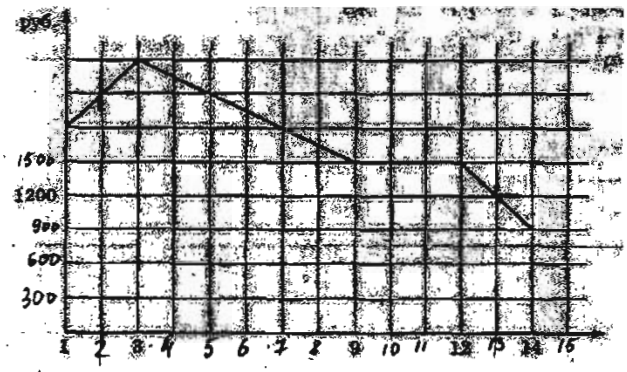
ВАРИАНТ 1

Часть 1

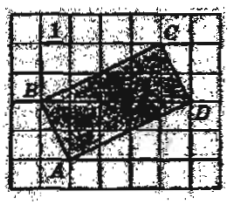
Ответом на задания B1-B14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и десятичную запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1. В двух автомобилях перевозилось одинаковое количество помидоров. При этом в первом автомобиле при транспортировке испортилось 20% перевозимых помидоров, что составило 96 штук. Во втором автомобиле испортилось 15% помидоров. Сколько помидоров испортилось во втором автомобиле?

B2. На графике, изображенном на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций газодобывающей компании в первые две недели ноября. 2 ноября бизнесмен приобрел 10 акций этой компании. Шесть из них он продал 6 ноября, а 13 ноября – остальные 4. Сколько рублей потерял бизнесмен в результате этих операций?



B3. Найдите площадь прямоугольника *ABCD*.



B4. При заказе дисков в некотором шведском музыкальном магазине цена одного диска не зависит от количества дисков в заказе, а доставка заказа в другие страны осуществляется на таких условиях:

доставка заказа не более чем из трех дисков – 6 $;
доставка заказа от 4 до 8 дисков – 17,5 $;
доставка заказа из 9 и более дисков – 28 $.

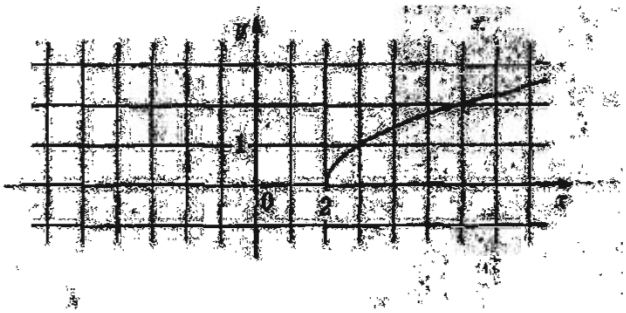
Сколько долларов придется заплатить за доставку самым дешевым способом (можно в несколько заказов) при приобретении ровно 11 дисков?

B5. Решите уравнение: $\sqrt{x+9}=5$.

B6. Диагонали трапеции ABCD с основаниями AB и CD пересекаются в точке M. Найдите MC, если AB = 11, DC = 33, AC = 28.

B7. Найдите значение выражения: $\mathrm{Log}_{6}144 - \mathrm{Log}_{6}4$.

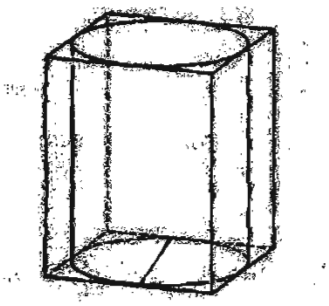
B8. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через точку (–6; –1), касается этого графика в точке с абсциссой 6. Найдите $f'(6)$.



B9. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды вдвое больше ее высоты. Найдите угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.

B10. Перед началом матча по футболу судья бросает монету, чтобы определить, какая из команд будет первая владеть мячом. Команда «Белые» по очереди играет с командами «Красные», «Синие» и «Зеленые». Найдите вероятность того, что ровно в одном матче право первой владеть мячом получит команда «Белые».

B11. Цилиндр вписан в прямоугольный параллелепипед. Радиус основания цилиндра равен 2. Объем параллелепипеда равен 80. Найдите высоту цилиндра.



B12. Масса радиоактивного вещества уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$. В лаборатории получили вещество, содержащее в начальный момент времени $m_0 = 280$ мкг изотопа железа-59, период полураспада которого $T = 45$ суток. В течение скольких суток содержание изотопа железа-59 в веществе будет превосходить 17,5 мкг?

B13. Имеются два сосуда, содержащие 42 кг и 6 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 40% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 50% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом растворе?

B14. Найдите наибольшее значение функции $y = (21 - x)e^{20-x}$ на отрезке $[19;21]$.

Часть 2

С1. а) Решите уравнении: $cos^2 x - cos\ 2x = 0,75$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку: $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.

С2. В правильной четырехугольной призме ABCD $A_1 B_1 C_1 D_1$ стороны основания равны 4, а боковые ребра равны 12. Найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью $BD D_1$.

С3. Решите систему неравенств: $\begin{cases} 12\cdot 3^x - 9^x - 11 \geq 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(2-x)^4 < 8 \end{cases}$

С4. Боковые стороны AB и CD трапеции ABCD равны 6 и 8 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 5. Средняя линия трапеции равна 25. Прямые AB и CD пересекаются в точке M. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BMC.

С5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение: $4x - \left|3x - \left|x + a\right|\right| = 9\left|x - 1\right|$ имеет хотя бы один корень.

С6. Перед каждым из чисел 14,15, ...20 и 6, 7, ...10 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего от каждого из образовавшихся чисел первого набора отнимают каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 35 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

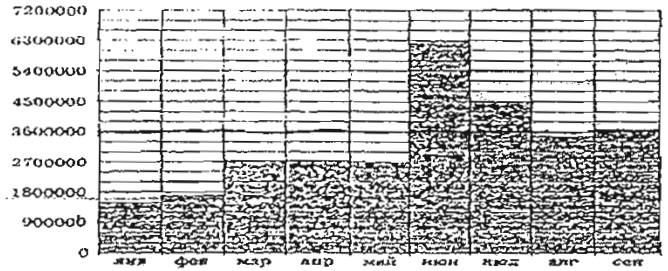
ВАРИАНТ 2

Часть 1

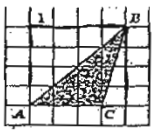
Ответом на задания B1-B14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и десятичную запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1. В туристический поход отправляется группа из 18 человек. В походе на одного человека приходится 60 грамм гречки на прием пищи. Планируется 7 раз готовить гречку. Сколько килограммовых пачек необходимо купить, чтобы гречки хватило?

B2. На диаграмме показано число запросов со словом ФУТБОЛ, сделанных на некотором поисковом сайте во все месяцы с января по сентябрь 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – число запросов за данный месяц. Определите по диаграмме, сколько было месяцев в указанный период, когда число запросов со словом ФУТБОЛ было меньше 3600000.



B3. Найдите площадь треугольника *ABC*.



B4. Ткань можно покупать либо по метру, стоимостью 23 рубля за метр, либо рулонами по 100 метров, стоимостью 1950 рублей за рулон. Сколько рублей придется заплатить за самый дешевый вариант приобретения 80 метров ткани?

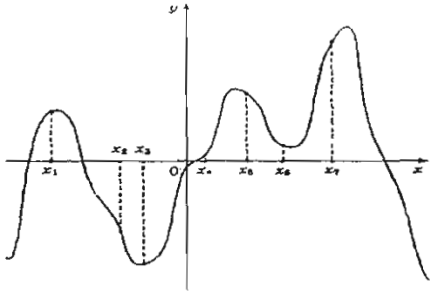
B5. Решите уравнение $\log_2 x = -2$.

B6. Найдите число сторон правильного многоугольника, каждый из углов которого равен 140°.

B7. Найдите значение выражения: $\log_3 13 - \log_3 117$.

$y = f'(x)$

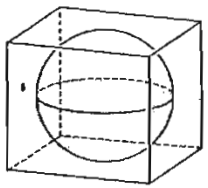
B8. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ – производной функции $f(x)$, и семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_7$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ возрастает?



B9. Тангенс угла между плоскостью боковой грани и плоскостью основания правильной четырехугольной пирамиды равен $3\sqrt{2}$. Найдите тангенс угла между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды.

B10. Марина и Дина бросают кубик по одному разу. Выигрывает та девочка, у которой выпадет больше очков. Первой кубик бросила Марина, у нее выпало 3 очка. Найдите вероятность того, что Дина выиграет.

B11. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 4. Найдите его объем.



B12. Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур задается выражением $T(t) = T_0 + at + bt^2$, где $T_0 = 900$ К, $a = 31$ К/мин, $b = -0{,}2$ К/мин^2. Известно, что при температурах нагревателя свыше 1550 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите (в минутах), через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор.

B13. Смешали 14 литров 30-процентного водного раствора некоторого вещества с 10 литрами 18-процентного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора? Знак % в ответе не пишите.

B14. Найдите наименьшее значение функции: $y = (x^2 - 9x + 9)e^{x-7}$ на отрезке [6; 8].

Часть 2

C1. а) Решите уравнение: $\cos 2x - \cos x = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку: $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$.

C2. Точка M – середина стороны BC основания ABC правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$. Боковое ребро призмы равно $\sqrt{39}$, а сторона основания равна 12. Найдите синус угла между прямой B_1M и плоскостью боковой грани ABB_1A_1.

C3. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{50 - 25^x}{25 - 5^x} \geq 2 \\ \log_{x^2}(5 - 4x) \leq 1 \end{cases}$$

C4. Боковые стороны AB и CD трапеции ABCD равны 12 и 16 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 6. Средняя линия трапеции равна 9. Прямые AB и CD пересекаются в точке M. Найдите длину медианы MK в треугольнике BMC.

C5. Найдите все значения a, при каждом из которых график функции $f(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3| - a$ пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

C6. На доске записано более 27, но менее 45 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно –5, среднее арифметическое всех положительных из них равно 9, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно –18.

а) Сколько чисел написано на доске?
б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?
в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Вариант 1

Ответы на задания части 1

B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12	B13	B14
72	4500	10	23,5	16	21	2	0,25	45	0,375	5	180	15,4	2е(или2)

Критерии оценивания заданий части 2

С1 а) Решите уравнение $\cos^2 x - \cos 2x = 0{,}75$.

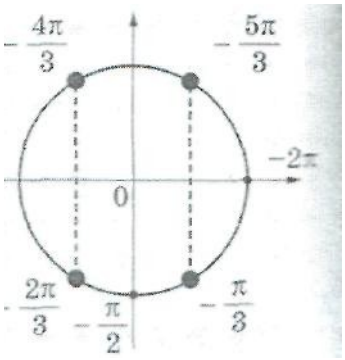
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем уравнение в виде $\cos^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x = 0{,}75$; $\sin^2 x = \frac{3}{4}$.

Значит, $\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x = \pm\frac{\pi}{3} \pm \pi k,\ k \in Z$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.



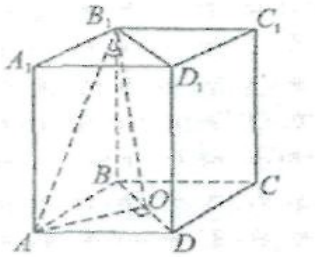
Получим числа: $-\frac{5\pi}{3};-\frac{4\pi}{3};-\frac{2\pi}{3}$.

Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т.п.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k\ \ k \in Z$; б) $-\frac{5\pi}{3}$; $-\frac{4\pi}{3}$; $-\frac{2\pi}{3}$.

Критерии оценивания выполнения задания С1	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

С2. Пусть O – центр квадрата $ABCD$. Так как $AO \perp BD$ и $AO \perp BB_1$, то по признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая АО перпендикулярна плоскости B_1BDD_1 (см. рисунок).



Поэтому проекцией прямой AB_1 на плоскость BDD_1 является прямая OB_1. Следовательно, искомый угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1 равен углу AB_1O.

Так как прямая AO перпендикулярна плоскости B_1BD, то $AO \perp B_1O$, т.е. $\angle AOB_1 = 90°$. Из прямоугольного треугольника AB_1O имеем: $\sin\angle AB_1O = \dfrac{AO}{AB_1}$.

Проведём вычисления. По условию, $AB = 4$, $BB_1 = 12$ $\Rightarrow AO = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$,

$AB_1^2 = AB^2 + BB_1^2 = 160$, $AB_1 = 4\sqrt{10}$. Значит, $\sin\angle AB_1O = \dfrac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{10}} = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}$,

откуда $\angle AB_1O = \arcsin\dfrac{\sqrt{5}}{10}$.

Ответ: $\arcsin\dfrac{\sqrt{5}}{10}$.

Критерии оценивания выполнения задания С2	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

С3. 1.) Решим первое неравенство системы $12\cdot 3^x - 9^x - 11 \ge 0$.
Обозначим $t = 3^x$.

$12t - t^2 - 11 \ge 0$, $t^2 - 12t + 11 \le 0$, $1 \le t \le 11$, $3^0 \le 3^x \le 11$, $0 \le x \le \log_3 11$.

2) Решим второе неравенство $\log_{\sqrt{x}}(2-x)^4 < 8$.

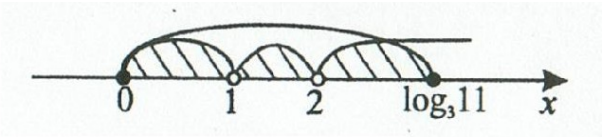
ОДЗ: $\begin{cases}(2-x)^4 > 0,\\ \sqrt{x} > 0\\ \sqrt{x \ne 1.}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x > 0,\\ x \ne 1,\\ x \ne 2.\end{cases}$.

а) $\begin{cases}\log_{\sqrt{x}}(2-x)^4 < \log_{\sqrt{x}}\sqrt{x}^8,\\ x > 1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2-x)^4 < x^4,\\ x > 1\\ x \ne 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|2-x| < |x|,\\ x > 1\\ x \ne 2;\end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2;\ x > 2.$

б) $\begin{cases}\log_{\sqrt{x}}(2-x)^4 < \log_{\sqrt{x}}\sqrt{x}^8,\\ 0 < x < 1.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2-x)^4 > x^4,\\ 0 < x < 1\end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1.$

Учитывая а) и б) $0 < x < 1; 1 < x < 2; x > 2.$

3) Запишем решение исходной системы (см. рис.)



Ответ:
$(0;1) \cup (1;2) \cup (2; \log_3 11]$.

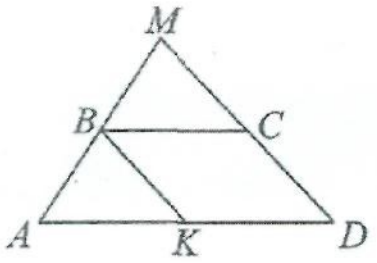
Критерии оценивания выполнения задания С3	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3

Обоснованно получены верные ответы и в обоих неравенствах системы неравенств.	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

С4. Обозначим длины оснований трапеции через *a* и *b*. Средняя линия трапеции равна полусумме оснований, а расстояние между серединами диагоналей – полуразности оснований, поэтому

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2} = 25, \\ \dfrac{a-b}{2} = 5, \end{cases} \text{ откуда } a = 30,\ b = 20$$

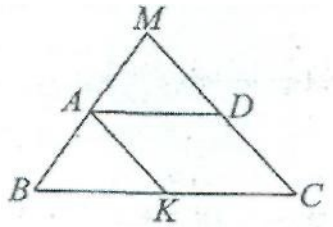
1) $AD = 30$, $BC = 20$. Проведём BK II CD (см. рис.).



$BCDK$ — параллелограмм, $BK = CD = 8$, $KD = BC = 20$.

$AK = AD - KD = 10$. По теореме, обратной теореме Пифагора, $\angle ABK = 90°$, так как $AK^2 = AB^2 + BK^2 \angle AMD = \angle ABK = 90°$ как соответственные углы при пересечении параллельных прямых BK и MD секущей AM. Радиус окружности, описанной около ΔBMC, равен половине его гипотенузы BC, то есть равен $\dfrac{BC}{2} = 10$.

2) $AD = 20, BC = 30$ (см. рис.).



Аналогично предыдущему случаю искомый радиус равен $\dfrac{BC}{2} = 15$.

Ответ: 10 или 15.

Критерии оценивания выполнения задания С4	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за геометрической ошибки	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

С 5

Найдите все значения *a,* при каждом из которых уравнение
$4x - |3x - |x + a|| = 9|x - 1|$ имеет хотя бы один корень.

Решение.
Запишем уравнение в виде
$9|x - 1| + |3x - |x + a|| - 4x = 0$
Непрерывная функция $f(x) = 9\,|\,x - 1|\, + |\,3x - |\,x + a\,|\,|\, - 4x$:

1) неограниченно возрастает при $x \geq 1$, так как при любом раскрытии модулей имеем

$f(x) = 9x - 9 - 4x \pm 3x \pm x \pm a = kx + m$, где
$k \geq 9 - 4 - 4 = 1 > 0;$

2) убывает при $x \leq 1$, так как при любом раскрытии модулей имеем
$f(x) = -9x + 9 - 4x \pm 3x \pm x \pm a = kx + m$, где
$k \geq -9 - 4 + 4 = -9 < 0.$

Следовательно, $x = 1$ – точка минимума функции *f*, а область ее значений есть множество $[f(1); +\infty)$. Поэтому уравнение будет иметь корень тогда и только тогда, когда $f(x) \leq 0$.

Решим это неравенство:
$|3 - |1 + a|| \leq 4;$
$-4 \leq |a + 1| - 3 \leq 4;$
$|a + 1| \leq 7;$
$-7 \leq a + 1 \leq 7;$
$-8 \leq a \leq 6.$

Ответ: $-8 \leq a \leq 6.$

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен правильный ответ	4
Получен верный ответ, но он недостаточно обоснован (например, не указано явно, что функция принимает все значения из множества $[f(1); +\infty)$) или решение содержит ошибки.	3
Верно рассмотрены отдельные случаи расположения , в результате чего получена часть верного ответа (возможно, другие случаи не рассмотрены или в них допущены ошибки).	2
Верно рассмотрены отдельные случаи, но не найдена никакая часть верного ответа	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

С6 Перед каждым из чисел 14, 15, ... ; 20 и 6, 7, ... , 10 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего от каждого из образовавшихся чисел первого набора отнимают каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 35 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение.

1. Если все числа первого набора взяты с плюсами, а второго – с минусами, то сумма максимальна и равна

$$5(14+...+20)-7(-6-...-10)=5\left(\frac{14+20}{2}\cdot 7\right)+7\left(\frac{6+10}{2}\cdot 5\right)=35\cdot 25=875$$

2. Так как предыдущая сумма оказалась нечетной, то число нечетных слагаемых в ней нечетно, причем это свойство суммы не меняется при смене знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из получающихся сумм будет нечетной, а значит, не может быть равной 0.

3. Значение 1 сумма может принять при следующей расстановке знаков у чисел:
5(–14 – 15 + 16 – 17 + 18 – 19 + 20) – 7(– 6 + 7 – 8 + 9 – 10) = $-5\cdot 11+7\cdot 8=-55+56=1$.
Ответ: 1 и 875.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены ответы на оба поставленных вопроса	4
Верно получены ответы на поставленные вопросы, но не объяснено, почему сумма не может равняться нулю	3
Верно найдены обе суммы, но без достаточных обоснований	2
Найдена одна из сумм или обе суммы, возможно неверные из-за вычислительной ошибки.	1
Решение не удовлетворяет ни одному из критериев	0

Вариант 2

Ответы на задания части 1

B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12	B13	B14
8	6	6	1840	0,25	9	-2	5	3	0,5	512	25	25	-5

Критерии оценивания заданий части 2

С1.

а) Решите уравнение cos2x – cos$x$ = 0.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[0:\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

Запишем уравнение иначе:

cos2x = cos$x$

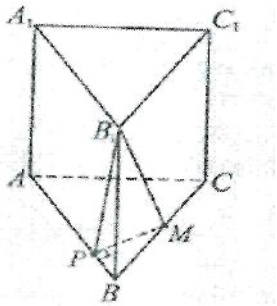
Значит, $2x = x + 2\pi k$ или $2x = -x + 2\pi k$, $k \in Z$. Следовательно, $x = 2\pi k$ или $x = \frac{2\pi k}{3}$.

Отрезку $\left[0;\frac{5\pi}{2}\right]$ принадлежат корни $0;\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}$ и 2π.

Ответ: $\frac{2\pi k}{3}, k \in Z$ Отрезку принадлежат корни $0;\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}$ и 2π.

Критерии оценивания выполнения задания С1	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

С2. Пусть *P*– проекция точки *M* на прямую *AB*, см. рисунок. Прямая *PM* перпендикулярна плоскости ABB_1 (т.к. $PM \perp AB$ и $PM \perp BB_1$).



Значит, прямая B_1P – проекция прямой B_1M на плоскость ABB_1, и угол MB_1P – угол, синус которого требуется найти. Поскольку $\angle MPB_1 = 90°$, (т.к. *PM* перпендикулярна плоскости ABB_1), и, в частности, $PM \perp B_1P$), то $\sin\angle MB_1P = \frac{PM}{B_1M}$. Из ΔBMP и ΔB_1BM имеем: $PM = BM \cdot \sin 60° = 3\sqrt{3}$,

$B_1M = \sqrt{BB_1^2 + BM^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$. Таким образам, $\sin\angle MB_1P = \frac{3\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} = 0{,}6$.

Ответ: 0,6

Критерии оценивания выполнения задания С2	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

С3. Решим каждое неравенство системы:

1) $\frac{50-25^x}{25-5^x} \ge 2$, $\frac{50-25^x-50+2\cdot 5^x}{25-5^x} \ge 0$, $\frac{5^x(5^x-2)}{5^x-25} \ge 0$, $\frac{5^x-2}{5^x-25} \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x \le 2, \\ 5^x > 25; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x \le \log_5 2, \\ x > 2. \end{cases}$

2) $\log_{x^2}(5-4x) \le 1,$

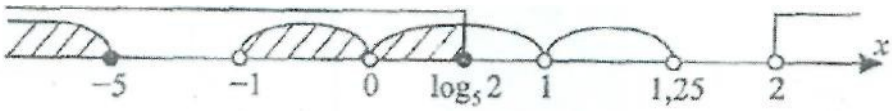
ОДЗ $\begin{cases} 5-4x > 0, \\ x \ne 0, \\ x \ne \pm 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1{,}25, \\ x \ne 0, \\ x \ne \pm 1. \end{cases}$ $\log_{x^2}(5-4x) - \log_{x^2} x^2 \le 0,$

$(x^2-1)(5-4x-x^2) \le 0, (x^2-1)(x^2+4x-5) \ge 0, (x-1)(x+1)(x-1)(x+5) \ge 0, (x-1)^2(x+1)(x+5) \ge 0,$

$x \in (-\infty; -5] \cup [-1; +\infty)$ (см. рисунок)

С учётом ОДЗ $x \in (-\infty; -5] \cup (-1;0) \cup (0;1) \cup (1;1{,}25)$.

3) Найдём общее решение системы.



$x = (-\infty; -5] \cup (-1;0) \cup (0; \log_5 2]$ (см. рисунок)

Ответ: $(-\infty; -5] \cup (-1;0) \cup (0; \log_5 2]$

Критерии оценивания выполнения задания С3	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы и в обоих неравенствах системы неравенств.	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных	0

выше	

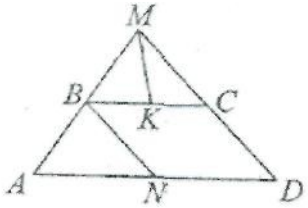
С4 Обозначим длины оснований трапеций через a и b. Средняя линия трапеции равна полусумме оснований, а расстояние между серединами диагоналей – полуразности оснований, поэтому

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2} = 9, \\ \dfrac{a-b}{2} = 6, \end{cases} \text{ откуда } a = 15,\ b = 3.$$

1) $AD = 15, BC = 3.$ Проведем $BN \| CD$ (см. рисунок) $BCDN$ – параллелограмм, $BN = CD = 16, ND = BC = 3. AN = AD - ND = 12.$ Треугольники BMC и ABN подобны, $\dfrac{BM}{AB} = \dfrac{MC}{BN} = \dfrac{BC}{AN}$, откуда $BM = BC = 3$, $MC = 4$.

По теореме косинусов для ΔBMC:

$$BM^2 = BC^2 + CM^2 - 2 \cdot BC \cdot CM \cdot \cos\angle BCM$$



$$9 = 9 + 16 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos\angle BCM, \cos\angle BCM = \frac{2}{3},$$

По теореме косинусов для ΔMCK :*:*

$$MK^2 = 16 + \frac{9}{4} - 2 \cdot 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 8 + \frac{9}{4} = \frac{41}{4}, MK = \frac{\sqrt{41}}{2}.$$

2) $AD = 3, BC = 15.$ Рассматривается аналогично, $MK = \dfrac{5\sqrt{41}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{41}}{2}$ и $\dfrac{5\sqrt{41}}{2}$.

Критерии оценивания выполнения задания С4	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за геометрической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

С5

Найдите все значения a, при каждом из которых график функции

$$f(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3| - a$$

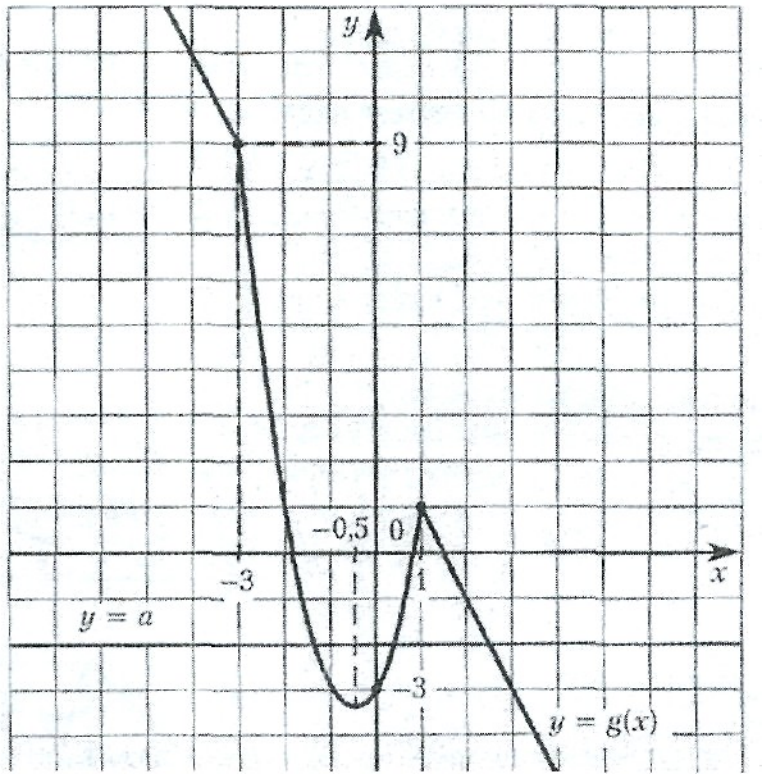
пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

Решение.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$g(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3|.$$

График функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в трех или более точках, если уравнение *g(x)* = *a* имеет более двух различных корней.



1) Если $x \le -3$ или $x \ge 1$, то
$\left|x^2+2x-3\right| = x^2+2x-3$ и $g(x) = -2x+3$.

2) Если $-3 < x < 1$, то
$\left|x^2+2x-3\right| = -x^2-2x+3$ и $g(x) = 2x^2+2x-3$.

График функции *g(x)* состоит из двух лучей и дуги параболы. На рисунке видно, что уравнение *g(x)* = *a* имеет более двух корней, только если

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) < a < g(1),$$

где $g\left(-\frac{1}{2}\right) = -3{,}5;\ g(1) = 1.$

Ответ: $-3{,}5 < a < 1$.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений *a*, 3 отличающегося от искомого конечным числом точек.	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений *a*	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества	1

знаний *a*	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

С6

На доске написано более 27, но менее 45 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно –5, средней арифметическое всех положительных из них равно 9, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно –18.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрица тельных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Решение.

Пусть среди написанных чисел k положительных, l отрицательных и m нулей. Сумма всех чисел данного набора равна количеству чисел в нем, умноженному на его среднее арифметическое, поэтому

$9k-18l+0\cdot m=-5(k+l+m).$

а) Заметим, что в левой части последнего равенства каждое слагаемое делится на 9, поэтому количество целых чисел, равное $k+l+m$, также делится на 9, так как $27<k+l+m<45$, то $k+l+m=36$. Таким образом, написано 36 чисел.

б) Приведем равенство $9k-18l=-5(k+l+m)$ к виду $13l=14k+5m$. Так как $m\geq 0$, то $l\geq\frac{14}{13}k>k.$ Следовательно, отрицательных чисел больше, чем положительных,

в) *(оценка)* Подставим $k+l+m=36$ в правую часть равенства $9k-18l=-5(k+l+m):9k-18l=-180,$ откуда $k=2l-20$. Так как $k+l\leq 36$ получаем: $3l-20\leq 36,$ $3(l\leq 56)$, $l\leq 18,$ $k=2l-20\leq 16$, то есть положительных чисел не более 16.

в) *(пример)* Приведем пример, когда положительных чисел ровно 16. Пусть на доске 16 раз написано число 9, 18 раз написано число –18 и два раза написан 0. Тогда $\frac{9\cdot 16-18\cdot 18}{36}=\frac{144-324}{36}=-5$ и указанный набор удовлетворяет всем условиям задачи.

Ответ: а) 36; б) отрицательных; в) 16.

Предполагаемые критерии проверки решений данной задачи таковы.

Содержание критерия	Балл
Верно выполнены: а), б), в) (пример), в) (оценка).	4
Верно выполнены три пункта из четырех: а), б), в) (пример), в) (оценка).	3
Верно выполнены два пункта из четырех: а), б), в) (пример), в) (оценка).	2
Верно выполнен один пункт из четырех: а), б), в) (пример), в) (оценка)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечислен-ных выше.	0