

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Вариант № 901

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 мин.). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 20 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (B1–B14) базового уровня по материалу курса математики. Ответом является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1–C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручки.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание, что записи в черновике не будут учитываться при оценке работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Часть 1

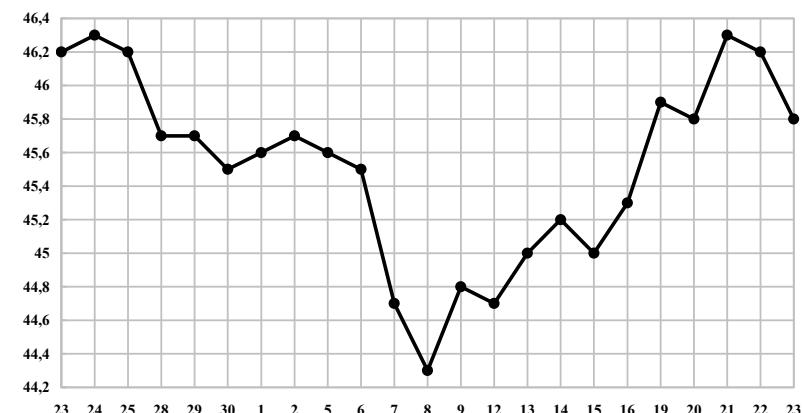
Ответом на задания B1–B14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1

Павел Иванович купил американский автомобиль, на спидометре которого скорость измеряется в милях в час. Американская миля равна 1609 м. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 50 миль в час? Ответ округлите до целого числа.

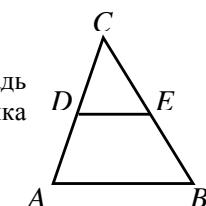
B2

На рисунке жирными точками показан курс евро, установленный Центробанком РФ, во все рабочие дни с 22 ноября по 22 декабря 2012 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена евро в рублях. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа курс евро был наименьший за указанный период



B3

В треугольнике ABC DE — средняя линия. Площадь треугольника CDE равна 24. Найдите площадь треугольника ABC .



B4

$$R = \frac{3S + 2C + 2F + 2Q + D}{50}$$

В таблице даны оценки каждого показателя для трёх моделей автомобилей. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей автомобилей.

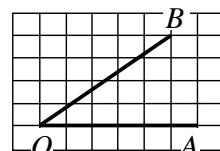
Модель автомобиля	Безопасность	Комфорт	Функциональность	Качество	Дизайн
A	2	5	5	3	2
Б	4	1	1	5	2
В	2	1	3	1	2

B5

Найдите корень уравнения $\frac{1}{4x+9} = \frac{1}{6x+12}$.

B6

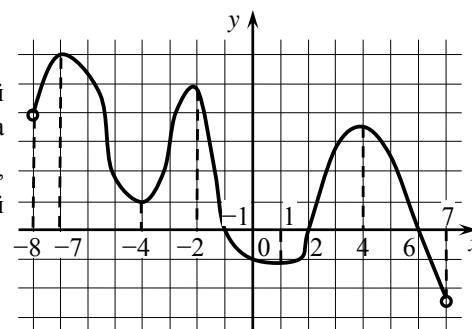
Найдите тангенс угла AOB , изображённого на клетчатой бумаге.

**B7**

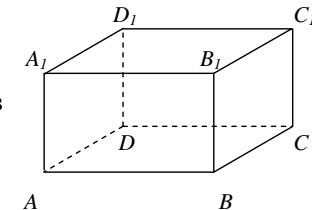
Найдите значение выражения $\frac{51\cos 4^\circ}{\sin 86^\circ} + 8$.

B8

На рисунке изображён график $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 7)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-5; 5]$.

**B9**

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD_1A_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер: $AB = 15$, $AD = 8$, $AA_1 = 21$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины B , B_1 и D .

**B10**

В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орел выпадет оба раза.

B11

В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{3}$ высоты. Объём жидкости равен 12 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?

**B12**

Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 3 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 3 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 24$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 0,9$ — постоянная. Определите наибольшее возможное напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло не менее 16,2 с. Ответ дайте в кВ (киловольтах).

B13

Первый сплав содержит 5% меди, второй — 13% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 9 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 11% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

B14

Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 2e^x + 8$ на отрезке $[-2; 1]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов №1.

C6

Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$).

- Может ли сумма всех данных чисел быть равной 14?
- Каково наибольшее значение n , если сумма всех данных чисел меньше 900?
- Найдите все возможные значения n , если сумма всех данных чисел равна 123.

C1 а) Решите уравнение $-\sqrt{2} \sin\left(-\frac{5\pi}{2} + x\right) \cdot \sin x = \cos x$.б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9\pi}{2}; 6\pi\right]$.**C2** Плоскость α пересекает два шара, имеющих общий центр. Площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 7. Плоскость β , параллельная плоскости α , касается меньшего шара, а площадь сечения этой плоскостью большего шара равна 5. Найдите площадь сечения большего шара плоскостью α .**C3** Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4^x - 29 \cdot 2^x + 168 \leq 0, \\ \frac{x^4 - 5x^3 + 3x - 25}{x^2 - 5x} \geq x^2 - \frac{1}{x-4} + \frac{5}{x}. \end{cases}$$

C4 Окружность радиуса $6\sqrt{2}$ вписана в прямой угол. Вторая окружность также вписана в этот угол и пересекается с первой в точках M и N . Известно, что расстояние между центрами окружностей равно 8. Найдите MN .**C5** Найдите все значения a , для каждого из которых уравнение

$$\log_{1-x}(a-x+2)=2$$

имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $[-1; 1]$.

Задание	Ответ
B1	80
B2	8
B3	96
B4	0,68
B5	-1,5
B6	0,8
B7	59
B8	4
B9	357
B10	0,25
B11	312
B12	6
B13	18
B14	7

Задание	Ответ
C1	A) $\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ Б) $\frac{9\pi}{2}; \frac{11\pi}{2}; \frac{19\pi}{4}$
C2	12
C3	{3}, (4; $\log_2 21$]
C4	$4\sqrt{2}; 4\sqrt{14}$
C5	$\left[-\frac{5}{4}; -1\right] \cup (-1; 1]$
C6	а) да. 2, 3, 4, 5. б) 41 в) 3, 6

C1

a) Решите уравнение $-\sqrt{2} \sin\left(-\frac{5\pi}{2} + x\right) \cdot \sin x = \cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9\pi}{2}; 6\pi\right]$.

Решение.

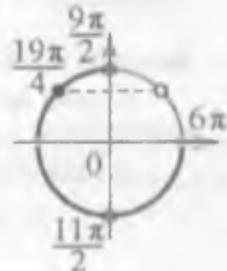
а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$\sqrt{2} \cos x \cdot \sin x - \cos x = 0; \cos x \cdot (\sqrt{2} \sin x - 1) = 0.$$

Значит, либо $\cos x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, либо $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9\pi}{2}; 6\pi\right]$.

Получим числа: $\frac{9\pi}{2}, \frac{19\pi}{4}, \frac{11\pi}{2}$.



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C2

Плоскость α пересекает два шара, имеющих общий центр. Площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 7. Плоскость β , параллельная плоскости α , касается меньшего шара, а площадь сечения этой плоскостью большего шара равна 5. Найдите площадь сечения большого шара плоскостью α .

Решение.

Сечение шара плоскостью — круг. Рассмотрим сечение, проходящее через общий центр шаров и центры кругов.

Обозначение центра, точки касания и точек пересечения поверхностей шаров с плоскостями α и β дано на рисунке.

FD — радиус круга, полученного в сечении меньшего шара плоскостью α , тогда $S_\alpha = \pi \cdot FD^2 = 7$ — площадь сечения меньшего шара плоскостью α .

AB — радиус круга, полученного в сечении большего шара плоскостью β , тогда $S_\beta = \pi \cdot AB^2 = 5$ — площадь сечения большого шара плоскостью β .

CF — радиус круга, полученного в сечении большего шара плоскостью α .

Параллельные прямые AB и CF перпендикулярны прямой AF .

Из прямоугольных треугольников получаем:

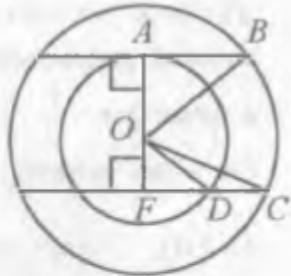
$$OF^2 = OC^2 - CF^2 = OD^2 - FD^2,$$

откуда $CF^2 = OC^2 - OD^2 + FD^2 = OB^2 - OA^2 + FD^2 = AB^2 + FD^2$.

Площадь сечения большего шара плоскостью α :

$$S = \pi \cdot CF^2 = \pi \cdot AB^2 + \pi \cdot FD^2 = 12.$$

Ответ: 12.



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4^x - 29 \cdot 2^x + 168 \leq 0, \\ \frac{x^4 - 5x^3 + 3x - 25}{x^2 - 5x} \geq x^2 - \frac{1}{x-4} + \frac{5}{x}. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы: $4^x - 29 \cdot 2^x + 168 \leq 0$. Пусть $t = 2^x$, тогда неравенство примет вид: $t^2 - 29t + 168 \leq 0$, откуда $8 \leq t \leq 21$; $8 \leq 2^x \leq 21$; $3 \leq x \leq \log_2 21$.

Решение первого неравенства исходной системы: $3 \leq x \leq \log_2 21$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$\frac{x^4 - 5x^3 + 3x - 25}{x^2 - 5x} \geq x^2 - \frac{1}{x-4} + \frac{5}{x},$$

$$\frac{x^2(x^2 - 5x)}{x^2 - 5x} + \frac{5(x-5)}{x(x-5)} - \frac{2x}{x(x-5)} \geq x^2 - \frac{1}{x-4} + \frac{5}{x}; \frac{x-3}{(x-5)(x-4)} \leq 0, \text{ где } x \neq 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x < 0$; $0 < x \leq 3$;
 $4 < x < 5$.

3. Поскольку $4 < \log_2 21 < 5$, получаем решение исходной системы неравенств: $x = 3$; $4 < x \leq \log_2 21$.

Ответ: 3; $(4; \log_2 21]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

- C4** Окружность радиуса $6\sqrt{2}$ вписана в прямой угол. Вторая окружность также вписана в этот угол и пересекается с первой в точках M и N . Известно, что расстояние между центрами окружностей равно 8. Найдите MN .

Решение.

Пусть O_1 — центр окружности радиуса $6\sqrt{2}$, O_2 — центр второй окружности, A — вершина прямого угла, тогда

$$O_1A = \frac{6\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = 12.$$

Возможны два случая. Первый случай: точка O_1 лежит между точками A и O_2 (рис. 1), тогда $O_2A = O_1A + O_1O_2 = 20$, откуда радиус второй окружности $O_2M = 10\sqrt{2}$.

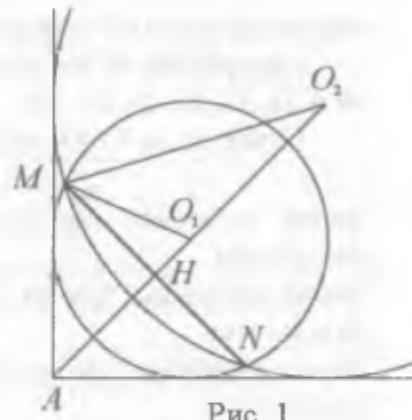


Рис. 1

В треугольнике O_1MO_2 имеем $O_1O_2 = 8$, $O_1M = 6\sqrt{2}$, $O_2M = 10\sqrt{2}$. Поскольку общая хорда MN окружностей перпендикулярна линии центров O_1O_2 и делится ею пополам, высота MH треугольника O_1MO_2 равна половине MN .

В треугольнике O_1MO_2 полупериметр $p = \frac{O_1O_2 + O_1M + O_2M}{2} = 4 + 8\sqrt{2}$.

$$S_{O_1MO_2} = \sqrt{p(p - O_1O_2)(p - O_1M)(p - O_2M)} = 8\sqrt{14},$$

$$\text{откуда } MH = \frac{2S_{O_1MO_2}}{O_1O_2} = 2\sqrt{14}; MN = 2MH = 4\sqrt{14}.$$

Второй случай: точка O_2 лежит между точками A и O_1 (рис. 2), тогда $O_2A = O_1A - O_1O_2 = 4$, откуда радиус второй окружности $O_2M = 2\sqrt{2}$.

В треугольнике O_1MO_2 имеем $O_1O_2 = 8$, $O_1M = 6\sqrt{2}$, $O_2M = 2\sqrt{2}$. Аналогично первому случаю, высота MH треугольника O_1MO_2 равна половине MN .

В треугольнике O_1MO_2 полупериметр

$$p = \frac{O_1O_2 + O_1M + O_2M}{2} = 4 + 4\sqrt{2}.$$

$$S_{O_1MO_2} = \sqrt{p(p - O_1O_2)(p - O_1M)(p - O_2M)} = 8\sqrt{2},$$

$$\text{откуда } MH = \frac{2S_{O_1MO_2}}{O_1O_2} = 2\sqrt{2}; MN = 2MH = 4\sqrt{2}.$$

Ответ: $4\sqrt{2}$ или $4\sqrt{14}$.

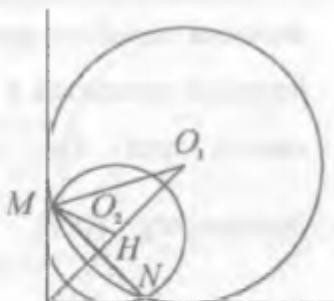


Рис. 2

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

C5

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\log_{1-x}(a - x + 2) = 2$$

имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $[-1; 1]$.

Решение.

Уравнение $\log_{1-x}(a - x + 2) = 2$ равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - x - 1 - a = 0, \\ x < 1, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Эта система имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $[-1; 1]$, если уравнение $x^2 - x - 1 - a = 0$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий либо промежутку $[-1; 0)$, либо промежутку $(0; 1]$.

Поскольку графиком функции $f(x) = x^2 - x - 1 - a$ является парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина находится в точке $x = \frac{1}{2}$, уравнение $f(x) = 0$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $(0; 1)$, при условии $\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) \leq 0, \\ f(1) = f(0) > 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} -1 - \frac{1}{4} - a \leq 0, \\ -1 - a > 0, \end{cases} \text{ откуда } -\frac{5}{4} \leq a < -1 \text{ (рис. 1).}$$

Уравнение $f(x) = 0$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $[-1; 0)$, при условии $\begin{cases} f(0) < 0, \\ f(-1) \geq 0; \end{cases} \begin{cases} -1 - a < 0, \\ 1 - a \geq 0, \end{cases} \text{ откуда } -1 < a \leq 1$ (рис. 2).

Уравнение $\log_{1-x}(a-x+2) = 2$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $[-1; 1]$, при $-\frac{5}{4} \leq a < -1$ и при $-1 < a \leq 1$.

Ответ: $\left[-\frac{5}{4}; -1\right); (-1; 1]\right.$

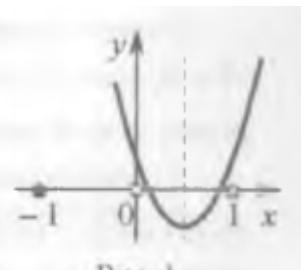


Рис. 1

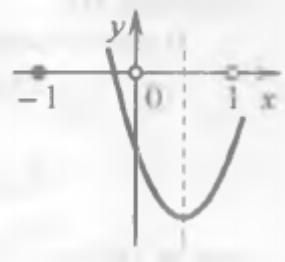


Рис. 2

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a = -\frac{5}{4}$, $a = -1$, $a = 1$. Ответ отличается от верного только исключением точек $a = -\frac{5}{4}$ и/или $a = 1$	3
Обоснованно получены все значения: $a = -\frac{5}{4}$, $a = -1$, $a = 1$	2
Верно найдено одно или два из значений $a = -\frac{5}{4}$, $a = -1$ или $a = 1$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

C6 Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$).

- а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 18?
- б) Каково наибольшее значение n , если сумма всех данных чисел меньше 800?

- в) Найдите все возможные значения n , если сумма всех данных чисел равна 111.

Решение.

Без ограничения общности можно считать, что числа составляют возрастающую арифметическую прогрессию. Обозначим a — первый член этой прогрессии, а d — её разность. Тогда сумма её членов равна $\frac{2a+d(n-1)}{2} \cdot n$.

а) Да, может. Числа 5, 6, 7 составляют арифметическую прогрессию, а их сумма равна 18.

б) Для суммы членов арифметической прогрессии верно неравенство $\frac{2a+d(n-1)}{2} \cdot n \geq \frac{2+(n-1)}{2} \cdot n = \frac{n(n+1)}{2}$. Значит, $\frac{n(n+1)}{2} < 800$, откуда находим $n \leq 39$.

Сумма арифметической прогрессии 1, 2, ..., 39 равна $780 < 800$. Значит, наибольшее значение n равно 39.

в) Для суммы членов арифметической прогрессии верно:

$$\frac{2a+d(n-1)}{2} \cdot n = 111; (2a+d(n-1))n = 222 = 2 \cdot 3 \cdot 37.$$

Таким образом, число n является делителем числа 222. Если $n \geq 37$, то $(2a+d(n-1))n \geq 37 \cdot 36 > 222$, следовательно, $n < 37$. Поскольку $n \geq 3$, получаем, что $n=3$ или $n=6$.

Прогрессии из 3 и 6 членов с суммой 111 существуют: например, 36, 37, 38 и 16, 17, 18, 19, 20, 21.

Ответ: а) да; б) 39; в) 3; 6.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. а; — обоснованное решение п. б; — верно найдены оба значения n в п. в; — доказано существование ровно двух значений n в п. в	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4