

**Тренировочная работа № 3****по МАТЕМАТИКЕ****9 апреля 2013 года****11 класс****Вариант МА1601****Район.****Город (населённый пункт)****Школа.****Класс****Фамилия****Имя.****Отчество.****Инструкция по выполнению работы**

На выполнение тренировочной работы по математике даётся 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (В1–В14) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если получен верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 4 более сложных задания (С1–С4) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у Вас останется время.

*Желаем успеха!*

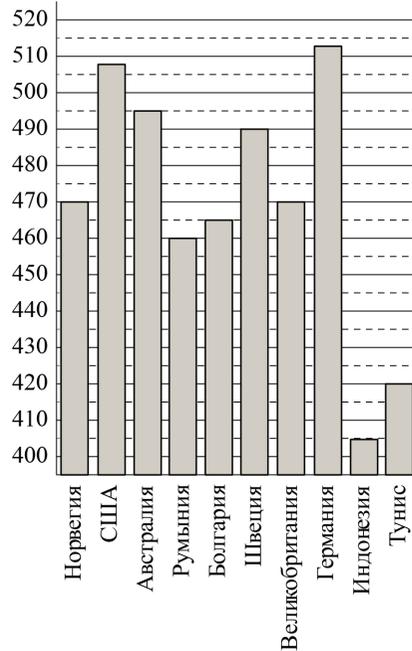
Часть 1

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

**В1** На автозаправке клиент отдал кассиру 1000 рублей и залил в бак 29 литров бензина по цене 33 руб. 70 коп. за литр. Какую сумму сдачи он должен получить у кассира? Ответ запишите в рублях.

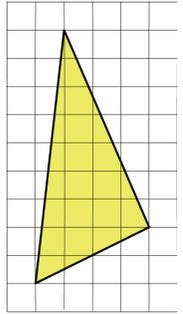
Ответ:

**В2** На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 8-го класса по математике в 2007 году (по 1000-балльной шкале). Найдите средний балл участников из Болгарии.



Ответ:

**В3** Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ:

**В4** В таблице указаны средние цены (в рублях) на некоторые основные продукты питания в трёх городах России (по данным на начало 2010 года).

| Наименование продукта       | Владивосток | Воронеж | Омск |
|-----------------------------|-------------|---------|------|
| Пшеничный хлеб (батон)      | 12          | 14      | 16   |
| Молоко (1 литр)             | 25          | 20      | 24   |
| Картофель (1 кг)            | 18          | 13      | 16   |
| Сыр (1 кг)                  | 250         | 270     | 260  |
| Мясо (говядина) (1 кг)      | 300         | 240     | 295  |
| Подсолнечное масло (1 литр) | 58          | 52      | 50   |

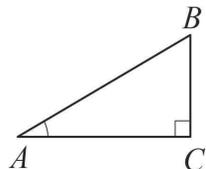
Определите, в каком из этих городов окажется самым дешёвым следующий набор продуктов: 2 кг картофеля, 1 кг сыра, 1 л подсолнечного масла. В ответ запишите стоимость данного набора продуктов в этом городе (в рублях).

Ответ:

**В5** Решите уравнение  $\sqrt{\frac{1}{1-5x}} = \frac{1}{6}$ .

Ответ:

**В6** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $AB = 4$ ,  $BC = 2$ . Найдите  $\sin A$ .

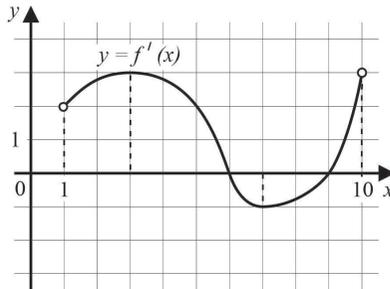


Ответ:

**B7** Найдите значение выражения  $\frac{(8\sqrt{3})^2}{8}$ .

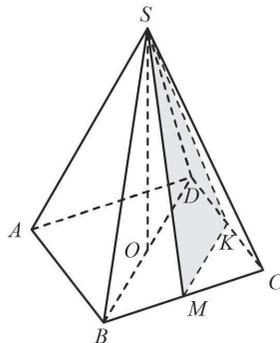
Ответ:

**B8** На рисунке изображён график функции  $y = f'(x)$  — производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(1; 10)$ . Найдите точку минимума функции  $f(x)$ .



Ответ:

**B9** В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  высота  $SO$  равна 13, диагональ основания  $BD$  равна 8. Точки  $K$  и  $M$  — середины ребер  $CD$  и  $BC$  соответственно. Найдите тангенс угла между плоскостью  $SMK$  и плоскостью основания  $ABCD$ .

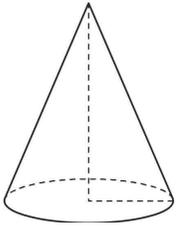


Ответ:

**B10** В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что выпадет хотя бы две решки.

Ответ:

**B11** Во сколько раз уменьшится объём конуса, если его высоту уменьшить в 8 раз, а радиус основания оставить прежним?



Ответ:

**B12** Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально. На исследуемом интервале температура вычисляется по формуле  $T(t) = T_0 + bt + at^2$ , где  $t$  — время в минутах,  $T_0 = 1380$  K,  $a = -15$  K/мин<sup>2</sup>,  $b = 165$  K/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1800 K прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.

Ответ:

**B13** От пристани А к пристани В, расстояние между которыми равно 128 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 8 часов после этого следом за ним со скоростью, на 8 км/ч большей, отправился второй. Найдите скорость второго теплохода, если в пункт В он прибыл одновременно с первым. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:

**В14** Найдите точку минимума функции  $y = \sqrt{x^2 + 6x + 29}$

Ответ:

**Часть 2**

*Для записи решений и ответов на задания C1–C4 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.*

**C1** а) Решите уравнение  $2\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}x\right) = \cos x$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$ .

**C2** В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  боковое ребро равно  $8\sqrt{3}$ , а ребро основания равно 1. Точка  $D$  — середина ребра  $BB_1$ . Найдите объём пятигранника  $ABCA_1D$ .

**C3** Решите систему неравенств 
$$\begin{cases} |x + 2| - x|x| \leq 0, \\ (x^2 - x - 6) \cdot \sqrt{8 - x} \leq 0. \end{cases}$$

**C4** Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит вершина  $C$ , на другой — основание  $AB$  равнобедренного треугольника  $ABC$ . Известно, что  $AB = 10$ . Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник  $ABC$ , а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника  $ABC$ .

**Тренировочная работа № 3****по МАТЕМАТИКЕ****9 апреля 2013 года****11 класс****Вариант МА1602****Район.****Город (населённый пункт)****Школа.****Класс****Фамилия****Имя.****Отчество.****Инструкция по выполнению работы**

На выполнение тренировочной работы по математике даётся 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (В1–В14) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если получен верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 4 более сложных задания (С1–С4) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у Вас останется время.

*Желаем успеха!*

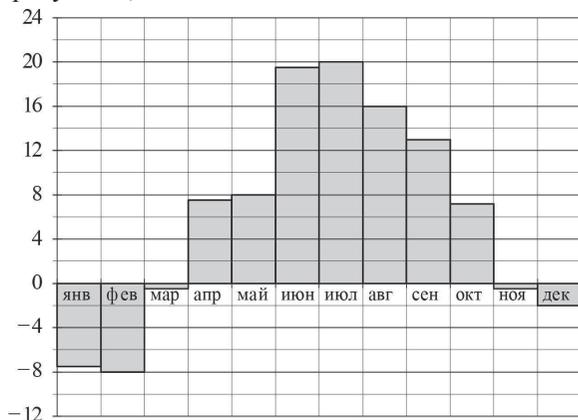
Часть 1

*Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.*

**В1** При оплате услуг через платёжный терминал взимается комиссия 6%. Терминал принимает суммы, кратные 10 рублям. Месячная плата за интернет составляет 550 рублей. Какую минимальную сумму (в рублях) необходимо положить в приёмное устройство терминала, чтобы на счету фирмы, предоставляющей интернет-услуги, оказалась сумма, не меньшая 550 рублей?

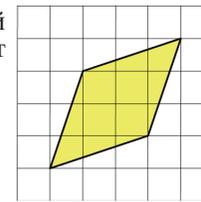
Ответ:

**В2** На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Санкт-Петербурге за каждый месяц 1999 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру во второй половине 1999 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ:

**В3** Найдите площадь ромба, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ:

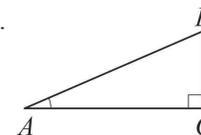
**В4** Семья из трёх человек планирует поехать из Москвы в Чебоксары. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине. Билет на поезд на одного человека стоит 980 рублей. Автомобиль расходует 12 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 700 км, а цена бензина равна 21 рубль за литр. Сколько рублей придётся заплатить за наиболее дешёвую поездку на троих?

Ответ:

**В5** Найдите корень уравнения  $\log_3(15 - x) = \log_3 2$ .

Ответ:

**В6** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $AB = 5$ ,  $BC = 2$ . Найдите  $\sin A$ .

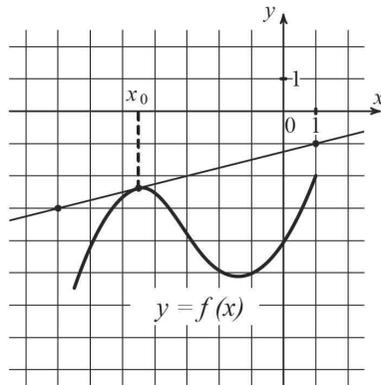


Ответ:

**В7** Найдите значение выражения  $(\sqrt{8} - \sqrt{13})(\sqrt{8} + \sqrt{13})$ .

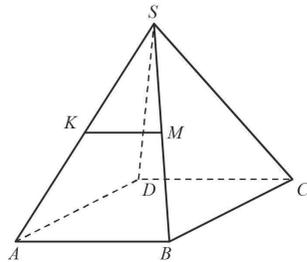
Ответ:

**B8** На рисунке изображены график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .



Ответ:

**B9** В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABC$  все рёбра равны между собой (см. рисунок). Точки  $K$  и  $M$  — середины рёбер  $SA$  и  $SB$  соответственно. Найдите угол между прямыми  $KM$  и  $SC$ . Ответ дайте в градусах.

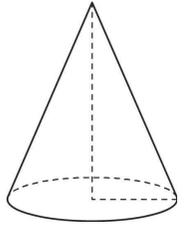


Ответ:

**B10** В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что решка выпадет не более одного раза.

Ответ:

**B11** Во сколько раз уменьшится объём конуса, если его высоту уменьшить в 9 раз, а радиус основания оставить прежним?



Ответ:

**B12** Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально. На исследуемом интервале температура вычисляется по формуле  $T(t) = T_0 + bt + at^2$ , где  $t$  — время в минутах,  $T_0 = 1330$  K,  $a = -15$  K / мин<sup>2</sup>,  $b = 165$  K / мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1600 K прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.

Ответ:

**B13** От пристани А к пристани В, расстояние между которыми равно 150 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 5 часов после этого следом за ним со скоростью, на 5 км/ч большей, отправился второй. Найдите скорость второго теплохода, если в пункт В он прибыл одновременно с первым. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:

**B14** Найдите точку минимума функции  $y = \sqrt{x^2 + 4x + 26}$ .

Ответ:

## Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C4 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 а) Решите уравнение  $2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sqrt{3}\cos x$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$ .

C2 В правильной треугольной призме  $ABC A_1 B_1 C_1$  боковое ребро равно  $\sqrt{3}$ , а ребро основания равно 4. Точка  $D$  — середина ребра  $BB_1$ . Найдите объём пятигранника  $A_1 B_1 C_1 CD$ .

C3 Решите систему неравенств 
$$\begin{cases} (x-3)|x-3| - |x-1| \geq 0, \\ (x^2 - 7x + 6) \cdot \sqrt{11-x} \leq 0. \end{cases}$$

C4 Расстояние между параллельными прямыми равно 6. На одной из них лежит вершина  $C$ , на другой — основание  $AB$  равнобедренного треугольника  $ABC$ . Известно, что  $AB = 16$ . Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник  $ABC$ , а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника  $ABC$ .

**Тренировочная работа № 3****по МАТЕМАТИКЕ****9 апреля 2013 года****11 класс****Вариант МА1603****Район.****Город (населённый пункт)****Школа.****Класс****Фамилия****Имя.****Отчество.****Инструкция по выполнению работы**

На выполнение тренировочной работы по математике даётся 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (B1–B14) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если получен верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 4 более сложных задания (C1–C4) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у Вас останется время.

*Желаем успеха!*

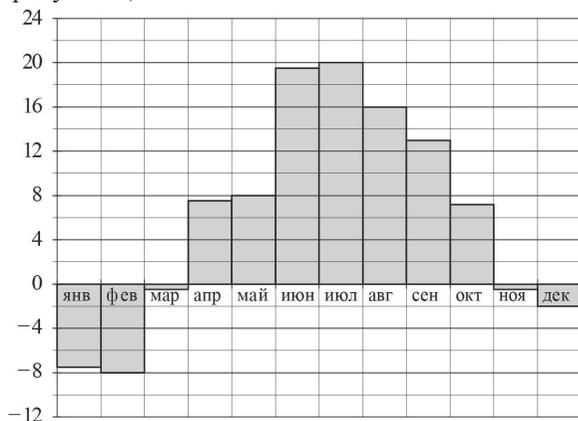
Часть 1

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

**В1** На автозаправке клиент отдал кассиру 1000 рублей и залил в бак 29 литров бензина по цене 33 руб. 70 коп. за литр. Какую сумму сдачи он должен получить у кассира? Ответ запишите в рублях.

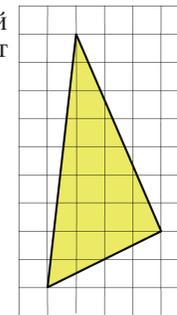
Ответ:

**В2** На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Санкт-Петербурге за каждый месяц 1999 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру во второй половине 1999 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ:

**В3** Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ:

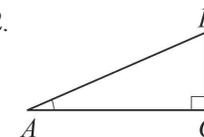
**В4** Семья из трёх человек планирует поехать из Москвы в Чебоксары. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине. Билет на поезд на одного человека стоит 980 рублей. Автомобиль расходует 12 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 700 км, а цена бензина равна 21 рубль за литр. Сколько рублей придётся заплатить за наиболее дешёвую поездку на троих?

Ответ:

**В5** Решите уравнение  $\sqrt{\frac{1}{1-5x}} = \frac{1}{6}$ .

Ответ:

**В6** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $AB = 5$ ,  $BC = 2$ . Найдите  $\sin A$ .

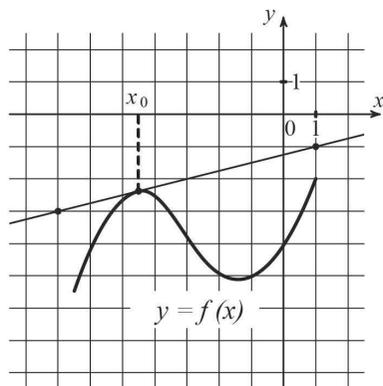


Ответ:

**В7** Найдите значение выражения  $\frac{(8\sqrt{3})^2}{8}$ .

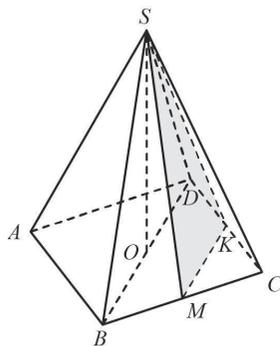
Ответ:

**B8** На рисунке изображены график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .



Ответ:

**B9** В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  высота  $SO$  равна 13, диагональ основания  $BD$  равна 8. Точки  $K$  и  $M$  — середины ребер  $CD$  и  $BC$  соответственно. Найдите тангенс угла между плоскостью  $SMK$  и плоскостью основания  $ABC$ .

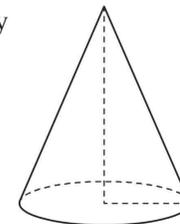


Ответ:

**B10** В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что решка выпадет не более одного раза.

Ответ:

**B11** Во сколько раз уменьшится объём конуса, если его высоту уменьшить в 8 раз, а радиус основания оставить прежним?



Ответ:

**B12** Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально. На исследуемом интервале температура вычисляется по формуле  $T(t) = T_0 + bt + at^2$ , где  $t$  — время в минутах,  $T_0 = 1330$  K,  $a = -15$  K/мин<sup>2</sup>,  $b = 165$  K/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1600 K прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.

Ответ:

**B13** От пристани А к пристани В, расстояние между которыми равно 128 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 8 часов после этого следом за ним со скоростью, на 8 км/ч большей, отправился второй. Найдите скорость второго теплохода, если в пункт В он прибыл одновременно с первым. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:

**B14** Найдите точку минимума функции  $y = \sqrt{x^2 + 4x + 26}$ .

Ответ:

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C4 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

**C1** а) Решите уравнение  $2\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos x$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$ .

**C2** В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  боковое ребро равно  $\sqrt{3}$ , а ребро основания равно 4. Точка  $D$  — середина ребра  $BB_1$ . Найдите объём пятигранника  $A_1B_1C_1CD$ .

**C3** Решите систему неравенств 
$$\begin{cases} |x + 2| - x|x| \leq 0, \\ (x^2 - x - 6) \cdot \sqrt{8 - x} \leq 0. \end{cases}$$

**C4** Расстояние между параллельными прямыми равно 6. На одной из них лежит вершина  $C$ , на другой — основание  $AB$  равнобедренного треугольника  $ABC$ . Известно, что  $AB = 16$ . Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник  $ABC$ , а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороной треугольника  $ABC$ .

**Тренировочная работа № 3****по МАТЕМАТИКЕ****9 апреля 2013 года****11 класс****Вариант МА1604****Район.****Город (населённый пункт)****Школа.****Класс****Фамилия****Имя.****Отчество.****Инструкция по выполнению работы**

На выполнение тренировочной работы по математике даётся 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (B1–B14) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если получен верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 4 более сложных задания (C1–C4) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у Вас останется время.

*Желаем успеха!*

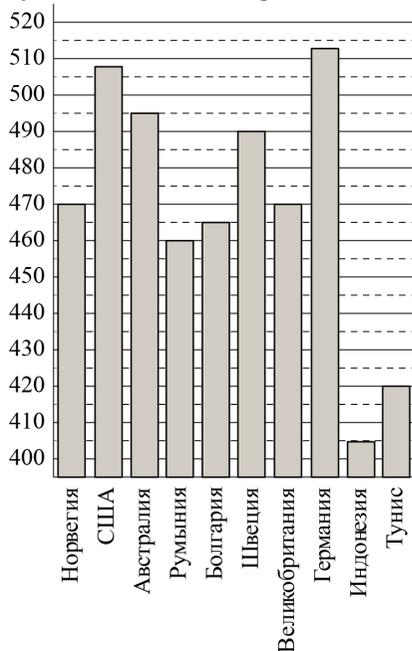
Часть 1

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

**В1** При оплате услуг через платёжный терминал взимается комиссия 6%. Терминал принимает суммы, кратные 10 рублям. Месячная плата за интернет составляет 550 рублей. Какую минимальную сумму (в рублях) необходимо положить в приёмное устройство терминала, чтобы на счете фирмы, предоставляющей интернет-услуги, оказалась сумма, не меньшая 550 рублей?

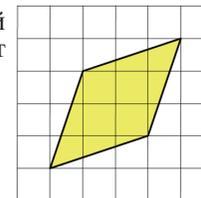
Ответ:

**В2** На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 8-го класса по математике в 2007 году (по 1000-балльной шкале). Найдите средний балл участников из Болгарии.



Ответ:

**В3** Найдите площадь ромба, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ:

**В4** В таблице указаны средние цены (в рублях) на некоторые основные продукты питания в трёх городах России (по данным на начало 2010 года).

| Наименование продукта       | Владивосток | Воронеж | Омск |
|-----------------------------|-------------|---------|------|
| Пшеничный хлеб (батон)      | 12          | 14      | 16   |
| Молоко (1 литр)             | 25          | 20      | 24   |
| Картофель (1 кг)            | 18          | 13      | 16   |
| Сыр (1 кг)                  | 250         | 270     | 260  |
| Мясо (говядина) (1 кг)      | 300         | 240     | 295  |
| Подсолнечное масло (1 литр) | 58          | 52      | 50   |

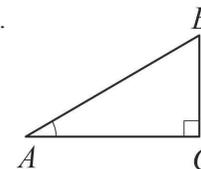
Определите, в каком из этих городов окажется самым дешёвым следующий набор продуктов: 2 кг картофеля, 1 кг сыра, 1 л подсолнечного масла. В ответ запишите стоимость данного набора продуктов в этом городе (в рублях).

Ответ:

**В5** Найдите корень уравнения  $\log_3(15 - x) = \log_3 2$ .

Ответ:

**В6** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $AB = 4$ ,  $BC = 2$ . Найдите  $\sin A$ .

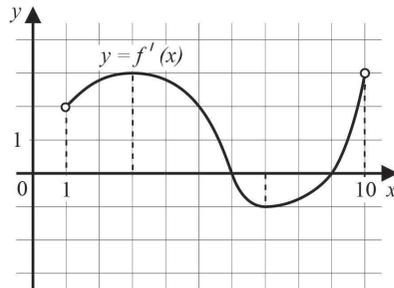


Ответ:

**В7** Найдите значение выражения  $(\sqrt{8} - \sqrt{13})(\sqrt{8} + \sqrt{13})$ .

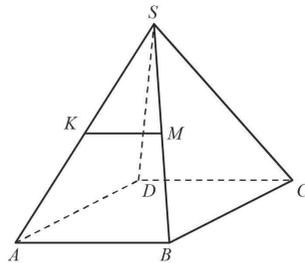
Ответ:

**В8** На рисунке изображён график функции  $y = f'(x)$  — производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(1; 10)$ . Найдите точку минимума функции  $f(x)$ .



Ответ:

**В9** В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABC$  все рёбра равны между собой (см. рисунок). Точки  $K$  и  $M$  — середины рёбер  $SA$  и  $SB$  соответственно. Найдите угол между прямыми  $KM$  и  $SC$ . Ответ дайте в градусах.

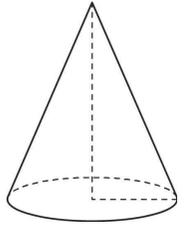


Ответ:

**В10** В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что выпадет хотя бы две решки.

Ответ:

**В11** Во сколько раз уменьшится объём конуса, если его высоту уменьшить в 9 раз, а радиус основания оставить прежним?



Ответ:

**В12** Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально. На исследуемом интервале температура вычисляется по формуле  $T(t) = T_0 + bt + at^2$ , где  $t$  — время в минутах,  $T_0 = 1380$  К,  $a = -15$  К/мин<sup>2</sup>,  $b = 165$  К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1800 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.

Ответ:

**В13** От пристани А к пристани В, расстояние между которыми равно 150 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 5 часов после этого следом за ним со скоростью, на 5 км/ч большей, отправился второй. Найдите скорость второго теплохода, если в пункт В он прибыл одновременно с первым. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:

**В14** Найдите точку минимума функции  $y = \sqrt{x^2 + 6x + 29}$ .

Ответ:

## Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C4 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

**C1** а) Решите уравнение  $2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sqrt{3}\cos x$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$ .

**C2** В правильной треугольной призме  $ABC A_1 B_1 C_1$  боковое ребро равно  $8\sqrt{3}$ , а ребро основания равно 1. Точка  $D$  — середина ребра  $BB_1$ . Найдите объём пятигранника  $ABC A_1 D$ .

**C3** Решите систему неравенств 
$$\begin{cases} (x-3)|x-3| - |x-1| \geq 0, \\ (x^2 - 7x + 6) \cdot \sqrt{11-x} \leq 0. \end{cases}$$

**C4** Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит вершина  $C$ , на другой — основание  $AB$  равнобедренного треугольника  $ABC$ . Известно, что  $AB = 10$ . Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник  $ABC$ , а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника  $ABC$ .

**Ответы к заданиям с кратким ответом**

| № задания | Ответ |
|-----------|-------|
| B1        | 22,7  |
| B2        | 465   |
| B3        | 17    |
| B4        | 342   |
| B5        | -7    |
| B6        | 0,5   |
| B7        | 24    |

| № задания | Ответ |
|-----------|-------|
| B8        | 9     |
| B9        | 6,5   |
| B10       | 0,5   |
| B11       | 8     |
| B12       | 4     |
| B13       | 16    |
| B14       | -3    |

**Ответы к заданиям с кратким ответом**

| № задания | Ответ |
|-----------|-------|
| B1        | 590   |
| B2        | -2    |
| B3        | 8     |
| B4        | 1764  |
| B5        | 13    |
| B6        | 0,4   |
| B7        | -5    |

| № задания | Ответ |
|-----------|-------|
| B8        | 0,25  |
| B9        | 60    |
| B10       | 0,5   |
| B11       | 9     |
| B12       | 2     |
| B13       | 15    |
| B14       | -2    |

**Ответы к заданиям с кратким ответом**

| № задания | Ответ |
|-----------|-------|
| B1        | 22,7  |
| B2        | -2    |
| B3        | 17    |
| B4        | 1764  |
| B5        | -7    |
| B6        | 0,4   |
| B7        | 24    |

| № задания | Ответ |
|-----------|-------|
| B8        | 0,25  |
| B9        | 6,5   |
| B10       | 0,5   |
| B11       | 8     |
| B12       | 2     |
| B13       | 16    |
| B14       | -2    |

**Ответы к заданиям с кратким ответом**

| № задания | Ответ |
|-----------|-------|
| B1        | 590   |
| B2        | 465   |
| B3        | 8     |
| B4        | 342   |
| B5        | 13    |
| B6        | 0,5   |
| B7        | -5    |

| № задания | Ответ |
|-----------|-------|
| B8        | 9     |
| B9        | 60    |
| B10       | 0,5   |
| B11       | 9     |
| B12       | 4     |
| B13       | 15    |
| B14       | -3    |

**Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом**

**C1** а) Решите уравнение  $2\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos x$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$ .

**Решение.**

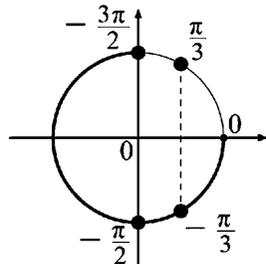
а) Преобразуем уравнение:

$$2\cos^2 x = \cos x;$$

$$\cos x \cdot (2\cos x - 1) = 0; \quad \cos x = 0 \text{ или } \cos x = \frac{1}{2};$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \text{ или } x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$ :  $x = -\frac{3\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{3}$ .



**Ответ:** а)  $\frac{\pi}{2} + \pi k; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$  б)  $-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}.$

| Содержание критерия  | Баллы |
|--|-------|
| Обоснованно получены верные ответы в п. а) и в п. б)   | 2     |
| Обоснованно получен верный ответ в п. а), но обоснование отбора корней в п. б) не приведено, или задача в п. а) обоснованно сведена к исследованию простейших тригонометрических уравнений без предъявления верного ответа, а в п. б) приведён обоснованный отбор корней | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше  | 0     |
| <i>Максимальный балл</i>   | 2     |

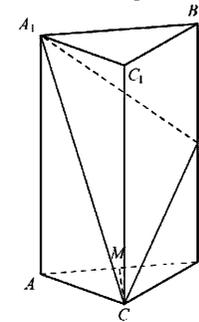
**C2** В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  боковое ребро равно  $8\sqrt{3}$ , а ребро основания равно 1. Точка  $D$  — середина ребра  $BB_1$ . Найдите объём пятигранника  $ABCA_1D$ .

**Решение.**

Пусть  $CM$  — высота треугольника  $ABC$ . Тогда  $CM \perp ABB_1$  по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, поскольку в правильной призме  $AA_1 \perp ABC$  и, значит,  $CM \perp AA_1$ . Пятигранник  $ABCA_1D$  — четырёхугольная пирамида с вершиной в точке  $C$  и основанием  $ABDA_1$  — прямоугольной трапецией. Высота пирамиды  $CM = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Площадь основания равна

$$\frac{AA_1 + BD}{2} \cdot AB = \frac{8\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3},$$

$$V = \frac{1}{3} S_{ABDA_1} \cdot CM = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3.$$



**Ответ:** 3.

| Содержание критерия   | Баллы |
|---|-------|
| Обоснованно получен верный ответ  | 2     |
| Ход решения верный, но получен неверный ответ в результате вычислительной ошибки, или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше   | 0     |
| <i>Максимальный балл</i>  | 2     |

**С3**

Решите систему неравенств 
$$\begin{cases} |x+2| - x|x| \leq 0, \\ (x^2 - x - 6) \cdot \sqrt{8-x} \leq 0. \end{cases}$$

**Решение.**

Решим первое неравенство  $|x+2| - x|x| \leq 0$ . При любом  $x \leq 0$  неравенство  $|x+2| - x|x| \leq 0$  не выполняется. При  $x > 0$  неравенство равносильно неравенству  $x^2 - x - 2 \geq 0$ , решением которого с учётом условия  $x > 0$  является луч  $x \geq 2$ .

Число 8 – решение второго неравенства, и при  $x > 8$  решений нет.

Пусть  $x < 8$ . Тогда  $\sqrt{8-x} > 0$ , и второе неравенство равносильно неравенству  $x^2 - x - 6 \leq 0$ . Решим систему:

$$\begin{cases} x < 8, \\ x^2 - x - 6 \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 8, \\ -2 \leq x \leq 3; \end{cases} \quad -2 \leq x \leq 3.$$

Таким образом, решением второго неравенства являются отрезок  $-2 \leq x \leq 3$  и точка  $x = 8$ .

Следовательно, решением данной системы являются отрезок  $2 \leq x \leq 3$  и точка  $x = 8$ .

**Ответ:**  $[2; 3], 8$ .

| Содержание критерия  | Баллы |
|--|-------|
| Обоснованно получен верный ответ   | 3     |
| Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы неравенств | 2     |
| Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств    | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше        | 0     |
| <i>Максимальный балл</i>   | 3     |

**С4**

Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит вершина  $C$ , на другой — основание  $AB$  равнобедренного треугольника  $ABC$ . Известно, что  $AB = 10$ . Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник  $ABC$ , а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника  $ABC$ .

**Решение.**

Пусть  $CH$  — высота треугольника  $ABC$ ,  $r$  и  $Q$  — радиус и центр вписанной окружности,  $CH = 12$ ,  $AH = 5$ , поэтому  $AC = 13$ . Найдём площадь, полупериметр и радиус вписанной окружности треугольника  $ABC$ :

$$S = \frac{CH \cdot AB}{2} = \frac{12 \cdot 10}{2} = 60, \quad p = \frac{1}{2}(AC + AB + CB) = AC + AH = 18.$$

Тогда  $r = \frac{S}{p} = \frac{10}{3}$ . Кроме того, по теореме Пифагора

$$AQ = \sqrt{AH^2 + QH^2} = \sqrt{25 + \frac{100}{9}} = \frac{5\sqrt{13}}{3}.$$

Пусть окружность с центром в точке  $O$  касается боковой стороны  $AC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  и данных параллельных прямых. Радиус этой окружности равен 6, поскольку он вдвое меньше расстояния между прямыми. Точку касания окружности с прямой  $AB$  обозначим  $M$ .

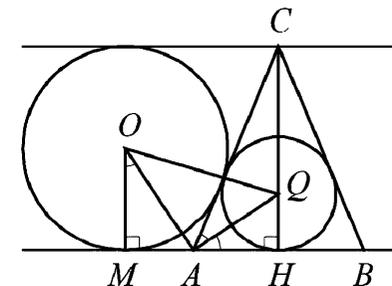


Рис. 1

Пусть точки  $B$  и  $M$  лежат по разные стороны от точки  $A$  (рис. 1). Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому  $AO$  и  $AQ$  — биссектрисы смежных углов  $\angle MAC$  и  $\angle CAB$  соответственно. Значит,  $\angle OAQ = 90^\circ$ , и  $\angle MOA = \angle QAH$ , поскольку эти углы образованы парами соответственно перпендикулярных прямых. Следовательно, прямоугольные треугольники  $OMA$  и  $AHQ$  подобны с коэффициентом  $\frac{OM}{AH} = \frac{6}{5}$ . Поэтому

$$OQ = \sqrt{OA^2 + AQ^2} = \sqrt{\left(\frac{6}{5}AQ\right)^2 + AQ^2} = \sqrt{\frac{36}{25} + 1} \cdot AQ = \frac{\sqrt{61}}{5} \cdot \frac{5\sqrt{13}}{3} = \frac{\sqrt{793}}{3}.$$

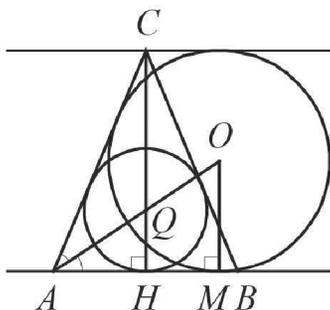


Рис. 2

Пусть точки  $B$  и  $M$  лежат по одну сторону от точки  $A$  (рис. 2). Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому лучи  $AO$  и  $AQ$  совпадают и являются биссектрисой угла  $MAC$ . Значит, прямоугольные треугольники  $AOM$  и  $AQH$  подобны с коэффициентом  $\frac{OM}{QH} = \frac{6}{10} = \frac{9}{5}$ . Тогда

$$OQ = AO - AQ = \frac{9}{5}AQ - AQ = \frac{4}{5}AQ = \frac{4}{5} \cdot \frac{5\sqrt{13}}{3} = \frac{4\sqrt{13}}{3}.$$

**Ответ:**  $\frac{\sqrt{793}}{3}; \frac{4\sqrt{13}}{3}$ .

| Содержание критерия   | Баллы |
|---|-------|
| Рассмотрены оба случая, и получен правильный ответ  | 3     |
| Рассмотрен хотя бы один случай, для которого получено правильное значение искомой величины                                | 2     |
| Рассмотрен хотя бы один случай, для которого получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше   | 0     |
| <i>Максимальный балл</i>  | 3     |

**Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом**

**C1**

а) Решите уравнение  $2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sqrt{3}\cos x$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$ .

**Решение.**

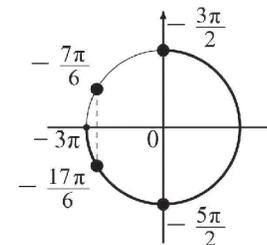
а) Преобразуем уравнение:

$$2\cos^2 x = -\sqrt{3}\cos x; 2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x = 0;$$

$$\cos x \cdot (2\cos x + \sqrt{3}) = 0; \cos x = 0 \text{ или } \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \text{ или } x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$ :  $x = -\frac{17\pi}{6}, x = -\frac{5\pi}{2}, x = -\frac{3\pi}{2}$ .



**Ответ:** а)  $\frac{\pi}{2} + \pi k; \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ ; б)  $-\frac{17\pi}{6}; -\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}$ .

| Содержание критерия  | Баллы |
|--|-------|
| Обоснованно получены верные ответы в п. а) и в п. б)   | 2     |
| Обоснованно получен верный ответ в п. а), но обоснование отбора корней в п. б) не приведено, или задача в п. а) обоснованно сведена к исследованию простейших тригонометрических уравнений без предъявления верного ответа, а в п. б) приведён обоснованный отбор корней | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше  | 0     |
| <i>Максимальный балл</i>   | 2     |

**С2** В правильной треугольной призме  $ABC A_1 B_1 C_1$  боковое ребро равно  $\sqrt{3}$ , а ребро основания равно 4. Точка  $D$  — середина ребра  $BB_1$ . Найдите объём пятигранника  $A_1 B_1 C_1 CD$ .

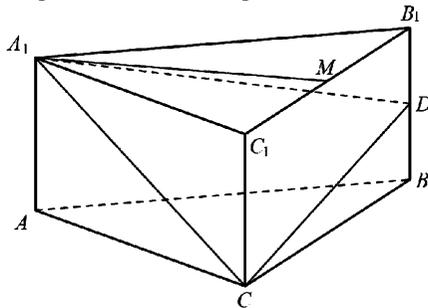
**Решение.**

Пусть  $A_1 M$  — высота треугольника  $A_1 B_1 C_1$ . Тогда  $A_1 M \perp BCC_1$  по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, поскольку в правильной призме  $CC_1 \perp A_1 B_1 C_1$  и, значит,  $A_1 M \perp CC_1$ . Пятигранник  $A_1 B_1 C_1 CD$  — четырёхугольная пирамида с вершиной в точке  $A_1$  и основанием  $DB_1 C_1 C$  — прямоугольной трапецией.

Высота пирамиды  $A_1 M = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ . Площадь основания равна

$$\frac{CC_1 + B_1 D}{2} \cdot B_1 C_1 = \frac{\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 3\sqrt{3},$$

$$V = \frac{1}{3} S_{DB_1 C_1 C} \cdot A_1 M = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 6.$$



**Ответ:** 6.

| Содержание критерия   | Баллы |
|---|-------|
| Обоснованно получен верный ответ  | 2     |
| Ход решения верный, но получен неверный ответ в результате вычислительной ошибки, или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше   | 0     |
| <i>Максимальный балл</i>  | 2     |

**С3** Решите систему неравенств  $\begin{cases} (x-3)|x-3| - |x-1| \geq 0, \\ (x^2 - 7x + 6) \cdot \sqrt{11-x} \leq 0. \end{cases}$

**Решение.**

Решим первое неравенство  $(x-3)|x-3| - |x-1| \geq 0$ . При любом  $x \leq 3$  неравенство  $(x-3)|x-3| - |x-1| \geq 0$  не выполняется. При  $x > 3$  неравенство равносильно неравенству  $x^2 - 7x + 10 \geq 0$ , решением которого с учётом условия  $x > 3$  является луч  $x \geq 5$ .

Число 11 — решение второго неравенства, и при  $x > 11$  решений нет.

Пусть  $x < 11$ . Тогда  $\sqrt{11-x} > 0$ , и второе неравенство равносильно неравенству  $x^2 - 7x + 6 \leq 0$ . Решим систему:

$$\begin{cases} x < 11, \\ x^2 - 7x + 6 \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 11, \\ 1 \leq x \leq 6; \end{cases} \quad 1 \leq x \leq 6.$$

Таким образом, решением второго неравенства являются отрезок  $1 \leq x \leq 6$  и точка  $x = 11$ .

Следовательно, решением данной системы являются отрезок  $5 \leq x \leq 6$  и точка  $x = 11$ .

**Ответ:**  $[5; 6], 11$ .

| Содержание критерия  | Баллы |
|--|-------|
| Обоснованно получен верный ответ   | 3     |
| Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы неравенств | 2     |
| Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств    | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше        | 0     |
| <i>Максимальный балл</i>   | 3     |

**С4** Расстояние между параллельными прямыми равно 6. На одной из них лежит вершина  $C$ , на другой — основание  $AB$  равнобедренного треугольника  $ABC$ . Известно, что  $AB = 16$ . Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник  $ABC$ , а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника  $ABC$ .

**Решение.** Пусть  $CH$  — высота треугольника  $ABC$ ,  $r$  и  $Q$  — радиус и центр вписанной окружности,  $CH = 6$ ,  $AH = 8$ , поэтому  $AC = 10$ . Найдём площадь, полупериметр и радиус вписанной окружности треугольника  $ABC$ :

$$S = \frac{CH \cdot AB}{2} = \frac{6 \cdot 16}{2} = 48, \quad p = \frac{1}{2}(AC + AB + CB) = AC + AH = 18.$$

Тогда  $r = \frac{S}{p} = \frac{8}{3}$ . Кроме того, по теореме Пифагора

$$AQ = \sqrt{AH^2 + QH^2} = \sqrt{64 + \frac{64}{9}} = \frac{8\sqrt{10}}{3}.$$

Пусть окружность с центром в точке  $O$  касается боковой стороны  $AC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  и данных параллельных прямых. Радиус этой окружности равен 3, поскольку он вдвое меньше расстояния между прямыми. Точку касания окружности с прямой  $AB$  обозначим  $M$ .

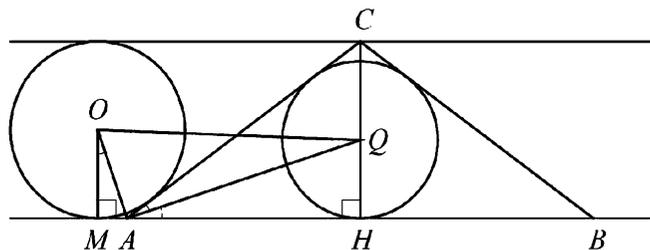


Рис.1

Пусть точки  $B$  и  $M$  лежат по разные стороны от точки  $A$  (рис. 1). Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому  $AO$  и  $AQ$  — биссектрисы смежных углов  $\angle MAC$  и  $\angle CAB$  соответственно. Значит,  $\angle OAQ = 90^\circ$ , и  $\angle MOA = \angle QAH$ , поскольку эти углы образованы парами соответственно перпендикулярных прямых. Следовательно, прямоугольные треугольники  $OMA$  и  $AHQ$  подобны с коэффициентом  $\frac{OM}{AH} = \frac{3}{8}$ . Поэтому

$$OQ = \sqrt{OA^2 + AQ^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{8}AQ\right)^2 + AQ^2} = \sqrt{\frac{9}{64} + 1} \cdot AQ = \frac{\sqrt{73}}{8} \cdot \frac{8\sqrt{10}}{3} = \frac{\sqrt{730}}{3}.$$

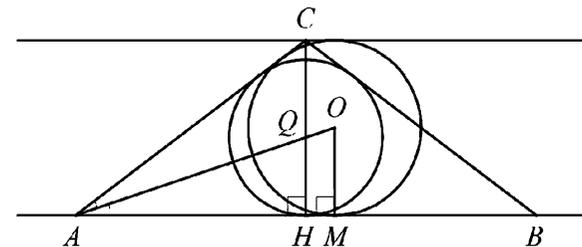


Рис. 2

Пусть точки  $B$  и  $M$  лежат по одну сторону от точки  $A$  (рис. 2). Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому лучи  $AO$  и  $AQ$  совпадают и являются биссектрисой угла  $MAC$ . Значит, прямоугольные треугольники  $AOM$  и  $AQH$  подобны с коэффициентом  $\frac{OM}{QH} = \frac{3}{8} = \frac{9}{8}$ . Тогда

$$OQ = AO - AQ = \frac{9}{8}AQ - AQ = \frac{1}{8}AQ = \frac{1}{8} \cdot \frac{8\sqrt{10}}{3} = \frac{\sqrt{10}}{3}.$$

**Ответ:**  $\frac{\sqrt{730}}{3}; \frac{\sqrt{10}}{3}$ .

| Содержание критерия   | Баллы |
|---|-------|
| Рассмотрены оба случая, и получен правильный ответ  | 3     |
| Рассмотрен хотя бы один случай, для которого получено правильное значение искомой величины                                | 2     |
| Рассмотрен хотя бы один случай, для которого получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше   | 0     |
| <i>Максимальный балл</i>  |       |
|   | 3     |

**Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом**

**C1** а) Решите уравнение  $2\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos x$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$ .

**Решение.**

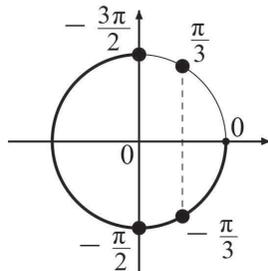
а) Преобразуем уравнение:

$$2\cos^2 x = \cos x;$$

$$\cos x \cdot (2\cos x - 1) = 0; \quad \cos x = 0 \text{ или } \cos x = \frac{1}{2};$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \text{ или } x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$ :  $x = -\frac{3\pi}{2}$ ,  $x = -\frac{\pi}{2}$ ,  $x = -\frac{\pi}{3}$ .



**Ответ:** а)  $\frac{\pi}{2} + \pi k; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ ; б)  $-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}$ .

| Содержание критерия  | Баллы |
|--|-------|
| Обоснованно получены верные ответы в п. а) и в п. б)   | 2     |
| Обоснованно получен верный ответ в п. а), но обоснование отбора корней в п. б) не приведено, или задача в п. а) обоснованно сведена к исследованию простейших тригонометрических уравнений без предъявления верного ответа, а в п. б) приведён обоснованный отбор корней | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше  | 0     |
| <i>Максимальный балл</i>   | 2     |

**C2** В правильной треугольной призме  $ABC A_1 B_1 C_1$  боковое ребро равно  $\sqrt{3}$ , а ребро основания равно 4. Точка  $D$  — середина ребра  $BB_1$ . Найдите объём пятигранника  $A_1 B_1 C_1 CD$ .

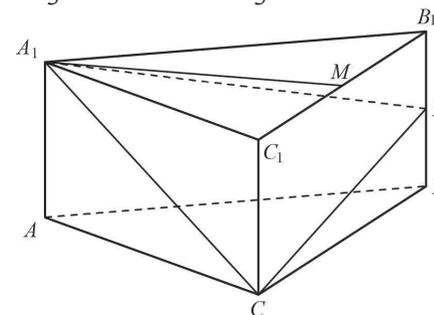
**Решение.**

Пусть  $A_1 M$  — высота треугольника  $A_1 B_1 C_1$ . Тогда  $A_1 M \perp B C C_1$  по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, поскольку в правильной призме  $C C_1 \perp A_1 B_1 C_1$  и, значит,  $A_1 M \perp C C_1$ . Пятигранник  $A_1 B_1 C_1 CD$  — четырёхугольная пирамида с вершиной в точке  $A_1$  и основанием  $D B_1 C_1 C$  — прямоугольной трапецией.

Высота пирамиды  $A_1 M = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ . Площадь основания равна

$$\frac{C C_1 + B_1 D}{2} \cdot B_1 C_1 = \frac{\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 3\sqrt{3},$$

$$V = \frac{1}{3} S_{D B_1 C_1 C} \cdot A_1 M = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 6.$$



**Ответ:** 6.

| Содержание критерия   | Баллы |
|---|-------|
| Обоснованно получен верный ответ  | 2     |
| Ход решения верный, но получен неверный ответ в результате вычислительной ошибки, или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше   | 0     |
| <i>Максимальный балл</i>  | 2     |

**С3**

Решите систему неравенств  $\begin{cases} |x + 2| - x|x| \leq 0, \\ (x^2 - x - 6) \cdot \sqrt{8 - x} \leq 0. \end{cases}$

**Решение.**

Решим первое неравенство  $|x + 2| - x|x| \leq 0$ . При любом  $x \leq 0$  неравенство  $|x + 2| - x|x| \leq 0$  не выполняется. При  $x > 0$  неравенство равносильно неравенству  $x^2 - x - 2 \geq 0$ , решением которого с учётом условия  $x > 0$  является луч  $x \geq 2$ .

Число 8 – решение второго неравенства, и при  $x > 8$  решений нет.

Пусть  $x < 8$ . Тогда  $\sqrt{8 - x} > 0$ , и второе неравенство равносильно неравенству  $x^2 - x - 6 \leq 0$ . Решим систему:

$$\begin{cases} x < 8, \\ x^2 - x - 6 \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 8, \\ -2 \leq x \leq 3; \end{cases} \quad -2 \leq x \leq 3.$$

Таким образом, решением второго неравенства являются отрезок  $-2 \leq x \leq 3$  и точка  $x = 8$ .

Следовательно, решением данной системы являются отрезок  $2 \leq x \leq 3$  и точка  $x = 8$ .

**Ответ:**  $[2; 3], 8$ .

| Содержание критерия  | Баллы |
|--|-------|
| Обоснованно получен верный ответ   | 3     |
| Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы неравенств | 2     |
| Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств    | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше        | 0     |
| <i>Максимальный балл</i>   | 3     |

**С4**

Расстояние между параллельными прямыми равно 6. На одной из них лежит вершина  $C$ , на другой — основание  $AB$  равнобедренного треугольника  $ABC$ . Известно, что  $AB = 16$ . Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник  $ABC$ , а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника  $ABC$ .

**Решение.**

Пусть  $CH$  — высота треугольника  $ABC$ ,  $r$  и  $Q$  — радиус и центр вписанной окружности,  $CH = 6$ ,  $AH = 8$ , поэтому  $AC = 10$ . Найдём площадь, полупериметр и радиус вписанной окружности треугольника  $ABC$ :

$$S = \frac{CH \cdot AB}{2} = \frac{6 \cdot 16}{2} = 48, \quad p = \frac{1}{2}(AC + AB + CB) = AC + AH = 18.$$

Тогда  $r = \frac{S}{p} = \frac{8}{3}$ . Кроме того, по теореме Пифагора

$$AQ = \sqrt{AH^2 + QH^2} = \sqrt{64 + \frac{64}{9}} = \frac{8\sqrt{10}}{3}.$$

Пусть окружность с центром в точке  $O$  касается боковой стороны  $AC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  и данных параллельных прямых. Радиус этой окружности равен 3, поскольку он вдвое меньше расстояния между прямыми. Точку касания окружности с прямой  $AB$  обозначим  $M$ .

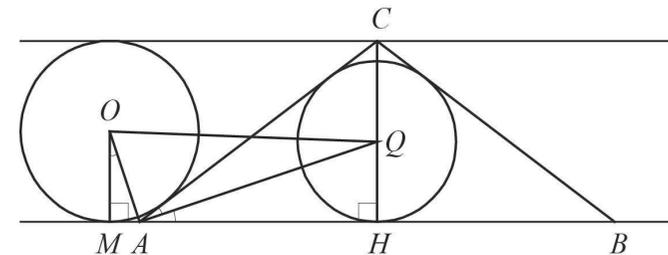


Рис.1

Пусть точки  $B$  и  $M$  лежат по разные стороны от точки  $A$  (рис. 1). Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому  $AO$  и  $AQ$  — биссектрисы смежных углов  $\angle MAC$  и  $\angle CAB$  соответственно. Значит,  $\angle OAQ = 90^\circ$ , и  $\angle MOA = \angle QAH$ , поскольку эти углы образованы парами соответственно перпендикулярных прямых. Следовательно, прямоугольные треугольники  $OMA$  и  $AHQ$  подобны с коэффициентом  $\frac{OM}{AH} = \frac{3}{8}$ . Поэтому

$$OQ = \sqrt{OA^2 + AQ^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{8}AQ\right)^2 + AQ^2} = \sqrt{\frac{9}{64} + 1} \cdot AQ = \frac{\sqrt{73}}{8} \cdot \frac{8\sqrt{10}}{3} = \frac{\sqrt{730}}{3}.$$

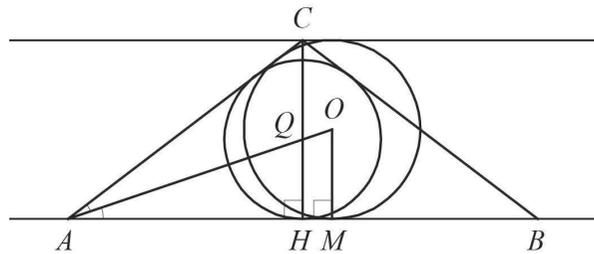


Рис. 2

Пусть точки  $B$  и  $M$  лежат по одну сторону от точки  $A$  (рис. 2). Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому лучи  $AO$  и  $AQ$  совпадают и являются биссектрисой угла  $MAC$ . Значит, прямоугольные треугольники  $AOM$  и  $AQH$  подобны с коэффициентом  $\frac{OM}{QH} = \frac{3}{8} = \frac{9}{8}$ . Тогда

$$OQ = AO - AQ = \frac{9}{8}AQ - AQ = \frac{1}{8}AQ = \frac{1}{8} \cdot \frac{8\sqrt{10}}{3} = \frac{\sqrt{10}}{3}.$$

**Ответ:**  $\frac{\sqrt{730}}{3}; \frac{\sqrt{10}}{3}$ .

| Содержание критерия   | Баллы |
|---|-------|
| Рассмотрены оба случая, и получен правильный ответ  | 3     |
| Рассмотрен хотя бы один случай, для которого получено правильное значение искомой величины                                | 2     |
| Рассмотрен хотя бы один случай, для которого получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше   | 0     |
| <i>Максимальный балл</i>  | 3     |

**Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом**

**C1** а) Решите уравнение  $2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sqrt{3}\cos x$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$ .

**Решение.**

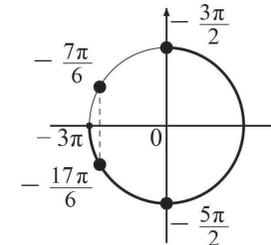
а) Преобразуем уравнение:

$$2\cos^2 x = -\sqrt{3}\cos x; 2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x = 0;$$

$$\cos x \cdot (2\cos x + \sqrt{3}) = 0; \cos x = 0 \text{ или } \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \text{ или } x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$ :  $x = -\frac{17\pi}{6}, x = -\frac{5\pi}{2}, x = -\frac{3\pi}{2}$ .



**Ответ:** а)  $\frac{\pi}{2} + \pi k; \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ ; б)  $-\frac{17\pi}{6}; -\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}$ .

| Содержание критерия  | Баллы |
|--|-------|
| Обоснованно получены верные ответы в п. а) и в п. б)   | 2     |
| Обоснованно получен верный ответ в п. а), но обоснование отбора корней в п. б) не приведено, или задача в п. а) обоснованно сведена к исследованию простейших тригонометрических уравнений без предъявления верного ответа, а в п. б) приведён обоснованный отбор корней | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше  | 0     |
| <i>Максимальный балл</i>   | 2     |

**C2** В правильной треугольной призме  $ABC A_1 B_1 C_1$  боковое ребро равно  $8\sqrt{3}$ , а ребро основания равно 1. Точка  $D$  — середина ребра  $BB_1$ . Найдите объём пятигранника  $ABC A_1 D$ .

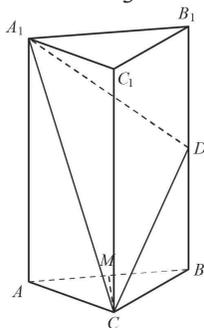
**Решение.**

Пусть  $CM$  — высота треугольника  $ABC$ . Тогда  $CM \perp ABB_1$  по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, поскольку в правильной призме  $AA_1 \perp ABC$  и, значит,  $CM \perp AA_1$ . Пятигранник  $ABC A_1 D$  — четырёхугольная пирамида с вершиной в точке  $C$  и основанием  $ABD A_1$  — прямоугольной трапецией. Высота пирамиды

$CM = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Площадь основания равна

$$\frac{AA_1 + BD}{2} \cdot AB = \frac{8\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3},$$

$$V = \frac{1}{3} S_{ABD A_1} \cdot CM = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3.$$



**Ответ:** 3.

| Содержание критерия   | Баллы |
|---|-------|
| Обоснованно получен верный ответ  | 2     |
| Ход решения верный, но получен неверный ответ в результате вычислительной ошибки, или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше   | 0     |
| <i>Максимальный балл</i>  | 2     |

**C3** Решите систему неравенств  $\begin{cases} (x-3)|x-3| - |x-1| \geq 0, \\ (x^2 - 7x + 6) \cdot \sqrt{11-x} \leq 0. \end{cases}$

**Решение.**

Решим первое неравенство  $(x-3)|x-3| - |x-1| \geq 0$ . При любом  $x \leq 3$  неравенство  $(x-3)|x-3| - |x-1| \geq 0$  не выполняется. При  $x > 3$  неравенство равносильно неравенству  $x^2 - 7x + 10 \geq 0$ , решением которого с учётом условия  $x > 3$  является луч  $x \geq 5$ .

Число 11 — решение второго неравенства, и при  $x > 11$  решений нет.

Пусть  $x < 11$ . Тогда  $\sqrt{11-x} > 0$ , и второе неравенство равносильно неравенству  $x^2 - 7x + 6 \leq 0$ . Решим систему:

$$\begin{cases} x < 11, \\ x^2 - 7x + 6 \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 11, \\ 1 \leq x \leq 6; \end{cases} \quad 1 \leq x \leq 6.$$

Таким образом, решением второго неравенства являются отрезок  $1 \leq x \leq 6$  и точка  $x = 11$ .

Следовательно, решением данной системы являются отрезок  $5 \leq x \leq 6$  и точка  $x = 11$ .

**Ответ:** [5; 6], 11.

| Содержание критерия  | Баллы |
|--|-------|
| Обоснованно получен верный ответ   | 3     |
| Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы неравенств | 2     |
| Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств    | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше        | 0     |
| <i>Максимальный балл</i>   | 3     |

**С4** Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит вершина  $C$ , на другой — основание  $AB$  равнобедренного треугольника  $ABC$ . Известно, что  $AB = 10$ . Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник  $ABC$ , а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника  $ABC$ .

**Решение.**

Пусть  $CH$  — высота треугольника  $ABC$ ,  $r$  и  $Q$  — радиус и центр вписанной окружности,  $CH = 12$ ,  $AH = 5$ , поэтому  $AC = 13$ . Найдём площадь, полупериметр и радиус вписанной окружности треугольника  $ABC$ :

$$S = \frac{CH \cdot AB}{2} = \frac{12 \cdot 10}{2} = 60, \quad p = \frac{1}{2}(AC + AB + CB) = AC + AH = 18.$$

Тогда  $r = \frac{S}{p} = \frac{10}{3}$ . Кроме того, по теореме Пифагора

$$AQ = \sqrt{AH^2 + QH^2} = \sqrt{25 + \frac{100}{9}} = \frac{5\sqrt{13}}{3}.$$

Пусть окружность с центром в точке  $O$  касается боковой стороны  $AC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  и данных параллельных прямых. Радиус этой окружности равен 6, поскольку он вдвое меньше расстояния между прямыми. Точку касания окружности с прямой  $AB$  обозначим  $M$ .

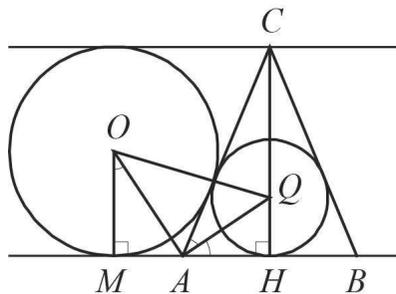


Рис. 1

Пусть точки  $B$  и  $M$  лежат по разные стороны от точки  $A$  (рис. 1). Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому  $AO$  и  $AQ$  — биссектрисы смежных углов  $\angle MAC$  и  $\angle CAB$  соответственно. Значит,  $\angle OAQ = 90^\circ$ , и  $\angle MOA = \angle QAH$ , поскольку эти углы образованы парами соответственно перпендикулярных прямых. Следовательно, прямоугольные треугольники  $OMA$  и  $AHQ$  подобны с коэффициентом  $\frac{OM}{AH} = \frac{6}{5}$ . Поэтому

$$OQ = \sqrt{OA^2 + AQ^2} = \sqrt{\left(\frac{6}{5}AQ\right)^2 + AQ^2} = \sqrt{\frac{36}{25} + 1} \cdot AQ = \frac{\sqrt{61}}{5} \cdot \frac{5\sqrt{13}}{3} = \frac{\sqrt{793}}{3}.$$

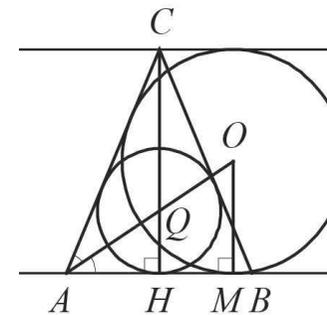


Рис. 2

Пусть точки  $B$  и  $M$  лежат по одну сторону от точки  $A$  (рис. 2). Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому лучи  $AO$  и  $AQ$  совпадают и являются биссектрисой угла  $MAC$ . Значит, прямоугольные треугольники  $AOM$  и  $AQH$  подобны с коэффициентом  $\frac{OM}{QH} = \frac{6}{\frac{10}{3}} = \frac{9}{5}$ . Тогда

$$OQ = AO - AQ = \frac{9}{5}AQ - AQ = \frac{4}{5}AQ = \frac{4}{5} \cdot \frac{5\sqrt{13}}{3} = \frac{4\sqrt{13}}{3}.$$

**Ответ:**  $\frac{\sqrt{793}}{3}; \frac{4\sqrt{13}}{3}$ .

| Содержание критерия   | Баллы |
|---|-------|
| Рассмотрены оба случая, и получен правильный ответ  | 3     |
| Рассмотрен хотя бы один случай, для которого получено правильное значение искомой величины                                | 2     |
| Рассмотрен хотя бы один случай, для которого получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше   | 0     |
| <i>Максимальный балл</i>  |       |
|   | 3     |