

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике даётся 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 20 заданий. Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (B1–B14) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1–C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий вы сможете вернуться, если у вас останется время.

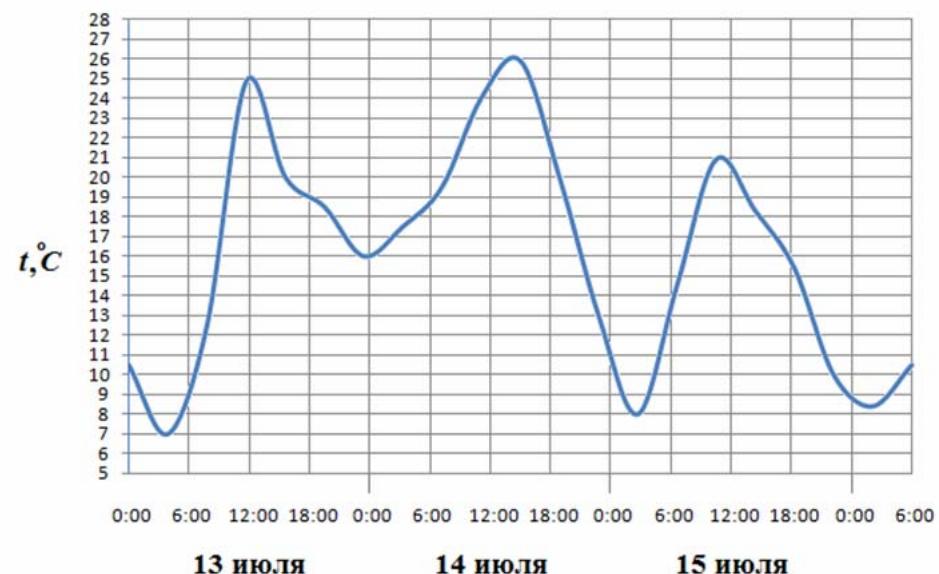
Желаем успеха!

Часть 1

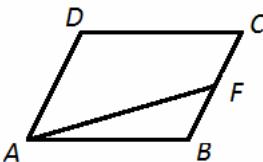
Ответом к заданиям этой части (B1–B14) является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

B1 Мобильный телефон стоил 8400 рублей. Через некоторое время цену на эту модель снизили на 6300 рублей. На сколько процентов была снижена цена?

B2 На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток. По горизонтали указывается дата и время, по вертикали – значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей температурой воздуха 13 июня. Ответ дайте в градусах Цельсия.



B3 Площадь параллелограмма равна 20. Точка F – середина стороны BC. Найдите площадь трапеции AFCD.

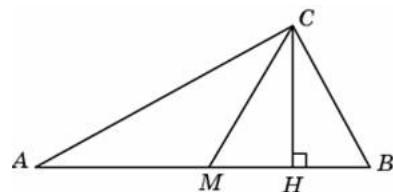


B4 В таблице даны тарифы на услуги трёх фирм такси. Предполагается поездка длительностью 70 минут. Нужно выбрать фирму, в которой заказ будет стоить дешевле всего. Сколько рублей будет стоить этот заказ?

Фирма такси	Подача машины	Продолжительность и стоимость минимальной поездки	Стоимость 1 минуты сверх продолжительности минимальной поездки
A	250 руб.	Нет	12 руб.
Б	Бесплатно	15 мин. — 300 руб.	18 руб.
В	200 руб.	10 мин. — 200 руб.	14 руб.

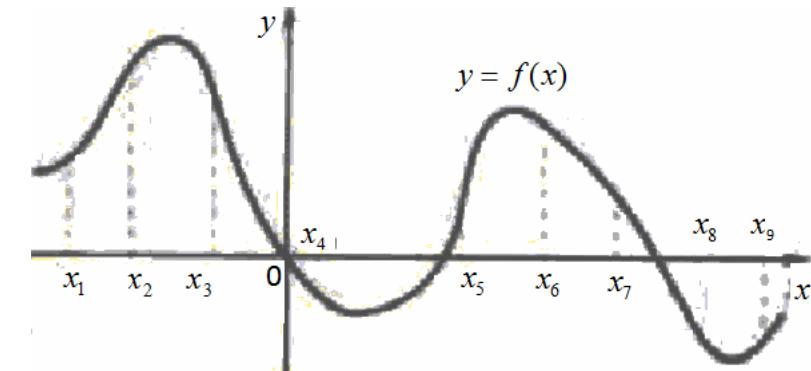
B5 Найдите корень уравнения $\log_{81} 3^{2x-1} = 2$

B6 Острые углы прямоугольного треугольника равны 62° и 28° . Найдите угол между высотой и медианой, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

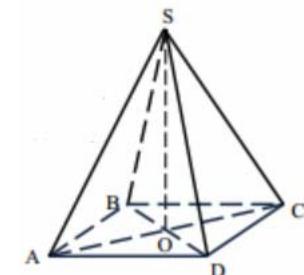


B7 Найдите значение выражения $(\sqrt{32} - \sqrt{50}) \cdot \sqrt{8}$

B8 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены девять точек на оси абсцисс: x_1, x_2, \dots, x_9 . В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?

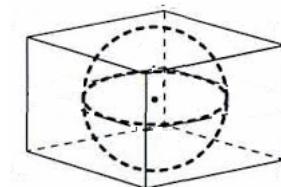


B9 В правильной четырехугольной пирамиде SABCD точка O – центр основания, S – вершина, $SO=30$, $SA=34$. Найдите длину отрезка AC.



B10 В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что решка не выпадет ни разу.

B11 Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 16. Найдите его объем.



B12 Независимое агентство намерено ввести рейтинг R новостных изданий на основе показателей информативности In, оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый показатель оценивается целыми числами от 1 до 6. Аналитик, составляющий формулу, считает, что объективность публикаций ценится вдвое, а информативность – вчетверо дороже, чем оперативность. В результате, формула примет вид

$$R = \frac{4In + Op + 2Tr}{A}$$

Каким должно быть число А, чтобы издание, у которого все показатели наибольшие, получило рейтинг 1?

B13 Моторная лодка прошла против течения реки 135 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 часов меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 12 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

B14 Найдите наименьшее значение функции $y = 19 + 192x - x^3$ на отрезке $[-8; 8]$

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 а) Решите уравнение $25^{\frac{x-3}{2}} - 12 \cdot 5^{x-2} + 7 = 0$

б) Найдите все корни на промежутке $\left(2; \frac{8}{3}\right)$

C2 Радиус основания конуса равен 8, а его высота равна 15. Плоскость сечения содержит вершину конуса и хорду основания, длина которой равна 14. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{7-2x}(x+6) \leq 0 \\ x - \frac{x-3}{x+6} - \frac{x^2 + 27x + 90}{x^2 + 8x + 12} \leq -1 \end{cases}$$

C4 В окружности проведены хорды PQ и CD, причем PQ=PD=CD=12, CQ=4. Найдите CP.

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$|\sin^2 x + 2\cos x + a| = \sin^2 x + \cos x - a$$

имеет на промежутке $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ единственный корень.

C6 Каждое из чисел a_1, a_2, \dots, a_{350} равно 1, 2, 3 или 4. Обозначим

$$S_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_{350}, \quad S_2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{350}^2,$$

$$S_3 = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{350}^3, \quad S_4 = a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_{350}^4$$

Известно, что $S_1 = 569$.

а) Найдите S_4 , если известно, что $S_2 = 1307$, $S_3 = 3953$.

б) Может ли $S_4 = 4857$?

в) Пусть $S_4 = 4785$. Найдите все значения, которые может принимать S_2 .

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом**C1**

а) Решите уравнение $25^{x-\frac{3}{2}} - 12 \cdot 5^{x-2} + 7 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(2; \frac{8}{3}\right)$.

Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение: $5 \cdot 25^{x-2} - 12 \cdot 5^{x-2} + 7 = 0$.

Пусть $t = 5^{x-2}$, тогда уравнение записывается в виде $5t^2 - 12t + 7 = 0$, откуда $t = 1$ или $t = \frac{7}{5}$.

При $t = 1$ получим: $5^{x-2} = 1$, откуда $x = 2$.

При $t = \frac{7}{5}$ получим: $5^{x-2} = \frac{7}{5}$, откуда $x = \log_5 35$.

б) Корень $x = 2$ не принадлежит промежутку $\left(2; \frac{8}{3}\right)$. Поскольку $2 < \log_5 7 + 1 = \log_5 35$ и $3(\log_5 7 + 1) = \log_5 343 + 3 < \log_5 625 + 3 = 7 < 8$, корень $x = \log_5 35$ принадлежит промежутку $\left(2; \frac{8}{3}\right)$.

Ответ: а) 2; $\log_5 35$; б) $\log_5 35$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

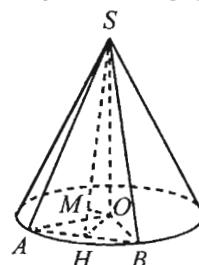
C2 Радиус основания конуса равен 8, а его высота равна 15. Плоскость сечения содержит вершину конуса и хорду основания, длина которой равна 14. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.

Решение.

Сечение конуса плоскостью, содержащей его вершину S и хорду $AB = 14$, — треугольник ASB .

В равных прямоугольных треугольниках SOA и SOB , где O — центр основания конуса, $OA = OB = 8$, $SO = 15$, откуда $SA = SB = \sqrt{OB^2 + SO^2} = 17$.

Пусть SH — высота и медиана равнобедренного треугольника ASB , $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = 4\sqrt{15}$. Тогда отрезок OH — высота и медиана равнобедренного треугольника AOB , $OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{15}$.



Прямые SH и OH перпендикулярны прямой AB , поэтому плоскость SOH перпендикулярна плоскости ASB . Следовательно, расстояние от точки O до плоскости ASB равно высоте OM прямоугольного треугольника SOH , проведённой к гипотенузе: $OM = \frac{OH \cdot SO}{SH} = \frac{15}{4}$.

Ответ: $\frac{15}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3**Решите систему неравенств**

$$\begin{cases} \log_{7-2x}(x+6) \leq 0, \\ x - \frac{x-3}{x+6} - \frac{x^2+27x+90}{x^2+8x+12} \leq -1. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы: $\log_{7-2x}(x+6) \leq 0$.

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0 < 7 - 2x < 1$.

$$\begin{cases} \log_{7-2x}(x+6) \leq 0, \\ 0 < 7 - 2x < 1; \end{cases} \begin{cases} x+6 \geq 1, \\ 3 < x < \frac{7}{2}, \end{cases} \text{ откуда } 3 < x < \frac{7}{2}.$$

Второй случай: $7 - 2x > 1$.

$$\begin{cases} \log_{7-2x}(x+6) \leq 0, \\ 7 - 2x > 1; \end{cases} \begin{cases} 0 < x+6 \leq 1, \\ x < 3, \end{cases} \text{ откуда } -6 < x \leq -5.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-6 < x \leq -5$; $3 < x < \frac{7}{2}$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x - \frac{x-3}{x+6} - \frac{x^2+27x+90}{x^2+8x+12} \leq -1; x - \frac{x-3}{x+6} - \frac{19x+78}{(x+6)(x+2)} \leq 0;$$

$$\frac{x(x+6)(x+2) - (x+6)(x+12)}{(x+6)(x+2)} \leq 0; \frac{(x+4)(x-3)}{(x+2)} \leq 0, \text{ где } x \neq -6.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x < -6$; $-6 < x \leq -4$; $-2 < x \leq 3$.

3. Решение исходной системы неравенств: $-6 < x \leq -5$.

Ответ: $(-6; -5]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

C4 В окружности проведены хорды PQ и CD , причём $PQ = PD = CD = 12$, $CQ = 4$. Найдите CP .

Решение.

Возможны два случая. Первый случай: точки D и Q лежат в разных полуплоскостях относительно прямой CP (рис. 1), тогда $\angle PQC = 180^\circ - \angle PDC$.

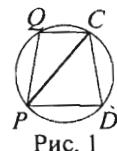


Рис. 1

В треугольниках PQC и PDC

$$PC^2 = PQ^2 + QC^2 - 2 \cdot PQ \cdot QC \cdot \cos \angle PQC = 160 + 96 \cdot \cos \angle PDC;$$

$$PC^2 = PD^2 + DC^2 - 2 \cdot PD \cdot DC \cdot \cos \angle PDC = 288 - 288 \cdot \cos \angle PDC,$$

откуда $\cos \angle PDC = \frac{1}{3}$; $PC = 8\sqrt{3}$.

Второй случай: точки D и Q лежат в одной полуплоскости относительно прямой CP (рис. 2), тогда $\angle PQC = \angle PDC$.

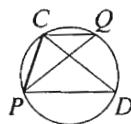


Рис. 2

В треугольниках PQC и PDC

$$PC^2 = PQ^2 + QC^2 - 2 \cdot PQ \cdot QC \cdot \cos \angle PQC = 160 - 96 \cdot \cos \angle PDC;$$

$$PC^2 = PD^2 + DC^2 - 2 \cdot PD \cdot DC \cdot \cos \angle PDC = 288 - 288 \cdot \cos \angle PDC,$$

откуда $\cos \angle PDC = \frac{2}{3}$; $PC = 4\sqrt{6}$.

Ответ: $4\sqrt{6}$ или $8\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

C5

Найдите все значения a , при которых уравнение

$$|\sin^2 x + 2\cos x + a| = \sin^2 x + \cos x - a$$

имеет на промежутке $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ единственный корень.

Решение.

Рассмотрим два случая.

Первый случай: $\sin^2 x + 2\cos x + a \geq 0$. Исходное уравнение примет вид

$$\sin^2 x + 2\cos x + a = \sin^2 x + \cos x - a; \cos x = -2a.$$

Последнее уравнение имеет на промежутке $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ единственный корень при

$-1 \leq -2a < 0$, откуда $0 < a \leq \frac{1}{2}$. Подставив $\cos x = -2a$ в неравенство $\sin^2 x + 2\cos x + a \geq 0$, получим: $1 - 4a^2 - 4a + a \geq 0$, откуда $-1 \leq a \leq \frac{1}{4}$.

В этом случае уравнение $\cos x = -2a$ при условии $\sin^2 x + 2\cos x + a \geq 0$ имеет на промежутке $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ единственный корень $x = \arccos(-2a)$ при

$0 < a \leq \frac{1}{4}$ и не имеет на промежутке $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ корней при $a \leq 0$ и при $a > \frac{1}{4}$.

Второй случай: $\sin^2 x + 2\cos x + a < 0$. Исходное уравнение примет вид

$$\sin^2 x + 2\cos x + a = -\sin^2 x - \cos x + a; 2\sin^2 x + 3\cos x = 0;$$

$$(2\cos x + 1)(\cos x - 2) = 0; \cos x = -\frac{1}{2}.$$

Последнее уравнение имеет на промежутке $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ единственный корень

$x = \frac{2\pi}{3}$. Подставив $x = \frac{2\pi}{3}$ в неравенство $\sin^2 x + 2\cos x + a < 0$, получим:

$$\frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} + a < 0, \text{ откуда } a < \frac{1}{4}.$$

В этом случае уравнение $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$ при условии $\sin^2 x + 2\cos x + a < 0$ имеет на промежутке $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ единственный корень

$$x = \frac{2\pi}{3} \text{ при } a < \frac{1}{4} \text{ и не имеет на промежутке } \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right] \text{ корней при } a \geq \frac{1}{4}.$$

Уравнение $|\sin^2 x + 2\cos x + a| = \sin^2 x + \cos x - a$ на промежутке $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$:

- при $a \leq 0$ имеет единственный корень $x = \frac{2\pi}{3}$;
- при $0 < a < \frac{1}{4}$ имеет два различных корня $x = \frac{2\pi}{3}$ и $x = \arccos(-2a)$;
- при $a = \frac{1}{4}$ имеет единственный корень $x = \frac{2\pi}{3}$;
- при $a > \frac{1}{4}$ не имеет корней.

Ответ: $(-\infty; 0]; \frac{1}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены оба значения: $a = 0$, $a = \frac{1}{4}$. Ответ отличается от верного исключением точки $a = 0$	3
Обоснованно получены оба значения: $a = 0$, $a = \frac{1}{4}$	2
Верно найдено одно или два из значений $a = 0$ или $a = \frac{1}{4}$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Каждое из чисел a_1, a_2, \dots, a_{350} равно 1, 2, 3 или 4. Обозначим

$$S_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_{350}, S_2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{350}^2,$$

$$S_3 = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{350}^3, S_4 = a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_{350}^4.$$

Известно, что $S_1 = 569$.

а) Найдите S_4 , если еще известно, что $S_2 = 1307$, $S_3 = 3953$.

б) Может ли $S_4 = 4857$?

в) Пусть $S_4 = 4785$. Найдите все значения, которые может принимать S_2 .

Решение.

Пусть количества единиц, двоек, троек и четвёрок среди a_1, a_2, \dots, a_{350} равны m_1, m_2, m_3, m_4 соответственно. Тогда $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 350$ и $m_1 + 2m_2 + 3m_3 + 4m_4 = 569$.

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

а) По условию

$$S_1 = m_1 + 2m_2 + 3m_3 + 4m_4 = 569, S_2 = m_1 + 4m_2 + 9m_3 + 16m_4 = 1307,$$

$$S_3 = m_1 + 8m_2 + 27m_3 + 64m_4 = 3953, \text{ где } m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 350.$$

Решая систему четырёх линейных уравнений с четырьмя неизвестными, находим: $m_1 = 236$, $m_2 = 54$, $m_3 = 15$, $m_4 = 45$. Значит,

$$S_4 = 236 + 16 \cdot 54 + 81 \cdot 15 + 256 \cdot 45 = 13835.$$

б) Если $S_4 = m_1 + 16m_2 + 81m_3 + 256m_4 = 4857$, где $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 350$, то $15m_2 + 80m_3 + 255m_4 = 4507$. В последнем равенстве левая часть кратна 5, а правая — нет, поэтому S_4 не может быть равным 4857.

в) Если $S_4 = m_1 + 16m_2 + 81m_3 + 256m_4 = 4785$, где $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 350$, то $15m_2 + 80m_3 + 255m_4 = 4435$.

Кроме того, поскольку $m_1 + 2m_2 + 3m_3 + 4m_4 = 569$, получаем:

$$m_2 + 2m_3 + 3m_4 = 219; 15m_2 + 30m_3 + 45m_4 = 3285.$$

Вычтем из первого полученного равенства второе: $50m_3 + 210m_4 = 1150$; $5m_3 + 21m_4 = 115$. Значит, m_4 делится на 5 и может равняться только 0 или 5.

При $m_4 = 0$ получаем: $m_3 = \frac{115 - 21m_4}{5} = 23$, $m_2 = 219 - 2m_3 - 3m_4 = 173$, $m_1 = 350 - m_2 - m_3 - m_4 = 154$, $S_2 = m_1 + 4m_2 + 9m_3 + 16m_4 = 1053$.

При $m_4 = 5$ получаем: $m_3 = \frac{115 - 21m_4}{5} = 2$, $m_2 = 219 - 2m_3 - 3m_4 = 200$, $m_1 = 350 - m_2 - m_3 - m_4 = 143$, $S_2 = m_1 + 4m_2 + 9m_3 + 16m_4 = 1041$.

Ответ: а) 13835; б) нет; в) 1041 или 1053.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно выполнены все пункты: а, б и в	4
Верно получен один из следующих результатов: — все из перечисленных в критериях на 1 балл; — обоснованное решение одного из пунктов а или б и обоснованное решение п. в	3
Верно получен один из следующих результатов: — выполнены два из перечисленных в критериях на 1 балл; — обоснованное решение п. в	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. а; — обоснованное решение п. б; — получено одно из искомых значений в п. в	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4