из них или равно 1, или равно 2, или больше 27. Так как сумма этих семнадцати чисел не больше 53, то только одно из чисел может быть больше 27. Значит, в этом случае как минимум шестнадцать чисел равны 1 или 2. Используя их и тринадцать единиц, всегда можно получить сумму, равную 28.

Ответ: а) да, б) нет.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Решение в целом верное, содержит: – или верный пример для п. а) и обоснованное выполнение п. в); – или верный пример для п. а), обоснованное выполнение п. б), а ход доказательства п. в) в целом верный, но содержит легко устранимые неточности	3
Решение содержит: – или верный пример для п. а) и обоснованное выполнение п. б); – или обоснованное выполнение п. в) (при не выполненных п. а) и п. б)	2
Решение содержит: – или верный пример для п. а); – или обоснованное выполнение п. б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $(\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\, x)\cdot\sqrt{-7\cos x} = 0$.

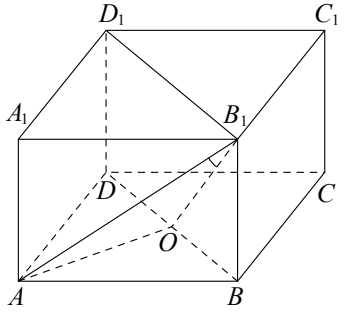
Решение.
Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x < 0$.
Получаем уравнение $\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\, x = 0$, откуда $\mathrm{tg}\, x = 0$ или $\mathrm{tg}\, x = -1$.
Учитывая, что $\cos x < 0$, из уравнения $\mathrm{tg}\, x = 0$ получаем: $x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; а из уравнения $\mathrm{tg}\, x = -1$ получаем: $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно найдены все значения переменной x, при которых равен нулю первый сомножитель левой части исходного уравнения. Возможно отбор найденных значений или не произведён, или произведён неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$, стороны основания которой равны 7, а боковые рёбра равны 3, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1.

Решение.
Пусть O — середина отрезка BD. Отрезок AO является перпендикуляром, опущенным из точки A на плоскость BDD_1. Угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1 равен углу AB_1O.



© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

В прямоугольном треугольнике AB_1O $AO = \frac{7\sqrt{2}}{2}$, $AB_1 = \sqrt{58}$.

Следовательно, $\sin\angle AB_1O = \frac{7\sqrt{29}}{58}$.

Ответ: $\arcsin\frac{7\sqrt{29}}{58}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Способ нахождения искомого угла верный, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не удовлетворяет ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите неравенство $\log_{\frac{1}{49}}(26-5x)\cdot\log_{6-x}\frac{1}{7} \ge 1$.

Решение.
Решение будем искать при условиях:

$$\begin{cases} 26-5x>0, \\ 6-x>0, \\ 6-x\ne 1, \end{cases}$$

откуда $x \in (-\infty;\ 5) \cup \left(5;\ \frac{26}{5}\right)$. Для таких x получаем:

$$\frac{\log_{\frac{1}{49}}(26-5x)}{\log_{\frac{1}{7}}(6-x)} = \frac{\log_{\frac{1}{7}}(26-5x)}{2\log_{\frac{1}{7}}(6-x)} = \frac{\log_{\frac{1}{7}}(26-5x)}{\log_{\frac{1}{7}}(6-x)^2}.$$

Исходное неравенство примет вид: $\frac{\log_{\frac{1}{7}}(26-5x)}{\log_{\frac{1}{7}}(6-x)^2} \ge 1$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in (-\infty;\ 5)$, тогда $(6-x)^2 > 1$, откуда $\log_{\frac{1}{7}}(6-x)^2 < 0$, поэтому

$$\log_{\frac{1}{7}}(26-5x) \le \log_{\frac{1}{7}}(6-x)^2;\ 26-5x \ge 36-12x+x^2;\ (x-2)(x-5) \le 0;$$

$$2 \le x \le 5,$$

откуда $x \in [2;\ 5)$.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in \left(5;\ \frac{26}{5}\right)$, тогда $(6-x)^2 < 1$, откуда $\log_{\frac{1}{7}}(6-x)^2 > 0$, поэтому

$$\log_{\frac{1}{7}}(26-5x) \ge \log_{\frac{1}{7}}(6-x)^2;\ 26-5x \le 36-12x+x^2;\ (x-2)(x-5) \ge 0;$$

$$x \le 2,\ x \ge 5,$$

откуда $x \in \left(5;\ \frac{26}{5}\right)$.

Ответ: $[2;\ 5)$; $\left(5;\ \frac{26}{5}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного конечным количеством значений переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	2
Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам или верно найдены все значения переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Через вершину B правильного шестиугольника $ABCDEF$ проведена прямая, пересекающая диагональ CF в точке K. Известно, что эта прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как $2:3$. Найдите отношение $CK:KF$.

Решение.

Пусть O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$, S — его площадь. Тогда

$$S_{ABEF} = S_{BCDE} = \frac{1}{2}S;\ S_{ABF} = S_{BCD} = \frac{1}{6}S.$$

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

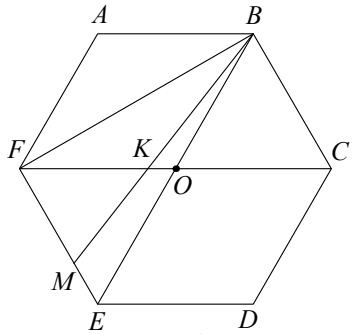


Рис. 1

Рассмотрим случай, когда точка K расположена между точками O и F (рис. 1). Тогда прямая BK пересекает сторону EF в некоторой точке M, причём

$$S_{ABMF} = \frac{2}{5}S;\ S_{BMF} = S_{ABMF} - S_{ABF} = \frac{7}{30}S;$$

$$S_{BME} = S_{ABEF} - S_{ABMF} = \frac{1}{10}S.$$

Площади треугольников BME и BMF относятся как $3:7$, поэтому M делит EF в отношении $3:7$. Треугольник BKC подобен треугольнику MKF с коэффициентом $\frac{10}{7}$ $\left(FM \parallel BC;\ BC = EF = \frac{10}{7}MF\right)$, следовательно, $\frac{CK}{KF} = \frac{10}{7}$.

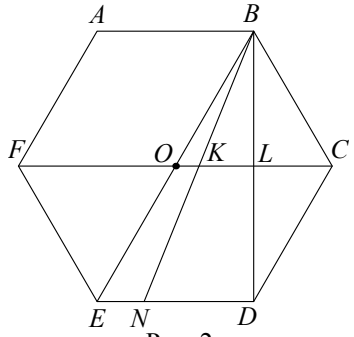


Рис. 2

Пусть теперь точка K лежит между C и O (рис. 2). Тогда прямая BK пересекает сторону DE в некоторой точке N, причём

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

$$S_{BCDE}=\frac{1}{2}S;\ S_{BCDN}=\frac{2}{5}S;\ S_{BCD}=\frac{1}{6}S;$$

$$S_{BND}=S_{BCDN}-S_{BCD}=\frac{7}{30}S;$$

$$S_{BNE}=S_{BCDE}-S_{BCDN}=\frac{1}{2}S-\frac{2}{5}S=\frac{1}{10}S.$$

Площади треугольников BNE и BND относятся как $3:7$, поэтому N делит DE в отношении $3:7$.

Пусть диагонали CF и BD пересекаются в точке L. Тогда L — середина OC, OL — средняя линия треугольника BDE, а так как N делит отрезок DE в отношении $3:7$, то K делит отрезок OL в том же отношении. Обозначим $OK=3z$. Тогда

$$KL=7z;\ CL=OL=10z;\ CK=CL+LK=17z;$$

$$OF=OC=2CL=20z;\ KF=OK+OF=23z.$$

Следовательно, $\frac{CK}{KF}=\frac{17}{23}$.

Ответ: $\frac{10}{7}$ или $\frac{17}{23}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых система

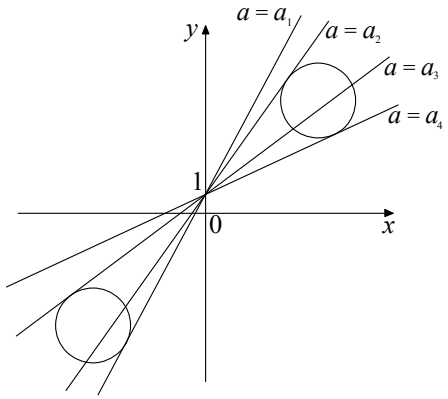
$$\begin{cases}(|x|-6)^2+(|y|-6)^2=4,\\ y=ax+1,\\ xy>0\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Первое уравнение при условии $xy>0$ задаёт на плоскости две окружности радиуса 2 с центрами $(6;6)$ и $(-6;-6)$, а второе — прямую l с угловым коэффициентом a, проходящую через точку $(0;1)$ (см. рис.).

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**



Прямая l касается окружности с центром в точке $(-6;-6)$ радиуса 2 тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases}y=ax+1,\\ (x+6)^2+(y+6)^2=4\end{cases}\qquad(1)$$

имеет единственное решение. Для этого необходимо, чтобы квадратное уравнение

$$(x+6)^2+(ax+1+6)^2=4$$

имело единственное решение. Приведём уравнение к виду

$$(a^2+1)x^2+2(7a+6)x+81=0$$

и из равенства нулю дискриминанта получим:

$$(7a+6)^2-81(a^2+1)=0,$$

откуда $32a^2-84a+45=0$.

Значит, $a_1=\frac{15}{8}$, $a_3=\frac{3}{4}$. Система (1) имеет решения только при $\frac{3}{4}\le a\le\frac{15}{8}$.

Аналогично, прямая l касается окружности с центром в точке $(6;6)$ радиуса 2 тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases}y=ax+1,\\ (x-6)^2+(y-6)^2=4\end{cases}\qquad(2)$$

имеет единственное решение. Для этого необходимо, чтобы квадратное уравнение

$$(x-6)^2+(ax+1-6)^2=4$$

имело единственное решение. Приведём уравнение к виду

$$(a^2+1)x^2-2(5a+6)x+57=0$$

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

и из равенства нулю дискриминанта получим:

$$(5a+6)^2-57\left(a^2+1\right)=0,$$

откуда $32a^2-60a+21=0$.

Значит, $a_2=\frac{15+\sqrt{57}}{16}$, $a_4=\frac{15-\sqrt{57}}{16}$. Система (2) имеет решения только при $\frac{15-\sqrt{57}}{16}\le a\le\frac{15+\sqrt{57}}{16}$.

Так как $\frac{15-\sqrt{57}}{16}<\frac{3}{4}<\frac{15+\sqrt{57}}{16}<\frac{15}{8}$, в ответ попадают только $a_4=\frac{15-\sqrt{57}}{16}$ и $a_1=\frac{15}{8}$.

Ответ: $\frac{15-\sqrt{57}}{16}$, $\frac{15}{8}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но – или в ответ включено также и одно-два неверных значений; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения окружностей и прямой; – или квадратных уравнений с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Набор состоит из тридцати девяти натуральных чисел, среди которых есть числа 4, 5 и 7. Среднее арифметическое любых тридцати четырёх чисел этого набора меньше 2.

а) Может ли такой набор содержать ровно шестнадцать единиц?

б) Может ли такой набор содержать менее шестнадцати единиц?

в) Докажите, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 35.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Решение.

а) Да, может. Например, сумма любых тридцати четырёх чисел из набора $7,\ 5,\ 4,\ \underbrace{2,\ \ldots,\ 2}_{20},\ \underbrace{1,\ \ldots,\ 1}_{16}$ не больше, чем $7+5+4+2\cdot 20+11=67$, и их среднее арифметическое меньше 2.

б) Нет, не может. Выпишем все числа слева направо в порядке убывания и рассмотрим первые 34 числа, считая слева. Их сумма S меньше 68. Пусть количество единиц среди них равно x. Тогда

$$67\ge S\ge x+2(31-x)+4+5+7;\ x\ge 11,$$

то есть среди выбранных 34 чисел всегда есть одиннадцать единиц. Каждое из оставшихся пяти чисел равно 1, и поэтому во всём наборе есть как минимум шестнадцать единиц.

в) Используя шестнадцать единиц и числа 4, 5, 7, можно составить все суммы от 1 до 32.

Если среди оставшихся двадцати чисел есть число от 3 до 34, то его можно добавить и получить в сумме 35.

Если среди оставшихся двадцати чисел нет чисел от 3 до 34, то каждое из них или равно 1, или равно 2, или больше 34. Так как сумма этих двадцати чисел не больше 67, то только одно из чисел может быть больше 34. Значит, в этом случае как минимум девятнадцать чисел равны 1 или 2. Используя их и шестнадцать единиц, всегда можно получить сумму, равную 35.

Ответ: а) да, б) нет.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Решение в целом верное, содержит: – или верный пример для п. а) и обоснованное выполнение п. в); – или верный пример для п. а), обоснованное выполнение п. б), а ход доказательства п. в) в целом верный, но содержит легко устранимые неточности	3
Решение содержит: – или верный пример для п. а) и обоснованное выполнение п. б); – или обоснованное выполнение п. в) (при не выполненных п. а) и п. б)	2
Решение содержит: – или верный пример для п. а); – или обоснованное выполнение п. б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $(\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}\, x)\cdot\sqrt{8\cos x} = 0$.

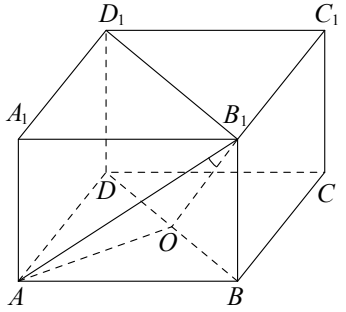
Решение.
Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x > 0$.
Получаем уравнение $\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}\, x = 0$, откуда $\mathrm{tg}\, x = 0$ или $\mathrm{tg}\, x = 1$.
Учитывая, что $\cos x > 0$, из уравнения $\mathrm{tg}\, x = 0$ получаем: $x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; а из уравнения $\mathrm{tg}\, x = 1$ получаем: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно найдены все значения переменной x, при которых равен нулю первый сомножитель левой части исходного уравнения. Возможно отбор найденных значений или не произведён, или произведён неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$, стороны основания которой равны 7, а боковые рёбра равны 3, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1.

Решение.
Пусть O — середина отрезка BD. Отрезок AO является перпендикуляром, опущенным из точки A на плоскость BDD_1. Угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1 равен углу AB_1O.



© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

В прямоугольном треугольнике AB_1O $AO = \frac{7\sqrt{2}}{2}$, $AB_1 = \sqrt{58}$.

Следовательно, $\sin\angle AB_1O = \frac{7\sqrt{29}}{58}$.

Ответ: $\arcsin\frac{7\sqrt{29}}{58}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Способ нахождения искомого угла верный, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не удовлетворяет ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите неравенство $\log_{\frac{1}{36}}(22-3x)\cdot\log_{8-x}\frac{1}{6} \ge 1$.

Решение.
Решение будем искать при условиях:

$$\begin{cases} 22-3x>0, \\ 8-x>0, \\ 8-x\ne 1, \end{cases}$$

откуда $x \in (-\infty;\ 7) \cup \left(7;\ \frac{22}{3}\right)$. Для таких x получаем:

$$\frac{\log_{\frac{1}{36}}(22-3x)}{\log_{\frac{1}{6}}(8-x)} = \frac{\log_{\frac{1}{6}}(22-3x)}{2\log_{\frac{1}{6}}(8-x)} = \frac{\log_{\frac{1}{6}}(22-3x)}{\log_{\frac{1}{6}}(8-x)^2}.$$

Исходное неравенство примет вид: $\frac{\log_{\frac{1}{6}}(22-3x)}{\log_{\frac{1}{6}}(8-x)^2} \ge 1$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in (-\infty;\ 7)$, тогда $(8-x)^2 > 1$, откуда $\log_{\frac{1}{6}}(8-x)^2 < 0$, поэтому

$$\log_{\frac{1}{6}}(22-3x) \le \log_{\frac{1}{6}}(8-x)^2;\ 22-3x \ge 64-16x+x^2;\ (x-6)(x-7) \le 0;$$

$$6 \le x \le 7,$$

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

откуда $x \in [6;\ 7)$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in \left(7;\ \frac{22}{3}\right)$, тогда $(8-x)^2 < 1$, откуда $\log_{\frac{1}{6}}(8-x)^2 > 0$, поэтому

$$\log_{\frac{1}{6}}(22-3x) \ge \log_{\frac{1}{6}}(8-x)^2;\ 22-3x \le 64-16x+x^2;\ (x-6)(x-7) \ge 0;$$

$$x \le 6,\ x \ge 7,$$

откуда $x \in \left(7;\ \frac{22}{3}\right)$.

Ответ: $[6;\ 7)$; $\left(7;\ \frac{22}{3}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного конечным количеством значений переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	2
Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам или верно найдены все значения переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Через вершину A правильного шестиугольника $ABCDEF$ проведена прямая, пересекающая прямую CF в точке K. Известно, что эта прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как $1:8$. Найдите отношение $CK:KF$.

Решение.

Пусть O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$, S — его площадь, L — точка пересечения диагоналей AE и CF. Площади частей, на которые прямая AK разбивает шестиугольник, равны $\frac{1}{9}S$ и $\frac{8}{9}S$.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

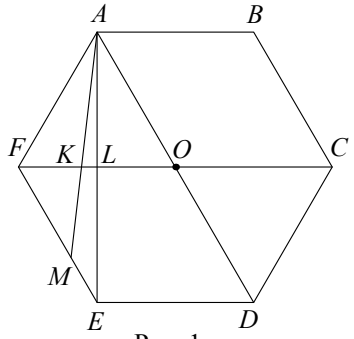


Рис. 1

Предположим, что точка F — вершина меньшей по площади части шестиугольника (рис. 1). Тогда точка K лежит между точками F и L, так как

$$S_{AEF} = \frac{1}{6}S > \frac{1}{9}S,$$

значит, прямая AK пересекает сторону EF в некоторой точке M. При этом площади треугольников AMF и AME относятся как $2:1$, значит, точка M делит EF в отношении $2:1$.

Треугольники KAO и KMF подобны с коэффициентом $\frac{3}{2}$, поэтому $KO = \frac{3}{2}KF$. Обозначим $KF = 2a$. Тогда

$$KO = 3a;\ OC = OF = 5a;\ CK = OC + OK = 8a.$$

Следовательно, $\frac{CK}{KF} = 4$.

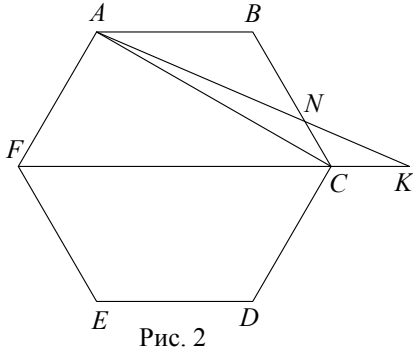


Рис. 2

Пусть теперь точка F — вершина большей по площади части шестиугольника (рис. 2). Тогда точка K лежит на продолжении диагонали CF за точку C, так как

$$S_{ABC} = \frac{1}{6}S > \frac{1}{9}S,$$

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

значит, прямая AK пересекает сторону BC в некоторой точке N. При этом площади треугольников ANB и ANC относятся как $2:1$, значит, точка N делит BC в отношении $2:1$.

Треугольники KCN и ABN подобны с коэффициентом $\frac{1}{2}$ $(CK \parallel AB)$. Обозначим $CK = b$. Тогда

$$AB = 2CK = 2b;\ CF = 2AB = 4b;\ KF = CK + CF = 5b.$$

Следовательно, $\frac{CK}{KF} = \frac{1}{5}$.

Ответ: 4 или $\frac{1}{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых система

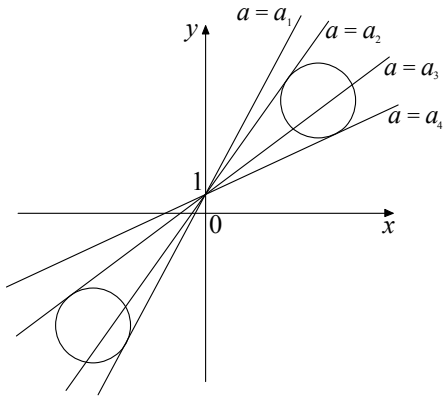
$$\begin{cases} (|x|-6)^2 + (|y|-6)^2 = 4, \\ y = ax + 1, \\ xy > 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Первое уравнение при условии $xy > 0$ задаёт на плоскости две окружности радиуса 2 с центрами $(6;6)$ и $(-6;-6)$, а второе — прямую l с угловым коэффициентом a, проходящую через точку $(0;1)$ (см. рис.).

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**



Прямая l касается окружности с центром в точке $(-6;-6)$ радиуса 2 тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} y = ax + 1, \\ (x+6)^2 + (y+6)^2 = 4 \end{cases} \qquad (1)$$

имеет единственное решение. Для этого необходимо, чтобы квадратное уравнение

$$(x+6)^2 + (ax+1+6)^2 = 4$$

имело единственное решение. Приведём уравнение к виду

$$(a^2+1)x^2 + 2(7a+6)x + 81 = 0$$

и из равенства нулю дискриминанта получим:

$$(7a+6)^2 - 81(a^2+1) = 0,$$

откуда $32a^2 - 84a + 45 = 0$.

Значит, $a_1 = \frac{15}{8}$, $a_3 = \frac{3}{4}$. Система (1) имеет решения только при $\frac{3}{4} \le a \le \frac{15}{8}$.

Аналогично, прямая l касается окружности с центром в точке $(6;6)$ радиуса 2 тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} y = ax + 1, \\ (x-6)^2 + (y-6)^2 = 4 \end{cases} \qquad (2)$$

имеет единственное решение. Для этого необходимо, чтобы квадратное уравнение

$$(x-6)^2 + (ax+1-6)^2 = 4$$

имело единственное решение. Приведём уравнение к виду

$$(a^2+1)x^2 - 2(5a+6)x + 57 = 0$$

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

и из равенства нулю дискриминанта получим:

$$(5a+6)^2-57\left(a^2+1\right)=0,$$

откуда $32a^2-60a+21=0$.

Значит, $a_2=\frac{15+\sqrt{57}}{16}$, $a_4=\frac{15-\sqrt{57}}{16}$. Система (2) имеет решения только при $\frac{15-\sqrt{57}}{16}\le a\le\frac{15+\sqrt{57}}{16}$.

Так как $\frac{15-\sqrt{57}}{16}<\frac{3}{4}<\frac{15+\sqrt{57}}{16}<\frac{15}{8}$, в ответ попадают только $a_4=\frac{15-\sqrt{57}}{16}$ и $a_1=\frac{15}{8}$.

Ответ: $\frac{15-\sqrt{57}}{16}$, $\frac{15}{8}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но – или в ответ включено также и одно-два неверных значений; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения окружностей и прямой; – или квадратных уравнений с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Набор состоит из тридцати девяти натуральных чисел, среди которых есть числа 3, 4 и 6. Среднее арифметическое любого тридцати одного числа этого набора меньше 2.

а) Может ли такой набор содержать ровно шестнадцать единиц?

б) Может ли такой набор содержать менее шестнадцати единиц?

в) Докажите, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 32.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Решение.

а) Да, может. Например, сумма любого тридцати одного числа из набора $6,\ 4,\ 3,\ \underbrace{2,\ \ldots,\ 2}_{20},\ \underbrace{1,\ \ldots,\ 1}_{16}$ не больше, чем $6+4+3+2\cdot 20+8=61$, и их среднее арифметическое меньше 2.

б) Нет, не может. Выпишем все числа слева направо в порядке убывания и рассмотрим 31 число, считая слева. Их сумма S меньше 62. Пусть количество единиц среди них равно x. Тогда

$$61\ge S\ge x+2(28-x)+3+4+6;\ x\ge 8,$$

то есть среди выбранного 31 числа всегда есть восемь единиц. Каждое из оставшихся восьми чисел равно 1, и поэтому во всём наборе есть как минимум шестнадцать единиц.

в) Используя шестнадцать единиц и числа 3, 4, 6, можно составить все суммы от 1 до 29.

Если среди оставшихся двадцати чисел есть число от 3 до 31, то его можно добавить и получить в сумме 32.

Если среди оставшихся двадцати чисел нет чисел от 3 до 31, то каждое из них или равно 1, или равно 2, или больше 31. Так как сумма этих двадцати чисел не больше 61, то только одно из чисел может быть больше 31. Значит, в этом случае как минимум девятнадцать чисел равны 1 или 2. Используя их и шестнадцать единиц, всегда можно получить сумму, равную 32.

Ответ: а) да, б) нет.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Решение в целом верное, содержит: – или верный пример для п. а) и обоснованное выполнение п. в); – или верный пример для п. а), обоснованное выполнение п. б), а ход доказательства п. в) в целом верный, но содержит легко устранимые неточности	3
Решение содержит: – или верный пример для п. а) и обоснованное выполнение п. б); – или обоснованное выполнение п. в) (при не выполненных п. а) и п. б)	2
Решение содержит: – или верный пример для п. а); – или обоснованное выполнение п. б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $(\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\, x)\cdot\sqrt{-7\cos x} = 0$.

Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x < 0$.

Получаем уравнение $\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\, x = 0$, откуда $\mathrm{tg}\, x = 0$ или $\mathrm{tg}\, x = -1$.

Учитывая, что $\cos x < 0$, из уравнения $\mathrm{tg}\, x = 0$ получаем: $x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; а из уравнения $\mathrm{tg}\, x = -1$ получаем: $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

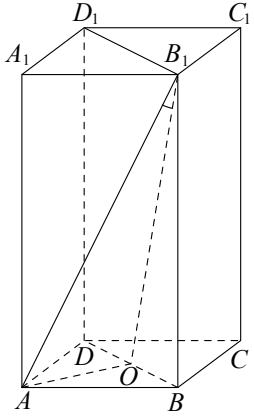
Ответ: $\pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно найдены все значения переменной x, при которых равен нулю первый сомножитель левой части исходного уравнения. Возможно отбор найденных значений или не произведён, или произведён неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$, стороны основания которой равны 4, а боковые рёбра равны 8, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1.

Решение.

Пусть O — середина отрезка BD. Отрезок AO является перпендикуляром, опущенным из точки A на плоскость BDD_1. Угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1 равен углу AB_1O.



© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

В прямоугольном треугольнике AB_1O $AO = 2\sqrt{2}$, $AB_1 = 4\sqrt{5}$. Следовательно, $\sin\angle AB_1O = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Способ нахождения искомого угла верный, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не удовлетворяет ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите неравенство $\log_{\frac{1}{49}}(26-5x)\cdot\log_{6-x}\frac{1}{7} \ge 1$.

Решение.

Решение будем искать при условиях:

$$\begin{cases} 26-5x>0, \\ 6-x>0, \\ 6-x\ne 1, \end{cases}$$

откуда $x \in (-\infty;\ 5) \cup \left(5;\ \frac{26}{5}\right)$. Для таких x получаем:

$$\frac{\log_{\frac{1}{49}}(26-5x)}{\log_{\frac{1}{7}}(6-x)} = \frac{\log_{\frac{1}{7}}(26-5x)}{2\log_{\frac{1}{7}}(6-x)} = \frac{\log_{\frac{1}{7}}(26-5x)}{\log_{\frac{1}{7}}(6-x)^2}.$$

Исходное неравенство примет вид: $\frac{\log_{\frac{1}{7}}(26-5x)}{\log_{\frac{1}{7}}(6-x)^2} \ge 1$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in (-\infty;\ 5)$, тогда $(6-x)^2 > 1$, откуда $\log_{\frac{1}{7}}(6-x)^2 < 0$, поэтому

$$\log_{\frac{1}{7}}(26-5x) \le \log_{\frac{1}{7}}(6-x)^2;\ 26-5x \ge 36-12x+x^2;\ (x-2)(x-5)\le 0;$$

$$2 \le x \le 5,$$

откуда $x \in [2;\ 5)$.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in \left(5;\ \frac{26}{5}\right)$, тогда $(6-x)^2 < 1$, откуда $\log_{\frac{1}{7}}(6-x)^2 > 0$, поэтому

$$\log_{\frac{1}{7}}(26-5x) \ge \log_{\frac{1}{7}}(6-x)^2;\ 26-5x \le 36-12x+x^2;\ (x-2)(x-5) \ge 0;$$

$$x \le 2,\ x \ge 5,$$

откуда $x \in \left(5;\ \frac{26}{5}\right)$.

Ответ: $[2;\ 5)$; $\left(5;\ \frac{26}{5}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного конечным количеством значений переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	2
Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам или верно найдены все значения переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4

Через вершину B правильного шестиугольника $ABCDEF$ проведена прямая, пересекающая диагональ CF в точке K. Известно, что эта прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как $2:3$. Найдите отношение $CK:KF$.

Решение.

Пусть O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$, S — его площадь. Тогда

$$S_{ABEF} = S_{BCDE} = \frac{1}{2}S;\ S_{ABF} = S_{BCD} = \frac{1}{6}S.$$

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

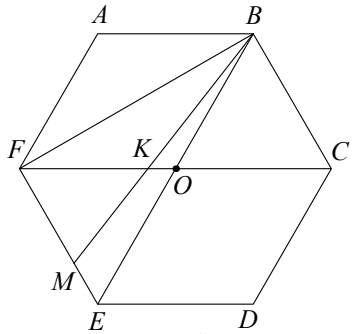


Рис. 1

Рассмотрим случай, когда точка K расположена между точками O и F (рис. 1). Тогда прямая BK пересекает сторону EF в некоторой точке M, причём

$$S_{ABMF} = \frac{2}{5}S;\ S_{BMF} = S_{ABMF} - S_{ABF} = \frac{7}{30}S;$$

$$S_{BME} = S_{ABEF} - S_{ABMF} = \frac{1}{10}S.$$

Площади треугольников BME и BMF относятся как $3:7$, поэтому M делит EF в отношении $3:7$. Треугольник BKC подобен треугольнику MKF с коэффициентом $\frac{10}{7}$ $\left(FM \parallel BC;\ BC = EF = \frac{10}{7}MF\right)$, следовательно, $\frac{CK}{KF} = \frac{10}{7}$.

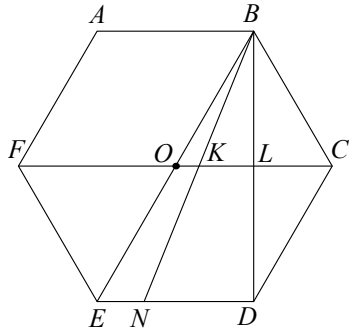


Рис. 2

Пусть теперь точка K лежит между C и O (рис. 2). Тогда прямая BK пересекает сторону DE в некоторой точке N, причём

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

$$S_{BCDE}=\frac{1}{2}S;\ S_{BCDN}=\frac{2}{5}S;\ S_{BCD}=\frac{1}{6}S;$$

$$S_{BND}=S_{BCDN}-S_{BCD}=\frac{7}{30}S;$$

$$S_{BNE}=S_{BCDE}-S_{BCDN}=\frac{1}{2}S-\frac{2}{5}S=\frac{1}{10}S.$$

Площади треугольников BNE и BND относятся как $3:7$, поэтому N делит DE в отношении $3:7$.

Пусть диагонали CF и BD пересекаются в точке L. Тогда L — середина OC, OL — средняя линия треугольника BDE, а так как N делит отрезок DE в отношении $3:7$, то K делит отрезок OL в том же отношении. Обозначим $OK=3z$. Тогда

$$KL=7z;\ CL=OL=10z;\ CK=CL+LK=17z;$$

$$OF=OC=2CL=20z;\ KF=OK+OF=23z.$$

Следовательно, $\frac{CK}{KF}=\frac{17}{23}$.

Ответ: $\frac{10}{7}$ или $\frac{17}{23}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых система

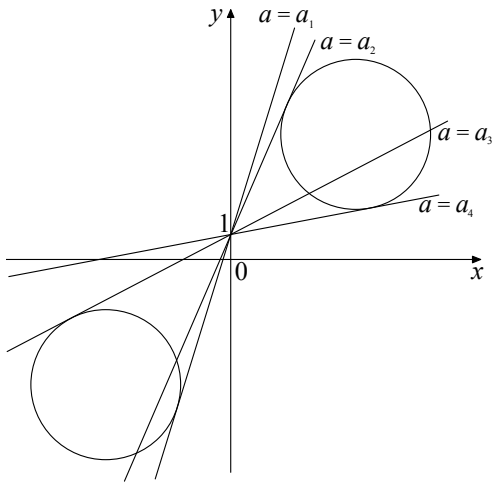
$$\begin{cases}(|x|-5)^2+(|y|-5)^2=9,\\ y=ax+1,\\ xy>0\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Первое уравнение при условии $xy>0$ задаёт на плоскости две окружности радиуса 3 с центрами $(5;5)$ и $(-5;-5)$, а второе — прямую l с угловым коэффициентом a, проходящую через точку $(0;1)$ (см. рис.).

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**



Прямая l касается окружности с центром в точке $(-5;-5)$ радиуса 3 тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases}y=ax+1,\\ (x+5)^2+(y+5)^2=9\end{cases}\qquad(1)$$

имеет единственное решение. Для этого необходимо, чтобы квадратное уравнение

$$(x+5)^2+(ax+1+5)^2=9$$

имело единственное решение. Приведём уравнение к виду

$$(a^2+1)x^2+2(6a+5)+52=0$$

и из равенства нулю дискриминанта получим:

$$(6a+5)^2-52(a^2+1)=0,$$

откуда $16a^2-60a+27=0$.

Значит, $a_1=\frac{15+\sqrt{117}}{8}$, $a_3=\frac{15-\sqrt{117}}{8}$. Система (1) имеет решения только при $\frac{15-\sqrt{117}}{8}\le a\le\frac{15+\sqrt{117}}{8}$.

Аналогично, прямая l касается окружности с центром в точке $(5;5)$ радиуса 3 тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases}y=ax+1,\\ (x-5)^2+(y-5)^2=9\end{cases}\qquad(2)$$

имеет единственное решение. Для этого необходимо, чтобы квадратное уравнение

$$(x-5)^2+(ax+1-5)^2=9$$

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

имело единственное решение. Приведём уравнение к виду

$$\left(a^2+1\right)x^2-2\left(4a+5\right)+32=0$$

и из равенства нулю дискриминанта получим:

$$\left(4a+5\right)^2-32\left(a^2+1\right)=0,$$

откуда $16a^2-40a+7=0$.

Значит, $a_2=\frac{5+3\sqrt{2}}{4}$, $a_4=\frac{5-3\sqrt{2}}{4}$. Система (2) имеет решения только при $\frac{5-3\sqrt{2}}{4}\le a\le\frac{5+3\sqrt{2}}{4}$.

Так как $\frac{5-3\sqrt{2}}{4}<\frac{15-\sqrt{117}}{8}<\frac{5+3\sqrt{2}}{4}<\frac{15+\sqrt{117}}{8}$, в ответ попадают только $a_4=\frac{5-3\sqrt{2}}{4}$ и $a_1=\frac{15+\sqrt{117}}{8}$.

Ответ: $\frac{5-3\sqrt{2}}{4}$, $\frac{15+3\sqrt{13}}{8}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но – или в ответ включено также и одно-два неверных значений; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения окружностей и прямой; – или квадратных уравнений с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Набор состоит из тридцати девяти натуральных чисел, среди которых есть числа 3, 4 и 6. Среднее арифметическое любого тридцати одного числа этого набора меньше 2.

а) Может ли такой набор содержать ровно шестнадцать единиц?

б) Может ли такой набор содержать менее шестнадцати единиц?

в) Докажите, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 32.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Решение.

а) Да, может. Например, сумма любого тридцати одного числа из набора $6,\ 4,\ 3,\ \underbrace{2,\ \ldots,\ 2}_{20},\ \underbrace{1,\ \ldots,\ 1}_{16}$ не больше, чем $6+4+3+2\cdot20+8=61$, и их среднее арифметическое меньше 2.

б) Нет, не может. Выпишем все числа слева направо в порядке убывания и рассмотрим 31 число, считая слева. Их сумма S меньше 62. Пусть количество единиц среди них равно x. Тогда

$$61\ge S\ge x+2(28-x)+3+4+6;\ x\ge8,$$

то есть среди выбранного 31 числа всегда есть восемь единиц. Каждое из оставшихся восьми чисел равно 1, и поэтому во всём наборе есть как минимум шестнадцать единиц.

в) Используя шестнадцать единиц и числа 3, 4, 6, можно составить все суммы от 1 до 29.

Если среди оставшихся двадцати чисел есть число от 3 до 31, то его можно добавить и получить в сумме 32.

Если среди оставшихся двадцати чисел нет чисел от 3 до 31, то каждое из них или равно 1, или равно 2, или больше 31. Так как сумма этих двадцати чисел не больше 61, то только одно из чисел может быть больше 31. Значит, в этом случае как минимум девятнадцать чисел равны 1 или 2. Используя их и шестнадцать единиц, всегда можно получить сумму, равную 32.

Ответ: а) да, б) нет.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Решение в целом верное, содержит: – или верный пример для п. а) и обоснованное выполнение п. в); – или верный пример для п. а), обоснованное выполнение п. б), а ход доказательства п. в) в целом верный, но содержит легко устранимые неточности	3
Решение содержит: – или верный пример для п. а) и обоснованное выполнение п. б); – или обоснованное выполнение п. в) (при не выполненных п. а) и п. б)	2
Решение содержит: – или верный пример для п. а); – или обоснованное выполнение п. б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Памятка для эксперта, проверяющего решения заданий С1–С6 по математике

Эксперт, проверяющий работу, располагает критериями оценивания решений заданий С1–С6, включающими:

1) формулировку задания с развёрнутым ответом;
2) одно из возможных решений задания;
3) содержание критерия.

Следует помнить, что, проверяя решения заданий с развёрнутым ответом, эксперт оценивает математическую грамотность представленного решения. Эксперт не должен предъявлять особых требований к форме записи и к степени подробности решения, но в то же время должен следить за правильностью и обоснованностью математических утверждений, используемых экзаменуемым.

Максимальный балл за задания:

С1 – 2 балла,
С2 – 2 балла,
С3 – 3 балла.
С4 – 3 балла,
С5 – 4 балла,
С6 – 4 балла.

Если экзаменуемый не приступал к задаче, то в протокол ставится «х».

Если же экзаменуемый приступил к выполнению задания (даже если только переписал условие или написал номер задания), то решение должно быть оценено в соответствии с критериями проверки соответствующего задания.

В распечатанные изображения работ эксперт имеет право вносить любые пометки, помогающие объективной оценке решения задания (эти листы больше не сканируются, а подлежат уничтожению в РЦОИ).

По каждой из шести задач эксперт обязательно заносит в протокол одну из меток: «х», «0», «1», «2», «3», «4» в соответствии с образцом написания меток.

Результаты оценивания заносятся в протокол проверки следующим образом:

– баллы по **С1** переносятся в колонку **1** протокола**;**
– баллы по **С2** переносятся в колонку **2** протокола***;***
– баллы по **С3** переносятся в колонку **3** протокола***;***
– баллы по **С4** переносятся в колонку **4** протокола***;***
– баллы по **С5** переносятся в колонку **5** протокола***;***
– баллы по **С6** переносятся в колонку **6** протокола***.***

Оставшиеся колонки протокола не заполняются.