

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом**C1**

a) Решите уравнение $\cos 2x - \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -0,25$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

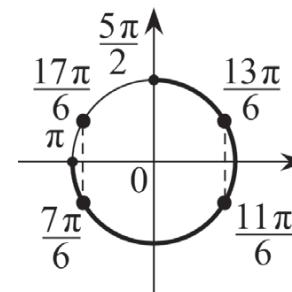
Решение.

а) Запишем уравнение в виде:

$$\cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x = -0,25; \sin^2 x = \frac{1}{4}$$

Значит, $\sin x = \pm \frac{1}{2}$, откуда $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью единичной окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$



Получим числа: $\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}$.

Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т.п.

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C2

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 2 : 3$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1 .

Прямая D_1E пересекает прямую AD в точке K . Плоскости ABC и BED_1 пересекаются по прямой KB .

Из точки E опустим перпендикуляр EH на прямую KB , тогда отрезок AH (проекция EH) перпендикулярен прямой KB . Угол AHE является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями ABC и BED_1 .

Поскольку $AE : EA_1 = 2 : 3$, получаем:

$$AE = \frac{2AA_1}{5} = 2; EA_1 = AA_1 - AE = 3.$$

Из подобия треугольников A_1D_1E и AKE находим:

$$AK = \frac{AE}{EA_1} \cdot A_1D_1 = \frac{2}{3}.$$

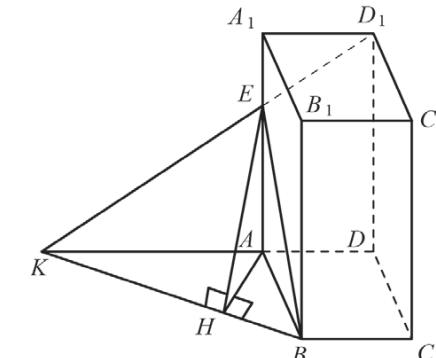
В прямоугольном треугольнике AKB с прямым углом A : $AB = 1$; $AK = \frac{2}{3}$;

$$BK = \sqrt{AB^2 + AK^2} = \frac{\sqrt{13}}{3}, \text{ откуда высота}$$

$$AH = \frac{AK \cdot AB}{BK} = \frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

Из прямоугольного треугольника AHE с прямым углом A получаем:

$$\tg \angle AHE = \frac{AE}{AH} = \sqrt{13}.$$



Ответ: $\arctg \sqrt{13}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{(x-1)^2 + 4(x+1)^2}{2} \leq \frac{(3x+1)^2}{4}, \\ \frac{x^3 + 37}{(x+4)^3} \geq 1 + \frac{1}{(x+4)^2}. \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы.

$$\begin{aligned} & 2(x-1)^2 + 8(x+1)^2 - (3x+1)^2; \\ & 2x^2 - 4x + 2 + 8x^2 + 16x + 8 - 9x^2 - 6x - 1 \leq 0; \\ & x^2 + 6x + 9 \leq 0; (x+3)^2 \leq 0; x = -3. \end{aligned}$$

Второе неравенство системы можно не решать. Подставляя $x = -3$ во второе неравенство, получаем: $10 \geq 2$. Получаем верное числовое неравенство.

Ответ: -3 .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы неравенств, но решение системы отсутствует или неверно	2
Обоснованно получен верный ответ только в одном неравенстве системы неравенств, но решение системы отсутствует или неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

C4 В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 6$, $BC = 8$, $AC = 9$. Окружность, проходящая через точки A и C , пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L , отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC . Найдите длину отрезка KL .

Обе точки K и L не могут лежать вне треугольника, поскольку в этом случае отрезок KL не может касаться вписанной окружности. Значит, по крайней мере одна из этих точек лежит на стороне треугольника.

Пусть обе точки K и L лежат на сторонах треугольника (рис. 1).

Четырёхугольник $AKLC$ — вписанный, следовательно, $\angle KAC = 180^\circ - \angle KLC = \angle BLK$.

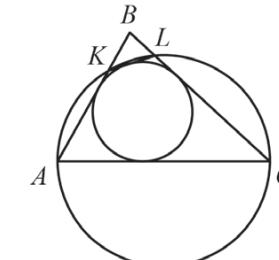


Рис. 1

Значит, треугольник ABC подобен треугольнику LBK , так как угол ABC — общий. Пусть коэффициент подобия равен k , тогда $BL = kAB$, $BK = kBC$, $KL = kAC$.

Суммы противоположных сторон описанного четырёхугольника $AKLC$ равны:

$$AK + LC = KL + AC; AB(1 - k) + BC(1 - k) = AC(1 + k); k = \frac{AB + BC - AC}{AC + AB + BC}.$$

Подставляя известные значения сторон, находим $k = \frac{6+8-9}{6+8+9} = \frac{5}{23}$. Следовательно,

$$KL = \frac{5}{23}AC = \frac{45}{23}.$$

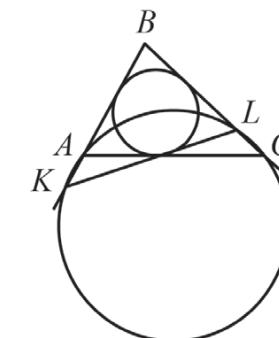


Рис. 2

Пусть точка K лежит на продолжении стороны AB (рис. 2). Углы AKL и ACL равны, поскольку опираются на одну дугу. Значит, треугольник ABC подобен треугольнику LBK , так как угол ABC — общий. Более того, они описаны около одной и той же окружности. Следовательно, коэффициент подобия равен 1, то есть треугольники LBK и ABC равны, поэтому $KL = AC = 9$. Заметим, что $BK = BC > AB$ и точка K действительно лежит на продолжении стороны AB .

Если точка L лежит на продолжении стороны BC , то $BL > BC$, но аналогично предыдущему случаю получаем $BL = AB < BC$. Значит, этот случай не достигается.

Ответ: $\frac{45}{23}, 9.$

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\left| \frac{5}{x+1} - 3 \right| = ax + a - 2$$

на промежутке $(-1; +\infty)$ имеет более двух корней.

Рассмотрим функции $f(x) = ax + a - 2$ и $g(x) = \left| \frac{5}{x+1} - 3 \right|$. Исследуем уравнение $f(x) = g(x)$ на промежутке $(-1; +\infty)$.

При $a \leq 0$ все значения функции $f(x)$ на промежутке $(-1; +\infty)$ отрицательны, а все значения функции $g(x)$ — неотрицательны, поэтому при $a \leq 0$ уравнение $f(x) = g(x)$ не имеет решений на промежутке $(-1; +\infty)$.

При $a > 0$ функция $f(x)$ возрастает. Функция $g(x)$ убывает на промежутке $\left(-1; \frac{2}{3}\right]$, поэтому уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного решения на промежутке $\left(-1; \frac{2}{3}\right]$, причём решение будет существовать тогда и только тогда, когда $f\left(\frac{2}{3}\right) \geq g\left(\frac{2}{3}\right)$, откуда получаем $a \cdot \frac{5}{3} - 2 \geq 0$, то есть $a \geq \frac{6}{5}$.

На промежутке $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$ уравнение $f(x) = g(x)$ принимает вид $ax + a - 2 = 3 - \frac{5}{x+1}$.

Это уравнение сводится к уравнению $ax^2 + (2a - 5)x + a = 0$. Будем считать, что $a > 0$, поскольку случай $a \leq 0$ был рассмотрен ранее. Дискриминант квадратного уравнения $D = 25 - 20a$, поэтому при $a > \frac{5}{4}$ это уравнение не имеет корней; при $a = \frac{5}{4}$ уравнение имеет единственный корень, равный 1; при $0 < a < \frac{5}{4}$ уравнение имеет два корня.

Если уравнение имеет два корня x_1 и x_2 , то есть $0 < a < \frac{5}{4}$, то больший корень

$$x_2 = \frac{5 - 2a + \sqrt{D}}{2a} > \frac{5 - 2a}{2a} > 1 > \frac{2}{3}, \text{ поэтому он принадлежит промежутку } \left(\frac{2}{3}; +\infty\right).$$

Меньший корень x_1 принадлежит промежутку $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$ тогда и только тогда, когда

$$a\left(x_1 - \frac{2}{3}\right)\left(x_2 - \frac{2}{3}\right) = a\left(\frac{2}{3}\right)^2 + (2a - 5) \cdot \frac{2}{3} + a = \frac{25a - 30}{9} > 0, \text{ то есть } a > \frac{6}{5}.$$

Таким образом, уравнение $\left| \frac{5}{x+1} - 3 \right| = ax + a - 2$ имеет следующее количество корней на промежутке $(-1; +\infty)$:

- нет корней при $a \leq 0$;
- один корень при $0 < a < \frac{6}{5}$ и при $a > \frac{5}{4}$;
- два корня при $a = \frac{6}{5}$ и при $a = \frac{5}{4}$;
- три корня при $\frac{6}{5} < a < \frac{5}{4}$.

Ответ: $\frac{6}{5} < a < \frac{5}{4}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

C6 За новогодним столом дети ели бутерброды и конфеты, причем каждый что-то ел, и может быть так, что кто-то ел и то, и другое. Известно, что мальчиков, евших бутерброды, было не более, чем $\frac{5}{16}$ от общего числа детей, евших бутерброды, а мальчиков, евших конфеты, было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа детей, евших конфеты.

- Могло ли за столом быть 13 мальчиков, если дополнительно известно, что всего за столом было 25 детей?
- Какое наибольшее количество мальчиков могло быть за столом, если дополнительно известно, что всего за столом было 25 детей?
- Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа детей без дополнительного условия пунктов а и б?

а) Если за столом было 5 мальчиков, евших только бутерброды, 8 мальчиков, евших только конфеты, и 12 девочек, каждая из которых ела и то, и другое, то условие задачи выполнено. Значит, в группе из 25 детей могло быть 13 мальчиков.

б) Предположим, что мальчиков было 14 или больше. Тогда девочек было $\frac{m_1}{m_1 + 11}$ или меньше. Пусть число мальчиков, евших бутерброды, равно m_1 . Тогда число $\frac{m_1}{m_1 + 11}$ не больше, чем доля мальчиков, евших бутерброды среди всех детей, евших бутерброды, а это число не больше, чем $\frac{5}{16}$, откуда $\frac{m_1}{m_1 + 11} \leq \frac{5}{16}$ и, следовательно, $m_1 \leq 5$. Пусть m_2 – число мальчиков, евших конфеты. Аналогично, $\frac{m_2}{m_2 + 11} \leq \frac{2}{5}$, откуда, учитывая, что m_2 число целое, находим: $m_2 \leq 7$. Но тогда общее число мальчиков, евших хоть что-то, не больше, чем $5 + 7 = 12$. Следовательно, по крайней мере, 2 мальчика ничего не ели, а это противоречит условию.

В предыдущем пункте было показано, что в группе из 20 учащихся могло быть 13 мальчиков. Значит, наибольшее количество мальчиков в группе — 13.

в) Предположим, что некоторый мальчик ел и конфеты, и бутерброды. Если бы вместо него было два мальчика, один из которых ел только конфеты, а другой – только бутерброды, то доля мальчиков, евших конфеты и доля мальчиков, евших бутерброды, остались бы прежними, а общая доля девочек стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли девочек можно считать, что каждый мальчик ел или только конфеты, или только бутерброды.

Пусть, как прежде, m_1 мальчиков ели бутерброды, m_2 мальчиков ели конфеты, и всего было d девочек. Оценим долю девочек. Будем считать, что каждая девочка ела и конфеты, и бутерброды, поскольку их доля в группе от этого не изменится, а доля среди евших конфеты и доля среди евших бутерброды не станут меньше.

По условию $\frac{m_1}{m_1 + d} \leq \frac{5}{16}$, $\frac{m_2}{m_2 + d} \leq \frac{2}{5}$, значит, $\frac{m_1}{d} \leq \frac{5}{11}$, $\frac{m_2}{d} \leq \frac{2}{3}$.

Тогда $\frac{m_1 + m_2}{d} \leq \frac{37}{33}$, поэтому доля девочек равна

$$\frac{d}{m_1 + m_2 + d} = \frac{1}{\frac{m_1 + m_2}{d} + 1} \geq \frac{1}{\frac{37}{33} + 1} = \frac{33}{70}.$$

Осталось показать, что такая доля девочек действительно могла быть. Например, если из 70 детей 15 мальчиков ели только бутерброды, 22 мальчика ели только конфеты, и еще было 33 девочки, каждая из которых ела и то, и другое, то условие задачи выполнено, а доля девочек в точности равна $\frac{33}{70}$.

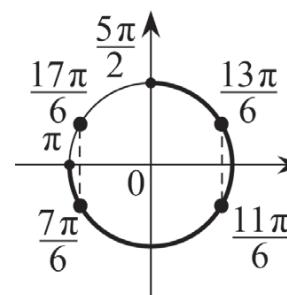
Ответ: а) да; б) 13; в) $\frac{33}{70}$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — искомая оценка в п. <i>a</i> ; — пример в п. <i>a</i> , обеспечивающий точность предыдущей оценки; — искомая оценка в п. <i>b</i> ; — пример в п. <i>b</i> , обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом**C1** а) Решите уравнение $\cos 2x + 3\sin^2 x = 1,25$.б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.**Решение.**

а) Запишем уравнение в виде:

$$1 - 2\sin^2 x + 3\sin^2 x = 1,25; \sin^2 x = \frac{1}{4}.$$

Значит, $\sin x = \pm \frac{1}{2}$, откуда $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.б) С помощью единичной окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ Получим числа: $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}$.

Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т.п.

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C2 В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 3. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 2 : 1$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1 .Прямая D_1E пересекает прямую AD в точке K . Плоскости ABC и BED_1 пересекаются по прямой KB .Из точки E опустим перпендикуляр EH на прямую KB , тогда отрезок AH (проекция EH) перпендикулярен прямой KB . Угол AHE является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями ABC и BED_1 . Поскольку $AE : EA_1 = 2 : 1$, получаем:

$$AE = \frac{2AA_1}{3} = 2; EA_1 = AA_1 - AE = 1.$$

Из подобия треугольников A_1D_1E и AKE находим:

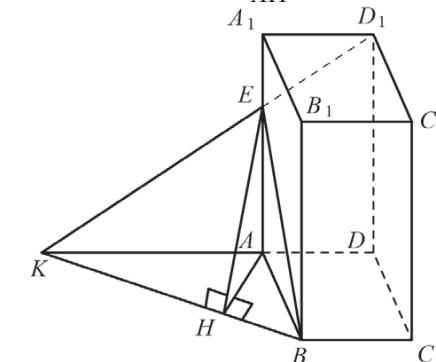
$$AK = \frac{AE}{EA_1} \cdot A_1D_1 = 2.$$

В прямоугольном треугольнике AKB с прямым углом A : $AB = 1; AK = 2; BK = \sqrt{AB^2 + AK^2} = \sqrt{5}$, откуда высота

$$AH = \frac{AK \cdot AB}{BK} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Из прямоугольного треугольника AHE с прямым углом A получаем:

$$\operatorname{tg} \angle AHE = \frac{AE}{AH} = \sqrt{5}.$$

**Ответ:** $\operatorname{arctg} \sqrt{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{(x+1)^2 + 4(x-1)^2}{2} \leq \frac{(3x-1)^2}{4}, \\ \frac{x^3 - 17}{(x-4)^3} \leq 1 + \frac{1}{(x-4)^2}. \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы.

$$\begin{aligned} 2(x+1)^2 + 8(x-1)^2 - (3x-1)^2 &\leq 0; \\ 2x^2 + 4x + 2 + 8x^2 - 16x + 8 - 9x^2 + 6x - 1 &\leq 0; \\ x^2 - 6x + 9 &\leq 0; (x-3)^2 \leq 0; x = 3. \end{aligned}$$

Второе неравенство системы можно не решать. Подставляя $x = 3$ во второе неравенство, получаем: $-10 \leq 2$. Получаем верное числовое неравенство.

Ответ: 3.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы неравенств, но решение системы отсутствует или неверно	2
Обоснованно получен верный ответ только в одном неравенстве системы неравенств, но решение системы отсутствует или неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

C4 В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 14$, $BC = 18$, $AC = 20$. Окружность, проходящая через точки A и C , пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L , отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC . Найдите длину отрезка KL .

Обе точки K и L не могут лежать вне треугольника, поскольку в этом случае отрезок KL не может касаться вписанной окружности. Значит, по крайней мере одна из этих точек лежит на стороне треугольника.

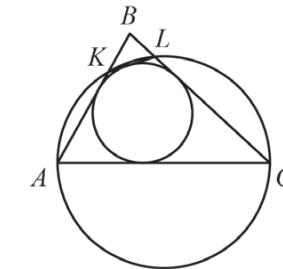


Рис. 1

Пусть обе точки K и L лежат на сторонах треугольника (рис. 1). Четырёхугольник $AKLC$ — вписанный, следовательно,

$$\angle KAC = 180^\circ - \angle KLC = \angle BLK.$$

Значит, треугольник ABC подобен треугольнику BLK , так как угол ABC — общий. Пусть коэффициент подобия равен k , тогда $BL = kAB$, $BK = kBC$, $KL = kAC$.

Суммы противоположных сторон описанного четырёхугольника $AKLC$ равны:

$$AK + LC = KL + AC; AB(1-k) + BC(1-k) = AC(1+k); k = \frac{AB + BC - AC}{AC + AB + BC}.$$

Подставляя известные значения сторон, находим $k = \frac{14 + 18 - 20}{14 + 18 + 20} = \frac{3}{13}$.

$$\text{Следовательно, } KL = \frac{3}{13}AC = \frac{60}{13}.$$

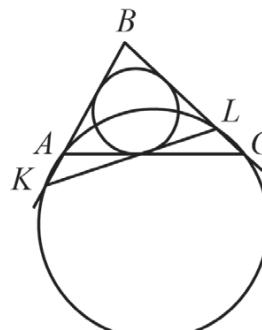


Рис. 2

Пусть точка K лежит на продолжении стороны AB (рис. 2). Углы AKL и ACL равны, поскольку опираются на одну дугу. Значит, треугольник ABC подобен треугольнику LBK , так как угол ABC — общий. Более того, они описаны около одной и той же окружности. Следовательно, коэффициент подобия равен 1, то есть треугольники LBK и ABC равны, поэтому $KL = AC = 20$. Заметим, что $BK = BC > AB$ и точка K действительно лежит на продолжении стороны AB .

Если точка L лежит на продолжении стороны BC , то $BL > BC$, но аналогично предыдущему случаю получаем $BL = AB < BC$. Значит, этот случай не достигается.

Ответ: $\frac{60}{13}, 20$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\left| \frac{5}{x-1} - 3 \right| = ax - (a+2)$$

на промежутке $(1 ; +\infty)$ имеет более двух корней.

Рассмотрим функции $f(x) = ax - a - 2$ и $g(x) = \left| \frac{5}{x-1} - 3 \right|$. Исследуем уравнение $f(x) = g(x)$ на промежутке $(1 ; +\infty)$.

При $a \leq 0$ все значения функции $f(x)$ на промежутке $(1 ; +\infty)$ отрицательны, а все значения функции $g(x)$ — неотрицательны, поэтому при $a \leq 0$ уравнение $f(x) = g(x)$ не имеет решений на промежутке $(1 ; +\infty)$.

При $a > 0$ функция $f(x)$ возрастает. Функция $g(x)$ убывает на промежутке $\left(1 ; \frac{8}{3}\right]$, поэтому уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного решения на промежутке $\left(1 ; \frac{8}{3}\right]$, причём решение будет существовать тогда и только тогда, когда $f\left(\frac{8}{3}\right) \geq g\left(\frac{8}{3}\right)$, откуда получаем $a \cdot \frac{8}{3} - a - 2 \geq 0$, то есть $a \geq \frac{6}{5}$.

На промежутке $\left(\frac{8}{3} ; +\infty\right)$ уравнение $f(x) = g(x)$ принимает вид $ax - a - 2 = 3 - \frac{5}{x-1}$.

Это уравнение сводится к уравнению $ax^2 - (2a+5)x + a + 10 = 0$. Будем считать, что $a > 0$, поскольку случай $a \leq 0$ был рассмотрен ранее. Дискриминант квадратного уравнения $D = 25 - 20a$, поэтому при $a > \frac{5}{4}$ это уравнение не имеет корней; при $a = \frac{5}{4}$ уравнение имеет единственный корень, равный 2; при $0 < a < \frac{5}{4}$ уравнение имеет два корня.

Если уравнение имеет два корня x_1 и x_2 , то есть $0 < a < \frac{5}{4}$, то больший корень $x_2 = \frac{2a+5+\sqrt{D}}{2a} > \frac{2a+5}{2a} > 4 > \frac{8}{3}$, поэтому он принадлежит промежутку $\left(\frac{8}{3} ; +\infty\right)$.

Меньший корень x_1 принадлежит промежутку $\left(\frac{8}{3} ; +\infty\right)$ тогда и только тогда, когда

$$a\left(x_1 - \frac{8}{3}\right)\left(x_2 - \frac{8}{3}\right) = a\left(\frac{8}{3}\right)^2 - (2a+5) \cdot \frac{8}{3} + (a+10) = \frac{25a-30}{9} > 0, \text{ то есть } a > \frac{6}{5}.$$

Таким образом, уравнение $\left| \frac{5}{x-1} - 3 \right| = ax - (a+2)$ имеет следующее количество корней на промежутке $(1 ; +\infty)$:

- нет корней при $a \leq 0$;
- один корень при $0 < a < \frac{6}{5}$ и при $a > \frac{5}{4}$;
- два корня при $a = \frac{6}{5}$ и при $a = \frac{5}{4}$;
- три корня при $\frac{6}{5} < a < \frac{5}{4}$.

Ответ: $\frac{6}{5} < a < \frac{5}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

C6 У каждого ученика в классе дома живет кошка или собака, а у некоторых, возможно, – и кошка, и собака. Известно, что мальчиков, имеющих собак, не более $\frac{1}{4}$ от общего числа учеников, имеющих собак, а мальчиков, имеющих кошек, не более $\frac{5}{11}$ от общего числа учеников, имеющих кошек.

а) Может ли быть в классе 11 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в классе 21 ученик?

б) Какое наибольшее количество мальчиков может быть в классе, если дополнительно известно, что всего в классе 21 ученик?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учеников без дополнительного условия пунктов а и б?

а) Если в классе 3 мальчика, у которых только собака, 8 мальчиков, у которых только кошка, и 10 девочек, у каждой из которых живет и собака, и кошка, то условие задачи выполнено. Значит, 11 мальчиков может быть.

б) Предположим, что мальчиков не менее, чем 12. Тогда девочек 9 или меньше. Пусть число мальчиков, имеющих собаку, равно m_1 . Тогда доля их среди всех учеников, имеющих собаку, не меньше, чем $\frac{m_1}{m_1 + 9}$, и не больше, чем $\frac{1}{4}$. Получаем: $\frac{m_1}{m_1 + 9} \leq \frac{1}{4}$, откуда $m_1 \leq 3$. Если мальчиков, имеющих кошку m_2 , то получаем аналогичное неравенство $\frac{m_2}{m_2 + 9} \leq \frac{5}{11}$, откуда, учитывая, что m_2 – целое, получаем, что $m_2 \leq 7$. Получается, что всего мальчиков, имеющих или кошку или собаку не более, чем $3 + 7 = 10$. А всего мальчиков не меньше 12. Значит, в классе есть мальчики, у которых нет ни кошки, ни собаки. Это противоречит условию.

В предыдущем пункте было показано, что в классе из 21 ученика может быть 11 мальчиков. Значит, наибольшее количество мальчиков — 11.

в) Предположим, что некоторый мальчик имеет и кошку, и собаку. Если бы вместо него в классе было два мальчика, один из которых имеет только собаку, а другой — только кошку, то доли мальчиков с собаками и мальчиков с кошками остались бы прежними, а общая доля девочек стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли девочек в классе можно считать, что каждый мальчик имеет только собаку или только кошку.

Пусть в классе m_1 мальчиков, имеющих собаку, m_2 мальчиков, имеющих кошку, и d девочек. Оценим долю девочек в классе. Будем считать, что у каждой девочки есть и собака, и кошка, поскольку их доля от этого не изменится, а доля девочек с собаками и доля девочек с кошками не уменьшатся.

По условию $\frac{m_1}{m_1 + d} \leq \frac{1}{4}$, $\frac{m_2}{m_2 + d} \leq \frac{5}{11}$, значит, $\frac{m_1}{d} \leq \frac{1}{3}$, $\frac{m_2}{d} \leq \frac{5}{6}$. Тогда $\frac{m_1 + m_2}{d} \leq \frac{7}{6}$, поэтому доля девочек в классе:

$$\frac{d}{m_1 + m_2 + d} = \frac{1}{\frac{m_1 + m_2}{d} + 1} \geq \frac{1}{\frac{7}{6} + 1} = \frac{6}{13}.$$

Осталось привести пример, показывающий, что доля девочек $\frac{6}{13}$ действительно возможна. Например, если класс состоит из 2 мальчиков, имеющих только собаку, 5 мальчиков, имеющих только кошку и 6 девочек, каждая из которых держит и собаку и кошку, то условие задачи выполнено, а доля девочек равна $\frac{6}{13}$.

Ответ: а) да; б) 11; в) $\frac{6}{13}$.

Содержание критерия.	Баллы.
Верно получены все перечисленные (см критерий на 1 балл) результаты.	4.
Верно получены три из перечисленных (см критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см критерий на 1 балл.) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — искомая оценка в п. <i>a</i> ; — пример в п. <i>a</i> , обеспечивающий точность предыдущей оценки; — искомая оценка в п. <i>б</i> ; — пример в п. <i>б</i> , обеспечивающий точность предыдущей оценки	1.
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом**C1**

a) Решите уравнение $\cos 2x - \sin^2 x - \cos^2 x = -0,25$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

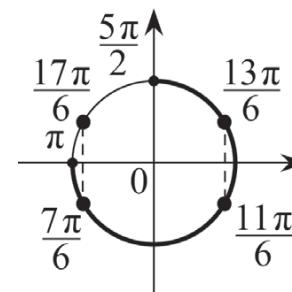
Решение.

а) Запишем уравнение в виде:

$$\cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x = -0,25; \sin^2 x = \frac{1}{4}.$$

Значит, $\sin x = \pm \frac{1}{2}$, откуда $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью единичной окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$



Получим числа: $\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}$.

Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т.п.

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C2 В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 2 : 3$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1 .

Прямая D_1E пересекает прямую AD в точке K . Плоскости ABC и BED_1 пересекаются по прямой KB .

Из точки E опустим перпендикуляр EH на прямую KB , тогда отрезок AH (проекция EH) перпендикулярен прямой KB . Угол AHE является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями ABC и BED_1 .

Поскольку $AE : EA_1 = 2 : 3$, получаем:

$$AE = \frac{2AA_1}{5} = 2; EA_1 = AA_1 - AE = 3.$$

Из подобия треугольников A_1D_1E и AKE находим:

$$AK = \frac{AE}{EA_1} \cdot A_1D_1 = \frac{2}{3}.$$

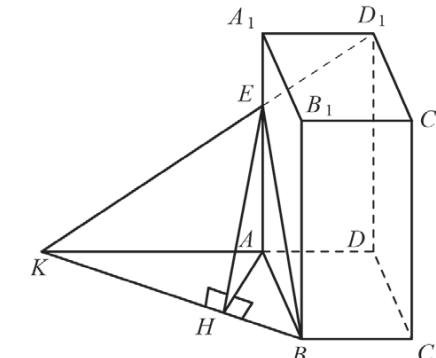
В прямоугольном треугольнике AKB с прямым углом A : $AB = 1$; $AK = \frac{2}{3}$;

$$BK = \sqrt{AB^2 + AK^2} = \frac{\sqrt{13}}{3}, \text{ откуда высота}$$

$$AH = \frac{AK \cdot AB}{BK} = \frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

Из прямоугольного треугольника AHE с прямым углом A получаем:

$$\tg \angle AHE = \frac{AE}{AH} = \sqrt{13}.$$



Ответ: $\arctg \sqrt{13}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{320 - 4^{-x-1}}{128 - 2^{-x}} \geq 2,5, \\ \log_{0,25(x+1)^2} \left(\frac{x+7}{4} \right) \leq 1. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы. Сделаем замену $y = 2^{-x}$.

$$\frac{320 - \frac{1}{4}y^2}{128 - y} \geq 2,5; \frac{1280 - y^2}{128 - y} \geq 10; \frac{y^2 - 10y}{y - 128} \geq 0; \begin{cases} 0 \leq y \leq 10, \\ y > 128. \end{cases}$$

Тогда $\begin{cases} 0 \leq 2^{-x} \leq 10 \\ 2^{-x} > 128 \end{cases}$, откуда находим решение первого неравенства системы: $x < -7$; $x \geq -\log_2 10$.

2. Решим второе неравенство системы. Рассмотрим два случая.

Первый случай: $0,25(x+1)^2 > 1$.

$$\log_{0,25(x+1)^2} \left(\frac{x+7}{4} \right) \leq 1; 0 < \frac{x+7}{4} \leq 0,25(x+1)^2; \begin{cases} x^2 + x - 6 \geq 0, \\ x + 7 > 0; \end{cases} \begin{cases} (x+3)(x-2) \geq 0, \\ x > -7, \end{cases}$$

откуда находим: $-7 < x \leq -3$; $x \geq 2$. Учитывая условие $0,25(x+1)^2 > 1$, получаем: $-7 < x < -3$; $x \geq 2$.

Второй случай: $0 < 0,25(x+1)^2 < 1$.

$$\frac{x+7}{4} \geq 0,25(x+1)^2; (x+3)(x-2) \leq 0; -3 \leq x \leq 2.$$

Учитывая условие $0 < 0,25(x+1)^2 < 1$, получаем: $-3 < x < -1$; $-1 < x < 1$.

Решение второго неравенства исходной системы:

$$-7 < x < -3; -3 < x < -1; -1 < x < 1; x \geq 2.$$

3. Поскольку $-4 < -\log_2 10 < -3$, получаем решение исходной системы неравенств:

$$-\log_2 10 \leq x < -3; -3 < x < -1; -1 < x < 1; x \geq 2.$$

Ответ: $[-\log_2 10; -3); (-3; -1); (-1; 1); [2; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы неравенств	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

C4 В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 6$, $BC = 8$, $AC = 9$. Окружность, проходящая через точки A и C , пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L , отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC . Найдите длину отрезка KL .

Обе точки K и L не могут лежать вне треугольника, поскольку в этом случае отрезок KL не может касаться вписанной окружности. Значит, по крайней мере одна из этих точек лежит на стороне треугольника.

Пусть обе точки K и L лежат на сторонах треугольника (рис. 1).

Четырёхугольник $AKLC$ — вписанный, следовательно, $\angle KAC = 180^\circ - \angle KLC = \angle BLK$.

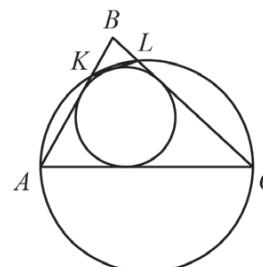


Рис. 1

Значит, треугольник ABC подобен треугольнику LBK , так как угол ABC — общий.

Пусть коэффициент подобия равен k , тогда $BL = kAB$, $BK = kBC$, $KL = kAC$.

Суммы противоположных сторон описанного четырёхугольника $AKLC$ равны:

$$AK + LC = KL + AC; AB(1 - k) + BC(1 - k) = AC(1 + k); k = \frac{AB + BC - AC}{AC + AB + BC}.$$

Подставляя известные значения сторон, находим $k = \frac{6 + 8 - 9}{6 + 8 + 9} = \frac{5}{23}$. Следовательно,

$$KL = \frac{5}{23}AC = \frac{45}{23}.$$

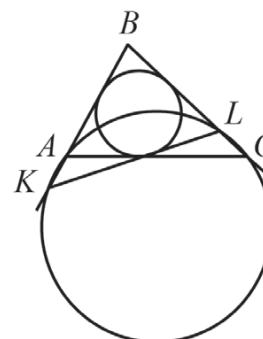


Рис. 2

Пусть точка K лежит на продолжении стороны AB (рис. 2). Углы AKL и ACL равны, поскольку опираются на одну дугу. Значит, треугольник ABC подобен треугольнику LBK , так как угол ABC — общий. Более того, они описаны около одной и той же окружности. Следовательно, коэффициент подобия равен 1, то есть треугольники LBK и ABC равны, поэтому $KL = AC = 9$. Заметим, что $BK = BC > AB$ и точка K действительно лежит на продолжении стороны AB .

Если точка L лежит на продолжении стороны BC , то $BL > BC$, но аналогично предыдущему случаю получаем $BL = AB < BC$. Значит, этот случай не достигается.

Ответ: $\frac{45}{23}, 9$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\left| \frac{5}{x+1} - 3 \right| = ax + a - 2$$

на промежутке $(-1; +\infty)$ имеет более двух корней.

Рассмотрим функции $f(x) = ax + a - 2$ и $g(x) = \left| \frac{5}{x+1} - 3 \right|$. Исследуем уравнение $f(x) = g(x)$ на промежутке $(-1; +\infty)$.

При $a \leq 0$ все значения функции $f(x)$ на промежутке $(-1; +\infty)$ отрицательны, а все значения функции $g(x)$ — неотрицательны, поэтому при $a \leq 0$ уравнение $f(x) = g(x)$ не имеет решений на промежутке $(-1; +\infty)$.

При $a > 0$ функция $f(x)$ возрастает. Функция $g(x)$ убывает на промежутке $\left(-1; \frac{2}{3}\right]$, поэтому уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного решения на промежутке $\left[-1; \frac{2}{3}\right]$, причём решение будет существовать тогда и только тогда, когда $f\left(\frac{2}{3}\right) \geq g\left(\frac{2}{3}\right)$, откуда получаем $a \cdot \frac{5}{3} - 2 \geq 0$, то есть $a \geq \frac{6}{5}$.

На промежутке $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$ уравнение $f(x) = g(x)$ принимает вид $ax + a - 2 = 3 - \frac{5}{x+1}$.

Это уравнение сводится к уравнению $ax^2 + (2a - 5)x + a = 0$. Будем считать, что $a > 0$, поскольку случай $a \leq 0$ был рассмотрен ранее. Дискриминант квадратного уравнения $D = 25 - 20a$, поэтому при $a > \frac{5}{4}$ это уравнение не имеет корней; при $a = \frac{5}{4}$ уравнение имеет единственный корень, равный 1; при $0 < a < \frac{5}{4}$ уравнение имеет два корня.

Если уравнение имеет два корня x_1 и x_2 , то есть $0 < a < \frac{5}{4}$, то больший корень

$$x_2 = \frac{5 - 2a + \sqrt{D}}{2a} > \frac{5 - 2a}{2a} > 1 > \frac{2}{3},$$

поэтому он принадлежит промежутку $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

Меньший корень x_1 принадлежит промежутку $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$ тогда и только тогда, когда

$$a\left(x_1 - \frac{2}{3}\right)\left(x_2 - \frac{2}{3}\right) = a\left(\frac{2}{3}\right)^2 + (2a - 5) \cdot \frac{2}{3} + a = \frac{25a - 30}{9} > 0,$$

то есть $a > \frac{6}{5}$.

Таким образом, уравнение $\left|\frac{5}{x+1} - 3\right| = ax + a - 2$ имеет следующее количество корней на промежутке $(-1; +\infty)$:

- нет корней при $a \leq 0$;
- один корень при $0 < a < \frac{6}{5}$ и при $a > \frac{5}{4}$;
- два корня при $a = \frac{6}{5}$ и при $a = \frac{5}{4}$;
- три корня при $\frac{6}{5} < a < \frac{5}{4}$.

Ответ: $\frac{6}{5} < a < \frac{5}{4}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	<i>4</i>

C6

За новогодним столом дети ели бутерброды и конфеты, причем каждый что-то ел, и может быть так, что кто-то ел и то, и другое. Известно, что мальчиков, евших бутерброды, было не более, чем $\frac{5}{16}$ от общего числа детей, евших бутерброды, а мальчиков, евших конфеты, было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа детей, евших конфеты.

- Могло ли за столом быть 13 мальчиков, если дополнительно известно, что всего за столом было 25 детей?
- Какое наибольшее количество мальчиков могло быть за столом, если дополнительно известно, что всего за столом было 25 детей?
- Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа детей без дополнительного условия пунктов *а* и *б*?

а) Если за столом было 5 мальчиков, евших только бутерброды, 8 мальчиков, евших только конфеты, и 12 девочек, каждая из которых ела и то, и другое, то условие задачи выполнено. Значит, в группе из 25 детей могло быть 13 мальчиков.

б) Предположим, что мальчиков было 14 или больше. Тогда девочек было $\frac{m_1}{m_1 + 11}$ не меньше, чем доля мальчиков, евших бутерброды среди всех детей, евших бутерброды, а это число не больше, чем $\frac{5}{16}$, откуда $\frac{m_1}{m_1 + 11} \leq \frac{5}{16}$ и, следовательно, $m_1 \leq 5$. Пусть

m_2 – число мальчиков, евших конфеты. Аналогично, $\frac{m_2}{m_2 + 11} \leq \frac{2}{5}$, откуда, учитывая, что m_2 число целое, находим: $m_2 \leq 7$. Но тогда общее число мальчиков, евших хоть что-то, не больше, чем $5 + 7 = 12$. Следовательно, по крайней мере, 2 мальчика ничего не ели, а это противоречит условию.

В предыдущем пункте было показано, что в группе из 20 учащихся могло быть 13 мальчиков. Значит, наибольшее количество мальчиков в группе — 13.

в) Предположим, что некоторый мальчик ел и конфеты, и бутерброды. Если бы вместо него было два мальчика, один из которых ел только конфеты, а другой – только бутерброды, то доля мальчиков, евших конфеты и доля мальчиков, евших бутерброды, остались бы прежними, а общая доля девочек стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли девочек можно считать, что каждый мальчик ел или только конфеты, или только бутерброды.

Пусть, как прежде, m_1 мальчиков ели бутерброды, m_2 мальчиков ели конфеты, и всего было d девочек. Оценим долю девочек. Будем считать, что каждая девочка ела и конфеты, и бутерброды, поскольку их доля в группе от этого не изменится, а доля среди евших конфеты и доля среди евших бутерброды не станут меньше.

По условию $\frac{m_1}{m_1 + d} \leq \frac{5}{16}$, $\frac{m_2}{m_2 + d} \leq \frac{2}{5}$, значит, $\frac{m_1}{d} \leq \frac{5}{11}$, $\frac{m_2}{d} \leq \frac{2}{3}$.

Тогда $\frac{m_1 + m_2}{d} \leq \frac{37}{33}$, поэтому доля девочек равна

$$\frac{d}{m_1 + m_2 + d} = \frac{1}{\frac{m_1 + m_2}{d} + 1} \geq \frac{1}{\frac{37}{33} + 1} = \frac{33}{70}.$$

Осталось показать, что такая доля девочек действительно могла быть. Например, если из 70 детей 15 мальчиков ели только бутерброды, 22 мальчика ели только конфеты, и еще было 33 девочки, каждая из которых ела и то, и другое, то условие задачи выполнено, а доля девочек в точности равна $\frac{33}{70}$.

Ответ: а) да; б) $\frac{33}{70}$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — искомая оценка в п. а; — пример в п. а, обеспечивающий точность предыдущей оценки; — искомая оценка в п. б; — пример в п. б, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1

а) Решите уравнение $\cos 2x + 3\sin^2 x = 1,25$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

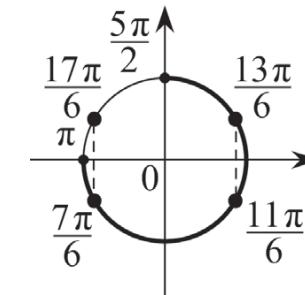
Решение.

а) Запишем уравнение в виде:

$$1 - 2\sin^2 x + 3\sin^2 x = 1,25; \sin^2 x = \frac{1}{4}.$$

Значит, $\sin x = \pm \frac{1}{2}$, откуда $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью единичной окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.



Получим числа: $\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}$.

Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т.п.

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C2 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 3. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 2 : 1$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1 .

Прямая D_1E пересекает прямую AD в точке K . Плоскости ABC и BED_1 пересекаются по прямой KB .

Из точки E опустим перпендикуляр EH на прямую KB , тогда отрезок AH (проекция EH) перпендикулярен прямой KB . Угол AHE является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями ABC и BED_1 . Поскольку $AE : EA_1 = 2 : 1$, получаем:

$$AE = \frac{2AA_1}{3} = 2; EA_1 = AA_1 - AE = 1.$$

Из подобия треугольников A_1D_1E и AKE находим:

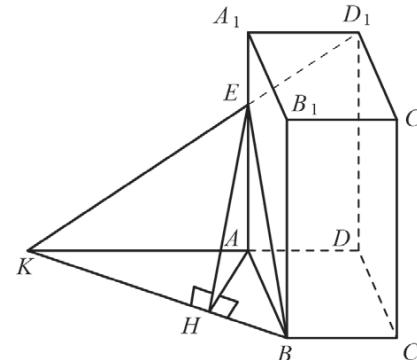
$$AK = \frac{AE}{EA_1} \cdot A_1D_1 = 2.$$

В прямоугольном треугольнике AKB с прямым углом A : $AB = 1$; $AK = 2$; $BK = \sqrt{AB^2 + AK^2} = \sqrt{5}$, откуда высота

$$AH = \frac{AK \cdot AB}{BK} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Из прямоугольного треугольника AHE с прямым углом A получаем:

$$\operatorname{tg} \angle AHE = \frac{AE}{AH} = \sqrt{5}.$$



Ответ: $\operatorname{arctg} \sqrt{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{5 - 4^{-x-1}}{1 - 2^{-x-4}} \geq 5, \\ \log_{0,25(x-2)^2} \left(\frac{x+4}{4} \right) \leq 1. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы. Сделаем замену $y = 2^{-x}$.

$$\frac{5 - \frac{1}{4}y^2}{1 - \frac{1}{16}y} \geq 5; \frac{80 - 4y^2}{16 - y} \geq 5; \frac{4y^2 - 5y}{y - 16} \geq 0; \frac{y(y - \frac{5}{4})}{y - 16} \geq 0; \begin{cases} 0 \leq y \leq \frac{5}{4}, \\ y > 16. \end{cases}$$

Тогда $0 \leq 2^{-x} \leq \frac{5}{4}$, откуда находим решение первого неравенства системы: $x < -4$; $x \geq 2 - \log_2 5$.

2. Решим второе неравенство системы. Рассмотрим два случая.

Первый случай: $0,25(x-2)^2 > 1$.

$$\log_{0,25(x-2)^2} \left(\frac{x+4}{4} \right) \leq 1; 0 < \frac{x+4}{4} \leq 0,25(x-2)^2; \begin{cases} x^2 - 5x \geq 0, \\ x+4 > 0; \end{cases} \begin{cases} x(x-5) \geq 0, \\ x > -4; \end{cases}$$

откуда находим: $-4 < x \leq 0$; $x \geq 5$. Учитывая условие $0,25(x-2)^2 > 1$, получаем: $-4 < x < 0$; $x \geq 5$.

Второй случай: $0 < 0,25(x-2)^2 < 1$.

$$\log_{0,25(x-2)^2} \left(\frac{x+4}{4} \right) \leq 1; \frac{x+4}{4} \geq 0,25(x-2)^2; x(x-5) \leq 0; 0 \leq x \leq 5.$$

Учитывая условие $0 < 0,25(x-2)^2 < 1$, получаем: $0 < x < 2$; $2 < x < 4$.

Решение второго неравенства исходной системы:

$$-4 < x < 0; 0 < x < 2; 2 < x < 4; x \geq 5.$$

3. Поскольку $-1 < 2 - \log_2 5 < 0$, получаем решение исходной системы неравенств:

$$2 - \log_2 5 \leq x < 0; 0 < x < 2; 2 < x < 4; x \geq 5.$$

Ответ: $[2 - \log_2 5; 0); (0; 2); (2; 4); [5; +\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы неравенств	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

C4 В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 14$, $BC = 18$, $AC = 20$. Окружность, проходящая через точки A и C , пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L , отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC . Найдите длину отрезка KL .

Обе точки K и L не могут лежать вне треугольника, поскольку в этом случае отрезок KL не может касаться вписанной окружности. Значит, по крайней мере одна из этих точек лежит на стороне треугольника.

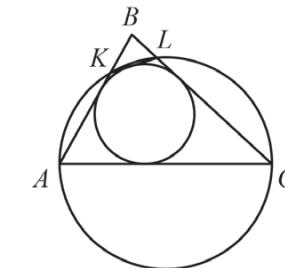


Рис. 1

Пусть обе точки K и L лежат на сторонах треугольника (рис. 1). Четырёхугольник $AKLC$ — вписанный, следовательно,

$$\angle KAC = 180^\circ - \angle KLC = \angle BLK.$$

Значит, треугольник ABC подобен треугольнику LBK , так как угол ABC — общий. Пусть коэффициент подобия равен k , тогда $BL = kAB$, $BK = kBC$, $KL = kAC$.

Суммы противоположных сторон описанного четырёхугольника $AKLC$ равны:

$$AK + LC = KL + AC; AB(1 - k) + BC(1 - k) = AC(1 + k); k = \frac{AB + BC - AC}{AC + AB + BC}.$$

Подставляя известные значения сторон, находим $k = \frac{14 + 18 - 20}{14 + 18 + 20} = \frac{3}{13}$.

$$\text{Следовательно, } KL = \frac{3}{13}AC = \frac{60}{13}.$$

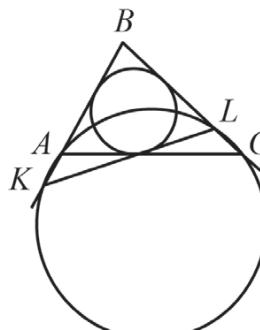


Рис. 2

Пусть точка K лежит на продолжении стороны AB (рис. 2). Углы AKL и ACL равны, поскольку опираются на одну дугу. Значит, треугольник ABC подобен треугольнику LBK , так как угол ABC — общий. Более того, они описаны около одной и той же окружности. Следовательно, коэффициент подобия равен 1, то есть треугольники LBK и ABC равны, поэтому $KL = AC = 20$. Заметим, что $BK = BC > AB$ и точка K действительно лежит на продолжении стороны AB .

Если точка L лежит на продолжении стороны BC , то $BL > BC$, но аналогично предыдущему случаю получаем $BL = AB < BC$. Значит, этот случай не достигается.

Ответ: $\frac{60}{13}, 20$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\left| \frac{5}{x-1} - 3 \right| = ax - (a+2)$$

на промежутке $(1; +\infty)$ имеет более двух корней.

Рассмотрим функции $f(x) = ax - a - 2$ и $g(x) = \left| \frac{5}{x-1} - 3 \right|$. Исследуем уравнение $f(x) = g(x)$ на промежутке $(1; +\infty)$.

При $a \leq 0$ все значения функции $f(x)$ на промежутке $(1; +\infty)$ отрицательны, а все значения функции $g(x)$ — неотрицательны, поэтому при $a \leq 0$ уравнение $f(x) = g(x)$ не имеет решений на промежутке $(1; +\infty)$.

При $a > 0$ функция $f(x)$ возрастает. Функция $g(x)$ убывает на промежутке $\left(1; \frac{8}{3}\right]$, поэтому уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного решения на промежутке $\left(1; \frac{8}{3}\right]$, причём решение будет существовать тогда и только тогда, когда $f\left(\frac{8}{3}\right) \geq g\left(\frac{8}{3}\right)$, откуда получаем $a \cdot \frac{8}{3} - a - 2 \geq 0$, то есть $a \geq \frac{6}{5}$.

На промежутке $\left(\frac{8}{3}; +\infty\right)$ уравнение $f(x) = g(x)$ принимает вид $ax - a - 2 = 3 - \frac{5}{x-1}$. Это уравнение сводится к уравнению $ax^2 - (2a+5)x + a + 10 = 0$. Будем считать, что $a > 0$, поскольку случай $a \leq 0$ был рассмотрен ранее. Дискриминант квадратного уравнения $D = 25 - 20a$, поэтому при $a > \frac{5}{4}$ это уравнение не имеет корней; при $a = \frac{5}{4}$ уравнение имеет единственный корень, равный 2; при $0 < a < \frac{5}{4}$ уравнение имеет два корня.

Если уравнение имеет два корня x_1 и x_2 , то есть $0 < a < \frac{5}{4}$, то больший корень $x_2 = \frac{2a+5+\sqrt{D}}{2a} > \frac{2a+5}{2a} > 4 > \frac{8}{3}$, поэтому он принадлежит промежутку $\left(\frac{8}{3}; +\infty\right)$.

Меньший корень x_1 принадлежит промежутку $\left(\frac{8}{3}; +\infty\right)$ тогда и только тогда, когда

$$a\left(x_1 - \frac{8}{3}\right)\left(x_2 - \frac{8}{3}\right) = a\left(\frac{8}{3}\right)^2 - (2a+5) \cdot \frac{8}{3} + (a+10) = \frac{25a-30}{9} > 0, \text{ то есть } a > \frac{6}{5}.$$

Таким образом, уравнение $\left| \frac{5}{x-1} - 3 \right| = ax - (a+2)$ имеет следующее количество корней на промежутке $(1; +\infty)$:

- нет корней при $a \leq 0$;
- один корень при $0 < a < \frac{6}{5}$ и при $a > \frac{5}{4}$;
- два корня при $a = \frac{6}{5}$ и при $a = \frac{5}{4}$;
- три корня при $\frac{6}{5} < a < \frac{5}{4}$.

Ответ: $\frac{6}{5} < a < \frac{5}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

C6 У каждого ученика в классе дома живет кошка или собака, а у некоторых, возможно, – и кошка, и собака. Известно, что мальчиков, имеющих собак, не более $\frac{1}{4}$ от общего числа учеников, имеющих собак, а мальчиков, имеющих кошек, не более $\frac{5}{11}$ от общего числа учеников, имеющих кошек.

а) Может ли быть в классе 11 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в классе 21 ученик?

б) Какое наибольшее количество мальчиков может быть в классе, если дополнительно известно, что всего в классе 21 ученик?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учеников без дополнительного условия пунктов а и б?

а) Если в классе 3 мальчика, у которых только собака, 8 мальчиков, у которых только кошка, и 10 девочек, у каждой из которых живет и собака, и кошка, то условие задачи выполнено. Значит, 11 мальчиков может быть.

б) Предположим, что мальчиков не менее, чем 12. Тогда девочек 9 или меньше. Пусть число мальчиков, имеющих собаку, равно m_1 . Тогда доля их среди всех учеников, имеющих собаку, не меньше, чем $\frac{m_1}{m_1 + 9}$, и не больше, чем $\frac{1}{4}$. Получаем: $\frac{m_1}{m_1 + 9} \leq \frac{1}{4}$, откуда $m_1 \leq 3$. Если мальчиков, имеющих кошку m_2 , то получаем аналогичное неравенство $\frac{m_2}{m_2 + 9} \leq \frac{5}{11}$, откуда, учитывая, что m_2 – целое, получаем, что $m_2 \leq 7$. Получается, что всего мальчиков, имеющих или кошку или собаку не более, чем $3 + 7 = 10$. А всего мальчиков не меньше 12. Значит, в классе есть мальчики, у которых нет ни кошки, ни собаки. Это противоречит условию.

В предыдущем пункте было показано, что в классе из 21 ученика может быть 11 мальчиков. Значит, наибольшее количество мальчиков — 11.

в) Предположим, что некоторый мальчик имеет и кошку, и собаку. Если бы вместо него в классе было два мальчика, один из которых имеет только собаку, а другой — только кошку, то доли мальчиков с собаками и мальчиков с кошками остались бы прежними, а общая доля девочек стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли девочек в классе можно считать, что каждый мальчик имеет только собаку или только кошку.

Пусть в классе m_1 мальчиков, имеющих собаку, m_2 мальчиков, имеющих кошку, и d девочек. Оценим долю девочек в классе. Будем считать, что у каждой девочки есть и собака, и кошка, поскольку их доля от этого не изменится, а доля девочек с собаками и доля девочек с кошками не уменьшатся.

По условию $\frac{m_1}{m_1 + d} \leq \frac{1}{4}$, $\frac{m_2}{m_2 + d} \leq \frac{5}{11}$, значит, $\frac{m_1}{d} \leq \frac{1}{3}$, $\frac{m_2}{d} \leq \frac{5}{6}$. Тогда $\frac{m_1 + m_2}{d} \leq \frac{7}{6}$, поэтому доля девочек в классе:

$$\frac{d}{m_1 + m_2 + d} = \frac{1}{\frac{m_1 + m_2}{d} + 1} \geq \frac{1}{\frac{7}{6} + 1} = \frac{6}{13}.$$

Осталось привести пример, показывающий, что доля девочек $\frac{6}{13}$ действительно возможна. Например, если класс состоит из 2 мальчиков, имеющих только собаку, 5 мальчиков, имеющих только кошку и 6 девочек, каждая из которых держит и собаку и кошку, то условие задачи выполнено, а доля девочек равна $\frac{6}{13}$.

Ответ: а) да; б) 11; в) $\frac{6}{13}$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см критерий на 1 балл) результаты.	4.
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл.) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см критерий на 1 балл.) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — искомая оценка в п. <i>a</i> ; — пример в п. <i>a</i> , обеспечивающий точность предыдущей оценки; — искомая оценка в п. <i>б</i> ; — пример в п. <i>б</i> , обеспечивающий точность предыдущей оценки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл.</i>	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом**C1**

a) Решите уравнение $\cos 2x - \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = -0,25$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right]$.

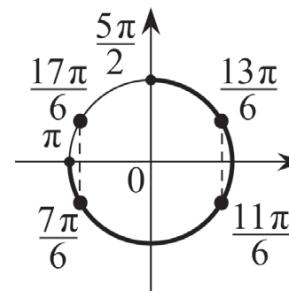
Решение.

а) Запишем уравнение в виде:

$$\cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x = -0,25; \sin^2 x = \frac{1}{4}$$

Значит, $\sin x = \pm \frac{1}{2}$, откуда $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью единичной окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right]$



Получим числа: $\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}$.

Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т.п.

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C2

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 2 : 3$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1 .

Прямая D_1E пересекает прямую AD в точке K . Плоскости ABC и BED_1 пересекаются по прямой KB .

Из точки E опустим перпендикуляр EH на прямую KB , тогда отрезок AH (проекция EH) перпендикулярен прямой KB . Угол AHE является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями ABC и BED_1 .

Поскольку $AE : EA_1 = 2 : 3$, получаем:

$$AE = \frac{2AA_1}{5} = 2; EA_1 = AA_1 - AE = 3.$$

Из подобия треугольников A_1D_1E и AKE находим:

$$AK = \frac{AE}{EA_1} \cdot A_1D_1 = \frac{2}{3}.$$

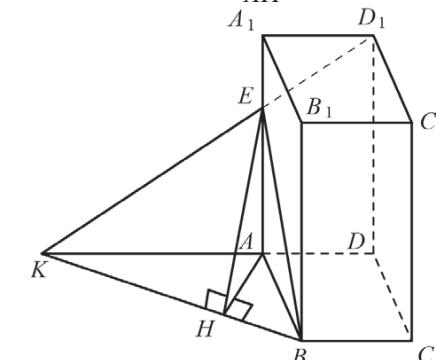
В прямоугольном треугольнике AKB с прямым углом A : $AB = 1$; $AK = \frac{2}{3}$;

$$BK = \sqrt{AB^2 + AK^2} = \frac{\sqrt{13}}{3}, \text{ откуда высота}$$

$$AH = \frac{AK \cdot AB}{BK} = \frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

Из прямоугольного треугольника AHE с прямым углом A получаем:

$$\tg \angle AHE = \frac{AE}{AH} = \sqrt{13}.$$



Ответ: $\arctg \sqrt{13}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{(x-1)^2 + 4(x+1)^2}{2} \leq \frac{(3x+1)^2}{4}, \\ \frac{x^3 + 37}{(x+4)^3} \geq 1 + \frac{1}{(x+4)^2}. \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы.

$$\begin{aligned} & 2(x-1)^2 + 8(x+1)^2 - (3x+1)^2; \\ & 2x^2 - 4x + 2 + 8x^2 + 16x + 8 - 9x^2 - 6x - 1 \leq 0; \\ & x^2 + 6x + 9 \leq 0; (x+3)^2 \leq 0; x = -3. \end{aligned}$$

Второе неравенство системы можно не решать. Подставляя $x = -3$ во второе неравенство, получаем: $10 \geq 2$. Получаем верное числовое неравенство.

Ответ: -3 .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы неравенств, но решение системы отсутствует или неверно	2
Обоснованно получен верный ответ только в одном неравенстве системы неравенств, но решение системы отсутствует или неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

C4 В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 6$, $BC = 8$, $AC = 9$. Окружность, проходящая через точки A и C , пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L , отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC . Найдите длину отрезка KL .

Обе точки K и L не могут лежать вне треугольника, поскольку в этом случае отрезок KL не может касаться вписанной окружности. Значит, по крайней мере одна из этих точек лежит на стороне треугольника.

Пусть обе точки K и L лежат на сторонах треугольника (рис. 1).

Четырёхугольник $AKLC$ — вписанный, следовательно, $\angle KAC = 180^\circ - \angle KLC = \angle BLK$.

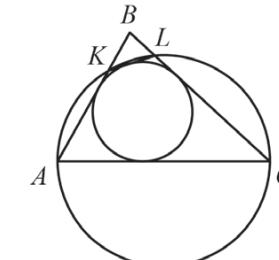


Рис. 1

Значит, треугольник ABC подобен треугольнику LBK , так как угол ABC — общий. Пусть коэффициент подобия равен k , тогда $BL = kAB$, $BK = kBC$, $KL = kAC$.

Суммы противоположных сторон описанного четырёхугольника $AKLC$ равны:

$$AK + LC = KL + AC; AB(1 - k) + BC(1 - k) = AC(1 + k); k = \frac{AB + BC - AC}{AC + AB + BC}.$$

Подставляя известные значения сторон, находим $k = \frac{6+8-9}{6+8+9} = \frac{5}{23}$. Следовательно,

$$KL = \frac{5}{23}AC = \frac{45}{23}.$$

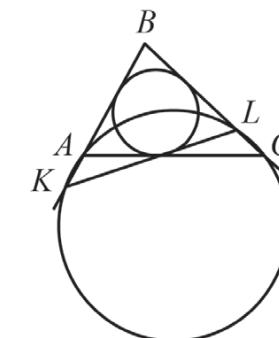


Рис. 2

Пусть точка K лежит на продолжении стороны AB (рис. 2). Углы AKL и ACL равны, поскольку опираются на одну дугу. Значит, треугольник ABC подобен треугольнику LBK , так как угол ABC — общий. Более того, они описаны около одной и той же окружности. Следовательно, коэффициент подобия равен 1, то есть треугольники LBK и ABC равны, поэтому $KL = AC = 9$. Заметим, что $BK = BC > AB$ и точка K действительно лежит на продолжении стороны AB .

Если точка L лежит на продолжении стороны BC , то $BL > BC$, но аналогично предыдущему случаю получаем $BL = AB < BC$. Значит, этот случай не достигается.

Ответ: $\frac{45}{23}, 9.$

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\left| \frac{5}{x+1} - 3 \right| = ax + a - 2$$

на промежутке $(-1; +\infty)$ имеет более двух корней.

Рассмотрим функции $f(x) = ax + a - 2$ и $g(x) = \left| \frac{5}{x+1} - 3 \right|$. Исследуем уравнение $f(x) = g(x)$ на промежутке $(-1; +\infty)$.

При $a \leq 0$ все значения функции $f(x)$ на промежутке $(-1; +\infty)$ отрицательны, а все значения функции $g(x)$ — неотрицательны, поэтому при $a \leq 0$ уравнение $f(x) = g(x)$ не имеет решений на промежутке $(-1; +\infty)$.

При $a > 0$ функция $f(x)$ возрастает. Функция $g(x)$ убывает на промежутке $\left(-1; \frac{2}{3}\right]$, поэтому уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного решения на промежутке $\left(-1; \frac{2}{3}\right]$, причём решение будет существовать тогда и только тогда, когда $f\left(\frac{2}{3}\right) \geq g\left(\frac{2}{3}\right)$, откуда получаем $a \cdot \frac{5}{3} - 2 \geq 0$, то есть $a \geq \frac{6}{5}$.

На промежутке $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$ уравнение $f(x) = g(x)$ принимает вид $ax + a - 2 = 3 - \frac{5}{x+1}$.

Это уравнение сводится к уравнению $ax^2 + (2a - 5)x + a = 0$. Будем считать, что $a > 0$, поскольку случай $a \leq 0$ был рассмотрен ранее. Дискриминант квадратного уравнения $D = 25 - 20a$, поэтому при $a > \frac{5}{4}$ это уравнение не имеет корней; при $a = \frac{5}{4}$ уравнение имеет единственный корень, равный 1; при $0 < a < \frac{5}{4}$ уравнение имеет два корня.

Если уравнение имеет два корня x_1 и x_2 , то есть $0 < a < \frac{5}{4}$, то больший корень $x_2 = \frac{5 - 2a + \sqrt{D}}{2a} > \frac{5 - 2a}{2a} > 1 > \frac{2}{3}$, поэтому он принадлежит промежутку $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

Меньший корень x_1 принадлежит промежутку $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$ тогда и только тогда, когда

$$a\left(x_1 - \frac{2}{3}\right)\left(x_2 - \frac{2}{3}\right) = a\left(\frac{2}{3}\right)^2 + (2a - 5) \cdot \frac{2}{3} + a = \frac{25a - 30}{9} > 0, \text{ то есть } a > \frac{6}{5}.$$

Таким образом, уравнение $\left| \frac{5}{x+1} - 3 \right| = ax + a - 2$ имеет следующее количество корней на промежутке $(-1; +\infty)$:

- нет корней при $a \leq 0$;
- один корень при $0 < a < \frac{6}{5}$ и при $a > \frac{5}{4}$;
- два корня при $a = \frac{6}{5}$ и при $a = \frac{5}{4}$;
- три корня при $\frac{6}{5} < a < \frac{5}{4}$.

Ответ: $\frac{6}{5} < a < \frac{5}{4}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

С6 За новогодним столом дети ели бутерброды и конфеты, причем каждый что-то ел, и может быть так, что кто-то ел и то, и другое. Известно, что мальчиков, евших бутерброды, было не более, чем $\frac{5}{16}$ от общего числа детей, евших бутерброды, а мальчиков, евших конфеты, было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа детей, евших конфеты.

- Могло ли за столом быть 13 мальчиков, если дополнительно известно, что всего за столом было 25 детей?
- Какое наибольшее количество мальчиков могло быть за столом, если дополнительно известно, что всего за столом было 25 детей?
- Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа детей без дополнительного условия пунктов а и б?

а) Если за столом было 5 мальчиков, евших только бутерброды, 8 мальчиков, евших только конфеты, и 12 девочек, каждая из которых ела и то, и другое, то условие задачи выполнено. Значит, в группе из 25 детей могло быть 13 мальчиков.

б) Предположим, что мальчиков было 14 или больше. Тогда девочек было $\frac{m_1}{m_1 + 11}$ или меньше. Пусть число мальчиков, евших бутерброды, равно m_1 . Тогда число $\frac{m_1}{m_1 + 11}$ не больше, чем доля мальчиков, евших бутерброды среди всех детей, евших бутерброды, а это число не больше, чем $\frac{5}{16}$, откуда $\frac{m_1}{m_1 + 11} \leq \frac{5}{16}$ и, следовательно, $m_1 \leq 5$. Пусть m_2 – число мальчиков, евших конфеты. Аналогично, $\frac{m_2}{m_2 + 11} \leq \frac{2}{5}$, откуда, учитывая, что m_2 число целое, находим: $m_2 \leq 7$. Но тогда общее число мальчиков, евших хоть что-то, не больше, чем $5 + 7 = 12$. Следовательно, по крайней мере, 2 мальчика ничего не ели, а это противоречит условию.

В предыдущем пункте было показано, что в группе из 20 учащихся могло быть 13 мальчиков. Значит, наибольшее количество мальчиков в группе — 13.

в) Предположим, что некоторый мальчик ел и конфеты, и бутерброды. Если бы вместо него было два мальчика, один из которых ел только конфеты, а другой – только бутерброды, то доля мальчиков, евших конфеты и доля мальчиков, евших бутерброды, остались бы прежними, а общая доля девочек стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли девочек можно считать, что каждый мальчик ел или только конфеты, или только бутерброды.

Пусть, как прежде, m_1 мальчиков ели бутерброды, m_2 мальчиков ели конфеты, и всего было d девочек. Оценим долю девочек. Будем считать, что каждая девочка ела и конфеты, и бутерброды, поскольку их доля в группе от этого не изменится, а доля среди евших конфеты и доля среди евших бутерброды не станут меньше.

По условию $\frac{m_1}{m_1 + d} \leq \frac{5}{16}$, $\frac{m_2}{m_2 + d} \leq \frac{2}{5}$, значит, $\frac{m_1}{d} \leq \frac{5}{11}$, $\frac{m_2}{d} \leq \frac{2}{3}$.

Тогда $\frac{m_1 + m_2}{d} \leq \frac{37}{33}$, поэтому доля девочек равна

$$\frac{d}{m_1 + m_2 + d} = \frac{1}{\frac{m_1 + m_2}{d} + 1} \geq \frac{1}{\frac{37}{33} + 1} = \frac{33}{70}.$$

Осталось показать, что такая доля девочек действительно могла быть. Например, если из 70 детей 15 мальчиков ели только бутерброды, 22 мальчика ели только конфеты, и еще было 33 девочки, каждая из которых ела и то, и другое, то условие задачи выполнено, а доля девочек в точности равна $\frac{33}{70}$.

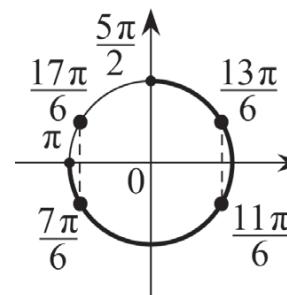
Ответ: а) да; б) 13; в) $\frac{33}{70}$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — искомая оценка в п. <i>a</i> ; — пример в п. <i>a</i> , обеспечивающий точность предыдущей оценки; — искомая оценка в п. <i>b</i> ; — пример в п. <i>b</i> , обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом**C1** а) Решите уравнение $\cos 2x + 3\sin^2 x = 1,25$.б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.**Решение.**

а) Запишем уравнение в виде:

$$1 - 2\sin^2 x + 3\sin^2 x = 1,25; \sin^2 x = \frac{1}{4}.$$

Значит, $\sin x = \pm \frac{1}{2}$, откуда $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.б) С помощью единичной окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ Получим числа: $\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}$.

Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т.п.

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C2 В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 3. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 2 : 1$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1 .Прямая D_1E пересекает прямую AD в точке K . Плоскости ABC и BED_1 пересекаются по прямой KB .Из точки E опустим перпендикуляр EH на прямую KB , тогда отрезок AH (проекция EH) перпендикулярен прямой KB . Угол AHE является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями ABC и BED_1 . Поскольку $AE : EA_1 = 2 : 1$, получаем:

$$AE = \frac{2AA_1}{3} = 2; EA_1 = AA_1 - AE = 1.$$

Из подобия треугольников A_1D_1E и AKE находим:

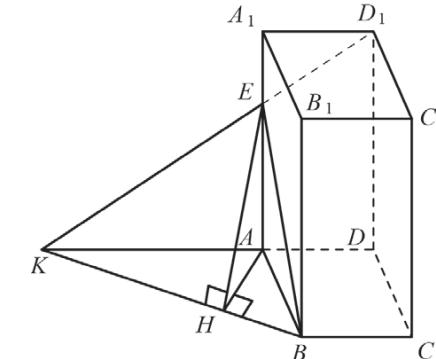
$$AK = \frac{AE}{EA_1} \cdot A_1D_1 = 2.$$

В прямоугольном треугольнике AKB с прямым углом A : $AB = 1; AK = 2; BK = \sqrt{AB^2 + AK^2} = \sqrt{5}$, откуда высота

$$AH = \frac{AK \cdot AB}{BK} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Из прямоугольного треугольника AHE с прямым углом A получаем:

$$\operatorname{tg} \angle AHE = \frac{AE}{AH} = \sqrt{5}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \sqrt{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{(x+1)^2 + 4(x-1)^2}{2} \leq \frac{(3x-1)^2}{4}, \\ \frac{x^3 - 17}{(x-4)^3} \leq 1 + \frac{1}{(x-4)^2}. \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы.

$$\begin{aligned} 2(x+1)^2 + 8(x-1)^2 - (3x-1)^2 &\leq 0; \\ 2x^2 + 4x + 2 + 8x^2 - 16x + 8 - 9x^2 + 6x - 1 &\leq 0; \\ x^2 - 6x + 9 &\leq 0; (x-3)^2 \leq 0; x = 3. \end{aligned}$$

Второе неравенство системы можно не решать. Подставляя $x = 3$ во второе неравенство, получаем: $-10 \leq 2$. Получаем верное числовое неравенство.

Ответ: 3.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы неравенств, но решение системы отсутствует или неверно	2
Обоснованно получен верный ответ только в одном неравенстве системы неравенств, но решение системы отсутствует или неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

C4 В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 14$, $BC = 18$, $AC = 20$. Окружность, проходящая через точки A и C , пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L , отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC . Найдите длину отрезка KL .

Обе точки K и L не могут лежать вне треугольника, поскольку в этом случае отрезок KL не может касаться вписанной окружности. Значит, по крайней мере одна из этих точек лежит на стороне треугольника.

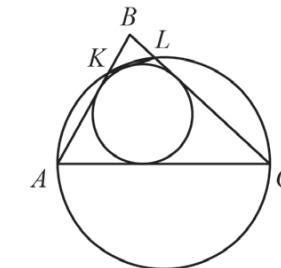


Рис. 1

Пусть обе точки K и L лежат на сторонах треугольника (рис. 1). Четырёхугольник $AKLC$ — вписанный, следовательно,

$$\angle KAC = 180^\circ - \angle KLC = \angle BLK.$$

Значит, треугольник ABC подобен треугольнику BLK , так как угол ABC — общий. Пусть коэффициент подобия равен k , тогда $BL = kAB$, $BK = kBC$, $KL = kAC$.

Суммы противоположных сторон описанного четырёхугольника $AKLC$ равны:

$$AK + LC = KL + AC; AB(1-k) + BC(1-k) = AC(1+k); k = \frac{AB + BC - AC}{AC + AB + BC}.$$

Подставляя известные значения сторон, находим $k = \frac{14 + 18 - 20}{14 + 18 + 20} = \frac{3}{13}$.

$$\text{Следовательно, } KL = \frac{3}{13}AC = \frac{60}{13}.$$

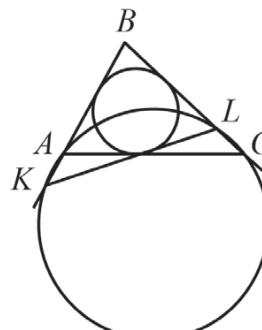


Рис. 2

Пусть точка K лежит на продолжении стороны AB (рис. 2). Углы AKL и ACL равны, поскольку опираются на одну дугу. Значит, треугольник ABC подобен треугольнику LBK , так как угол ABC — общий. Более того, они описаны около одной и той же окружности. Следовательно, коэффициент подобия равен 1, то есть треугольники LBK и ABC равны, поэтому $KL = AC = 20$. Заметим, что $BK = BC > AB$ и точка K действительно лежит на продолжении стороны AB .

Если точка L лежит на продолжении стороны BC , то $BL > BC$, но аналогично предыдущему случаю получаем $BL = AB < BC$. Значит, этот случай не достигается.

Ответ: $\frac{60}{13}, 20$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\left| \frac{5}{x-1} - 3 \right| = ax - (a+2)$$

на промежутке $(1 ; +\infty)$ имеет более двух корней.

Рассмотрим функции $f(x) = ax - a - 2$ и $g(x) = \left| \frac{5}{x-1} - 3 \right|$. Исследуем уравнение $f(x) = g(x)$ на промежутке $(1 ; +\infty)$.

При $a \leq 0$ все значения функции $f(x)$ на промежутке $(1 ; +\infty)$ отрицательны, а все значения функции $g(x)$ — неотрицательны, поэтому при $a \leq 0$ уравнение $f(x) = g(x)$ не имеет решений на промежутке $(1 ; +\infty)$.

При $a > 0$ функция $f(x)$ возрастает. Функция $g(x)$ убывает на промежутке $\left(1 ; \frac{8}{3}\right]$, поэтому уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного решения на промежутке $\left(1 ; \frac{8}{3}\right]$, причём решение будет существовать тогда и только тогда, когда $f\left(\frac{8}{3}\right) \geq g\left(\frac{8}{3}\right)$, откуда получаем $a \cdot \frac{8}{3} - a - 2 \geq 0$, то есть $a \geq \frac{6}{5}$.

На промежутке $\left(\frac{8}{3} ; +\infty\right)$ уравнение $f(x) = g(x)$ принимает вид $ax - a - 2 = 3 - \frac{5}{x-1}$.

Это уравнение сводится к уравнению $ax^2 - (2a+5)x + a + 10 = 0$. Будем считать, что $a > 0$, поскольку случай $a \leq 0$ был рассмотрен ранее. Дискриминант квадратного уравнения $D = 25 - 20a$, поэтому при $a > \frac{5}{4}$ это уравнение не имеет корней; при $a = \frac{5}{4}$ уравнение имеет единственный корень, равный 2; при $0 < a < \frac{5}{4}$ уравнение имеет два корня.

Если уравнение имеет два корня x_1 и x_2 , то есть $0 < a < \frac{5}{4}$, то больший корень $x_2 = \frac{2a+5+\sqrt{D}}{2a} > \frac{2a+5}{2a} > 4 > \frac{8}{3}$, поэтому он принадлежит промежутку $\left(\frac{8}{3} ; +\infty\right)$.

Меньший корень x_1 принадлежит промежутку $\left(\frac{8}{3} ; +\infty\right)$ тогда и только тогда, когда

$$a\left(x_1 - \frac{8}{3}\right)\left(x_2 - \frac{8}{3}\right) = a\left(\frac{8}{3}\right)^2 - (2a+5) \cdot \frac{8}{3} + (a+10) = \frac{25a-30}{9} > 0, \text{ то есть } a > \frac{6}{5}.$$

Таким образом, уравнение $\left| \frac{5}{x-1} - 3 \right| = ax - a - 2$ имеет следующее количество корней на промежутке $(1 ; +\infty)$:

- нет корней при $a \leq 0$;
- один корень при $0 < a < \frac{6}{5}$ и при $a > \frac{5}{4}$;
- два корня при $a = \frac{6}{5}$ и при $a = \frac{5}{4}$;
- три корня при $\frac{6}{5} < a < \frac{5}{4}$.

Ответ: $\frac{6}{5} < a < \frac{5}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

C6 У каждого ученика в классе дома живет кошка или собака, а у некоторых, возможно, – и кошка, и собака. Известно, что мальчиков, имеющих собак, не более $\frac{1}{4}$ от общего числа учеников, имеющих собак, а мальчиков, имеющих кошек, не более $\frac{5}{11}$ от общего числа учеников, имеющих кошек.

а) Может ли быть в классе 11 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в классе 21 ученик?

б) Какое наибольшее количество мальчиков может быть в классе, если дополнительно известно, что всего в классе 21 ученик?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учеников без дополнительного условия пунктов а и б?

а) Если в классе 3 мальчика, у которых только собака, 8 мальчиков, у которых только кошка, и 10 девочек, у каждой из которых живет и собака, и кошка, то условие задачи выполнено. Значит, 11 мальчиков может быть.

б) Предположим, что мальчиков не менее, чем 12. Тогда девочек 9 или меньше. Пусть число мальчиков, имеющих собаку, равно m_1 . Тогда доля их среди всех учеников, имеющих собаку, не меньше, чем $\frac{m_1}{m_1 + 9}$, и не больше, чем $\frac{1}{4}$. Получаем: $\frac{m_1}{m_1 + 9} \leq \frac{1}{4}$, откуда $m_1 \leq 3$. Если мальчиков, имеющих кошку m_2 , то получаем аналогичное неравенство $\frac{m_2}{m_2 + 9} \leq \frac{5}{11}$, откуда, учитывая, что m_2 – целое, получаем, что $m_2 \leq 7$. Получается, что всего мальчиков, имеющих или кошку или собаку не более, чем $3 + 7 = 10$. А всего мальчиков не меньше 12. Значит, в классе есть мальчики, у которых нет ни кошки, ни собаки. Это противоречит условию.

В предыдущем пункте было показано, что в классе из 21 ученика может быть 11 мальчиков. Значит, наибольшее количество мальчиков — 11.

в) Предположим, что некоторый мальчик имеет и кошку, и собаку. Если бы вместо него в классе было два мальчика, один из которых имеет только собаку, а другой — только кошку, то доли мальчиков с собаками и мальчиков с кошками остались бы прежними, а общая доля девочек стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли девочек в классе можно считать, что каждый мальчик имеет только собаку или только кошку.

Пусть в классе m_1 мальчиков, имеющих собаку, m_2 мальчиков, имеющих кошку, и d девочек. Оценим долю девочек в классе. Будем считать, что у каждой девочки есть и собака, и кошка, поскольку их доля от этого не изменится, а доля девочек с собаками и доля девочек с кошками не уменьшается.

По условию $\frac{m_1}{m_1 + d} \leq \frac{1}{4}$, $\frac{m_2}{m_2 + d} \leq \frac{5}{11}$, значит, $\frac{m_1}{d} \leq \frac{1}{3}$, $\frac{m_2}{d} \leq \frac{5}{6}$. Тогда $\frac{m_1 + m_2}{d} \leq \frac{7}{6}$, поэтому доля девочек в классе:

$$\frac{d}{m_1 + m_2 + d} = \frac{1}{\frac{m_1 + m_2}{d} + 1} \geq \frac{1}{\frac{7}{6} + 1} = \frac{6}{13}.$$

Осталось привести пример, показывающий, что доля девочек $\frac{6}{13}$ действительно возможна. Например, если класс состоит из 2 мальчиков, имеющих только собаку, 5 мальчиков, имеющих только кошку и 6 девочек, каждая из которых держит и собаку и кошку, то условие задачи выполнено, а доля девочек равна $\frac{6}{13}$.

Ответ: а) да; б) 11; в) $\frac{6}{13}$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — искомая оценка в п. <i>a</i> ; — пример в п. <i>a</i> , обеспечивающий точность предыдущей оценки; — искомая оценка в п. <i>b</i> ; — пример в п. <i>b</i> , обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом**C1**

a) Решите уравнение $\cos 2x - \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = -0,25$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right]$.

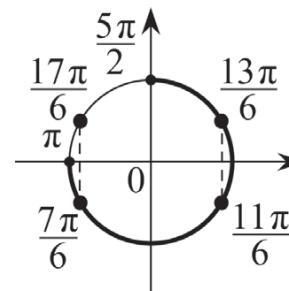
Решение.

а) Запишем уравнение в виде:

$$\cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x = -0,25; \sin^2 x = \frac{1}{4}$$

Значит, $\sin x = \pm \frac{1}{2}$, откуда $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью единичной окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right]$



Получим числа: $\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}$.

Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т.п.

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C2

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 2 : 3$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1 .

Прямая D_1E пересекает прямую AD в точке K . Плоскости ABC и BED_1 пересекаются по прямой KB .

Из точки E опустим перпендикуляр EH на прямую KB , тогда отрезок AH (проекция EH) перпендикулярен прямой KB . Угол AHE является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями ABC и BED_1 .

Поскольку $AE : EA_1 = 2 : 3$, получаем:

$$AE = \frac{2AA_1}{5} = 2; EA_1 = AA_1 - AE = 3.$$

Из подобия треугольников A_1D_1E и AKE находим:

$$AK = \frac{AE}{EA_1} \cdot A_1D_1 = \frac{2}{3}.$$

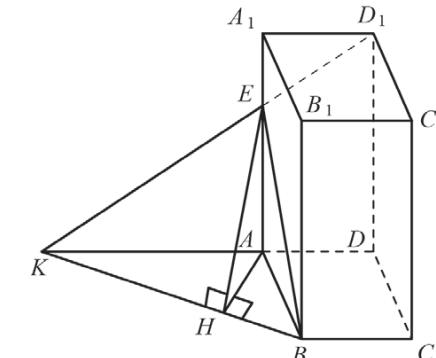
В прямоугольном треугольнике AKB с прямым углом A : $AB = 1$; $AK = \frac{2}{3}$;

$$BK = \sqrt{AB^2 + AK^2} = \frac{\sqrt{13}}{3}, \text{ откуда высота}$$

$$AH = \frac{AK \cdot AB}{BK} = \frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

Из прямоугольного треугольника AHE с прямым углом A получаем:

$$\tg \angle AHE = \frac{AE}{AH} = \sqrt{13}.$$



Ответ: $\arctg \sqrt{13}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{320 - 4^{-x-1}}{128 - 2^{-x}} \geq 2,5, \\ \log_{0,25(x+1)^2} \left(\frac{x+7}{4} \right) \leq 1. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы. Сделаем замену $y = 2^{-x}$.

$$\frac{320 - \frac{1}{4}y^2}{128 - y} \geq 2,5; \frac{1280 - y^2}{128 - y} \geq 10; \frac{y^2 - 10y}{y - 128} \geq 0; \begin{cases} 0 \leq y \leq 10, \\ y > 128. \end{cases}$$

Тогда $\begin{cases} 0 \leq 2^{-x} \leq 10 \\ 2^{-x} > 128 \end{cases}$, откуда находим решение первого неравенства системы: $x < -7$; $x \geq -\log_2 10$.

2. Решим второе неравенство системы. Рассмотрим два случая.

Первый случай: $0,25(x+1)^2 > 1$.

$$\log_{0,25(x+1)^2} \left(\frac{x+7}{4} \right) \leq 1; 0 < \frac{x+7}{4} \leq 0,25(x+1)^2; \begin{cases} x^2 + x - 6 \geq 0, \\ x + 7 > 0; \end{cases} \begin{cases} (x+3)(x-2) \geq 0, \\ x > -7, \end{cases}$$

откуда находим: $-7 < x \leq -3$; $x \geq 2$. Учитывая условие $0,25(x+1)^2 > 1$, получаем: $-7 < x < -3$; $x \geq 2$.

Второй случай: $0 < 0,25(x+1)^2 < 1$.

$$\frac{x+7}{4} \geq 0,25(x+1)^2; (x+3)(x-2) \leq 0; -3 \leq x \leq 2.$$

Учитывая условие $0 < 0,25(x+1)^2 < 1$, получаем: $-3 < x < -1$; $-1 < x < 1$.

Решение второго неравенства исходной системы:

$$-7 < x < -3; -3 < x < -1; -1 < x < 1; x \geq 2.$$

3. Поскольку $-4 < -\log_2 10 < -3$, получаем решение исходной системы неравенств:

$$-\log_2 10 \leq x < -3; -3 < x < -1; -1 < x < 1; x \geq 2.$$

Ответ: $[-\log_2 10; -3); (-3; -1); (-1; 1); [2; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы неравенств	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

C4 В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 6$, $BC = 8$, $AC = 9$. Окружность, проходящая через точки A и C , пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L , отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC . Найдите длину отрезка KL .

Обе точки K и L не могут лежать вне треугольника, поскольку в этом случае отрезок KL не может касаться вписанной окружности. Значит, по крайней мере одна из этих точек лежит на стороне треугольника.

Пусть обе точки K и L лежат на сторонах треугольника (рис. 1).

Четырёхугольник $AKLC$ — вписанный, следовательно, $\angle KAC = 180^\circ - \angle KLC = \angle BLK$.

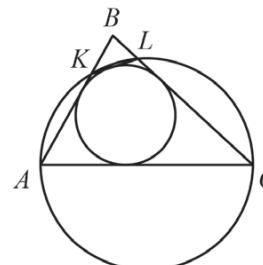


Рис. 1

Значит, треугольник ABC подобен треугольнику LBK , так как угол ABC — общий.

Пусть коэффициент подобия равен k , тогда $BL = kAB$, $BK = kBC$, $KL = kAC$.

Суммы противоположных сторон описанного четырёхугольника $AKLC$ равны:

$$AK + LC = KL + AC; AB(1 - k) + BC(1 - k) = AC(1 + k); k = \frac{AB + BC - AC}{AC + AB + BC}.$$

Подставляя известные значения сторон, находим $k = \frac{6 + 8 - 9}{6 + 8 + 9} = \frac{5}{23}$. Следовательно,

$$KL = \frac{5}{23}AC = \frac{45}{23}.$$

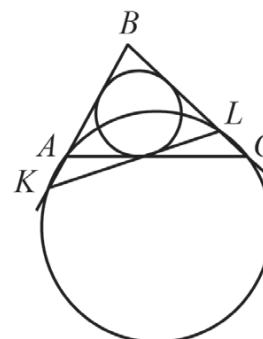


Рис. 2

Пусть точка K лежит на продолжении стороны AB (рис. 2). Углы AKL и ACL равны, поскольку опираются на одну дугу. Значит, треугольник ABC подобен треугольнику LBK , так как угол ABC — общий. Более того, они описаны около одной и той же окружности. Следовательно, коэффициент подобия равен 1, то есть треугольники LBK и ABC равны, поэтому $KL = AC = 9$. Заметим, что $BK = BC > AB$ и точка K действительно лежит на продолжении стороны AB .

Если точка L лежит на продолжении стороны BC , то $BL > BC$, но аналогично предыдущему случаю получаем $BL = AB < BC$. Значит, этот случай не достигается.

Ответ: $\frac{45}{23}, 9$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\left| \frac{5}{x+1} - 3 \right| = ax + a - 2$$

на промежутке $(-1; +\infty)$ имеет более двух корней.

Рассмотрим функции $f(x) = ax + a - 2$ и $g(x) = \left| \frac{5}{x+1} - 3 \right|$. Исследуем уравнение $f(x) = g(x)$ на промежутке $(-1; +\infty)$.

При $a \leq 0$ все значения функции $f(x)$ на промежутке $(-1; +\infty)$ отрицательны, а все значения функции $g(x)$ — неотрицательны, поэтому при $a \leq 0$ уравнение $f(x) = g(x)$ не имеет решений на промежутке $(-1; +\infty)$.

При $a > 0$ функция $f(x)$ возрастает. Функция $g(x)$ убывает на промежутке $\left(-1; \frac{2}{3}\right]$, поэтому уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного решения на промежутке $\left[-1; \frac{2}{3}\right]$, причём решение будет существовать тогда и только тогда, когда $f\left(\frac{2}{3}\right) \geq g\left(\frac{2}{3}\right)$, откуда получаем $a \cdot \frac{5}{3} - 2 \geq 0$, то есть $a \geq \frac{6}{5}$.

На промежутке $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$ уравнение $f(x) = g(x)$ принимает вид $ax + a - 2 = 3 - \frac{5}{x+1}$.

Это уравнение сводится к уравнению $ax^2 + (2a - 5)x + a = 0$. Будем считать, что $a > 0$, поскольку случай $a \leq 0$ был рассмотрен ранее. Дискриминант квадратного уравнения $D = 25 - 20a$, поэтому при $a > \frac{5}{4}$ это уравнение не имеет корней; при $a = \frac{5}{4}$ уравнение имеет единственный корень, равный 1; при $0 < a < \frac{5}{4}$ уравнение имеет два корня.

Если уравнение имеет два корня x_1 и x_2 , то есть $0 < a < \frac{5}{4}$, то больший корень

$$x_2 = \frac{5 - 2a + \sqrt{D}}{2a} > \frac{5 - 2a}{2a} > 1 > \frac{2}{3},$$

поэтому он принадлежит промежутку $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

Меньший корень x_1 принадлежит промежутку $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$ тогда и только тогда, когда

$$a\left(x_1 - \frac{2}{3}\right)\left(x_2 - \frac{2}{3}\right) = a\left(\frac{2}{3}\right)^2 + (2a - 5) \cdot \frac{2}{3} + a = \frac{25a - 30}{9} > 0,$$

то есть $a > \frac{6}{5}$.

Таким образом, уравнение $\left|\frac{5}{x+1} - 3\right| = ax + a - 2$ имеет следующее количество корней на промежутке $(-1; +\infty)$:

- нет корней при $a \leq 0$;
- один корень при $0 < a < \frac{6}{5}$ и при $a > \frac{5}{4}$;
- два корня при $a = \frac{6}{5}$ и при $a = \frac{5}{4}$;
- три корня при $\frac{6}{5} < a < \frac{5}{4}$.

Ответ: $\frac{6}{5} < a < \frac{5}{4}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	<i>4</i>

C6

За новогодним столом дети ели бутерброды и конфеты, причем каждый что-то ел, и может быть так, что кто-то ел и то, и другое. Известно, что мальчиков, евших бутерброды, было не более, чем $\frac{5}{16}$ от общего числа детей, евших бутерброды, а мальчиков, евших конфеты, было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа детей, евших конфеты.

- Могло ли за столом быть 13 мальчиков, если дополнительно известно, что всего за столом было 25 детей?
- Какое наибольшее количество мальчиков могло быть за столом, если дополнительно известно, что всего за столом было 25 детей?
- Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа детей без дополнительного условия пунктов *а* и *б*?

а) Если за столом было 5 мальчиков, евших только бутерброды, 8 мальчиков, евших только конфеты, и 12 девочек, каждая из которых ела и то, и другое, то условие задачи выполнено. Значит, в группе из 25 детей могло быть 13 мальчиков.

б) Предположим, что мальчиков было 14 или больше. Тогда девочек было $\frac{m_1}{m_1 + 11}$ не меньше, чем доля мальчиков, евших бутерброды среди всех детей, евших бутерброды, а это число не больше, чем $\frac{5}{16}$, откуда $\frac{m_1}{m_1 + 11} \leq \frac{5}{16}$ и, следовательно, $m_1 \leq 5$. Пусть

m_2 – число мальчиков, евших конфеты. Аналогично, $\frac{m_2}{m_2 + 11} \leq \frac{2}{5}$, откуда, учитывая, что m_2 число целое, находим: $m_2 \leq 7$. Но тогда общее число мальчиков, евших хоть что-то, не больше, чем $5 + 7 = 12$. Следовательно, по крайней мере, 2 мальчика ничего не ели, а это противоречит условию.

В предыдущем пункте было показано, что в группе из 20 учащихся могло быть 13 мальчиков. Значит, наибольшее количество мальчиков в группе — 13.

в) Предположим, что некоторый мальчик ел и конфеты, и бутерброды. Если бы вместо него было два мальчика, один из которых ел только конфеты, а другой – только бутерброды, то доля мальчиков, евших конфеты и доля мальчиков, евших бутерброды, остались бы прежними, а общая доля девочек стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли девочек можно считать, что каждый мальчик ел или только конфеты, или только бутерброды.

Пусть, как прежде, m_1 мальчиков ели бутерброды, m_2 мальчиков ели конфеты, и всего было d девочек. Оценим долю девочек. Будем считать, что каждая девочка ела и конфеты, и бутерброды, поскольку их доля в группе от этого не изменится, а доля среди евших конфеты и доля среди евших бутерброды не станут меньше.

По условию $\frac{m_1}{m_1 + d} \leq \frac{5}{16}$, $\frac{m_2}{m_2 + d} \leq \frac{2}{5}$, значит, $\frac{m_1}{d} \leq \frac{5}{11}$, $\frac{m_2}{d} \leq \frac{2}{3}$.

Тогда $\frac{m_1 + m_2}{d} \leq \frac{37}{33}$, поэтому доля девочек равна

$$\frac{d}{m_1 + m_2 + d} = \frac{1}{\frac{m_1 + m_2}{d} + 1} \geq \frac{1}{\frac{37}{33} + 1} = \frac{33}{70}.$$

Осталось показать, что такая доля девочек действительно могла быть. Например, если из 70 детей 15 мальчиков ели только бутерброды, 22 мальчика ели только конфеты, и еще было 33 девочки, каждая из которых ела и то, и другое, то условие задачи выполнено, а доля девочек в точности равна $\frac{33}{70}$.

Ответ: а) да; б) 13; в) $\frac{33}{70}$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — искомая оценка в п. а; — пример в п. а, обеспечивающий точность предыдущей оценки; — искомая оценка в п. б; — пример в п. б, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $\cos 2x + 3\sin^2 x = 1,25$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

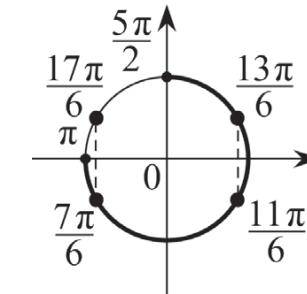
Решение.

а) Запишем уравнение в виде:

$$1 - 2\sin^2 x + 3\sin^2 x = 1,25; \sin^2 x = \frac{1}{4}.$$

Значит, $\sin x = \pm \frac{1}{2}$, откуда $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью единичной окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.



Получим числа: $\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}$.

Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т.п.

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C2 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 3. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 2 : 1$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1 .

Прямая D_1E пересекает прямую AD в точке K . Плоскости ABC и BED_1 пересекаются по прямой KB .

Из точки E опустим перпендикуляр EH на прямую KB , тогда отрезок AH (проекция EH) перпендикулярен прямой KB . Угол AHE является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями ABC и BED_1 . Поскольку $AE : EA_1 = 2 : 1$, получаем:

$$AE = \frac{2AA_1}{3} = 2; EA_1 = AA_1 - AE = 1.$$

Из подобия треугольников A_1D_1E и AKE находим:

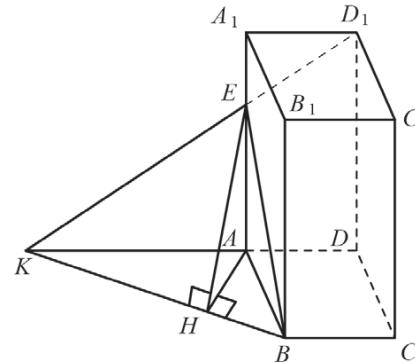
$$AK = \frac{AE}{EA_1} \cdot A_1D_1 = 2.$$

В прямоугольном треугольнике AKB с прямым углом A : $AB = 1$; $AK = 2$; $BK = \sqrt{AB^2 + AK^2} = \sqrt{5}$, откуда высота

$$AH = \frac{AK \cdot AB}{BK} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Из прямоугольного треугольника AHE с прямым углом A получаем:

$$\operatorname{tg} \angle AHE = \frac{AE}{AH} = \sqrt{5}.$$



Ответ: $\operatorname{arctg} \sqrt{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{5 - 4^{-x-1}}{1 - 2^{-x-4}} \geq 5, \\ \log_{0,25(x-2)^2} \left(\frac{x+4}{4} \right) \leq 1. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы. Сделаем замену $y = 2^{-x}$.

$$\frac{5 - \frac{1}{4}y^2}{1 - \frac{1}{16}y} \geq 5; \frac{80 - 4y^2}{16 - y} \geq 5; \frac{4y^2 - 5y}{y - 16} \geq 0; \frac{y(y - \frac{5}{4})}{y - 16} \geq 0; \begin{cases} 0 \leq y \leq \frac{5}{4}, \\ y > 16. \end{cases}$$

Тогда $0 \leq 2^{-x} \leq \frac{5}{4}$, откуда находим решение первого неравенства системы: $x < -4$; $x \geq 2 - \log_2 5$.

2. Решим второе неравенство системы. Рассмотрим два случая.

Первый случай: $0,25(x-2)^2 > 1$.

$$\log_{0,25(x-2)^2} \left(\frac{x+4}{4} \right) \leq 1; 0 < \frac{x+4}{4} \leq 0,25(x-2)^2; \begin{cases} x^2 - 5x \geq 0, \\ x+4 > 0; \end{cases} \begin{cases} x(x-5) \geq 0, \\ x > -4; \end{cases}$$

откуда находим: $-4 < x \leq 0$; $x \geq 5$. Учитывая условие $0,25(x-2)^2 > 1$, получаем: $-4 < x < 0$; $x \geq 5$.

Второй случай: $0 < 0,25(x-2)^2 < 1$.

$$\log_{0,25(x-2)^2} \left(\frac{x+4}{4} \right) \leq 1; \frac{x+4}{4} \geq 0,25(x-2)^2; x(x-5) \leq 0; 0 \leq x \leq 5.$$

Учитывая условие $0 < 0,25(x-2)^2 < 1$, получаем: $0 < x < 2$; $2 < x < 4$.

Решение второго неравенства исходной системы:

$$-4 < x < 0; 0 < x < 2; 2 < x < 4; x \geq 5.$$

3. Поскольку $-1 < 2 - \log_2 5 < 0$, получаем решение исходной системы неравенств:

$$2 - \log_2 5 \leq x < 0; 0 < x < 2; 2 < x < 4; x \geq 5.$$

Ответ: $[2 - \log_2 5; 0); (0; 2); (2; 4); [5; +\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы неравенств	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

C4 В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 14$, $BC = 18$, $AC = 20$. Окружность, проходящая через точки A и C , пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L , отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC . Найдите длину отрезка KL .

Обе точки K и L не могут лежать вне треугольника, поскольку в этом случае отрезок KL не может касаться вписанной окружности. Значит, по крайней мере одна из этих точек лежит на стороне треугольника.

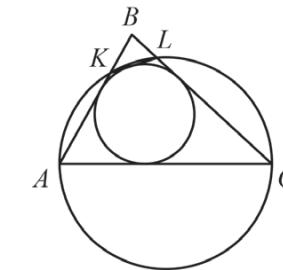


Рис. 1

Пусть обе точки K и L лежат на сторонах треугольника (рис. 1). Четырёхугольник $AKLC$ — вписанный, следовательно,

$$\angle KAC = 180^\circ - \angle KLC = \angle BLK.$$

Значит, треугольник ABC подобен треугольнику LBK , так как угол ABC — общий. Пусть коэффициент подобия равен k , тогда $BL = kAB$, $BK = kBC$, $KL = kAC$.

Суммы противоположных сторон описанного четырёхугольника $AKLC$ равны:

$$AK + LC = KL + AC; AB(1 - k) + BC(1 - k) = AC(1 + k); k = \frac{AB + BC - AC}{AC + AB + BC}.$$

Подставляя известные значения сторон, находим $k = \frac{14 + 18 - 20}{14 + 18 + 20} = \frac{3}{13}$.

$$\text{Следовательно, } KL = \frac{3}{13}AC = \frac{60}{13}.$$

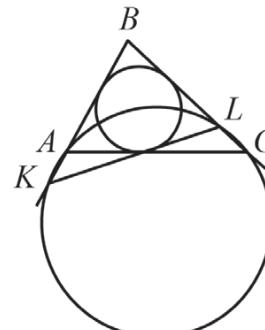


Рис. 2

Пусть точка K лежит на продолжении стороны AB (рис. 2). Углы AKL и ACL равны, поскольку опираются на одну дугу. Значит, треугольник ABC подобен треугольнику LBK , так как угол ABC — общий. Более того, они описаны около одной и той же окружности. Следовательно, коэффициент подобия равен 1, то есть треугольники LBK и ABC равны, поэтому $KL = AC = 20$. Заметим, что $BK = BC > AB$ и точка K действительно лежит на продолжении стороны AB .

Если точка L лежит на продолжении стороны BC , то $BL > BC$, но аналогично предыдущему случаю получаем $BL = AB < BC$. Значит, этот случай не достигается.

Ответ: $\frac{60}{13}, 20$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\left| \frac{5}{x-1} - 3 \right| = ax - (a+2)$$

на промежутке $(1; +\infty)$ имеет более двух корней.

Рассмотрим функции $f(x) = ax - a - 2$ и $g(x) = \left| \frac{5}{x-1} - 3 \right|$. Исследуем уравнение $f(x) = g(x)$ на промежутке $(1; +\infty)$.

При $a \leq 0$ все значения функции $f(x)$ на промежутке $(1; +\infty)$ отрицательны, а все значения функции $g(x)$ — неотрицательны, поэтому при $a \leq 0$ уравнение $f(x) = g(x)$ не имеет решений на промежутке $(1; +\infty)$.

При $a > 0$ функция $f(x)$ возрастает. Функция $g(x)$ убывает на промежутке $\left(1; \frac{8}{3}\right]$, поэтому уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного решения на промежутке $\left(1; \frac{8}{3}\right]$, причём решение будет существовать тогда и только тогда, когда $f\left(\frac{8}{3}\right) \geq g\left(\frac{8}{3}\right)$, откуда получаем $a \cdot \frac{8}{3} - a - 2 \geq 0$, то есть $a \geq \frac{6}{5}$.

На промежутке $\left(\frac{8}{3}; +\infty\right)$ уравнение $f(x) = g(x)$ принимает вид $ax - a - 2 = 3 - \frac{5}{x-1}$. Это уравнение сводится к уравнению $ax^2 - (2a+5)x + a + 10 = 0$. Будем считать, что $a > 0$, поскольку случай $a \leq 0$ был рассмотрен ранее. Дискриминант квадратного уравнения $D = 25 - 20a$, поэтому при $a > \frac{5}{4}$ это уравнение не имеет корней; при $a = \frac{5}{4}$ уравнение имеет единственный корень, равный 2; при $0 < a < \frac{5}{4}$ уравнение имеет два корня.

Если уравнение имеет два корня x_1 и x_2 , то есть $0 < a < \frac{5}{4}$, то больший корень $x_2 = \frac{2a+5+\sqrt{D}}{2a} > \frac{2a+5}{2a} > 4 > \frac{8}{3}$, поэтому он принадлежит промежутку $\left(\frac{8}{3}; +\infty\right)$.

Меньший корень x_1 принадлежит промежутку $\left(\frac{8}{3}; +\infty\right)$ тогда и только тогда, когда

$$a\left(x_1 - \frac{8}{3}\right)\left(x_2 - \frac{8}{3}\right) = a\left(\frac{8}{3}\right)^2 - (2a+5) \cdot \frac{8}{3} + (a+10) = \frac{25a-30}{9} > 0, \text{ то есть } a > \frac{6}{5}.$$

Таким образом, уравнение $\left| \frac{5}{x-1} - 3 \right| = ax - (a+2)$ имеет следующее количество корней на промежутке $(1; +\infty)$:

- нет корней при $a \leq 0$;
- один корень при $0 < a < \frac{6}{5}$ и при $a > \frac{5}{4}$;
- два корня при $a = \frac{6}{5}$ и при $a = \frac{5}{4}$;
- три корня при $\frac{6}{5} < a < \frac{5}{4}$.

Ответ: $\frac{6}{5} < a < \frac{5}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

C6 У каждого ученика в классе дома живет кошка или собака, а у некоторых, возможно, – и кошка, и собака. Известно, что мальчиков, имеющих собак, не более $\frac{1}{4}$ от общего числа учеников, имеющих собак, а мальчиков, имеющих кошек, не более $\frac{5}{11}$ от общего числа учеников, имеющих кошек.

а) Может ли быть в классе 11 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в классе 21 ученик?

б) Какое наибольшее количество мальчиков может быть в классе, если дополнительно известно, что всего в классе 21 ученик?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учеников без дополнительного условия пунктов а и б?

а) Если в классе 3 мальчика, у которых только собака, 8 мальчиков, у которых только кошка, и 10 девочек, у каждой из которых живет и собака, и кошка, то условие задачи выполнено. Значит, 11 мальчиков может быть.

б) Предположим, что мальчиков не менее, чем 12. Тогда девочек 9 или меньше. Пусть число мальчиков, имеющих собаку, равно m_1 . Тогда доля их среди всех учеников, имеющих собаку, не меньше, чем $\frac{m_1}{m_1 + 9}$, и не больше, чем $\frac{1}{4}$. Получаем: $\frac{m_1}{m_1 + 9} \leq \frac{1}{4}$, откуда $m_1 \leq 3$. Если мальчиков, имеющих кошку m_2 , то получаем аналогичное неравенство $\frac{m_2}{m_2 + 9} \leq \frac{5}{11}$, откуда, учитывая, что m_2 – целое, получаем, что $m_2 \leq 7$. Получается, что всего мальчиков, имеющих или кошку или собаку не более, чем $3 + 7 = 10$. А всего мальчиков не меньше 12. Значит, в классе есть мальчики, у которых нет ни кошки, ни собаки. Это противоречит условию.

В предыдущем пункте было показано, что в классе из 21 ученика может быть 11 мальчиков. Значит, наибольшее количество мальчиков — 11.

в) Предположим, что некоторый мальчик имеет и кошку, и собаку. Если бы вместо него в классе было два мальчика, один из которых имеет только собаку, а другой — только кошку, то доли мальчиков с собаками и мальчиков с кошками остались бы прежними, а общая доля девочек стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли девочек в классе можно считать, что каждый мальчик имеет только собаку или только кошку.

Пусть в классе m_1 мальчиков, имеющих собаку, m_2 мальчиков, имеющих кошку, и d девочек. Оценим долю девочек в классе. Будем считать, что у каждой девочки есть и собака, и кошка, поскольку их доля от этого не изменится, а доля девочек с собаками и доля девочек с кошками не уменьшатся.

По условию $\frac{m_1}{m_1 + d} \leq \frac{1}{4}$, $\frac{m_2}{m_2 + d} \leq \frac{5}{11}$, значит, $\frac{m_1}{d} \leq \frac{1}{3}$, $\frac{m_2}{d} \leq \frac{5}{6}$. Тогда $\frac{m_1 + m_2}{d} \leq \frac{7}{6}$, поэтому доля девочек в классе:

$$\frac{d}{m_1 + m_2 + d} = \frac{1}{\frac{m_1 + m_2}{d} + 1} \geq \frac{1}{\frac{7}{6} + 1} = \frac{6}{13}.$$

Осталось привести пример, показывающий, что доля девочек $\frac{6}{13}$ действительно возможна. Например, если класс состоит из 2 мальчиков, имеющих только собаку, 5 мальчиков, имеющих только кошку и 6 девочек, каждая из которых держит и собаку и кошку, то условие задачи выполнено, а доля девочек равна $\frac{6}{13}$.

Ответ: а) да; б) 11; в) $\frac{6}{13}$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — искомая оценка в п. <i>a</i> ; — пример в п. <i>a</i> , обеспечивающий точность предыдущей оценки; — искомая оценка в п. <i>b</i> ; — пример в п. <i>b</i> , обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4